

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

ΠΡΩΤΑΡΧΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Τα αξιώματα είναι προτάσεις που δεχόμαστε ως αληθείς, χωρίς απόδειξη:

- ✓ Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- ✓ Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που ανήκει σε αυτήν.
- ✓ Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις χωρίς κενά.
- ✓ Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει μοναδικό μέσο.
- ✓ Κάθε γωνία έχει μία μόνο διχοτόμο.

ΓΩΝΙΕΣ

Ορισμός: Το γεωμετρικό σχήμα που αποτελείται από δύο ημιευθείες με κοινή αρχή, ονομάζεται γωνία με πλευρές τις ημιευθείες αυτές και κορυφή τη κοινή αρχή.

- **Ευθεία** γωνία ονομάζεται η γωνία που οι πλευρές της είναι αντικείμενες ημιευθείες.
- **Μηδενική** γωνία ονομάζεται η γωνία που οι πλευρές της ταυτίζονται.
- **Κυρτή** γωνία ονομάζεται το μέρος του επιπέδου που αποτελείται από μία γωνία και το εσωτερικό της.
 - ✓ Τα σημεία μιας γωνίας, που δεν ανήκουν στις πλευρές της λέγονται εσωτερικά σημεία της και αποτελούν το εσωτερικό της γωνίας.
- **Μη Κυρτή** γωνία ονομάζεται το μέρος του επιπέδου που αποτελείται από μία γωνία και το εξωτερικό της.
 - ✓ Τα σημεία μιας γωνίας, που δεν ανήκουν στη γωνία λέγονται εξωτερικά σημεία της και αποτελούν το εξωτερικό της γωνίας.
- **Πλήρης** γωνία ονομάζεται η μη κυρτή γωνία που αντιστοιχεί στη μηδενική γωνία.

ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

- **Διχοτόμος** μιας γωνίας \hat{xOy} ονομάζεται μία ημιευθεία οδ που βρίσκεται στο εσωτερικό της και τέτοια ώστε: $y\hat{O}d = d\hat{O}x = \frac{y\hat{O}x}{2}$.
Η διχοτόμος δηλαδή χωρίζει μία κυρτή γωνία σε δύο άλλες ίσες κυρτές γωνίες.
- **Ορθή** γωνία (90°): Η διχοτόμος μιας ευθείας γωνίας τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες που η κάθε μία ονομάζεται ορθή γωνία. Οι πλευρές της ορθής γωνίας είναι κάθετες και για να τις συμβολίζουμε χρησιμοποιούμε το σύμβολο \perp π.χ $AB \perp BG$.
 - ✓ Δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους σχηματίζουν 4 ορθές γωνίες.
- **Οξεία** γωνία ($<90^\circ$): Ονομάζεται κάθε γωνία μικρότερη της ορθής.
- **Αμβλεία** γωνία ($>90^\circ$): Ονομάζεται κάθε γωνία μεγαλύτερη της ορθής.
- **Εφεξής ή διαδοχικές** γωνίες:
 - ❖ **(Ορισμός 1)** Ονομάζονται οι γωνίες που έχουν μία κοινή πλευρά και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία ή
 - ❖ **(Ορισμός 2)** Ονομάζονται οι γωνίες που έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής.
- **Κατακορυφήν** γωνίες: Ονομάζονται οι γωνίες των οποίων οι πλευρές της μίας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης.
- **Παραπληρωματικές** γωνίες: Ονομάζονται δύο γωνίες όταν το άθροισμα τους είναι ίσο με μία ευθεία γωνία (δηλαδή 180°).
 - ✓ Κάθε μία από αυτές τις γωνίες ονομάζεται παραπλήρωμα της άλλης.
- **Συμπληρωματικές** γωνίες: Ονομάζονται δύο γωνίες όταν το άθροισμα τους είναι ίσο με μία ορθή γωνία (δηλαδή 90°).
 - ✓ Κάθε μία από αυτές τις γωνίες ονομάζεται συμπλήρωμα ή συμπληρωματική της άλλης.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

- ◆ Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
- ◆ Οι διχοτόμοι δυο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
- ◆ Η προέκταση της διχοτόμου μιας γωνίας είναι διχοτόμος και της κατακορυφήν της γωνίας.
- ◆ Δυο εφεξής και παραπληρωματικές ευθείες έχουν τις μη κοινές πλευρές τους αντικείμενες ημιευθείες και αντιστρόφως.

ΚΥΚΛΟΣ

Ορισμός: Κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ λέγεται το επίπεδο σχήμα του οποίου όλα τα σημεία απέχουν από το κέντρο O σταθερή απόσταση ίση με ρ .

- ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα μήκους ρ ονομάζεται ακτίνα του κύκλου και το σταθερό σημείο O κέντρο του.
- ✓ Συμβολίζουμε με (O, ρ) ένα κύκλο κέντρου O και ακτίνας ρ .
- ✓ Κάθε σημείο έστω N για το οποίο είναι $ON < \rho$ ονομάζεται εσωτερικό σημείο του κύκλου.
- ✓ Κάθε σημείο έστω N για το οποίο είναι $ON > \rho$ ονομάζεται εξωτερικό σημείο του κύκλου.
- ✓ Κυκλικό δίσκο ονομάζουμε το κύκλο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία.
- ✓ Χορδή κύκλου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο τυχαία σημεία ενός κύκλου.
- ✓ Κάθε χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου ονομάζεται διάμετρος του κύκλου.
- ✓ Διάμετρος του κύκλου είναι η μεγαλύτερη χορδή και ισούται με δύο ακτίνες.
- ✓ Τα άκρα μιας διαμέτρου ονομάζονται αντιδιαμετρικά σημεία.
- ✓ Τόξο κύκλου ονομάζεται το μέρος του κύκλου που βρίσκεται μεταξύ δυο σημείων του κύκλου.
- ✓ Απόστημα χορδής του κύκλου είναι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τη χορδή.
- ✓ Το απόστημα είναι πάντα κάθετο στη χορδή και διέρχεται από το μέσο της.
- ✓ Κάθε διάμετρος του κύκλου τον χωρίζει σε δύο ίσα τόξα.
- ✓ Δυο κάθετες διαμέτροι τον διαιρούν σε τέσσερα ίσα τόξα.

ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ

Ορισμός: Μία γωνία ονομάζεται επίκεντρη, όταν η κορυφή της είναι το κέντρο ενός κύκλου.

ΣΧΕΣΗ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΟΥ ΤΟΞΟΥ

- ✓ Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους, ίσες επίκεντρες γωνίες βαίνουν σε ίσα τόξα και αντιστρόφως.
- ✓ **Θεώρημα:** Δυο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα αν και μόνον αν οι επίκεντρες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες.
- ✓ Κάθε τόξο έχει ένα μόνο μέσο.

ΜΕΤΡΑ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΣ

- Ο κύκλος έχει μέτρο 360°
- Το ημικύκλιο έχει μέτρο 180°
- Το τεταρτοκύκλιο έχει μέτρο 90°
- Το μηδενικό τόξο έχει μέτρο 0°
- Η πλήρης γωνία έχει μέτρο 360°
- Η ευθεία γωνία έχει μέτρο 180°
- Η ορθή γωνία έχει μέτρο 90°
- Η μηδενική γωνία έχει μέτρο 0°

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

- Μια κλειστή τεθλασμένη γραμμή ονομάζεται πολύγωνο.
- Το πολύγωνο με τρεις κορυφές ονομάζεται τρίγωνο, με τέσσερις τετράπλευρο με πέντε πεντάγωνο και γενικά με n πλευρές n - γωνο.
- Κάθε τμήμα με άκρα δυο μη διαδοχικές κορυφές ενός πολυγώνου ονομάζεται διαγώνιος του πολυγώνου.
- Γωνίες πολυγώνου λέγονται οι γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές του.
- Εξωτερική γωνία πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Να χαρακτηρίσετε με (Σ)ωστό ή (Λ)άθος τις προτάσεις:

1. Το μέτρο ενός τόξου μπορεί να είναι και αρνητικός αριθμός.
2. Το μέτρο ενός τόξου μπορεί να είναι ο μίρες.
3. Από ένα σημείο του επιπέδου διέρχονται άπειρες ευθείες.
4. Δύο εφεξής γωνίες είναι πάντα παραπληρωματικές.
5. Υπάρχουν κατακορυφήν γωνίες που είναι άνισες.
6. Από ένα σημείο διέρχεται μία μόνο ευθεία.
7. Κάθε σημείο μιας ευθείας ε τη χωρίζει σε δύο αντικείμενες ημιευθείες.
8. Δύο γωνίες με κοινή κορυφή λέγονται κατακορυφήν γωνίες.
9. Δύο τόξα με το ίδιο μέτρο είναι πάντοτε ίσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Σχετικά με τις πλευρές του ένα τρίγωνο λέγεται:

- **Ισοσκελές**, όταν έχει δύο πλευρές ίσες
- **Ισόπλευρο**, όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες
- **Σκαληνό**, όταν έχει όλες του τις πλευρές άνισες

Σχετικά με τις γωνίες του ένα τρίγωνο λέγεται:

- **Ορθογώνιο**, όταν έχει μία γωνία ορθή
- **Αμβλυγώνιο**, όταν έχει μια γωνία αμβλεία
- **Οξυγώνιο**, όταν έχει και τις τρεις γωνίες του οξείες

Ερώτηση

Σύμφωνα με τη παραπάνω ταξινόμηση, ποια είδη τριγώνων προκύπτουν;

Απάντηση

1. Το ισόπλευρο τρίγωνο
2. Το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο
3. Το αμβλυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο
4. Το οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο
5. Το ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο
6. Το αμβλυγώνιο σκαληνό τρίγωνο
7. Το οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Κύρια στοιχεία τριγώνου, είναι οι πλευρές και οι γωνίες του τριγώνου.

