ΜΕΡΟΣ 1ο : ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Α Σύνολα αριθμών

Για τα σύνολα των αριθμών γνωρίζουμε ότι $N \subset Z \subset Q \subset R$.

1) Το $N = \{0,1,2,3,...\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών.

2) Το $Z = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,...\}$ είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών.

3) Το $Q = \left\{\frac{\alpha}{\beta},\ \text{με}\ \alpha,\beta \in Z\ \text{και}\ \beta \neq 0\right\}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών. Άρα ρητός είναι ο αριθμός που μπορεί να γραφεί σαν πηλίκο ακέραιων αριθμών.
Π.χ οι αριθμοί $\frac{3}{5}, -\frac{1}{2}, 0, 3, -2$ κ.λ.π

4) Το R είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και είναι η ένωση των ρητών και των άρρητων αριθμών.

► $\frac{3}{5} \notin N$ ► $\frac{3}{5} \in Q$ ► $-2 \in Z$ ► $\sqrt{2} \notin Q$ ► $\sqrt{2} \in R$ ► $\sqrt{2}$ άρρητος

Σημείωση

Για το σύνολο Α, συμβολίζουμε με A^* το $A - \{0\}$. Π.χ $N^* = N - \{0\} = \{1,2,3,...\}$.

Β Δυνάμεις

1) $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu\ \text{φορές}}$ $\rightarrow$ $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

2) $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ $\rightarrow$ $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

3) $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$ $\rightarrow$ $3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

4) $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$ $\rightarrow$ $(2^3)^2 = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

5) $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$ $\rightarrow$ $(2x^2y^3)^2 = 2^2 \cdot (x^2)^2 \cdot (y^3)^2 = 4x^4y^6$

6) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$ $\rightarrow$ $\left(\frac{2xy^2}{3}\right)^2 = \frac{(2xy^2)^2}{3^2} = \frac{2^2 \cdot x^2 \cdot (y^2)^2}{9} = \frac{4x^2y^4}{9}$

7) $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ $\rightarrow$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

8) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$ $\rightarrow$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

9) $\alpha^0 = 1$, $\alpha^1 = \alpha$ $\rightarrow$ $5^0 = 1$, $2^1 = 2$

ΜΕΡΟΣ 2ο : ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Οι ταυτότητες χρησιμοποιούνται για να βρούμε το ανάπτυγμα μιας παράστασης, ή για να την μετατρέψουμε σε γινόμενο.

1) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

► $25x^2-9=(5x)^2-3^2=(5x+3)(5x-3)$

2) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

► $(3x+2)^2=(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot 2+2^2=9x^2+12x+4$

3) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

► $(2x-3)^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot 3+3^2=4x^2-12x+9$

4) $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

► $(x+1)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3=x^3+3x^2+3x+1$

5) $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

► $(x-3)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2-3^3=x^3-9x^2+27x-27$

6) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

► $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)=(x-2)(x^2+2x+4)$

7) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

► $8x^3+1=(2x)^3+1^3=(2x+1)\left[(2x)^2-(2x)\cdot 1+1^2\right]=(2x+1)(4x^2-2x+1)$

8) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, ή $\alpha=\beta=\gamma$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

► $x-2+x+1+1-2x=0$, άρα $(x-2)^3+(x+1)^3+(1-2x)^3=3(x-2)(x+1)(1-2x)$

Σημείωση

Σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και οι παρακάτω ταυτότητες:

9) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

10) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

11) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$

12) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$ ή $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

13) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

14) Για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$: $x^\nu-y^\nu=(x-y)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}y+\ldots+xy^{\nu-2}+y^{\nu-1})$

15) Για ν περιττό: $x^\nu+y^\nu=(x+y)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}y+\ldots-xy^{\nu-2}+y^{\nu-1})$

16) Για ν άρτιο ισχύει: $x^\nu-y^\nu=(x+y)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}y+\ldots+xy^{\nu-2}-y^{\nu-1})$

ΜΕΡΟΣ 3ο : ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α Εξισώσεις 1ου βαθμού

Είναι εξισώσεις της μορφής $\alpha x+\beta=0$, όπου $\alpha,\beta\in R$. Στις εξισώσεις αυτές μετά τις πράξεις και τις αναγωγές όμοιων όρων καταλήγουμε στη μορφή $\alpha x=\beta$.

1) Αν $\alpha\neq 0$, τότε διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και η εξίσωση έχει μια λύση, την $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

- $3(2-x)=1\Leftrightarrow 6-3x=1\Leftrightarrow -3x=1-6\Leftrightarrow -3x=-5\Leftrightarrow \dfrac{-3x}{-3}=\dfrac{-5}{-3}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

  Άρα η εξίσωση έχει μια μόνο λύση, την $x=\dfrac{5}{3}$.

2) Αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

- $3(x+2)-2x=x-1\Leftrightarrow 3x+6-2x=x-1\Leftrightarrow 3x-2x-x=-1-6\Leftrightarrow 0=-7$

  Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

3) Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$, η εξίσωση είναι αόριστη, δηλαδή έχει άπειρες λύσεις.

- $2(x-1)-3(x+2)=-x-8\Leftrightarrow 2x-2-3x-6=-x-8\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2x-3x+x=-8+2+6\Leftrightarrow 0x=0$. Άρα η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Β Εξισώσεις 1ου βαθμού κλασματικές

Είναι εξισώσεις που περιέχουν κλάσματα. Οι εξισώσεις αυτές μετά την απαλοιφή των παρονομαστών καταλήγουν στην προηγούμενη μορφή.

- $\dfrac{-x+1}{2}-\dfrac{-x-3}{4}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 12\cdot\dfrac{-x+1}{2}-12\cdot\dfrac{-x-3}{4}=12\cdot\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 6(-x+1)-3(-x-3)=8\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -6x+6+3x+9=8\Leftrightarrow -6x+3x=8-6-9\Leftrightarrow -3x=-7\Leftrightarrow \dfrac{-3x}{-3}=\dfrac{-7}{-3}\Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$

Γ Εξισώσεις 2ου βαθμού

Είναι εξισώσεις της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta=\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\gamma$ και έχουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\Delta<0$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες (Αδύνατη στο R).

- Για την εξίσωση $x^2+x+1=0$, η $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=1-4=-3<0$, επομένως είναι αδύνατη.

2) Αν $\Delta=0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες $\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

- Για την εξίσωση $x^2-4x+4=0$, η $\Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 4=16-16=0$, άρα έχει μια ρίζα διπλή $\rho=-\dfrac{-4}{2\cdot 1}=2$.

3) Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες $\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

- Για την εξίσωση $-2x^2 - 4x - 1 = 0$, η $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 16 - 8 = 8 > 0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:
$$\rho_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{8}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{-4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{-4} = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{-2}.$$
Επομένως $\rho_1 = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{-2} = \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{2}$ και $\rho_2 = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{-2} = \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{2}$.

<u>Σ η μ ε ί ω σ η</u>

Αν λείπει κάποιος όρος, τότε η εξίσωση λέγεται ελλιπής. Την λύνουμε με τον ίδιο τρόπο, αφού συμπληρώσουμε τον όρο που λείπει με μηδέν.

- Για την εξίσωση $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 0 = 0$, η $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 4 > 0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:
$\rho_{1,2} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm 2}{2}$. Άρα $\rho_1 = \dfrac{2-2}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$ και $\rho_2 = \dfrac{2+2}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$.
<u>2ος τρόπος</u> : $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- Για την εξίσωση $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 0x - 2 = 0$, η $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 8 > 0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες:
$\rho_{1,2} = \dfrac{0 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \dfrac{\pm\sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \dfrac{\pm 2\sqrt{2}}{2} = \pm\sqrt{2}$. Άρα $\rho_1 = -\sqrt{2}$ και $\rho_2 = \sqrt{2}$.
<u>2ος τρόπος</u> : $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.
- Για την εξίσωση $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 0x + 1 = 0$, η $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$, άρα είναι αδύνατη.
<u>2ος τρόπος</u> : $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη, διότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $x^2 \geq 0$.

Δ Εξισώσεις 2ου βαθμού κλασματικές

Είναι εξισώσεις που περιέχουν κλάσματα, στα οποία οι αριθμητές και οι παρονομαστές είναι πολυώνυμα. Τρέπουμε τους παρονομαστές σε γινόμενα πολυωνύμων 1ου βαθμού, βγάζοντας κοινό παράγοντα, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες, ή για το τριώνυμο 2ου βαθμού:

- Αν $\Delta > 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
- Αν $\Delta = 0$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho)^2$

Βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών, που είναι το γινόμενο του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου των αριθμών που εμφανίζονται στους παρονομαστές και των πολυωνύμων με το μεγαλύτερο εκθέτη που εμφανίζονται στους παρονομαστές.

Γράφουμε ότι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο πρέπει να είναι διάφορο του μηδενός και βρίσκουμε τους περιορισμούς που πρέπει να ισχύουν ώστε να έχει λύση η εξίσωση.
Μετά την απαλοιφή των παρονομαστών καταλήγουμε σε εξίσωση της προηγούμενης μορφής, οι λύσεις της οποίας καθορίζονται και από τους περιορισμούς που αναφέραμε προηγουμένως.

