Η θεωρία της Α΄ Λυκείου

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Τι λέγεται σύνολο;

Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.
Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου
παράδειγμα:

- με N συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,
- με Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών,
- με Q το σύνολο των ρητών αριθμών και
- με ℝ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε x ∈ A και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε x ∉ A και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A». Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5}\notin \mathrm{N},\quad \frac{3}{5}\in\mathbb{Q},\quad -2\in\mathbb{Z},\quad \sqrt{2}\notin\mathbb{Q},\quad \sqrt{2}\in\mathbb{R}\ \text{κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:
α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα και λέγεται «παράσταση του συνόλου με **αναγραφή** των στοιχείων του».
β) Αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με: {x ∈Ω | x έχει την ιδιότητα Ι}
και διαβάζεται «Το σύνολο των x ∈ D, όπου x έχει την ιδιότητα Ι». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με **περιγραφή** των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

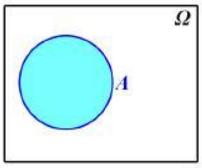
Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Με άλλα λόγια:
«Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του Β είναι και στοιχείο του Α».
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε **Α = Β.**

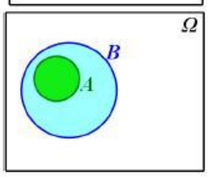
Υποσύνολα συνόλου

Ένα σύνολο Α λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου Β, όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.
Στην περίπτωση αυτή γράφουμε Α ⊆ Β . Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:
i) Α ⊆ Α, για κάθε σύνολο Α.
ii) Αν Α ⊆ Β και Β ⊆ Γ, τότε Α ⊆ Γ .
iii) Αν Α ⊆ Β και Β ⊆ Α, τότε Α = Β .
Το κενό σύνολο Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία και συμβολίζεται με ∅ ή { }.

Διαγράμματα Venn

Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

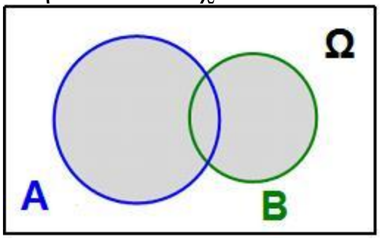




Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου. Αν Α ⊆ Β, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.

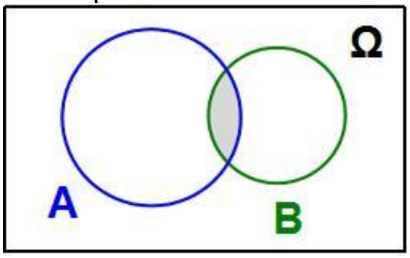
Πράξεις με σύνολα

- **Ένωση δύο υποσυνόλων A, B** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα A και B και συμβολίζεται με **AUB** .



Δηλαδή είναι: **$A \cup B = \{x \in \Omega | x \in A$ και $x \in B\}$**

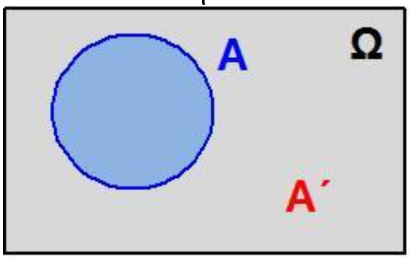
- **Τομή δύο υποσυνόλων A, B** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα A, B και συμβολίζεται με **$A \cap B$**



Δηλαδή είναι: **$A \cap B = \{x \in \Omega | x \in A$ και $x \in B\}$**

Στην περίπτωση που δύο σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \emptyset$, τα δύο σύνολα λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

- **Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου A** ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A και συμβολίζεται με **A΄.**



Δηλαδή είναι: **$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$**

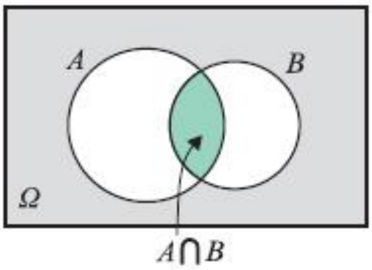
1.ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- **Πείραμα τύχης** (random experiment) ονομάζεται το πείραμα του οποίου δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνεται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.
- **Δειγματικός Χώρος**Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος** (sample space) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Αν δηλαδή$\omega_1,\omega_2,...,\omega_\kappa$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\kappa\}$.
- **Ενδεχόμενα** Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται**ενδεχόμενο** (event) ή γεγονός. Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στοΩ. Γι'αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο ∅ που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι'αυτό λέμε ότι το ∅ είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**.
- Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με N(A)

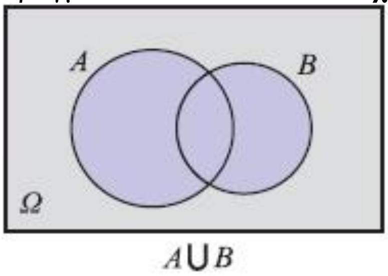
Πράξεις με Ενδεχόμενα

αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

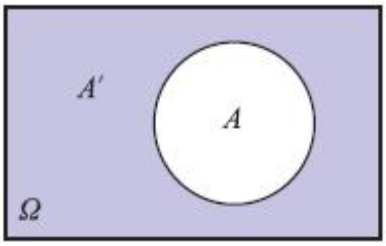
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται "A τομή B" ή "A και B" και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται **συγχρόνως** τα A **και** B.