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου, είναι οι διάμεσοι, τα ύψη και οι διχοτόμοι του.

- **Διάμεσος** ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
- **Ύψος** τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.
- **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από τη κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά.

Ερωτήσεις

1. Ποια είναι τα άκρα μιας διαμέσου, ενός ύψους και μιας διχοτόμου;
2. Πώς συμβολίζονται οι πλευρές ενός τριγώνου;
3. Πως συμβολίζονται οι διάμεσοι τα ύψη και οι διχοτόμοι;

Απαντήσεις

1.
 - ✓ Η διάμεσος έχει άκρα μια κορυφή και το μέσο της απέναντι πλευράς.
 - ✓ Το ύψος έχει άκρα μια κορυφή και τη ορθή προβολή της κορυφής στην απέναντι πλευρά.
 - ✓ Η διχοτόμος έχει άκρα μια κορυφή και το σημείο τομής της διχοτόμου αυτής με την απέναντι πλευρά.
2.
 - ✓ Απέναντι από τη κορυφή Α αντιστοιχεί η απέναντι πλευρά α
 - ✓ Απέναντι από τη κορυφή Β αντιστοιχεί η απέναντι πλευρά β
 - ✓ Απέναντι από τη κορυφή Γ αντιστοιχεί η απέναντι πλευρά γ
3.
 - ✓ Η διάμεσος που αντιστοιχεί στη κορυφή Α συμβολίζεται με μ_α όπου ο δείκτης α συμβολίζει την απέναντι πλευρά. Ομοίως συμβολίζονται οι διάμεσοι μ_β και μ_γ που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα.
 - ✓ Το ύψος που αντιστοιχεί στη κορυφή Α συμβολίζεται με u_α όπου ο δείκτης α συμβολίζει την απέναντι πλευρά. Ομοίως συμβολίζονται τα ύψη u_β και u_γ που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα.
 - ✓ Η διχοτόμος που αντιστοιχεί στη κορυφή Α συμβολίζεται με δ_α όπου ο δείκτης α συμβολίζει την απέναντι πλευρά. Ομοίως συμβολίζονται οι διχοτόμοι δ_β και δ_γ που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα.

Εφαρμογή: Να φέρετε τα ύψη αμβλυγώνιου τριγώνου.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Ορισμός: Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις απέναντι των ίσων πλευρών γωνίες ίσες

1^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Γ-Π)

Αν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μία προς μία με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΑ

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:
 - Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
 - Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.
2. Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.
3. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
4. Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Τα παραπάνω πορίσματα αποδεικνύονται με τη βοήθεια του 1^{ου} κριτηρίου ισότητας τριγώνων.

2^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Γ-Π-Γ)

Αν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μία πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μία προς μία ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3^ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων (Π-Π-Π)

Αν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΑ

1. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

2. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.
3. Αν οι χορδές δυο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.
4. Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Τα παραπάνω πορίσματα αποδεικνύονται με τη βοήθεια του 3^{ου} κριτηρίου ισότητας τριγώνων.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν δυο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση μία προς μία και δύο γωνίες ίσες (όχι κατ' ανάγκη τις προσκείμενες), θα είναι ίσα. Γιατί; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα, ίσες μία προς μία.

ΣΧΟΛΙΑ

1. Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.
2. Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μία χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.
3. Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματα τους είναι ίσα.
4. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Τα παραπάνω πορίσματα και θεωρήματα αποδεικνύονται με τη βοήθεια των κριτηρίων ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Ορισμός: Γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα.

Ερωτήσεις

1. Ποιους βασικούς γεωμετρικούς τόπους γνωρίζεται;
2. Ποια χαρακτηριστική ιδιότητα ο καθένας από αυτούς;

Απαντήσεις

1.
 - Κύκλος
 - Μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος
 - Διχοτόμος μίας γωνίας
2.
 - Όλα τα σημεία του κύκλου **και μόνον αυτά** έχουν την (κοινή χαρακτηριστική) ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση (ακτίνα κύκλου) από ένα σταθερό σημείο (κέντρο του κύκλου).
 - Όλα τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος **και μόνον αυτά** έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
 - Όλα τα σημεία της διχοτόμου μίας γωνίας **και μόνον αυτά** έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.

ΑΝΙΣΩΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

Σχέση εξωτερικών και εσωτερικών γωνιών:

- ✓ Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη καθεμιάς των απέναντι εσωτερικών γωνιών.
- ✓ Αν σε ένα τρίγωνο δύο γωνίες του είναι ίσες, τότε και οι πλευρές του που βρίσκονται απέναντι από αυτές τις γωνίες θα είναι ίσες.