► $\frac{3x-1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2-4}=0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-2}-\frac{x+2}{x^2-2^2}=0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-2}-\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=0$

Ε.Κ.Π $=(x+2)(x-2)\neq 0$, άρα πρέπει $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ και $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$.

Είναι $(x+2)(x-2)\frac{3x-1}{x-2}-(x+2)(x-2)\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=(x+2)(x-2)\cdot 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(3x-1)-x-2=0 \Leftrightarrow 3x^2-x+6x-2-x-2=0 \Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0$

Είναι $\Delta=4^2-4\cdot 3\cdot(-4)=16+48=64>0$, άρα έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, $\rho_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2\cdot 3}=\frac{-4\pm 8}{6}\cdot$ Άρα $\rho_1=\frac{-4-8}{6}=\frac{-12}{6}=-2$, απορρίπτεται, λόγω του περιορισμού $x\neq -2$ και $\rho_2=\frac{-4+8}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, δεκτή.

Ε Εξισώσεις ανωτέρου του 2ου βαθμού

Τρέπουμε το πολυώνυμο σε γινόμενο πολυωνύμων 1ου και 2ου βαθμού, με ένα από τους παρακάτω τρόπους:

1) Βγάζουμε κοινό παράγοντα από όλους τους όρους, αν υπάρχει.

► $x^3+x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x^2+x+1)=0$

Άρα $x=0$, ή $x^2+x+1=0$, αδύνατη, διότι $\Delta=-3<0$.

2) Βγάζουμε κοινό παράγοντα κατά ομάδες, αν είναι δυνατό.

► $x^3-x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)+(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+1)=0$

Άρα $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, ή $x^2+1=0$, αδύνατη, διότι $\Delta=-4<0$.

3) Χρησιμοποιούμε τις ταυτότητες.

► $x^4-1=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-1^2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+1)=0$

Άρα $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=\pm 1$, ή $x^2+1=0$, αδύνατη, διότι $\Delta=-4<0$.

<u>2ος τρόπος</u> : $x^4-1=0 \Leftrightarrow x^4=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{1} \Leftrightarrow x=\pm 1$

► $x^3-27=0 \Leftrightarrow x^3-3^3=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+3^2)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9)=0$

Άρα $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$,ή $x^2+3x+9=0$, αδύνατη, διότι $\Delta=-27<0$.

<u>2ος τρόπος</u> : $x^3-27=0 \Leftrightarrow x^3=27 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{3^3} \Leftrightarrow x=3$

► $x^3+125=0 \Leftrightarrow x^3+5^3=0 \Leftrightarrow (x+5)(x^2-5x+5^2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+5)(x^2-5x+25)=0$ Άρα $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$, ή $x^2-5x+25=0$, αδύνατη, διότι $\Delta=-75<0$.

<u>2ος τρόπος</u> : $x^3+125=0 \Leftrightarrow x^3=-125 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-125} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{(-5)^3} \Leftrightarrow x=-5$

► Είναι $x-2+x+1+1-2x=0$, άρα (λόγω της ταυτότητας 8) έχουμε:

$(x-2)^3+(x+1)^3+(1-2x)^3=0 \Leftrightarrow 3(x-2)(x+1)(1-2x)=0$.

Άρα $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, ή $1-2x=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\cdot$

4) Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει μια τουλάχιστον ακέραια ρίζα ρ, μπορούμε χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner, <u>αφού προηγουμένως γράψουμε το πολυώνυμο στην πλήρη του μορφή συμπληρώνοντας τους όρους που λείπουν με μηδέν</u>, να το τρέψουμε σε γινόμενο πολυωνύμων 1ου και ανωτέρου του 1ου βαθμού. Πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου.
Το πολυώνυμο στο τέλος γράφεται $P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x)$, όπου $Q(x)$ πολυώνυμο βαθμού κατά ένα μικρότερου από το $P(x)$. Για το $P(x)=x^3-6x^2+11x-6$ σταθερός όρος είναι το 6, πιθανές ακέραιες ρίζες οι $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ και από το παρακάτω σχήμα το πολυώνυμο γράφεται $P(x)=(x-1)(x^2-5x+6)$.

Συντελεστής του x^3	Συντελεστής του x^2	Συντελεστής του x	Σταθερός όρος	Πιθανή ακέραιη ρίζα
1	−6	11	−6	1
	$1\cdot1$ 1	$(-5)\cdot1$ −5	$6\cdot1$ 6	
1	−5 (−6+1)	6 (11−5)	0 (−6+6)	
Συντελεστής του x^2	Συντελεστής του x	Σταθερός αριθμός		Πολυώνυμο x−1

Πολυώνυμο x^2-5x+6

► Για την εξίσωση $x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3+0x^2+0x+1=0$ πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί ±1. Άρα, από το σχήμα Horner, η εξίσωση γίνεται $(x+1)(x^2-x+1)=0$.

1	0	0	1	-1
	-1	1	-1	
1	-1	1	0	

Επομένως $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, ή $x^2-x+1=0$, αδύνατη, διότι $\Delta=-3<0$.

<u>2ος τρόπος</u> : $x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3=-1 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-1} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{(-1)^3} \Leftrightarrow x=-1$

<u>3ος τρόπος</u> : $x^3+1=0 \Leftrightarrow x^3+1^3=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0$ κ.λ.π

Για πολυώνυμα 4ου βαθμού και άνω, επαναλαμβάνουμε το σχήμα Horner.

► Για την εξίσωση $x^4+x^3-x^2+x-2=0$, πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί $\pm1, \pm2$. Άρα, από το σχήμα Horner η εξίσωση γίνεται $(x-1)(x^3+2x^2+x+2)=0$.

1	1	-1	1	-2	1
	1	2	1	2	
1	2	1	2	0	

Επομένως $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$, ή $x^3+2x^2+x+2=0$
Πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί $\pm1, \pm2$. Άρα, από το σχήμα Horner η εξίσωση γίνεται $(x+2)(x^2+1)=0$.

1	2	1	2	-2
	-2	0	-2	
1	0	1	0	

Άρα $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$, ή $x^2+1=0$, αδύνατη διότι $\Delta=-4<0$.
Επομένως οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί $x=1$ και $x=-2$.

Το σχήμα Horner χρησιμοποιείται και στα πολυώνυμα 2ου βαθμού.

► Για την εξίσωση $x^2-6x-7=0$, πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί $\pm1, \pm7$. Άρα, από το σχήμα Horner η εξίσωση γίνεται $(x+1)(x-7)=0$.
Άρα $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, ή $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$.

1	-6	-7	-1
	-1	7	
1	-7	0	

5) Αν η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (διτετράγωνη), θέτουμε $x^2=y$, οπότε $x^4=y^2$ και η εξίσωση γίνεται $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$. Λύνουμε την εξίσωση αυτή και στη συνέχεια από την ισότητα $x^2=y$ βρίσκουμε τις τιμές του x.

► Για την εξίσωση $x^4-2x^2-8=0$, θέτω $x^2=y$, οπότε $x^4=y^2$ και η εξίσωση γίνεται $y^2-2y-8=0$, με $\Delta=36>0$ και ρίζες $\rho_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\frac{2\pm6}{2}$, οπότε $\rho_1=\frac{2-6}{2}=\frac{-4}{2}=-2$, $\rho_2=\frac{2+6}{2}=\frac{8}{2}=4$.
Από την $x^2=y$ έχουμε $x^2=-2$, αδύνατη και $x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x=\pm2$.

► Για την εξίσωση $x^4-2x^2+1=0$, θέτω $x^2=y$, οπότε $x^4=y^2$ και η εξίσωση γίνεται $y^2-2y+1=0$, με $\Delta=0$ και ρίζα $\rho=-\frac{-2}{2\cdot1}=\frac{2}{2}=1$ διπλή.
Από την $x^2=y$ έχουμε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=\pm1$.

► Για την εξίσωση $x^4+x^2+1=0$, θέτω $x^2=y$, οπότε $x^4=y^2$ και η εξίσωση γίνεται $y^2+y+1=0$, με $\Delta=-3<0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΣΤ Εξισώσεις ανωτέρου του 2ου βαθμού κλασματικές

Λύνονται όπως οι κλασματικές εξισώσεις 2ου βαθμού.

ΜΕΡΟΣ 4ο : ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Α Ανισώσεις 1ου βαθμού

Λύνονται όπως οι εξισώσεις 1ου βαθμού. Αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι αρνητικός αριθμός, όταν διαιρέσουμε με αυτόν, η φορά της ανίσωσης αλλάζει.