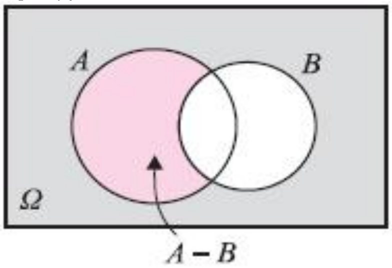
- Το ενδεχόμενο A∪B, που διαβάζεται “Α ένωση Β” ή “Α ή Β” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται **ένα τουλάχιστον** από τα Α, Β.



- Το ενδεχόμενο Α', που διαβάζεται “όχι Α” ή“συμπληρωματικό του Α” και πραγματοποιείται, όταν **δεν** πραγματοποιείται το Α. Το Α' λέγεται και**“αντίθετο του Α”.**



- Το ενδεχόμενο Α - Β, που διαβάζεται**“διαφορά του Β από το Α”** και πραγματοποιείται, όταν **πραγματοποιείται το Α αλλά όχι το Β**. Είναι εύκολο να δούμε ότι **Α-Β = Α ∩ Β'** .



- **Διάφορες σχέσεις για ενδεχόμενα Α και Β διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.**

Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται Συμβολικά ω∈ Α
Το ενδεχόμενο Α δεν πραγματοποιείται Συμβολικά ω ∈ Α' (ή ω ∉ Α)
Ένα τουλάχιστον από τα Α και Β πραγματοποιείται Συμβολικά ω ∈ Α ∩ Β
Πραγματοποιούνται αμφότερα τα Α και Β Συμβολικά ω ∈ Α ∩ Β
Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β Συμβολικά ω ∈ (A∪B)'
Πραγματοποιείται μόνο το Α Συμβολικά ω ∈ Α - Β (ή ω ∈ Α ∩ Β ')
Η πραγματοποίηση του Α συνεπάγεται την πραγματοποίηση του Β Συμβολικά Α ⊆ Β

- **Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα, όταν Α∩Β=∅** . Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης **ξένα μεταξύ τους** ή **αμοιβαίως αποκλειόμενα**.

1.2 ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας σε ένα πείραμα με **ισοπίθανα** στοιχειώδη αποτελέσματα ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

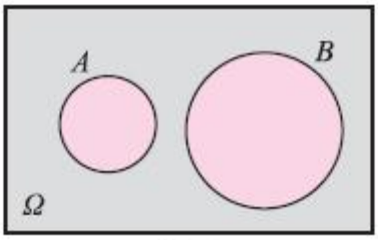
Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι:

1. $P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$
2. $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}=0$
3. Για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0\leq P(A)\leq 1$, αφού το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου είναι ίσο ή μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου.

Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων

1. Για οποιαδήποτε **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$A\cup B$

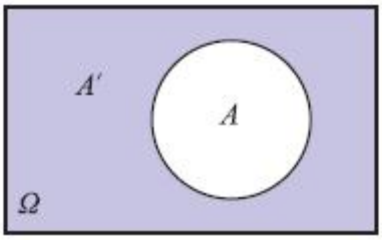
Αν $N(A)=\kappa$ και $N(B)=\lambda$, τότε το $A\cup B$ έχει $\kappa+\lambda$ στοιχεία, γιατί αλλιώς τα Α και Β δε θα ήταν ασυμβίβαστα. Δηλαδή, έχουμε $N(A\cup B)=\kappa+\lambda= N(A)+N(B)$.

Επομένως: $P(A\cup B)=\frac{N(A\cup B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)+N(B)}{N(\Omega)}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}+\frac{N(B)}{N(\Omega)}=P(A)+P(B)$

Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **απλός προσθετικός νόμος** (simply additive law) και ισχύει και για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Έτσι, αν τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα θα έχουμε $P(A\cup B\cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$.

2. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α' ισχύει: $P(A')=1 - P(A)$

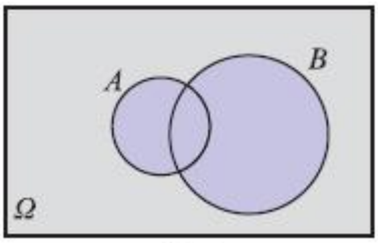
ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή $A\cap A'=\emptyset$, δηλαδή τα Α και Α' είναι ασυμβίβαστα, έχουμε διαδοχικά, σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο: $P(A\cup A')=P(A)+P(A')$ άρα $P(\Omega)=P(A)+P(A')$ άρα $1=P(A)+P(A')$. Οπότε $P(A')=1-P(A)$.

3. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



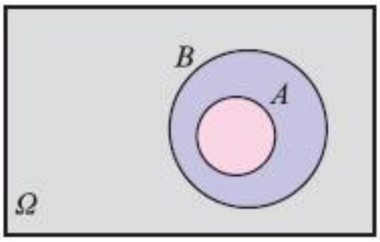
$A\cup B$

Για δυο ενδεχόμενα Α και Β έχουμε $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$, (1) αφού στο άθροισμα $N(A)+N(B)$ το πλήθος των στοιχείων του $A\cap B$ υπολογίζεται δυο φορές.

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της (1) με N(Ω) έχουμε: $\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$
και επομένως$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$
Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **προσθετικός νόμος** (additive law).

4. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

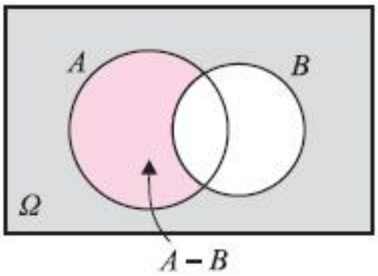


Επειδή $A \subseteq B$ έχουμε διαδοχικά:

$$N(A) \leq N(B) \Rightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

5. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:$P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Επειδή τα ενδεχόμενα A-B και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και $(A-B) \cup (A \cap B)=A$, έχουμε:$P(A)=P(A-B)+P(A \cap B)$ Άρα $P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$

2.ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους **ρητούς** και τους**άρρητους** αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, **του άξονα των πραγματικών αριθμών.**

Θυμίζουμε ότι:

- Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$.
- Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή.

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

- Οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν με τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, με $\beta \neq 0$ και δηλ. ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί λέγονται **άρρητοι** αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

- Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	α + β = β + α	αβ = βα
Προσεταιριστική	α + (β + γ) = (α + β) + γ	α(βγ) = (αβ)γ
Ουδέτερο Στοιχείο	α + 0 = α	α ·1 = α
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	α + (-α) = 0	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,\ \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	α(β + γ) = αβ + αγ	

- Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής: **α - β = α + (-β)**

και $\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}\ (\beta \neq 0)$

- Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1. (α = β και γ = δ) ⇒ α + γ = β + δ δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.
2. (α = β και γ = δ) ⇒ αγ = βδ δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.
3. α = β ⇔ α + γ = β + γ δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.
4. Αν γ ≠ 0, τότε: α = β ⇔ αγ = βγ δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.
5. α · β = 0 ⇔ α = 0 ή β = 0 δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.
Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη: **α · β ≠ 0 ⇔ α ≠ 0 και β ≠ 0**
ΣΧΟΛΙΟ
Όταν από την ισότητα α + γ = β + γ ή από την ισότητα α · γ = β · γ μεταβαίνουμε στην ισότητα α = β, τότε λέμε ότι **διαγράφουμε** τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.
Έστω α = 1. Τότε έχουμε διαδοχικά: $\alpha = 1 \Rightarrow \alpha \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 \Rightarrow \alpha^2 = \alpha \Rightarrow \alpha^2 - 1 = \alpha - 1 \Rightarrow$
$(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot 1 \Rightarrow \alpha + 1 = 1 \Rightarrow \alpha = 0$
Όμως έχουμε και α = 1, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα (α + 1)(α - 1) = (α - 1) · 1 διαγράψαμε τον παράγοντα (α - 1) ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, τότε ορίζουμε :

$$\boldsymbol{\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \cdots \cdot \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}}, \quad \text{για } \boldsymbol{\nu > 1} \text{ και } \boldsymbol{\alpha^1 = \alpha}, \quad \text{για } \boldsymbol{\nu = 1}.$$

Αν επιπλέον είναι **α ≠ 0**, τότε ορίζουμε : $\boldsymbol{\alpha^0 = 1}$ και $\boldsymbol{\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}}$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$
$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 =(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

Μέθοδοι απόδειξης

<u>Α) Ευθεία Απόδειξη</u>

1ο) Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:« Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ ».
Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 0$, είναι $\alpha = -(\beta + \gamma)$, οπότε θα έχουμε: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = [-(\beta + \gamma)]^3 + \beta^3 + \gamma^3$
$= -(\beta + \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 + \beta^3 + \gamma^3 = - 3\beta$

2ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.
Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα:$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (y - \beta x)^2$
Έχουμε διαδοχικά: $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2 \Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2 \Leftrightarrow \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2$, που ισχύει.

3ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα**αντιπαράδειγμα**. Έτσι ο ισχυρισμός «για κάθε $\alpha>0$ ισχύει $\alpha^2>\alpha$ » δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2<\alpha$.

<u>Β) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο</u>

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό:
«Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος», δηλαδή **«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»**
Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:
Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή
$\alpha = 2\kappa + 1$, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:$\alpha^2 = (2\kappa + 1)^2= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1 =2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1 = 2\lambda + 1$ (όπου $\lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa$).
Δηλαδή $\alpha^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in Z$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα **ο α είναι άρτιος**.
Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε **άτοπο**.