ΣΧΟΛΙΑ

- ✓ Κάθε τρίγωνο μπορεί να έχει το πολύ μια αμβλεία ή ορθή γωνία.
- ✓ Αν οι τρεις γωνίες ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Σχέσεις ανισότητας πλευρών και γωνιών τριγώνου:

- ✓ Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία και αντιστρόφως.
- ✓ Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

ΣΧΟΛΙΑ

- ✓ Η μεγαλύτερη πλευρά ενός αμβλυγωνίου τριγώνου είναι αυτή που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία γωνία του.
- ✓ Η μεγαλύτερη πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι η υποτείνουσα.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

Θεωρούμε το κύκλο (O, ρ) , όπου O το κέντρο και ρ η ακτίνα του κύκλου, μια ευθεία ε και την απόσταση δ του κέντρου του κύκλου από την ευθεία ε .

- Η ευθεία που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με ένα κύκλο (O, ρ) ονομάζεται εξωτερική ευθεία του κύκλου (συνθήκη: $\delta > \rho$).
- Η ευθεία που έχει μόνο ένα κοινό σημείο με ένα κύκλο (O, ρ) ονομάζεται εφαπτομένη του κύκλου. (Το κοινό σημείο ονομάζεται σημείο επαφής) (συνθήκη: $\delta = \rho$)
 - ✓ Αν μια ευθεία ε εφάπτεται σε κύκλο (O, ρ) στο σημείο M , τότε η ακτίνα OM είναι κάθετη στην ευθεία ε .
 - ✓ Τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα που άξονται από σημείο εκτός κύκλου είναι ίσα.
- Η ευθεία που έχει δύο κοινά σημεία με ένα κύκλο (O, ρ) ονομάζεται τέμνουσα του κύκλου. Όταν η τέμνουσα διέρχεται από το κέντρο του κύκλου ονομάζεται διακεντρική ευθεία του κύκλου. (συνθήκη: $\delta < \rho$)

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

Ορισμός: Διάκεντρος δύο κύκλων ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα τα κέντρα των δύο κύκλων.

Έστω οι κύκλοι (O_1, ρ_1) , (O_2, ρ_2) με $\rho_1 > \rho_2$.

Συμβολίζουμε τη διάκεντρο των δύο κύκλων που είναι η απόσταση O_1, O_2 με d .

Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία

A. Κάθε κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου αν και μόνον αν

$$d > \rho_1 + \rho_2$$

B. Κάθε κύκλος βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου αν και μόνον αν

$$d < \rho_1 - \rho_2$$

Εφαπτόμενοι κύκλοι

A. Οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου αν και μόνο αν

$$d = \rho_1 + \rho_2$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

B. Οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εσωτερικό του άλλου αν και μόνο αν

$$d = \rho_1 - \rho_2$$

Στη περίπτωση αυτή λέμε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

Σχόλιο

Η ευθεία που είναι κάθετη στη διάκεντρο στο κοινό σημείο των δύο εφαπτόμενων κύκλων ονομάζεται κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων.

Τεμνόμενοι κύκλοι

A. Οι κύκλοι τέμνονται (έχουν δηλαδή δύο κοινά σημεία) αν και μόνο αν

$$\rho_1 - \rho_2 < d < \rho_1 + \rho_2$$

Σχόλιο

Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Να χαρακτηρίσετε με (Σ)ωστό ή (Λ)άθος τις προτάσεις:

1. Ένα ισοσκελές τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο.
2. Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει δύο γωνίες ορθές.
3. Έστω κύκλος (O,R) , μια ευθεία ϵ και δ η απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ϵ , τότε:
 - α) Αν $\delta > R$ η ϵ λέγεται εξωτερική ευθεία του κύκλου.
 - β) Αν $\delta = R$ η ϵ λέγεται εσωτερική ευθεία του κύκλου.
 - γ) Αν $\delta < R$ η ϵ λέγεται εφαπτομένη του κύκλου.
4. Αν σε ισοσκελές τρίγωνο δύο γωνίες του είναι συμπληρωματικές, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.
5. Το ίδιο τρίγωνο μπορεί να έχει και μια αμβλεία και μια οξεία γωνία.
6. Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετη της διακέντρου.
7. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του.
8. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μικρότερη γωνία.
9. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά έχουν κοινά σημεία.
10. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά δεν έχουν κοινή εφαπτομένη.
11. Αν δύο κύκλοι ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου τότε έχουν μία και μόνο κοινή εφαπτομένη.
12. Δυο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι πάντοτε ίσα.
13. Δυο σκαληνά τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι πάντοτε ίσα.
14. Δυο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι πάντοτε ίσα.
15. Αν σε ένα τρίγωνο το ύψος είναι και διχοτόμος τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Ορισμός: Δύο ευθείες ϵ_1, ϵ_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες

Σχόλια

- ❖ Δύο ευθείες που δεν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο λέγονται ασύμβατες.
- ❖ Αν οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 είναι παράλληλες συμβολίζουμε με $\epsilon_1 // \epsilon_2$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

- Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.
- Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.
- Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, τότε σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Σχόλια

- ❖ Ισχύουν και τα αντίστροφα των παραπάνω ιδιοτήτων.
- ❖ Όταν έχω δύο οποιοσδήποτε ευθείες παράλληλες ή τεμνόμενες οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία τότε σχηματίζονται οι εντός εναλλάξ, οι εντός και επί τα αυτά μέρη και οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες, οι οποίες ούτε ίσες είναι ούτε παραπληρωματικές. Αν είναι είτε οι εντός εναλλάξ είτε οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες τότε οι ευθείες είναι παράλληλες και αντίστροφα. Αν είναι οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές τότε οι ευθείες είναι παράλληλες και αντίστροφα.
- Αν δύο διαφορετικές ευθείες είναι παράλληλες προς τρίτη, τότε είναι μεταξύ τους παράλληλες.
 - ✓ Αν $\epsilon_1 // \epsilon$ και $\epsilon_2 // \epsilon$ τότε $\epsilon_1 // \epsilon_2$
- Δύο κάθετες ευθείες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους παράλληλες.
 - ✓ Αν $\epsilon_1 \perp \epsilon$ και $\epsilon_2 \perp \epsilon$ τότε $\epsilon_1 // \epsilon_2$
- Αν μια ευθεία τέμνει τη μία από δύο παράλληλες, τότε θα τέμνει και την άλλη.
- Αν μια ευθεία τέμνει κάθετα τη μία από δύο παράλληλες, τότε θα τέμνει και την άλλη κάθετα.
- Από σημείο εκτός ευθείας άγεται **μία μόνο** παράλληλη προς αυτή.

ΣΧΟΛΙΟ

- ❖ Το παραπάνω αξίωμα λέγεται αίτημα παραλληλίας (Ευκλείδειο Αίτημα).
- Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 180° , τότε οι ευθείες τέμνοντα προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ Ή ΚΑΘΕΤΕΣ

- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.
- Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
- Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.
- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

- Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180° .
- Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.
- Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.
- Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60° .

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

- ✓ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού n -γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.
- ✓ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κυρτού n -γώνου είναι 4 ορθές.

Ερωτήσεις

1. Να βρεθεί το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου ενός τετραγώνου και ενός δωδεκαγώνου σε ορθές γωνίες και σε μοίρες, σύμφωνα με το παραπάνω τύπο.
2. Ποίο είναι το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου ενός τετραγώνου και ενός οποιουδήποτε κυρτού τετράπλευρου;

Απαντήσεις

1.
 - ✓ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι $2 \cdot 3 - 4$ ορθές = 2 ορθές ή $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$
 - ✓ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τετραγώνου είναι $2 \cdot 4 - 4$ ορθές = 4 ορθές ή $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$
 - ✓ Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός δωδεκαγώνου είναι $2 \cdot 12 - 4$ ορθές = 20 ορθές ή $20 \cdot 90^\circ = 1800^\circ$
2.
 - ✓ Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 4 ορθές ή 360°
 - ✓ Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τετραγώνου είναι 4 ορθές ή 360°
 - ✓ Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του οποιουδήποτε κυρτού τετραπλεύρου είναι 4 ορθές ή 360°

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Να χαρακτηρίσετε με (Σ)ωστό ή (Λ)άθος τις προτάσεις:

1. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών γωνιών.
2. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών.
3. Υπάρχει τετράπλευρο με όλες του τις γωνίες ορθές.
4. Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού n - γώνου είναι $2n + 4$ ορθές.
5. Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία είναι πάντοτε παραπληρωματικές.
6. Δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες μία προς μία είναι πάντοτε παραπληρωματικές.
7. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού n - γώνου είναι 360° .
8. Το άθροισμα των οξείων γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 90° .
9. Οι συμπληρωματικές γωνίες έχουν άθροισμα 180°