- $3x-1>2 \Leftrightarrow 3x>2+1 \Leftrightarrow 3x>3 \Leftrightarrow \frac{3x}{3}>\frac{3}{3} \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow x\in(1,+\infty)$
- $x-7\le 2x-1 \Leftrightarrow x-2x\le -1+7 \Leftrightarrow -x\le 6 \Leftrightarrow \frac{-x}{-1}\ge\frac{6}{-1} \Leftrightarrow x\ge -6 \Leftrightarrow x\in[-6,+\infty)$
- $6x-1<2 \Leftrightarrow 6x<2+1 \Leftrightarrow 6x<3 \Leftrightarrow \frac{6x}{6}<\frac{3}{6} \Leftrightarrow x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$
- $2x-1>3(x+2)-x \Leftrightarrow 2x-1>3x+6-x \Leftrightarrow 2x-3x+x>6+1 \Leftrightarrow 0>7$, αδύνατη.
- $6(x+3)>2(3x+1) \Leftrightarrow 6x+18>6x+2 \Leftrightarrow 6x-6x>2-18 \Leftrightarrow 0>-16$

  Η παραπάνω ανίσωση ισχύει για κάθε $x\in R$, άρα έχει άπειρες λύσεις.

Β Ανισώσεις 1ου βαθμού κλασματικές

Λύνονται όπως οι κλασματικές εξισώσεις 1ου βαθμού και μετά την απαλοιφή των παρονομαστών καταλήγουν στην προηγούμενη μορφή.

- $\frac{-x+1}{2}-\frac{-x-3}{4}<\frac{1}{3} \Leftrightarrow 12\cdot\frac{-x+1}{2}-12\cdot\frac{-x-3}{4}<12\cdot\frac{1}{3} \Leftrightarrow 6(-x+1)-3(-x-3)<4 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow -6x+6+3x+9<4 \Leftrightarrow -6x+3x<4-6-9 \Leftrightarrow -3x<-11 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3}>\frac{-11}{-3} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x>\frac{11}{3} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{11}{3},+\infty\right)$
- $2x+\frac{x}{3}\le\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 6\cdot 2x+6\cdot\frac{x}{3}\le 6\cdot\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow 12x+2x\le 3(x-1) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 12x+2x\le 3x-3 \Leftrightarrow 12x+2x-3x\le -3 \Leftrightarrow 11x\le -3 \Leftrightarrow \frac{11x}{11}\le\frac{-3}{11} \Leftrightarrow x\le -\frac{3}{11} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{3}{11}\right]$
- $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\ge 1 \Leftrightarrow 6\cdot\frac{3x-1}{2}-6\cdot\frac{x-2}{3}\ge 6\cdot 1 \Leftrightarrow 3(3x-1)-2(x-2)\ge 6 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 9x-3-2x+4\ge 6 \Leftrightarrow 9x-2x\ge 6+3-4 \Leftrightarrow 7x\ge 5 \Leftrightarrow \frac{7x}{7}\ge\frac{5}{7} \Leftrightarrow x\ge\frac{5}{7} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x\in\left[\frac{5}{7},+\infty\right)$

Γ Ανισώσεις 2ου βαθμού

Για $\alpha,\beta,\gamma \in R$, και $\alpha \neq 0$, είναι της μορφής:

► $\alpha x^2+\beta x+\gamma \geq 0$ ► $\alpha x^2+\beta x+\gamma \leq 0$ ► $\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0$ ► $\alpha x^2+\beta x+\gamma < 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες του τριωνύμου, αν έχει και κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων. Για τον πίνακα προσήμων έχουμε τις περιπτώσεις:

1) Αν $\Delta < 0$, το τριώνυμο παίρνει το πρόσημο του α (ο συντελεστής του x^2) για κάθε $x \in R$.

► Για το τριώνυμο $f(x)=x^2+x+1$ έχουμε $\Delta=-3<0$, άρα δεν έχει ρίζες. Από τον πίνακα προσήμων έχουμε τις λύσεις των ανισώσεων:

- $x^2+x+1 \geq 0 \rightarrow x \in R$, $x^2+x+1>0$
- $x^2+x+1>0 \rightarrow x \in R$
- $x^2+x+1 \leq 0 \rightarrow$ Αδύνατη
- $x^2+x+1<0 \rightarrow$ Αδύνατη

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	+	

2) Αν $\Delta = 0$, το τριώνυμο παίρνει το πρόσημο του α (ο συντελεστής του x^2) για κάθε $x \in R$, εκτός από τη ρίζα του $\rho=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, όπου μηδενίζεται.

► Για το τριώνυμο $f(x)=-x^2+4x-4$ έχουμε $\Delta=0$, άρα έχει μια ρίζα διπλή $\rho=-\dfrac{4}{2\cdot(-1)}=2$. Από τον πίνακα προσήμων έχουμε τις λύσεις των ανισώσεων:

- $-x^2+4x-4 \geq 0 \rightarrow x=2$
- $-x^2+4x-4>0 \rightarrow$ Αδύνατη
- $-x^2+4x-4 \leq 0 \rightarrow x \in R$
- $-x^2+4x-4<0 \rightarrow x \in (-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		−	0	−	

3) Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο παίρνει το πρόσημο του α (ο συντελεστής του x^2), εκτός των ριζών και αντίθετο του α ανάμεσα στις ρίζες του $\rho_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

► Για το τριώνυμο $f(x)=x^2-3x+2$ έχουμε $\Delta=1>0$, άρα έχει δύο ρίζες, τις $\rho_{1,2}=\dfrac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{3\pm 1}{2}$, οπότε $\rho_1=\dfrac{3-1}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ και $\rho_2=\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.
Από τον πίνακα προσήμων έχουμε τις λύσεις των ανισώσεων:

- $x^2-3x+2 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty,1]\cup[2,+\infty)$
- $x^2-3x+2>0 \rightarrow x \in (-\infty,1)\cup(2,+\infty)$
- $x^2-3x+2 \leq 0 \rightarrow x \in [1,2]$
- $x^2-3x+2<0 \rightarrow x \in (1,2)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Δ Ανισώσεις 2ου βαθμού κλασματικές

Οι ανισώσεις αυτές, για $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa \in R$ και $\gamma x+\delta \neq 0$, είναι της μορφής:

► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \geq \kappa$ ► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \leq \kappa$ ► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} > \kappa$ ► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} < \kappa$

Μεταφέρουμε τον αριθμό κ από το δεύτερο μέλος στο πρώτο και αφού τρέψουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα, οι παραπάνω μορφές καταλήγουν στις:

► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \geq 0$ ► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \leq 0$ ► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} > 0$ ► $\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} < 0$

Οι παραπάνω ανισώσεις έχουν ίδιες λύσεις με τις:

► $(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) \geq 0$ ► $(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) \leq 0$

► $(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) > 0$ ► $(\alpha x+\beta)(\gamma x+\delta) < 0$

που είναι ανισώσεις 2ου βαθμού (ή 1ου αν $\alpha=0$, ή $\gamma=0$) αρκεί από τις λύσεις αυτές να εξαιρέσουμε τη ρίζα της εξίσωσης $\gamma x+\delta=0$.

► $\dfrac{2x+1}{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}-1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1-x+1}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x-1) \leq 0 \\ x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1\end{cases}$

Η τελευταία ανίσωση είναι 2ου βαθμού με ρίζες: $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x+2)(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων προκύπτει ότι $x \in [-2,1]$ και εφόσον $x \neq 1$, για την αρχική ανίσωση τελικά $x \in [-2,1)$.

<u>Σημείωση</u>

Τα πολυώνυμα 1ου βαθμού, δεξιά από τη ρίζα τους έχουν το πρόσημο που έχει ο συντελεστής του x και αριστερά το αντίθετο. Έτσι, στην παραπάνω ανίσωση θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε το διπλανό πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Η λύση της ανίσωσης είναι $x \in [-2,1)$.

► Για την ανίσωση $\dfrac{3}{x-2} \leq 0$, εφόσον ο αριθμητής είναι θετικός αριθμός, για να ισχύει η ανίσωση, πρέπει $x-2<0 \Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$.

<u>Σημείωση</u>

Τα πρόσημα των πολυωνύμων, στα διαστήματα που καθορίζονται από τις ρίζες τους, μπορούμε να τα βρούμε δίνοντας τιμές στο x από κάθε διάστημα στο πολυώνυμο. Π.χ το πολυώνυμο $x+2$ στο διάστημα $(-2,1)$ είναι θετικό εφόσον για $x=0 \in (-2,1)$ γίνεται $0+2=2>0$.

Ε Ανισώσεις ανωτέρου του 2ου βαθμού

Είναι ανισώσεις που περιέχουν πολυώνυμα ανωτέρου του 2ου βαθμού, ή γινόμενα πολυωνύμων 1ου, 2ου και ανωτέρου του 2ου βαθμού. Τρέπουμε τα ανωτέρου του 2ου βαθμού πολυώνυμα σε γινόμενα πολυωνύμων 1ου και 2ου βαθμού, βρίσκουμε τις ρίζες των πολυωνύμων αυτών και στη συνέχεια κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων για τα πολυώνυμα αυτά και το γινόμενό τους.