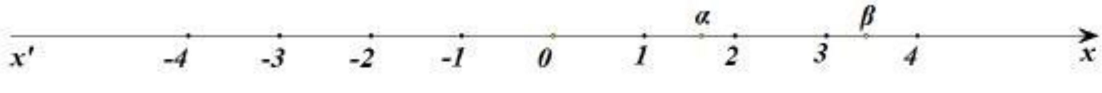
2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β, και γράφουμε $\alpha>\beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.
Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε **$\beta<\alpha$**
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα: **$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$**
Γεωμετρικά η ανισότητα $\alpha > \beta$ σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β .



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, τότε γράφουμε $\alpha \geq \beta$ και διαβάζουμε: «**α μεγαλύτερος ή ίσος του β**».

Ιδιότητες των ανισοτήτων

1. $(\alpha>0$ και $\beta>0) \Rightarrow \alpha+\beta>0$ και $(\alpha<0$ και $\beta<0) \Rightarrow \alpha+\beta<0$

2. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0 > 0$ και α, β ετερόσημοι$\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

3. $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

Άρα αν $\alpha^2+\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ και $\beta=0$ και αν $\alpha^2+\beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

4. $(\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

5. $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\gamma$

6. Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

7. Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

8. $(\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta) \Leftrightarrow \alpha+\gamma > \beta+\delta$

9. Για θετικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή: $(\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta) \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

10. Γενικότερα $(\alpha_1>\beta_1$ και $\alpha_2>\beta_2$ και … και $\alpha_\nu>\beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu>\beta_1+\beta_2+...+\beta_\nu$

11. Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, τότε:

$(\alpha_1>\beta_1$ και $\alpha_2>\beta_2$ και … και $\alpha_\nu>\beta_\nu) \Rightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_\nu$ (*)

12. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu>\beta^\nu$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

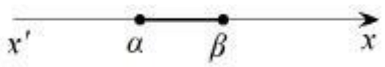
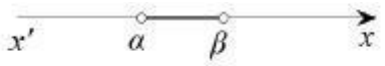
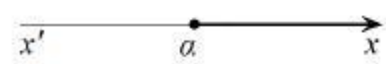
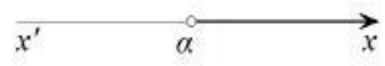
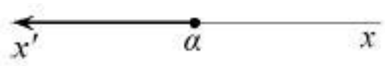
Έστω $\alpha>\beta$. Τότε, από τη (*), για $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_\nu=\alpha>0$ και $\beta_1=\beta_2=...=\beta_\nu=\beta>0$,προκύπτει ότι: $\alpha^\nu>\beta^\nu$.
Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu>\beta^\nu$ και $\alpha \leq \beta$. Τότε:αν ήταν $\alpha=\beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^\nu=\beta^\nu$ (άτοπο), ενώ αν ήταν $\alpha<\beta$, θα είχαμε $\alpha^\nu<\beta^\nu$ (άτοπο). Άρα, $\alpha>\beta$.

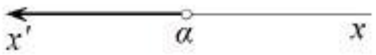
13. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\alpha=\beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $\alpha^\nu=\beta^\nu$
Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu=\beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:
αν ήταν $\alpha>\beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu>\beta^\nu$ (άτοπο), ενώ
αν ήταν $\alpha<\beta$, λόγω της (4), θα είχαμε $\alpha^\nu<\beta^\nu$ (άτοπο).
Άρα, $\alpha=\beta$.

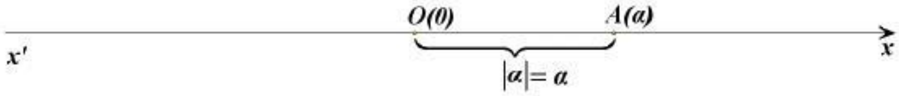
Διαστήματα

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	**ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ**	**ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ**
	$\alpha \leq x \leq \beta$	**[α, β]**
	$\alpha \leq x \leq \beta$	**[α, β)**
	$\alpha < x \leq \beta$	**(α, β]**
	$\alpha < x \leq \beta$	**(α, β)**
	$x \geq \alpha$	**[α, +∞)**
	$x > \alpha$	**(α, +∞)**
	$x \leq \alpha$	**(-∞, α]**

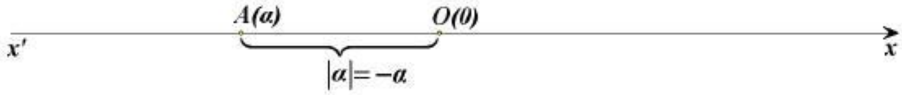
	**x < α**	**(-∞, α)**

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:



$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu\ \ \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu\ \ \alpha < 0 \end{cases}$$



Δηλαδή:

- **Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.**
- **Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.**
- **|0| = 0**

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

1. $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
2. $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
3. Αν $\theta>0$, τότε: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
4. $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
5. $|\alpha|^2 = \alpha^2$
6. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2$, που ισχύει.

7. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

8. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:
$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow$
$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|$, που ισχύει.
Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

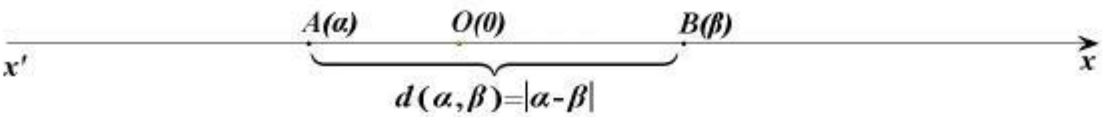
ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:
$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot ... \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot ... \cdot |\alpha_\nu|$
- Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε: $\boldsymbol{|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu}$
- Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους.

Συγκεκριμένα: $|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_\nu|$

Απόσταση δυο αριθμών

Ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία A και B



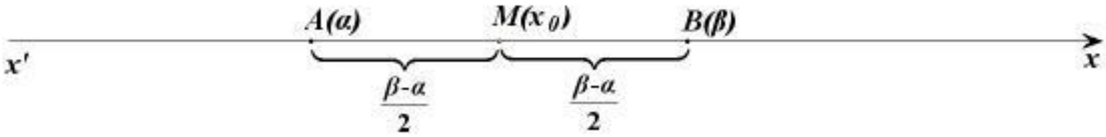
αντιστοίχως.

Το μήκος του τμήματος AB λέγεται **απόσταση** των αριθμών α και β, συμβολίζεται με **d(α,β)** και είναι ίση με **|α- β|**. Είναι δηλαδή: **d (α, β) = |α - β|**

Προφανώς ισχύει d (α, β) = d (β, α) . Στην περίπτωση μάλιστα που είναι α<β, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με β - α και λέγεται **μήκος** του διαστήματος [α, β].

Μέσον τμήματος

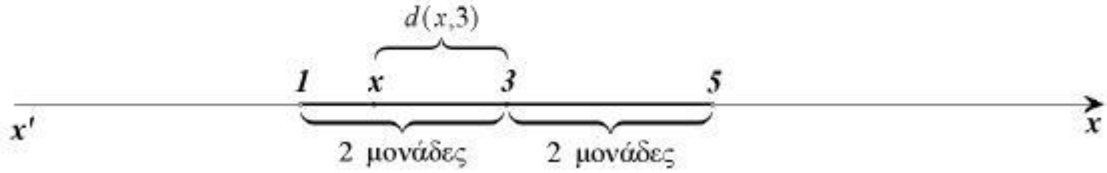
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε A και B τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



Αν Μ (x_0) είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε (ΜΑ) = (ΜΒ) $\Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)$

$\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta| \Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0$, (αφού $\alpha < x_0 < \beta$) $\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$

- Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται **κέντρο** του διαστήματος [α, β]
- ο αριθμός $\rho = \frac{\beta-\alpha}{2}$ λέγεται **ακτίνα** του [α, β].
- Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].
- Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει



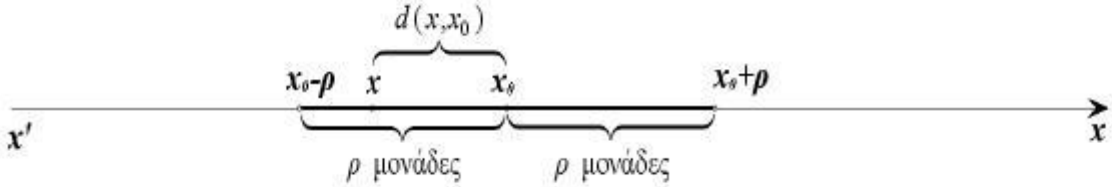
$|x - 3| < 2$.

Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$|x - 3| < 2 \Leftrightarrow d(x,3) < 2 \Leftrightarrow 3 - 2 < x < 3 + 2 \Leftrightarrow x \in (3 - 2, 3 + 2)$

Γενικά: Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$

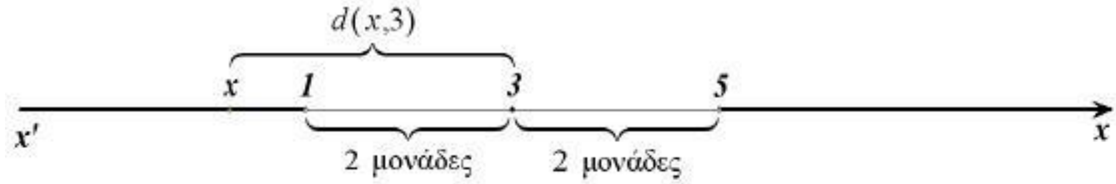
Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| < \rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος ($x_0 - \rho$, $x_0 + \rho$) που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε: $|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho, \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$.

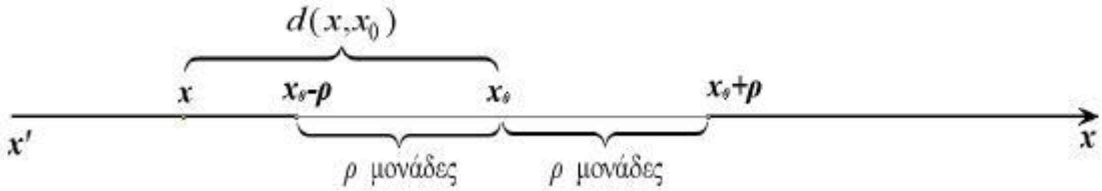
Για παράδειγμα $|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2, 2) \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

- Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| > 2$.



Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε: $|x - 3| > 2 \Leftrightarrow d(x,3) > 2 \Leftrightarrow x < 3 - 2$ ή $x > 3 + 2 \Leftrightarrow$ $x \in (-\infty, 3 - 2) \cup (3 + 2, +\infty)$.

Γενικά: Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει: $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$ Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία Μ(x) του άξονα x΄x που απέχουν από το σημείο Κ(x_0) απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, **έχουμε: $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$**

Για παράδειγμα: $|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 2$.

2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

Άρα **αν α>0, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$.**

Ιδιότητες

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός(1) που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Ορίζουμε $\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$ και $\sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha}$.

Άρα αν α ≥ 0, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

Ιδιότητες των ριζών •

1. Αν $\alpha \geq 0$, τότε: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$ και $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$

2. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

Αν α, β ≥ 0, τότε:

3. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$ που ισχύει.

4. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ και με $\beta \neq 0$

5. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έχουμε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left(\sqrt[\mu \cdot \nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow \left(\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$ που ισχύει

6. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ **ΑΠΟΔΕΙΞΗ** Έχουμε: $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\left(\alpha^\mu\right)^\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

7. για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$

8. Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha > 0$, ισχύει: $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\kappa$,

9. για $\alpha, \beta \geq 0$ έχουμε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}$.

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν α>0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

3.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

3.1α ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η Εξίσωση αx + β = 0

Α) $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta = -\beta \Leftrightarrow \alpha x = -\beta$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha \neq 0$ τότε: $\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ Άρα , αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση έχει **ακριβώς μία λύση**, την $x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση $\alpha x = -\beta$ γίνεται $0x = -\beta$, η οποία:
  i. αν είναι $\beta \neq 0$ δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι **αδύνατη,** ενώ
  ii. αν είναι $\beta = 0$ έχει τη μορφή $0x = 0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι **ταυτότητα**.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

Β) Αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης $\alpha x + \beta = 0$ εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων τότε τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται **διερεύνηση**.

Για παράδειγμα η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα $(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = \lambda - 1$

Επομένως

- Αν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{1}{\lambda+1}$$

- Αν $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = -2$ και είναι αδύνατη.
- Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

3.1β Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

- **Με παραγοντοποίηση μορφής $(\alpha_1 \chi+\beta_1)(\alpha_2 \chi+\beta_2)(\alpha_3 \chi+\beta_3) \ldots\ldots(\alpha_\nu \chi+\beta_\nu) = 0$ οπότε $(\alpha_1 \chi+\beta_1) = 0$ ή $(\alpha_2 \chi+\beta_2) = 0$ ή $(\alpha_3 \chi+\beta_3) = 0$ ή …… ή $(\alpha_\nu \chi+\beta_\nu) = 0$**
- **Κλασματικές**
- **Με απόλυτες τιμές** της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$ Οπότε λύνουμε τις $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

και της μορφής $|f(x)| = g(x)$ Οπότε με $g(x) \geq 0$ συναληθεύουμε με τις $f(x) = g(x)$ ή $f(x) = -g(x)$

3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^\nu = \alpha$

- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α>0 και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$
- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α<0 και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{-\alpha}$
- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α>0 και ν άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις

$\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$

- Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με α<0 και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη
- Αν ο ν <u>περιττός</u> τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει μοναδική λύση, την $x = \alpha$
- Αν ο ν <u>άρτιος</u> τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$.

3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (1)

Έχουμε:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \overset{\text{διαιρούμε με α που είναι } \neq 0}{\Leftrightarrow} \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi = -\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 + 2\chi\frac{\beta}{2\alpha}\chi + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow \left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: $\left(\chi + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}$ (2)

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

$$x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad ή \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν **Δ> 0**, τότε έχουμε:

$$x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad ή \quad x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή
Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

- Αν **Δ = 0**, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow \chi+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \text{ ή } \chi+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \Leftrightarrow \chi=-\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ή } \chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει **διπλή ρίζα** την $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$

- Αν **Δ<0**, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι **αδύνατη** στο $\mathbb{R}$.

Η αλγεβρική παράσταση **$\Delta = \beta^2$ - 4αγ**, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ονομάζεται **διακρίνουσα** αυτής.
Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	**Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$**
Δ > 0	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
Δ = 0	Έχει μια διπλή ρίζα τη $-\frac{\beta}{2\alpha}$.
Δ < 0	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

τύποι Vieta
Αν με *S* συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$S=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P=\frac{\gamma}{\alpha}$$

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0 \overset{\text{διαιρούμε με α που είναι } \neq 0}{\Leftrightarrow} \chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \chi^2-(\chi_1+\chi_2)\chi+\chi_1\chi_2=0 \Leftrightarrow \chi^2-S\chi+P=0$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

- Μορφής $\alpha(f(\chi))^2+\beta|f(\chi)|+\gamma=0$ με $\alpha \neq 0$ που γίνεται $\alpha|f(\chi)|^2+\beta|f(\chi)|+\gamma=0$ δευτέρου βαθμού με άγνωστο καταρχή το $|f(\chi)|$

- Κλασματικές
- Μορφής $\alpha(f(x))^2 + \beta\,(f(x)) + \gamma = 0$ δευτέρου βαθμού με άγνωστο καταρχή το f(x)
- Διτετράγωνες μορφής $\alpha(f(x))^{2\nu} + \beta\,(f(x))^{\nu} + \gamma = 0$ δευτέρου βαθμού με άγνωστο καταρχή το $(f(x))^{\nu}$

4ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις: $\alpha x + \beta > 0$ και $\alpha x + \beta < 0$

$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > -\beta \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Αν α>0, τότε: $\alpha\chi > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha\chi}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \chi > \frac{-\beta}{\alpha}$
- Αν α<0, τότε: $\alpha\chi > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha\chi}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \chi < \frac{-\beta}{\alpha}$ Προσοχή αλλάζει η φορά
- Αν α = 0, τότε η ανίσωση γίνεται 0x>-β, η οποία
- αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν είναι β>0,
- είναι αδύνατη, αν είναι β<0 .

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

- με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$ *ή της* $|x - x_o| < \rho \Leftrightarrow x_o - \rho < x < x_o + \rho$
- με τη βοήθεια της ιδιότητας $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$

4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2ου βαθμού** ή, πιο απλά, **τριώνυμο**. Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ λέγεται και **διακρίνουσα του τριωνύμου**. Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, δηλαδή οι $x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ονομάζονται και **ρίζες του τριωνύμου**.

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi^2 + \frac{\beta}{\alpha}\chi + \frac{\gamma}{\alpha}) = \alpha\left[\chi^2 + 2\chi\frac{\beta}{2\alpha} + \left(\frac{\beta}{4\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \left(\frac{\beta}{4\alpha}\right)^2\right] = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right]$$

Επομένως: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$ (1)

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **Δ>0** . Τότε ισχύει $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$, οπότε έχουμε:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right] = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] =$$

$$\alpha\left[\chi + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]\left[\chi + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right] = \alpha\left[\chi - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]\left[\chi - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right]$$

Επομένως: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$ **,** όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν Δ>0, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του *α* επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

- **Δ = 0** . Τότε από την ισότητα (1) έχουμε: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$

Άρα, όταν Δ = 0, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

- **Δ<0** . Τότε ισχύει |Δ| = -Δ, οπότε έχουμε: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Επειδή για κάθε x ∈ ℝ , η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

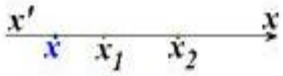
Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

- Αν **Δ>0**, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει: $\boldsymbol{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)}$ **,** όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου

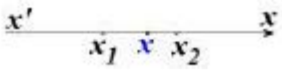
Υποθέτουμε ότι $x_1<x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

Παρατηρούμε ότι: Αν $x < x_1 < x_2$ (Σχήμα) , τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$.



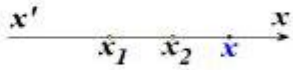
Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του *α* .

Αν $x_1 < x < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Επομένως, λόγω της (1), το



τριώνυμο είναι ετερόσημο του *α*

Αν $x_1 < x_2 < x$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το



τριώνυμο είναι ομόσημο του *α*

- Αν **Δ = 0**, τότε ισχύει: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του *α* για κάθε πραγματικό $\chi \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$
- Αν **Δ<0**, τότε ισχύει: $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha\left[\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το ℝ.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα: Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α** , μόνο όταν είναι Δ>0 και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν,** όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Αρα

- **για να είναι ένα τριώνυμο <u>θετικό</u> ΠΑΝΤΟΤΕ πρέπει Δ<0 και α>0**
- **για να είναι ένα τριώνυμο <u>αρνητικό</u> ΠΑΝΤΟΤΕ πρέπει Δ<0 και α<0**

Ανισώσεις της μορφής $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma > 0$ ή $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma < 0$

Βρίσκουμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ και κρατάμε το διάστημα στο οποίο γίνεται >0 ή <0 αντίστοιχα

Πρόοδοι

5.1 Ακολουθίες

Γενικά **ακολουθία πραγματικών αριθμών** είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1,2,3,…,ν,… στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται **πρώτος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $\boldsymbol{\alpha_1}$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται**δεύτερος όρος** της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με α2 κ.λ.π. Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται **ν-οστός** ή **γενικός όρος** της ακολουθίας και το συμβολίζουμε συνήθως με α_ν. Δηλαδή, $1\rightarrow \alpha_1$, $2\rightarrow \alpha_2$, $3\rightarrow\alpha_3$, …, $\nu\rightarrow\alpha_\nu$, … Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε (α_ν).