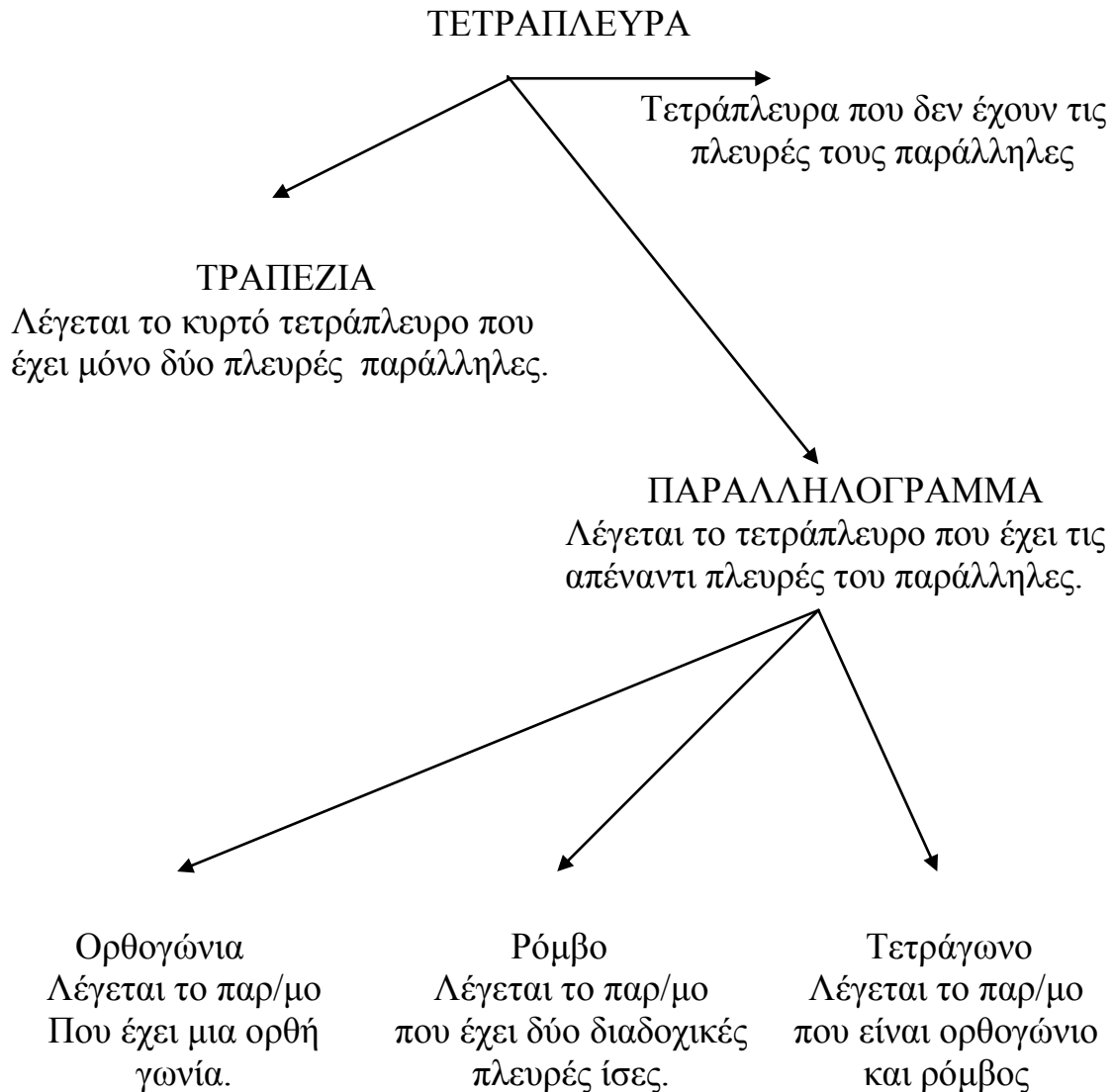
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

ΕΙΔΗ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ - ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ



ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

Ορισμός: Παραλληλόγραμμο ονομάζεται κάθε τετράπλευρο που οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

ΕΙΔΟΣ	ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ	ΚΡΙΤΗΡΙΑ
Παραλληλόγραμμο	<ul style="list-style-type: none">✓ Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.✓ Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.✓ Οι διαγώνιες του διχοτομούνται.✓ Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας.	Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν: <ul style="list-style-type: none">✓ Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.✓ Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.✓ Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.✓ Οι διαγώνιες του διχοτομούνται.
Ορθογώνιο	<ul style="list-style-type: none">✓ Όλες οι γωνίες του είναι ορθές.✓ Οι διαγώνιες του είναι ίσες.✓ Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.	Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο αν: <ul style="list-style-type: none">✓ Οι διαγώνιες του είναι ίσες.✓ Αν έχει μια ορθή γωνία.
Ρόμβος	<ul style="list-style-type: none">✓ Όλες οι πλευρές του είναι ίσες.✓ Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.✓ Οι διαγώνιες του τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται διχοτομούν τις γωνίες του, και είναι άξονες συμμετρίας του.	Ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος αν: <ul style="list-style-type: none">✓ Οι διαγωνιές του είναι κάθετες.✓ Μία διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνία του.
Τετράγωνο	<ul style="list-style-type: none">✓ Έχει τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές.✓ Οι διαγώνιες του είναι ίσες τέμνονται κάθετα, διχοτομούνται διχοτομούν τις γωνίες του, και είναι άξονες συμμετρίας του.	Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο αν έχει δύο ιδιότητες, που η μία το κάνει ορθογώνιο και η άλλη ρόμβο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

Για τυχαίο Τρίγωνο:

- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
 - ✓ Δηλαδή: Αν M, N μέσα των πλευρών AB και BC του τυχαίου τριγώνου ABC τότε $MN \parallel AC$ και $MN = AC / 2$.