► Για την ανίσωση $x^3-2x^2-5x+6\geq 0$, πιθανές ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι αριθμοί ± 1, $\pm 2, \pm 3, \pm 6$. Άρα, από το σχήμα Horner η ανίσωση γίνεται $(x-1)(x^2-x-6)\geq 0$.

1	-2	-5	6	1
	1	-1	-6	
1	-1	-6	0	

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $x^2-x-6=0$, με $\Delta=25>0$ και $\rho_1=-2, \rho_2=3$

Από τον πίνακα προσήμων προκύπτει ότι: $x\in[-2,1]\cup[3,+\infty)$

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x^2-x-6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

► Για την ανίσωση $(x-1)(-x+2)(x^2+x+1)(-x^2+2x-1)(x^2-5x+6)<0$, έχουμε:

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$
- $x^2+x+1=0$
  $\Delta=-3<0$, αδύνατη
- $-x^2+2x-1=0$, $\Delta=0$
  $x=1$ διπλή
- $x^2-5x+6=0$
  $\Delta=1>0$ και
  $x=2, x=3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-x^2+2x-1$		$-$	0	$-$		$-$		$-$	
x^2-5x+6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προσήμων προκύπτει ότι $x\in(1,2)\cup(2,3)$.

ΣΤ Ανισώσεις ανωτέρου του 2ου βαθμού κλασματικές

Λύνονται όπως οι κλασματικές ανισώσεις 2ου βαθμού.

► $\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-3}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-2)(x-3)\geq 0\\ x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3\end{cases}$ ....

ΜΕΡΟΣ 5ο : ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Α Συστήματα εξισώσεων

α) Συστήματα εξισώσεων με ένα άγνωστο

Λύνουμε την πιο εύκολη από τις εξισώσεις και στη συνέχεια εξετάζουμε ποιες από τις λύσεις που βρήκαμε επαληθεύουν τις υπόλοιπες. Αυτές είναι οι λύσεις του συστήματος. Αν καμία από τις λύσεις δεν επαληθεύει όλες τις εξισώσεις, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

► $\left.\begin{array}{c} 2x-6=0 \\ 4x-12=0 \\ x^2-5x+6=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

Από την (1) έχουμε $2x-6=0 \Leftrightarrow 2x=6 \Leftrightarrow x=3$. Για την τιμή αυτή:

Η (2) επαληθεύεται, διότι $4\cdot 3-12=0 \Leftrightarrow 12-12=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Η (3) επαληθεύεται, διότι $3^2-5\cdot 3+6=0 \Leftrightarrow 9-15+6=0 \Leftrightarrow 0=0$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι η $x=3$.

(Μπορούμε να λύσουμε όλες τις εξισώσεις και να βρούμε την κοινή λύση)

β) Συστήματα δύο εξισώσεων 1ου βαθμού με δύο αγνώστους

Η πιο συνηθισμένη μέθοδος λύσης των συστημάτων αυτών είναι η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών. Στη μέθοδο αυτή επιλέγουμε ένα άγνωστο και επιδιώκουμε ο άγνωστος στις δύο εξισώσεις να έχει αντίθετους συντελεστές, πολλαπλασιάζοντας, αν χρειαστεί, με κατάλληλο αριθμό τη μια ή και τις δύο εξισώσεις. Τα συστήματα αυτού του είδους έχουν μια λύση, ή είναι αδύνατα, ή έχουν άπειρες λύσεις.

► $\left.\begin{array}{r} 2\alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ (-1) \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2\alpha+\beta=0 \\ \underline{-\alpha-\beta=1} \end{array}\right\}$ Άρα $\alpha=1$, οπότε $1+\beta=-1 \Leftrightarrow \beta=-2$.

$\alpha=1$

► $\left.\begin{array}{r} \alpha-2\beta=-2 \\ 2\alpha-4\beta=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-2) \\ \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2\alpha+4\beta=4 \\ \underline{2\alpha-4\beta=1} \end{array}\right\}$

$0=5$ αδύνατη, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

► $\left.\begin{array}{r} \alpha+\beta=1 \\ 2\alpha+2\beta=2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-2) \\ \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -2\alpha-2\beta=-2 \\ \underline{2\alpha+2\beta=2} \end{array}\right\}$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

$0=0$

Έστω $\beta=\kappa\in R$. Τότε $\alpha+\beta=1 \Leftrightarrow \alpha+\kappa=1 \Leftrightarrow \alpha=1-\kappa$ και οι άπειρες λύσεις είναι της μορφής $(\alpha,\beta)=(1-\kappa,\kappa), \kappa\in R$.

γ) Συστήματα δύο εξισώσεων 1ου βαθμού και 2ου βαθμού με δύο αγνώστους

Αν έχουμε σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, στο οποίο η μια εξίσωση είναι 1ου βαθμού και η άλλη 2ου βαθμού, τότε λύνουμε την πρωτοβάθμια ως προς ένα άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη.

► $\left.\begin{array}{r} x-y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=y+1 \\ (y+1)^2+y^2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=y+1 \\ y^2+2y+1+y^2=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=y+1 \\ 2y^2+2y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$

Από την (2) έχουμε: $2y^2+2y=0 \Leftrightarrow 2y(y+1)=0$.

Άρα $y=0$, ή $y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$. Τότε από την (1) έχουμε:

Για $y=0$ είναι $x=0+1=1$ και για $y=-1$ είναι $x=-1+1=0$.

Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x,y)=(1,0)$ και $(x,y)=(0,-1)$.

Σ η μ ε ί ω σ η

Αν η εξίσωση 2ου βαθμού που προκύπτει κατά τη λύση του συστήματος είναι αδύνατη, τότε το σύστημα είναι αδύνατο, ενώ αν έχει μια μόνο ρίζα διπλή, τότε το σύστημα έχει μια μόνο λύση.

Β Συστήματα ανισώσεων

Λύνουμε κάθε μια ανίσωση χωριστά και στη συνέχεια βρίσκουμε τις κοινές λύσεις, αν υπάρχουν.

► $\left.\begin{array}{r} 2x-6\ge 0 \\ -3x-12\le 0 \\ x^2-6x+5>0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$

(1) $2x-6\ge 0 \Leftrightarrow 2x\ge 6 \Leftrightarrow x\ge 3 \Leftrightarrow x\in[3,+\infty)$

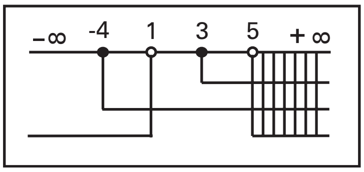
(2) $-3x-12\le 0 \Leftrightarrow -3x\le 12 \Leftrightarrow \dfrac{-3x}{-3}\ge\dfrac{12}{-3} \Leftrightarrow x\ge -4 \Leftrightarrow x\in[-4,+\infty)$

(3) Είναι $\Delta=16>0$ και $\rho_1=1$, $\rho_2=5$.

Άρα $x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	−	0	+	

Από τις (1), (2), (3) έχουμε, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, $x\in(5,+\infty)$.



Σ η μ ε ί ω σ η

Οι κοινές λύσεις βρίσκονται σε εκείνα τα διαστήματα, στα οποία το πλήθος των παράλληλων γραμμών είναι ίσο με το πλήθος των ανισώσεων.

ΜΕΡΟΣ 6ο : ΡΙΖΕΣ

Α Ιδιότητες των ριζών

Για κάθε $\kappa, \nu \in N^*, \kappa \geq 2, \nu \geq 2$ και $\alpha, \beta \geq 0$, ισχύει:

1) $\sqrt[\nu]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta^\nu, \nu \geq 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

2) $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \quad \rightarrow \quad \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2 \cdot 3} = \sqrt[5]{6}$

3) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}, \beta > 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

4) $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}, \alpha > 0, \mu \in Z^* \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$

5) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\kappa]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \kappa]{\alpha} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2} = \sqrt[6]{2}$

6) $\sqrt[\nu \cdot \kappa]{\alpha^{\mu \cdot \kappa}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^3} = \sqrt{5}$

7) $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha| \quad \rightarrow \quad \sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$

Β Πρόσθεση – Αφαίρεση – Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ριζών

α) Για να προσθέσουμε, ή να αφαιρέσουμε ρίζες, πρέπει να έχουν τον ίδιο δείκτη και την ίδια παράσταση κάτω από τη ρίζα (υπόριζη ποσότητα). Προσθέτουμε τότε, ή αφαιρούμε αντίστοιχα το πλήθος των ριζών αυτών.

► $3\sqrt[4]{2} + 5\sqrt[4]{2} = 8\sqrt[4]{2}$ ► $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

β) Για να πολλαπλασιάσουμε, ή να διαιρέσουμε ρίζες, πρέπει να έχουν τον ίδιο δείκτη, όπως φαίνεται στα παραπάνω παραδείγματα των ιδιοτήτων (2), (3).

Αν δεν έχουν τον ίδιο δείκτη, τότε βρίσκουμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των δεικτών και τους πολλαπλασιάζουμε με κατάλληλο αριθμό, ώστε οι ρίζες να έχουν τον ίδιο δείκτη. Τον αριθμό αυτό με τον οποίο πολλαπλασιάσαμε, τον βάζουμε εκθέτη στην υπόριζη ποσότητα.

► $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2} \cdot \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{3^3} = \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{4 \cdot 5 \cdot 27} = \sqrt[6]{540}$

Γ Εισαγωγή αριθμού σε ρίζα – Εξαγωγή αριθμού από ρίζα

α) Σε γινόμενο αριθμού με ρίζα, για να μπει ο αριθμός μέσα στη ρίζα υψώνεται στον δείκτη της ρίζας και πολλαπλασιάζεται με την υπόριζη ποσότητα.

► $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$

β) Για να βγει ένας αριθμός έξω από τη ρίζα, πρέπει ο αριθμός αυτός να είναι δύναμη με εκθέτη το δείκτη της ρίζας και η υπόριζη ποσότητα να είναι γινόμενο. Τότε ο αριθμός βγαίνει έξω από τη ρίζα χωρίς τον εκθέτη του.

► $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$

Δ Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό.

α) Ο άρρητος παρονομαστής ενός κλάσματος μετατρέπεται σε ρητό, αν πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλη ρίζα τον αριθμητή και τον παρονομαστή, έτσι ώστε ο παρονομαστής να γίνει δύναμη με εκθέτη το δείκτη της ρίζας.

► $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

► $\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$

β) Αν ο παρονομαστής του κλάσματος είναι άθροισμα ή διαφορά δύο τετραγωνικών ριζών, τότε πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή.

► $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

► $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{5-2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

Ε Εύρεση ή απλοποίηση ρίζας

Για να βρούμε, αν υπάρχει, ή για να απλοποιήσουμε, εφόσον απλοποιείται, μια ρίζα, πρέπει να γράψουμε τον αριθμό στην υπόριζη ποσότητα σαν γινόμενο δυνάμεων. Αυτό γίνεται τρέποντας τον αριθμό αυτό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν μοναδικό διαιρέτη τον εαυτό τους και τη μονάδα, με εξαίρεση το 1, δηλαδή οι αριθμοί 2, 3, 5, 7, 11, 13, …
Διαιρούμε τον αριθμό στην υπόριζη ποσότητα με τον μικρότερο πρώτο αριθμό εφόσον διαιρείται ακριβώς. Αν δεν διαιρείται, δοκιμάζουμε τον επόμενο πρώτο αριθμό, κ.λ.π. Τους διαιρέτες τους γράφουμε δεξιά, ενώ τα πηλίκα της διαίρεσης αριστερά. Το γινόμενο των διαιρετών είναι ίσο με τον αριθμό που αναλύσαμε.

► $\sqrt{48}=\sqrt{2^4\cdot 3}=2^2\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

► $\sqrt{300}=\sqrt{2^2\cdot 3\cdot 5^2}=2\cdot 5\cdot\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

► $\sqrt{169}=\sqrt{13^2}=13$

► $\sqrt[3]{112}=\sqrt[3]{2^4\cdot 7}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2\cdot 7}=2\sqrt[3]{14}$

48	2	300	2	169	13	112	2
24	2	150	2	13	13	56	2
12	2	75	3	1		28	2
6	2	25	5			14	2
3	3	5	5			7	7
1		1				1	

ΣΤ Εξισώσεις με ρίζες

Για να λύσουμε εξισώσεις αυτής της μορφής, απομονώνουμε τη ρίζα στο ένα μέλος της εξίσωσης και υψώνουμε και τα δύο μέλη στον δείκτη της ρίζας.
Αν η εξίσωση περιέχει δύο ρίζες, τότε φροντίζουμε σε κάθε μέλος να υπάρχει μια ρίζα και στη συνέχεια υψώνουμε στον δείκτη της ρίζας

Στο τέλος πρέπει να ελέγχουμε αν οι λύσεις που βρήκαμε ικανοποιούν τους περιορισμούς και επαληθεύουν την εξίσωση.

► $\sqrt{2x^2-1}-x=x-3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}=x-3+x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1}=2x-3$ **(1)**

Εφόσον για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sqrt{2x^2-1} \geq 0$, άρα και $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ **(α)**

Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η $\sqrt{2x^2-1}$, πρέπει $2x^2-1 \geq 0$.

Είναι $\Delta = 8 > 0$ και $\rho_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 2} = \frac{\pm\sqrt{4 \cdot 2}}{4} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{\pm\sqrt{2}}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2-1$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ **(β)**

Από την **(1)** έχουμε $\sqrt{2x^2-1} = 2x-3 \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2-1})^2 = (2x-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-1 = 4x^2-12x+9 \Leftrightarrow 2x^2-1-4x^2+12x-9=0 \Leftrightarrow -2x^2+12x-10=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+6x-5=0$. Είναι $\Delta = 16 > 0$ και $\rho_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$.

Άρα $\rho_1 = \frac{-6-4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$ και $\rho_2 = \frac{-6+4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$.

Από τις τιμές αυτές μόνο η τιμή $x=5$ ικανοποιεί τους περιορισμούς **(α)**, **(β)**, ενώ η τιμή $x=1$ δεν ικανοποιεί τον περιορισμό **(α)**, διότι $1 \notin \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

Παρατηρούμε ότι για $x=5$ η αρχική εξίσωση $\sqrt{2x^2-1}-x=x-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot 5^2-1}-5=5-3 \Leftrightarrow \sqrt{49}-5=2 \Leftrightarrow 7-5=2 \Leftrightarrow 2=2$ επαληθεύεται.

Επομένως, η λύση της εξίσωσης είναι η $x=5$.

ΜΕΡΟΣ 7ο : ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Α Ιδιότητες των απολύτων τιμών

Για τις απόλυτες τιμές ισχύουν τα παρακάτω:

1) $|x| = \begin{cases} x & \text{αν} \quad x > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ -x & \text{αν} \quad x < 0 \end{cases}$ Π.χ $\begin{cases} |2| = 2 & \text{διότι} \quad 2 > 0 \\ |0| = 0 & \\ |-2| = -(-2) = 2 & \text{διότι} \quad -2 < 0 \end{cases}$

2) Για κάθε $x \in R$ και ν άρτιο, ισχύει $|x|^{\nu} = x^{\nu}$. Π.χ $|x|^2 = x^2$

3) Για κάθε $x \in R$ ισχύει $|x| \geq 0$ και $|x| \geq x$.

4) Για κάθε $\alpha \in R$, με $\alpha \geq 0$, ισχύει $|\varphi(x)| = \alpha \Leftrightarrow \varphi(x) = \pm\alpha$.

5) Για κάθε $\alpha \in R$, με $\alpha > 0$, ισχύει:

- $|\varphi(x)| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq \varphi(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \varphi(x) \in [-\alpha, \alpha]$
- $|\varphi(x)| \geq \alpha \Leftrightarrow \{\varphi(x) \leq -\alpha \text{ ή } \varphi(x) \geq \alpha\} \Leftrightarrow \varphi(x) \in (-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)$

Β Εξισώσεις με απόλυτες τιμές

Λύνονται όπως όλες οι εξισώσεις και στο τέλος χρησιμοποιούμε της ιδιότητα 4.

- $3|x| - 6 = 0 \Leftrightarrow 3|x| = 6 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$
- $|x-3| = 1 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 1$, άρα:
  $x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = -1 + 3 \Leftrightarrow x = 2$ και $x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 + 3 \Leftrightarrow x = 4$
- $|x-2| = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $|x+2| = -3$, αδύνατη διότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $|x+2| \geq 0$.
- $x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| - 2 = 0$ και θέτοντας $|x| = y \geq 0$, η εξίσωση γίνεται:
  $y^2 - y - 2 = 0$, που έχει $\Delta = 9 > 0$ και $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 2$.
  Άρα $|x| = -1$ αδύνατη και $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Γ Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Λύνονται όπως όλες οι ανισώσεις και στο τέλος χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 5.

- $4|x-2| - 1 \leq 3 \Leftrightarrow 4|x-2| \leq 3 + 1 \Leftrightarrow 4|x-2| \leq 4 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x - 2 \leq 1$
  Άρα $x - 2 \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -1 + 2 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 + 2 \Leftrightarrow x \leq 3$
  Επομένως $1 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [1,3]$.
  (Από την $-1 \leq x - 2 \leq 1$, μπορούμε να λύσουμε τη διπλή ανίσωση προσθέτοντας το 2 σε όλα τα μέλη της ανίσωσης, δηλαδή $-1 + 2 \leq x - 2 + 2 \leq 1 + 2 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$)

- $|x-2| \geq 1 \Leftrightarrow \{x-2 \leq -1 \text{ ή } x-2 \geq 1\} \Leftrightarrow \{x \leq -1+2 \text{ ή } x \geq 1+2\} \Leftrightarrow \{x \leq 1 \text{ ή } x \geq 3\} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

<u>Σημείωση</u>

Υπάρχουν και οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις ανισώσεων:

- $|x-3| \geq 0 \Leftrightarrow x \in R$
- $|x-3| > 0 \Leftrightarrow x \in R - \{3\}$
- $|x-3| \leq 0 \Leftrightarrow x = 3$
- $|x-3| < 0$ αδύνατη
- $|x-3| \geq -2 \Leftrightarrow x \in R, |x-3| > -2$
- $|x-3| > -2 \Leftrightarrow x \in R$
- $|x-3| \leq -2$ αδύνατη
- $|x-3| < -2$ αδύνατη

Δ Απαλοιφή του συμβόλου της απόλυτης τιμής

Για την απαλοιφή του συμβόλου της απόλυτης τιμής σε μια συνάρτηση, βρίσκουμε τις ρίζες της παράστασης που είναι μέσα στην απόλυτη τιμή και το πρόσημό της. Αν σε ένα διάστημα η παράσταση είναι θετική, τότε η απόλυτη τιμή της είναι η ίδια η παράσταση και αν είναι αρνητική, η απόλυτη τιμή της είναι η αντίθετη από την παράσταση που είναι μέσα στην απόλυτη τιμή.

- Για την $f(x) = |x-2|$ είναι $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \in (-\infty, 2] \\ x+2, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	

- Για την $f(x) = |x-1| + |x-3|$ είναι $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x−1		−	0	+		+	
x−3		−		−	0	+	

  - Αν $x \in (-\infty, 1]$, τότε:
    $f(x) = -x + 1 - x + 3 = -2x + 4$
  - Αν $x \in (1, 3)$, τότε:
    $f(x) = x - 1 - x + 3 = 2$
  - Αν $x \in [3, +\infty)$, τότε:
    $f(x) = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4, & x \in (-\infty, 1] \\ 2, & x \in (1, 3) \\ 2x-4, & x \in [3, +\infty) \end{cases}$$

- Για την $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ είναι $x^2 - 3x + 2 = 0$, με $\Delta = 1 > 0$ και $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \\ -x^2 + 3x - 2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

ΜΕΡΟΣ 8ο : ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α Εκθετικές εξισώσεις

Οι εκθετικές εξισώσεις είναι εξισώσεις της μορφής $\alpha^{g(x)} = \beta$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha > 0$.
Μετατρέπουμε τον αριθμό $\beta > 0$ σε δύναμη με βάση τον αριθμό α και η εξίσωση γίνεται $\alpha^{g(x)} = \alpha^{\kappa}$, οπότε $g(x) = \kappa$, με $\kappa \in R$, δηλαδή γνωστή εξίσωση.
Η περίπτωση ο αριθμός β να μην μπορεί να γίνει δύναμη με βάση τον αριθμό α, θα εξεταστεί στους λογαρίθμους.

- $2^x = 16 \Leftrightarrow 2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$ ► $5^x = 0$ αδύνατη   ► $5^x = -2$ αδύνατη
- $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{8}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2^3}{3^3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$
- $5^{x^2-3x} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5^{x^2-3x} = \frac{1}{5^2} \Leftrightarrow 5^{x^2-3x} = 5^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
  Είναι $\Delta = 1 > 0$ και $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$. Άρα $x = 1$ και $x = 2$.
- $3^{|x|} = 27 \Leftrightarrow 3^{|x|} = 3^3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$
- $2^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3 \cdot 2^x = -6 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$
- $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ και αν θέσουμε όπου $5^x = y > 0$, η εξίσωση γίνεται $y^2 - 6y + 5 = 0$, που έχει $\Delta = 16 > 0$ και $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 5$.
  Άρα $5^x = 1 \Leftrightarrow 5^x = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$ και $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Β Εκθετικές ανισώσεις

Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha \in R$, $\alpha > 0$ έχει πεδίο ορισμού το $A = R$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) Αν $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.
- Η ανίσωση $e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$, διότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα εφόσον έχει βάση τον αριθμό $e \approx 2,7 > 1$.

β) Αν $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\alpha^{x_1} > \alpha^{x_2}$.
- Η ανίσωση $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Leftrightarrow x > 1$, διότι η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα εφόσον έχει βάση το $\frac{1}{2}$ και $0 < \frac{1}{2} < 1$.

ΜΕΡΟΣ 9ο : ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Α Εισαγωγικές έννοιες

α) Λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση το θετικό αριθμό α, $\alpha \neq 1$, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον αριθμό α για να βρούμε το θ.
Δηλαδή $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$, όπου $\theta > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$.

β) Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση το 10 λέγεται δεκαδικός λογάριθμος του θετικού αριθμού θ και συμβολίζεται με $\log\theta$ και όχι $\log_{10}\theta$.
Δηλαδή $\log\theta = x \Leftrightarrow 10^x = \theta$, όπου $\theta > 0$.

γ) Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ με βάση τον άρρητο αριθμό $e \approx 2,7$ λέγεται φυσικός ή νεπέρειος λογάριθμος του θετικού αριθμού θ και συμβολίζεται με $\ln\theta$ και όχι $\ln_e\theta$. Δηλαδή $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$, όπου $\theta > 0$.

Β Ιδιότητες των λογαρίθμων

1) $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

2) $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$

3) $\log_\alpha\theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha\theta$

4) $\log_\alpha\alpha^\kappa = \kappa$

5) $\log_\alpha 1 = 0$

6) $\log_\alpha\alpha = 1$

7) Αν $\theta > 1$, τότε $\log_\alpha\theta > 0$

8) Αν $0 < \theta < 1$, τότε $\log_\alpha\theta < 0$

9) $\log_\alpha \theta = \dfrac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}$ (Τύπος για την αλλαγή της βάσης ενός λογάριθμου)

- $\log3 + 2\log4 - \log12 = \log3 + \log4^2 - \log12 = \log(3\cdot16) - \log12 = \log\dfrac{3\cdot16}{12} =$
  $= \log4 = \log2^2 = 2\log2$
- $2 = \log10^2 = \log100$
- $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$
- $3 = \ln e^3$
- $\log5 > 0$
- $\log\dfrac{1}{2} < 0$
- $\ln e > 0$
- $\log_2 5 = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2}$
- $\log_3 7 = \dfrac{\log7}{\log3}$
- $\log_3 7 = \dfrac{\ln7}{\ln3}$

Γ Λογαριθμικές Εξισώσεις

Ομάδα Α

Για να βρούμε τους λογάριθμους κάποιων αριθμών, εφαρμόζουμε τον ορισμό του λογάριθμου και καταλήγουμε σε εκθετική εξίσωση.

- $\log1 = x \Leftrightarrow 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = 10^0 \Leftrightarrow x = 0$, άρα $\log1 = 0$.

► $\log 100 = x \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2 \Leftrightarrow x = 2$, άρα $\log 100 = 2$.

► $\ln 1 = x \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$, άρα $\ln 1 = 0$.

► $\ln e = x \Leftrightarrow e^x = e^1 \Leftrightarrow x = 1$, άρα $\ln e = 1$.

► $\log_2 4 = x \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$, $\log_2 4 = 2$.

Ομάδα Β

Οι παρακάτω εξισώσεις λύνονται εφαρμόζοντας τον ορισμό του λογάριθμου, ή αντικαθιστώντας τον αριθμό με λογάριθμο, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 4.

► Για την εξίσωση $\log x = 1$ πρέπει $x > 0$.

Είναι $\log x = 1 \Leftrightarrow x = 10^1 = 10 > 0$, δεκτή.

2ος τρόπος : $\log x = 1 \Leftrightarrow \log x = \log 10 \Leftrightarrow x = 10 > 0$

► Για την εξίσωση $\log(x-2) = 1$, πρέπει $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Είναι $\log(x-2) = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 10^1 \Leftrightarrow x = 10 + 2 \Leftrightarrow x = 12 > 2$ δεκτή.

2ος τρόπος : $\log(x-2) = 1 \Leftrightarrow \log(x-2) = \log 10 \Leftrightarrow x - 2 = 10 \Leftrightarrow x = 10 + 2 = 12 > 2$

► Για την εξίσωση $\ln x = 2$, πρέπει $x > 0$.

Είναι $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 > 0$ δεκτή ($e \approx 2{,}7$).

2ος τρόπος : $\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2 > 0$

► Για την εξίσωση $\log_3{}^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$, πρέπει $x > 0$.

Θέτω $\log_3 x = y$, οπότε η εξίσωση γίνεται $y^2 - 3y + 2 = 0$. Είναι $\Delta = 1 > 0$ και $y = 1,\ y = 2$, άρα:

$\log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3 > 0$ δεκτή και $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Leftrightarrow x = 9 > 0$ δεκτή.

2ος τρόπος : Με την ίδια διαδικασία και καταλήγουμε στις εξισώσεις:

- $\log_3 x = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3 \Leftrightarrow x = 3 > 0$
- $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 3^2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9 > 0$

Ομάδα Γ

Στις εξισώσεις αυτές, άγνωστος είναι η βάση α του λογάριθμου, για την οποία έχουμε τον περιορισμό $0 < \alpha \neq 1$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό καταλήγουμε σε γνωστές εξισώσεις.

► Για την εξίσωση $\log_x 2 = 1$ πρέπει $0 < x \neq 1$.

Είναι $\log_x 2 = 1 \Leftrightarrow x = 2 > 0$ και $x = 2 \neq 1$, άρα δεκτή.

► Για την εξίσωση $\log_{x-2} 5 = 1$, πρέπει $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ και $x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Είναι $\log_{x-2} 5 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 5 \Leftrightarrow x = 5 + 2 \Leftrightarrow x = 7 > 2$ και $x = 7 \neq 3$, άρα δεκτή.

► Για την εξίσωση $\log_x 8 = 3$ πρέπει $0 < x \neq 1$.

Είναι $\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^3} = 2 > 0$ και $x = 2 \neq 1$, άρα δεκτή.

Σημείωση

Στις εκθετικές εξισώσεις υπάρχει μια περίπτωση που πρέπει να αναφερθεί εδώ. Αν για την εκθετική εξίσωση $\alpha^{g(x)} = \beta$, $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha > 0$, είναι $\beta > 0$ και ο αριθμός β δεν μπορεί να γίνει δύναμη με βάση τον αριθμό α, τότε παίρνουμε τους λογαρίθμους και των δύο μελών της εξίσωσης, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα (3) των λογαρίθμων η εξίσωση γίνεται:

$\log\alpha^{g(x)} = \log\beta \Leftrightarrow g(x)\cdot\log\alpha = \log\beta \Leftrightarrow g(x) = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha}$, οπότε καταλήγουμε σε γνωστές εξισώσεις.

► $2^x = 3 \Leftrightarrow \log 2^x = \log 3 \Leftrightarrow x\cdot\log 2 = \log 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\log 3}{\log 2}$

Δ Λογαριθμικές Ανισώσεις

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = (0, +\infty)$. Στις λογαριθμικές ανισώσεις χρησιμοποιούμε την ιδιότητα 4 και τα παρακάτω:

α) Αν $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2$.

► Για την ανίσωση $\log x > 1$, πρέπει $x > 0$.
Είναι $\log x > 1 \Leftrightarrow \log x > \log 10 \Leftrightarrow x > 10$, διότι η συνάρτηση $f(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα εφόσον έχει βάση τον αριθμό $10 > 1$. Άρα $x > 10$.

► Για την ανίσωση $\ln x < 1$, πρέπει $x > 0$.
Είναι $\ln x < 1 \Leftrightarrow \ln x < \ln e \Leftrightarrow x < e$, διότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα εφόσον έχει βάση τον αριθμό $e > 1$. Επομένως $0 < x < e$.

β) Αν $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $\log_\alpha x_1 > \log_\alpha x_2$.

► Για την ανίσωση $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$, πρέπει $x > 0$. Είναι $\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x < 1$, διότι η συνάρτηση $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ είναι γνησίως φθίνουσα εφόσον έχει βάση το $\frac{1}{2}$ και είναι $0 < \frac{1}{2} < 1$.

Σημείωση

Γενικά ασχολούμαστε μόνο με τους δεκαδικούς λογάριθμους, που έχουν βάση το 10 και τους φυσικούς λογάριθμους, που έχουν βάση το e.

ΜΕΡΟΣ 10ο : ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Α Βασικοί τύποι της τριγωνομετρίας

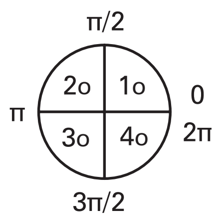
- $ημ^2x + συν^2x = 1$
- $ημ^2x = 1 - συν^2x$
- $συν^2x = 1 - ημ^2x$
- $εφx = \dfrac{ημx}{συνx}$
- $σφx = \dfrac{συνx}{ημx}$
- $εφx = \dfrac{1}{σφx}$
- $σφx = \dfrac{1}{εφx}$
- $ημ(α+β) = ημα \cdot συνβ + ημβ \cdot συνα$
- $ημ(α-β) = ημα \cdot συνβ - ημβ \cdot συνα$
- $συν(α+β) = συνα \cdot συνβ - ημα \cdot ημβ$
- $συν(α-β) = συνα \cdot συνβ + ημα \cdot ημβ$
- $ημ2x = 2ημx\,συνx$
- $συν2x = συν^2x - ημ^2x = 1 - 2ημ^2x = 2συν^2x - 1$

Β Γνωστοί τριγωνομετρικοί αριθμοί

	$45^\circ(π/4)$	$60^\circ(π/3)$	$30^\circ(π/6)$
Ημίτονο	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Συνημίτονο	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Εφαπτομένη	1	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
Συνεφαπτομένη	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$

	0° $360^\circ(2π)$	$90^\circ\left(\frac{π}{2}\right)$	$180^\circ(π)$	$270^\circ\left(\frac{3π}{2}\right)$
Ημίτονο	0	1	0	-1
Συνημίτονο	1	0	-1	0
Εφαπτομένη	0	-	0	-
Συνεφαπτομένη	-	0	-	0

Γ Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών



	1ο	2ο	3ο	4ο
Ημίτονο	+	+	-	-
Συνημίτονο	+	-	-	+
Εφαπτομένη	+	-	+	-
Συνεφαπτομένη	+	-	+	-

Δ Κανόνες

α) Αντίθετες γωνίες

- $ημ(-x) = -ημx$ ▸ $συν(-x) = συνx$ ▸ $εφ(-x) = -εφx$ ▸ $σφ(-x) = -σφx$

β) Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο

Οι παρακάτω (πρακτικοί) κανόνες είναι πολύ χρήσιμοι όταν θέλουμε να βρούμε κάποιους τριγωνομετρικούς αριθμούς που δεν αναφέρονται στους προηγούμενους πίνακες.

1) Σε γωνίες με μορφή $90^\circ \pm α$, ή $270^\circ \pm α$, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί εναλλάσσονται, δηλαδή το ημίτονο γίνεται συνημίτονο, η εφαπτομένη γίνεται συνεφαπτομένη και το αντίστροφο. Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

   - $ημ135^\circ = ημ(\underline{90^\circ + 45^\circ}) = συν45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2ο τεταρτημόριο)
   - $συν(-240^\circ) = συν240^\circ = συν(\underline{270^\circ - 30^\circ}) = -ημ30^\circ = -\frac{1}{2}$ (3ο τεταρτημόριο)

2) Σε γωνίες με μορφή $180^\circ \pm α$, ή $360^\circ \pm α$, ή $360^\circ κ \pm α$, ($κ \in Z$) οι τριγωνομετρικοί αριθμοί δεν αλλάζουν. Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας.

   - $εφ(-225^\circ) = -εφ225^\circ = -εφ(\underline{180^\circ + 45^\circ}) = -εφ45^\circ = -1$ (3ο τεταρτημόριο)
   - $συν780^\circ = συν(\underline{2 \cdot 360^\circ + 60^\circ}) = συν60^\circ = \frac{1}{2}$ (1ο τεταρτημόριο)

Σ η μ ε ί ω σ η

Για το πρόσημο ενός τριγωνομετρικού αριθμού, στους παραπάνω πρακτικούς κανόνες, θα θεωρούμε ότι η γωνία α είναι μικρότερη από 90°, ώστε στον τριγωνομετρικό κύκλο να αλλάζουμε ένα τεταρτημόριο κάθε φορά. Π.χ

$$ημ210^\circ = ημ(90^\circ + 120^\circ) = συν120^\circ = συν(180^\circ - 60^\circ) = -συν60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Στην πρώτη περίπτωση, η τελική πλευρά της γωνίας βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο (θεωρούμε ότι η γωνία 120° είναι μικρότερη από 90°), όπου το ημίτονο είναι θετικό και όχι στο 3ο τεταρτημόριο ($90^\circ + 120^\circ = 210^\circ$), όπου το ημίτονο είναι αρνητικό.

Ε Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

Οι εξισώσεις αυτές λύνονται με τους παρακάτω τύπους:

1) $ημx = ημα \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + α \\ x = 2κπ + π - α \end{cases} \ (κ \in Z)$

3) $\begin{cases} εφx = εφα \\ σφx = σφα \end{cases} \Leftrightarrow x = κπ + α \ (κ \in Z)$

2) $συνx = συνα \Leftrightarrow x = 2κπ \pm α \ (κ \in Z)$

Γενικά ισχύει: $-1 \le ημx, συνx \le 1$

Σημείωση

Είναι χρήσιμες και οι παρακάτω ειδικές περιπτώσεις:

- $ημx = 0 \Leftrightarrow x = κπ \ (κ \in Z)$
- $συνx = 0 \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2} \ (κ \in Z)$

Ομάδα Α

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση τον αριθμό που εμφανίζεται με τον αντίστοιχο τριγωνομετρικό αριθμό, από τους τριγωνομετρικούς πίνακες (Β). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους τύπους των τριγωνομετρικών εξισώσεων.

- $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{π}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + \frac{π}{4} \quad (κ \in Z) \\ x = 2κπ + π - \frac{π}{4} = 2κπ + \frac{4π - π}{4} = 2κπ + \frac{3π}{4} \quad (κ \in Z) \end{cases}$
- $συνx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow x = 2κπ \pm \frac{π}{3} \quad (κ \in Z)$
- $συνx = 2$ αδύνατη, διότι γενικά ισχύει $-1 \le συνx \le 1$.
- $εφx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = εφ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{6} \quad (κ \in Z)$
- $σφx = 1 \Leftrightarrow σφx = σφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{4} \quad (κ \in Z)$

Ομάδα Β

Στις περιπτώσεις που έχουμε αρνητικό αριθμό και δεν είναι ίσος με κανένα τριγωνομετρικό αριθμό, χρησιμοποιούμε τον κανόνα των αντίθετων γωνιών για να βάλουμε το μείον μέσα στη γωνία στο ημίτονο , στην εφαπτομένη και στην συνεφαπτομένη, ενώ για το συνημίτονο γράφουμε:

$συνx = -κ \Leftrightarrow συνx = -συνα \Leftrightarrow συνx = συν(π - α)$, όπου $συνα = κ$.

- $ημx = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx = -ημ\frac{π}{4} \Leftrightarrow ημx = ημ\left(-\frac{π}{4}\right) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κπ + \left(-\frac{π}{4}\right) = 2κπ - \frac{π}{4} \quad (κ \in Z) \\ x = 2κπ + π - \left(-\frac{π}{4}\right) = 2κπ + π + \frac{π}{4} = 2κπ + \frac{4π + π}{4} = 2κπ + \frac{5π}{4} \quad (κ \in Z) \end{cases}$
- $συνx = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow συνx = -συν\frac{π}{3} \Leftrightarrow συνx = συν\left(π - \frac{π}{3}\right) \Leftrightarrow συνx = συν\frac{3π - π}{3} \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow συνx = συν\frac{2π}{3} \Leftrightarrow x = 2κπ \pm \frac{2π}{3} \quad (κ \in Z)$
- $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow εφx = -εφ\frac{π}{6} \Leftrightarrow εφx = εφ\left(-\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x = κπ - \frac{π}{6} \quad (κ \in Z)$
- $σφx = -1 \Leftrightarrow σφx = -σφ\frac{π}{4} \Leftrightarrow σφx = σφ\left(-\frac{π}{4}\right) \Leftrightarrow x = κπ - \frac{π}{4} \quad (κ \in Z)$

Ομάδα Γ

Υπάρχουν εξισώσεις οι οποίες καταλήγουν στις προηγούμενες, αφού προηγουμένως εφαρμόσουμε σε αυτές τύπους της τριγωνομετρίας.

► $2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} & (\kappa \in Z) \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} & (\kappa \in Z) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\kappa \in Z)$

► $2\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + 1 - \eta\mu^2 x - 3\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x - 3\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x(\eta\mu x - 3) = 0$

Άρα $\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = \kappa\pi \quad (\kappa \in Z)$

ή $\eta\mu x - 3 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 3 > 1$ αδύνατη, διότι γενικά ισχύει $-1 \le \eta\mu x \le 1$.

Σημείωση

Σε κάποιες τριγωνομετρικές εξισώσεις, θέλουμε οι λύσεις να ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. Στις περιπτώσεις αυτές δίνουμε τιμές στο κ από το σύνολο των ακέραιων αριθμών, στις λύσεις της εξίσωσης για να βρούμε ποιες από αυτές ανήκουν στο διάστημα αυτό.

► Για την εξίσωση $\varepsilon\varphi x = 1,\ x \in [0, \pi]$, έχουμε:

$\varepsilon\varphi x = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad (\kappa \in Z) \quad$ **(1)**

Για $\kappa = 0$, από την **(1)** έχουμε $x = 0 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$

Για $\kappa = 1$, από την **(1)** έχουμε $x = 1 \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi]$

Για $\kappa = -1$, από την **(1)** έχουμε $x = (-1) \cdot \pi + \frac{\pi}{4} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \notin [0, \pi]$

Γενικά, μόνο για $\kappa = 0$ η εξίσωση έχει λύση στο διάστημα $[0, \pi]$.

Άρα η λύση της εξίσωσης είναι η $x = \frac{\pi}{4}$.

Ένας άλλος τρόπος είναι να βρούμε για ποιες ακέραιες τιμές του κ, οι λύσεις θα ανήκουν στο διάστημα που δόθηκε.

$x \in [0, \pi] \Leftrightarrow 0 \le x \le \pi \Leftrightarrow 0 \le \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \le \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \kappa\pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \le \pi - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \kappa\pi \le \frac{4\pi - \pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4\pi} \le \frac{\kappa\pi}{\pi} \le \frac{3\pi}{4\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le \frac{3}{4}$, άρα $\kappa = 0$.

ΜΕΡΟΣ 11ο : ΠΡΟΟΔΟΙ

Δίνουμε παρακάτω εισαγωγικές έννοιες, τύπους και απλές εφαρμογές για τις αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους.

Α Αριθμητική Πρόοδος

Είναι μια ακολουθία αριθμών στην οποία κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο, με την πρόσθεση πάντα του ίδιου αριθμού που ονομάζεται διαφορά της αριθμητικής προόδου και συμβολίζεται με ω.

Αν α_1 ο πρώτος όρος και ω η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου (α_ν), τότε:

1) $\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$

- ▸ Για την αριθμητική πρόοδο 2, 4, 6, …είναι $\omega = 4 - 2 = 2$.

2) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, ο νιοστός όρος (ή όρος τάξεως ν) της προόδου.

- ▸ Η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 2$, έχει $\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega = 3 + 4 \cdot 2 = 11$.

3) Οι αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma$.

Ο αριθμός $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται αριθμητικός μέσος των α και γ.

- ▸ Οι αριθμοί 2, 4, 6 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου διότι ισχύει: $2 \cdot 4 = 2 + 6$.

4) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου δίνεται από τους τύπους $S_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2}$, ή $S_\nu = \frac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$.

- ▸ Η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 3$ και $\omega = 2$, έχει $\alpha_5 = \alpha_1 + 4\omega = 3 + 4 \cdot 2 = 11$ και το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της είναι:
  $S_5 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_5)5}{2} = \frac{(3 + 11)5}{2} = \frac{70}{2} = 35$
- ▸ Το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 3$, είναι $S_6 = \frac{[2\alpha_1 + (6 - 1)\omega]6}{2} = \frac{[2 \cdot 1 + 5 \cdot 3]6}{2} = 17 \cdot 3 = 51$.

5) α) Αν $\omega > 0$, η αριθμητική πρόοδος λέγεται γνησίως αύξουσα.

- ▸ Η αριθμητική πρόοδος 2, 4, 6, …είναι γνησίως αύξουσα διότι $\omega = 2 > 0$.

β) Αν $\omega < 0$, η αριθμητική πρόοδος λέγεται γνησίως φθίνουσα.

- ▸ Η αριθμητική πρόοδος $4, 2, 0, ..$ είναι γνησίως φθίνουσα διότι $\omega = -2 < 0$.

Β Γεωμετρική Πρόοδος

Είναι μια ακολουθία αριθμών στην οποία κάθε αριθμός προκύπτει από τον προηγούμενο, με τον πολλαπλασιασμό πάντα του ίδιου αριθμού που ονομάζεται λόγος της γεωμετρικής προόδου και συμβολίζεται με λ.

Αν α_1 ο πρώτος όρος και λ ο λόγος μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), τότε:

1) $\lambda = \dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$

► Για την γεωμετρική πρόοδο 2, 4, 8, ...είναι $\lambda = \dfrac{4}{2} = 2$.

2) $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$**, ο νιοστός όρος (ή όρος τάξεως ν) της προόδου.**

► Η γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 2$, έχει $\alpha_3 = \alpha_1 \cdot \lambda^{3-1} = 1 \cdot 2^2 = 4$.

3) Οι αριθμοί α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου $\Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Ο αριθμός $\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

► Οι αριθμοί 2, 4, 8 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου διότι ισχύει: $4^2 = 2 \cdot 8$.

4) Το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S_\nu = \dfrac{\alpha_1 \cdot (\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}$.

► Το άθροισμα των 3 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 2$, είναι $S_3 = \dfrac{\alpha_1 \cdot (\lambda^3 - 1)}{\lambda - 1} = \dfrac{1 \cdot (2^3 - 1)}{2 - 1} = \dfrac{7}{1} = 7$.

5) α) Αν $|\lambda| > 1$, η γεωμετρική πρόοδος λέγεται απολύτως αύξουσα.

► Η γεωμετρική πρόοδος 2, 4, 8, ...είναι απολύτως αύξουσα διότι: $|\lambda| = |2| = 2 > 1$.

β) Αν $|\lambda| < 1$, η γεωμετρική πρόοδος λέγεται απολύτως φθίνουσα. Στην περίπτωση αυτή, το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου δίνεται από τον τύπο $S = \dfrac{\alpha_1}{1 - \lambda}$.

► Η γεωμετρική πρόοδος $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ..$ είναι απολύτως φθίνουσα διότι:

$|\lambda| = \left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} < 1$ και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι:

$$S = \frac{\alpha_1}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$