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

i. Τον αναδρομικό της τύπο πχ $\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}+\alpha_\nu$ και

ii. Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

5.2 Αριθμητική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με ω και τον λέμε διαφορά της προόδου.

Επομένως, η ακολουθία (αν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega}$ ή $\boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$

Ο νος όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$
$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$
$$\alpha_4 = \alpha_3 + \omega$$

....

$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2} + \omega$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη της ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της διαγραφής βρίσκουμε $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

Αριθμητικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω, τότε ισχύει:

$$\beta - \alpha = \omega \quad \text{και} \quad \gamma - \beta = \omega, \qquad \text{επομένως} \qquad \beta - \alpha = \gamma - \beta \;\; \text{ή} \;\; \beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, τότε

έχουμε $2\beta = \alpha + \gamma$ ή $\beta - \alpha = \gamma - \beta$,

που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ

Αποδείξαμε λοιπόν ότι: Τρεις αριθμοί α,β,γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (αν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$$

5.3 Γεωμετρική πρόοδος

Μια ακολουθία λέγεται γεωμετρική πρόοδος, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με λ και τον λέμε **λόγο της προόδου**. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) υποθέτουμε πάντα ότι α_1 # 0, οπότε, αφού είναι και $\lambda \neq 0$, ισχύει $\alpha_\nu \neq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία (α_ν) είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \lambda}$ ή $\boxed{\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda}$

Ο νος όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α1 και λόγο λ είναι $\alpha_\nu=\alpha_1 \cdot \lambda^\nu$-1

Απόδειξη

Από τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου έχουμε:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$
$$\alpha_2 = \alpha_1\lambda$$
$$\alpha_3 = \alpha_2\lambda$$
....
$$\alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu-2}\lambda$$
$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ν αυτές ισότητες και εφαρμόζοντας την ιδιότητα της της διαγραφής, βρίσκουμε $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$

Γεωμετρικός μέσος

Αν πάρουμε τρεις διαδοχικούς όρους α, β, γ μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ, τότε ισχύει $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta}=\lambda$, επομένως $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}$ ή $\beta^2=\alpha\gamma$

Αλλά και αντιστρόφως, αν για τρεις αριθμούς α, β, γ ≠0 ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$, τότε $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta}$ που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου. Ο θετικός αριθμός $\sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των α και γ.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι: Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (αν) με λόγο λ≠1 είναι

$$S_\nu = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $S_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \cdots + \alpha_1\lambda^{\nu-2} + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ (1)

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της (1) με το λόγο λ και έχουμε

$\lambda S_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \cdots + \alpha_1\lambda^{\nu-1} + \alpha_1\lambda^\nu$ (2)

Αφαιρούμε από τα μέλη της (2) τα μέλη της (1) και έχουμε:

$$\lambda S_\nu - S_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1$$

ή $$(\lambda-1)S_\nu = \alpha_1(\lambda^\nu-1)$$

Επομένως, αφού λ ≠ 1, έχουμε: $S_\nu = \alpha_1 \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$,

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι λ-1, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_\nu = \nu \cdot \alpha_1$ αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με α_1.

5.4 Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. **Καταθέτουμε στην τράπεζα ένα κεφάλαιο α ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ε%. Με τη συμπλήρωση ενός χρόνου οι τόκοι προστίθενται στο κεφάλαιο και το ποσό που προκύπτει είναι το νέο κεφάλαιο που τοκίζεται με το ίδιο επιτόκιο για τον επόμενο χρόνο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί για ν χρόνια, να βρεθεί πόσα χρήματα θα εισπράξουμε στο τέλος του ν^ου^ χρόνου.**

(Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα ανατοκισμού).

ΛΥΣΗ

Στο τέλος του 1 χρόνου το κεφάλαιο α θα δώσει τόκο $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha$ και μαζί με τον τόκο θα γίνει

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{\varepsilon}{100}\alpha = \alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του 2ου χρόνου το κεφάλαιο α, θα δώσει τόκο θα γίνει $\frac{\varepsilon}{100}\cdot\alpha_1$ και μαζί με τον

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon}{100}\alpha_1 = \alpha_1\left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Στο τέλος του 3ου χρόνου το κεφάλαιο α_2 μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_3 = \alpha_2\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) \text{κτλ.}$$

και γενικά στο τέλος του ν χρόνου το κεφάλαιο θα γίνει

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$$

Παρατηρούμε ότι τα α_1 α_2, α_3,..., αν είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)$

και $\lambda = 1 + \frac{\varepsilon}{100}$.

Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του ν όρου γεωμετρικής προόδου, στο τέλος του $\nu^{ου}$ χρόνου το κεφάλαιο α μαζί με τους τόκους θα γίνει

$$\alpha_\nu = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^{\nu-1}$$

ή $$\alpha_\nu = \alpha\left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^\nu$$

Αν θέσουμε $\frac{\varepsilon}{100} = \tau$ που είναι ο τόκος του ενός ευρώ σε ένα χρόνο, έχουμε τον τύπο

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha\,(1+\tau)^\nu}$$

που είναι γνωστός ως τύπος του ανατοκισμού.