Σχόλιο

- Το παραπάνω θεώρημα ισχύει για τυχαίο τρίγωνο, επομένως ισχύει και **για τα ορθογώνια** τρίγωνα.
- Αν μία ευθεία ϵ διέρχεται από το μέσο μίας πλευράς και είναι παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε η ϵ θα διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς.
 - ✓ Δηλαδή: Αν N μέσο της πλευράς AC του τυχαίου τριγώνου ABC και $\epsilon \parallel BC$ τότε M μέσο της πλευράς AB .
- Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Για ορθογώνιο Τρίγωνο:

- Η διάμεσος **Ορθογωνίου** τριγώνου που άγεται από **τη κορυφή της ορθής γωνίας** ισούται με το μισό της υποτείνουσας.
- Αν η διάμεσος ενός **τυχαίου** τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά αυτή (αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος).

Σχόλια

- Αν γίνει το κατάλληλο σχήμα παρατηρούμε ότι μέσα στο ορθογώνιο τρίγωνο σχηματίζονται δύο νέα τρίγωνα από τα οποία το ένα είναι ισοσκελές.
- Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία ισούται με 30° , (επομένως η άλλη θα ισούται με 60°), τότε η απέναντι από αυτή τη γωνία πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας.

Σχόλια

- ❖ Τα παραπάνω ισχύουν μόνο για ορθογώνια τρίγωνα.
- ❖ Ισχύει το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος. Ποια είναι η διατύπωση του;
- ❖ Αν γίνει το κατάλληλο σχήμα παρατηρούμε ότι μέσα στο ορθογώνιο τρίγωνο σχηματίζονται δύο νέα τρίγωνα από τα οποία το ένα είναι ισοσκελές και το άλλο ισόπλευρο.

ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ορισμός: Βαρύκεντρο ή κέντρο βάρους λέγεται το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου. (Συμβολίζετε συνήθως με Θ)

- Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από ένα σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $2/3$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- Έστω οι διάμεσοι $A\Delta$, BE , ΓZ του τυχαίου τριγώνου $AB\Gamma$ οι οποίες τέμνονται στο βαρύκεντρο Θ (σημείο τομής) του τριγώνου. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left. \begin{array}{l} B\Theta = \frac{2}{3}BE, \quad \Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z, \quad A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta \\ \Theta E = \frac{1}{3}BE, \quad \Theta Z = \frac{1}{3}\Gamma Z, \quad \Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} B\Theta = 2\Theta E, \\ \Gamma\Theta = 2\Theta Z, \\ A\Theta = 2\Theta\Delta \end{cases}$$

ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ορισμός: Βαρύκεντρο λέγεται το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου. (Συμβολίζετε συνήθως με H)

- Οι κορυφές A , B , Γ ενός τριγώνου $AB\Gamma$ και το ορθόκεντρο H αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από τα σημεία αυτά είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Σχόλια

- ❖ Το σημείο τομής των διχοτόμων ονομάζεται έγκεντρο.
- ❖ Με κέντρο το σημείο αυτό σχηματίζεται ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου.
- ❖ Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων ονομάζεται περίκεντρο.

- ❖ Με κέντρο το σημείο αυτό σχηματίζεται ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου.
- ❖ Το σημείο τομής δύο εξωτερικών διχοτόμων και της απέναντι εσωτερικής διχοτόμου ενός τριγώνου λέγεται παράκεντρο.
- ❖ Με κέντρο το σημείο αυτό σχηματίζεται ο παραγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου.
- ❖ Τα ύψη, οι διάμεσοι και οι διχοτόμοι ενός τυχαίου τριγώνου διέρχονται από ένα κοινό σημείο το ορθόκεντρο το βαρύκεντρο και το έγκεντρο αντίστοιχα.

ΤΡΑΠΕΖΙΑ

Ορισμός: Τραπεζίο ονομάζεται κάθε τετράπλευρο που έχει μόνο δύο απέναντι πλευρές παράλληλες.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ

- ✓ Οι παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου λέγονται βάσεις του τραπεζίου.
- ✓ Η απόσταση των βάσεων του τραπεζίου ονομάζεται ύψος του τραπεζίου
- ✓ Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών ενός τραπεζίου ονομάζεται διάμεσος του τραπεζίου.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΩΝ

- Η διάμεσος κάθε τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις και ισούται με το ημιάθροισμα τους.

$$✓ \quad \mathbf{MN} // \mathbf{AB} // \mathbf{\Gamma\Delta} \text{ και } \mathbf{MN} = \frac{\mathbf{AB} + \mathbf{\Gamma\Delta}}{2}$$

- Η διάμεσος κάθε τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα E, Z των διαγωνίων του και το τμήμα EZ είναι παράλληλο στις βάσεις και ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων.

$$✓ \quad \mathbf{EZ} // \mathbf{AB} // \mathbf{\Gamma\Delta} \text{ και } \mathbf{EZ} = \frac{\mathbf{AB} - \mathbf{\Gamma\Delta}}{2}$$

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ορισμός: Το τραπέζιο που έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες ονομάζεται ισοσκελές τραπέζιο.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΣΟΣΚΕΛΟΥΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

- Οι γωνίες σε κάθε βάση ισοσκελούς τραπέζιου είναι ίσες και αντίστροφα.
- Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τραπέζιο όταν:

- Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του είναι ίσες.
- Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Να χαρακτηρίσετε με (Σ)ωστό ή (Λ)άθος τις προτάσεις:

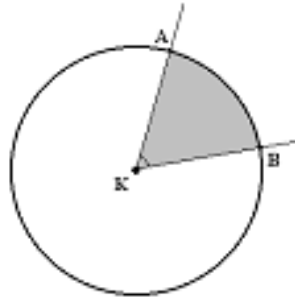
1. Ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιους είναι ρόμβος.
2. Τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.
3. Ένα παραλληλόγραμμο με ίσες διαγώνιους είναι ορθογώνιο.
4. Ένα τραπέζιο είναι και παραλληλόγραμμο.
5. Στο ορθογώνιο όλες οι γωνίες του είναι ορθές.
6. Οι απέναντι πλευρές τραπέζιου είναι παράλληλες.
7. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μια γωνία ορθή τότε αυτό θα είναι ορθογώνιο.
8. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μια γωνία ορθή τότε αυτό θα είναι τετράγωνο.
9. Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου είναι ίσες.
10. Η διάμεσος ενός ισοσκελούς τραπέζιου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ ισούται με την ημιδιαφορά των βάσεων αυτών.
11. Αν σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές τότε είναι παραλληλόγραμμο.
12. Το ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων σε κάθε τρίγωνο.
13. Ένας ορθογώνιο είναι πάντα και ρόμβος.
14. Ένας ρόμβος είναι και ορθογώνιο.
15. Ένας ρόμβος είναι τετράγωνο.
16. Ένα τετράγωνο είναι ρόμβος.
17. Αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε αυτό είναι ορθογώνιο.
18. Αν ένα τετράπλευρο έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι ρόμβος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο

ΕΓΓΕΓΡΑΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ
ΕΓΓΕΓΡΑΜΕΝΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

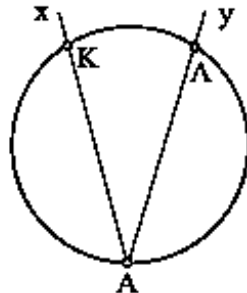
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

ΕΠΙΚΕΝΤΡΗ ΓΩΝΙΑ



Ορισμός: Μια γωνία που έχει κορυφή το κέντρο ενός κύκλου λέγεται επίκεντρη.

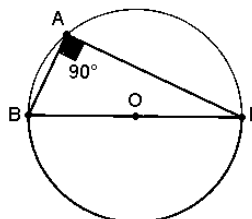
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ



Ορισμός: Μια γωνία που η κορυφή της είναι σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται εγγεγραμμένη .

ΣΧΕΣΗ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΚΕΝΤΡΗΣ

- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.
- Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.
- Κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

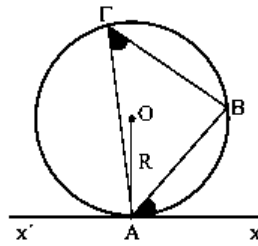


- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

ΓΩΝΙΑ ΧΟΡΔΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

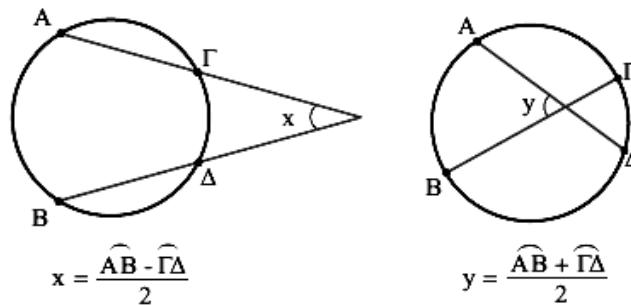
Ορισμός: Μια γωνία που η κορυφή της είναι σημείο ενός κύκλου και η μία πλευρά είναι τέμνουσα του κύκλου και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου λέγεται γωνία χορδής και εφαπτομένης .

- Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο της χορδής.



ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ

Ορισμός: Μια γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό ενός κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται γωνία δύο τεμνουσών.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Να χαρακτηρίσετε με (Σ)ωστό ή (Λ)άθος τις προτάσεις:

1. Κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικόκλιο είναι 180°
2. Δεν υπάρχει εγγεγραμμένη γωνία αμβλεία.
3. Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο της χορδής.
4. Κάθε επίκεντρη ισούται με το μισό της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο.