Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

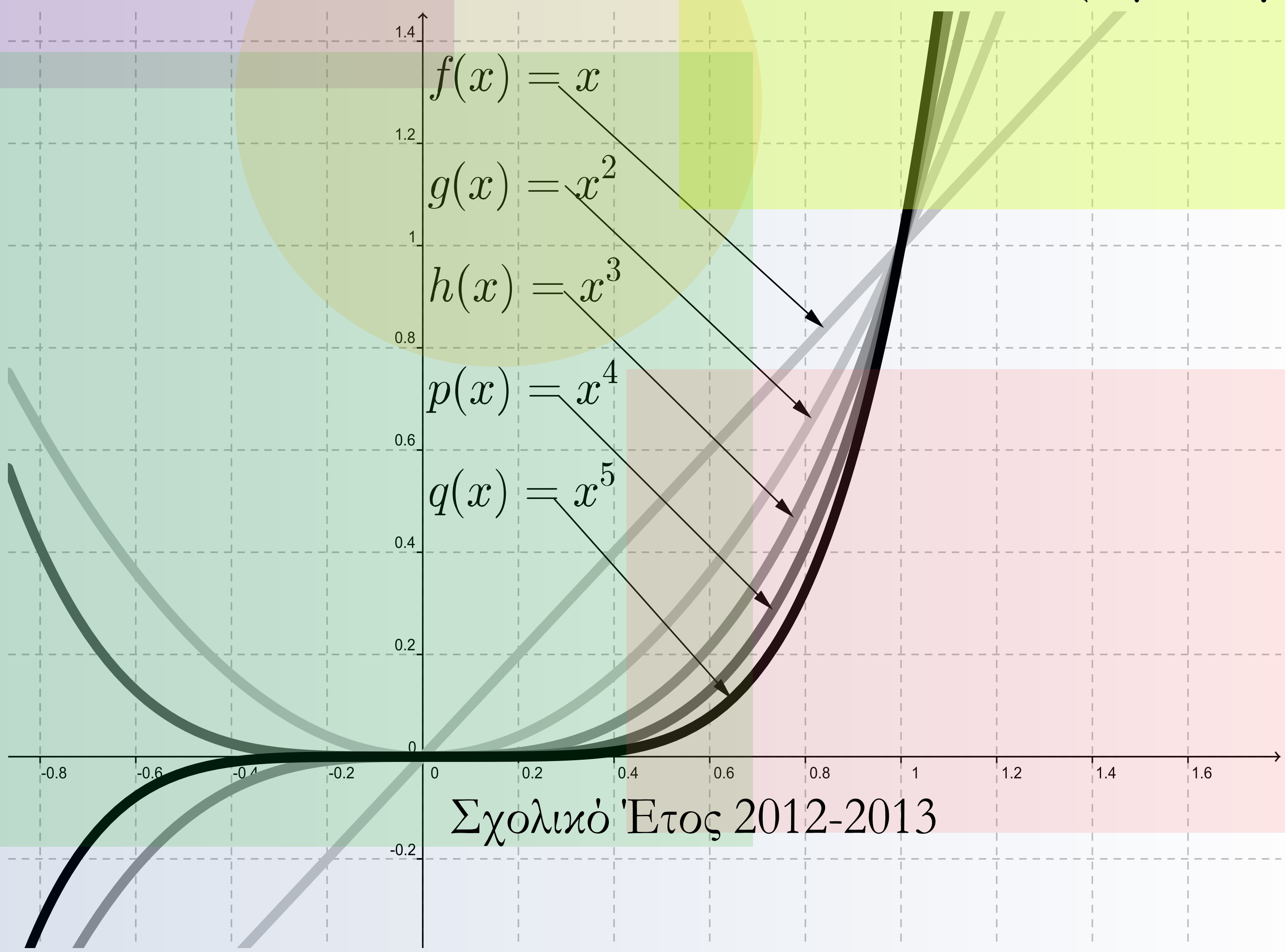
Άλγεβρα

Α' Λυκείου

Σχολικές Σημειώσεις

Εκδοχή 03

Ν.Σ. Μαυρογιάννης



Σχολικό Έτος 2012-2013

Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Τάξη Α, Άλγεβρα, Σημειώσεις v 03

Καθηγητής: Ν.Σ. Μαυρογιάννης

9 Σεπτεμβρίου 2012
Στοιχειοθετήθηκαν με το LaTeX.

διττὸν γὰρ ἦν αὐτοῦ τῆς διδασκαλίας τὸ σχῆμα. καὶ τῶν προσιόντων οἳ μὲν ἐκαλοῦντο μαθηματικοί, οἳ δ' ἀκουσματικοί· καὶ μαθηματικοὶ μὲν οἱ τὸν περιττότερον καὶ πρὸς ἀκρίβειαν διαπεπονημένον τῆς ἐπιστήμης λόγον ἐκμεμαθηκότες, ἀκουσματικοὶ δ' οἱ μόνας τὰς κεφαλαιώδεις ὑποθήκας τῶν γραμμάτων ἄνευ ἀκριβεστέρας διηγήσεως ἀκηκοότες.

Πορφύριου, «Πυθαγόρου βίος»

Προλεγόμενα

Οι σημειώσεις αυτές έχουν ως βάση το υλικό που χρησιμοποίησα για την διδασκαλία της Άλγεβρας στην Α΄ Λυκείου του *Προτύπου Πειραματικού Γενικού Λυκείου Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης* κατά το σχολικό έτος 2011-2012 που έγινε σε συνεργασία με την καθηγήτρια Μαθηματικών της Σχολής *Καλλιόπη Σιώπη* (MEd στην Διδακτική των Μαθηματικών). Στηρίζονται στο επίσημο Αναλυτικό Πρόγραμμα αλλά για την ευχερέστερη διδασκαλία των εννοιών έχει προηγηθεί μία αναδιάταξη της διδασκόμενης ύλης.

Ένα μεγάλο μέρος του 1ου κεφαλαίου δόθηκε στους μαθητές με την έναρξη των μαθημάτων. Τα υπόλοιπα μέρη των σημειώσεων στέλνονταν τμηματικά με ηλεκτρονικό ταχυδρομείο συνήθως μετά την παράδοση στην τάξη. Οι παράγραφοι 4.2.25 και μετά διδάχθηκαν συνοπτικά. Οι ασκήσεις στο τέλος κάθε κεφαλαίου προστέθηκαν μετά την λήξη των μαθημάτων. Μερικές από αυτές περιέχουν υλικό εκτός της επίσημης διδακτέας ύλης. Προορίζονται κυρίως για να υποστηρίξουν τους Μαθηματικούς Ομίλους του σχολείου.

Όσες ασκήσεις έχουν την ένδειξη «Από τις εξετάσεις του (ακολουθεί έτος) » προέρχονται από τις Πανελλήνιες εξετάσεις στα Μαθηματικά Θετικής Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.

Την απόδοση «ειρμός» για τον όρο «pattern » την οφείλω στον Καθηγητή Γεώργιο Μπαλόγλου.

Οφείλω πολλές ευχαριστίες στις μαθήτριες και στους μαθητές του τμήματος Α1 (2011-2012) του σχολείου μας για την συνεργασία αλλά και για την συμβολή τους στον περιορισμό των λαθών στις σημειώσεις. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στην *Σπυριδούλα Ανδριοπούλου*, την *Τζίνα Καλογεροπούλου* και τον *Κωνσταντίνο Καρούζο*.

Καλοκαίρι του 2012
Ν.Σ. Μαυρογιάννης,
Μαθηματικός (PhD, MSc)

Περιεχόμενα

1
Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Στο Γυμνάσιο έχετε γνωρίσει διάφορα είδη αριθμών. Θα τα ξαναθυμηθούμε.

1.1 Οι Φυσικοί Αριθμοί

Είναι οι αριθμοί

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Ξεκινούν από το 0, ακολουθεί ο 1 που είναι ο *επόμενος* του 0, μετά ο 2 που είναι επόμενος του 1 κ.οκ. Κάθε φυσικός αριθμό έχει και ένα επόμενο. Επίσης κάθε φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός είναι επόμενος κάποιου φυσικού αριθμού. Ο 0 δεν είναι επόμενος κανενός φυσικού αριθμού.

Άσκηση 1. Ποιος είναι ο επόμενος του φυσικού αριθμού 2011; Του 20112011; Του a;

Τους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να τους προσθέτουμε και να παίρνουμε πάλι ως αποτέλεσμα φυσικό αριθμό:

$$2+3=5 \qquad 5+11=16 \qquad 32+39=71$$

Όταν προσθέτουμε τους αριθμούς 32 και 39 παίρνουμε το άθροισμα τους που είναι το 61. Το *άθροισμα* δύο φυσικών αριθμών α, β είναι ο φυσικός αριθμός $\alpha+\beta$. Η πράξη που εκτελέσαμε είναι η *πρόσθεση* και το αποτέλεσμα της είναι το *άθροισμα*.

Επίσης τους φυσικούς αριθμούς μπορούμε να τους πολλαπλασιάζουμε.

$$2\cdot 3=6 \qquad 5\cdot 11=55 \qquad 32\cdot 39=1248$$

Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο φυσικούς αριθμούς α, β παίρνουμε ένα άλλο φυσικό αριθμό $\alpha\cdot\beta$ που είναι το *γινόμενο* τους. Συχνά παραλείπουμε την τελεία γράφοντας $\alpha\beta$ αντί $\alpha\cdot\beta$.

Άσκηση 2. Δύο φυσικοί αριθμοί α, β έχουν άθροισμα 6. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το γινόμενο τους;

Με την πράξη της αφαίρεσης τα πράγματα είναι διαφορετικά: Ενώ

$$7 - 2 = 5 = \text{φυσικός}$$

$$2 - 7 = -5 \ \text{ δεν είναι φυσικός}$$

Γενικά αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς α, β και σχηματίσουμε την *διαφορά* του β από τον α δηλαδή τον αριθμό $\alpha - \beta$ αυτή μπορεί να είναι αλλά μπορεί και να μην είναι φυσικός αριθμός. Σε κάθε περίπτωση όμως κάποια από τις δύο διαφορές $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$ θα είναι φυσικός αριθμός. Με μία άλλη διατύπωση: Αν οι α, β είναι φυσικοί αριθμοί τότε τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$ είναι φυσικός αριθμός. Με άλλα λόγια αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς

Άσκηση 3. Για τους φυσικούς αριθμούς α, β είναι γνωστό ότι και οι δύο διαφορές $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$ είναι φυσικοί αριθμοί. Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για τους αριθμούς α, β;

Με την πράξη της διαίρεσης τα πράγματα είναι χειρότερα:

$$8 : 4 = \frac{8}{4} = 2 = \text{φυσικός}$$

$$4 : 8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \ \text{ δεν είναι φυσικός}$$

$$8 : 5 = \frac{8}{5} = 1,6 \ \text{ δεν είναι φυσικός}$$

$$5 : 8 = \frac{5}{8} = 0,625 \ \text{ δεν είναι φυσικός}$$

Με άλλα λόγια αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς α, β τότε το *πηλίκο* $\alpha : \beta$ του α δια του β μπορεί να είναι μπορεί και να μην είναι φυσικός αριθμός. Μπορεί και κανένα από τα δύο πηλίκα $\alpha : \beta$, $\beta : \alpha$ να μην είναι φυσικός αριθμός.

Δεν πρέπει να ξεχνάμε μία βασική προφύλαξη που παίρνουμε όταν κάνουμε διαιρέσεις : Δεν επιτρέπεται να διαιρούμε δια του μηδενός [1] με άλλα λόγια

[1] Κάθε απαγόρευση οφείλει να έχει και μία εξήγηση. Γιατί δεν επιτρέπεται να διαιρούμε δια του μηδενός; Στην διαίρεση το πηλίκο είναι εκείνος ο αριθμός που αν πολλαπλασιασθεί με τον διαιρέτη μας δίνει τον διαιρετέο. Θα είναι λοιπόν $\alpha : \beta = \gamma$ αν είναι $\alpha = \beta\gamma$. Αν τώρα ο διαιρέτης β ήταν μηδέν θα είχαμε

$$\alpha = 0 \cdot \gamma \ \ (1)$$

Τι μπορεί να συμβαίνει στην σχέση (1)·

- Αν είναι $\alpha \neq 0$ η (1) είναι αδύνατη αφού το πρώτο μέλος της είναι ένας αριθμό διάφορος του μηδενός και το δεύτερο μέλος μηδέν. Επομένως σίγουρα δεν επιτρέπεται να διαιρέσουμε έναν μη μηδενικό αριθμό με το μηδέν: δεν θα έχουμε αποτέλεσμα.

οποτεδήποτε γράφουμε $\alpha : \beta$ ή $\frac{\alpha}{\beta}$ πρέπει να έχουμε εξασφαλίσει ότι το β θα είναι *διάφορο* του μηδενός δηλαδή $\beta \neq 0$. Εννοείται ότι μπορούμε να διαιρούμε το 0 με ένα αριθμό που είναι διάφορος του μηδενός : το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν δηλαδή

$$\frac{0}{\beta} = 0 \qquad (\beta \neq 0)$$

1.2 Οι Ακέραιοι Αριθμοί

Γράψαμε πιο πριν

$$2 - 7 = -5$$

Ο -5 δεν είναι φυσικός αριθμός. Είναι *ακέραιος* αριθμός και μάλιστα ο *αντίθετος* του 5. Οι ακέραιοι αριθμοί προκύπτουν αν συμπληρώσουμε τους φυσικούς με τους αντιθέτους τους :

$$0,\ ,1,\ ,-1,\ ,2,\ ,-2,\ ,3,\ ,-3,\ ,4,\ ,-4,\ ,\ldots$$

ή όπως αλλιώς μπορούμε να γράψουμε

$$0,\ ,\pm1,\ ,\pm2,\ ,\pm3,\ ,\pm4,\ ,\ldots$$

Τα αποσιωπητικά (...) υποδηλώνουν πως οι αριθμοί συνεχίζουν *επ' άπειρον*. Τα χρησιμοποιήσαμε και πιο πάνω όταν γράψαμε τους φυσικούς αριθμούς. Μόνο που στην περίπτωση των ακεραίων η επ' απειρον συνέχιση γίνεται και προς τους μεγάλους αριθμούς και προς τους μικρούς :

$$\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

Στην περίπτωση των ακεραίων κάθε αριθμός έχει επόμενο αλλά και *προηγούμενο*. Ο επόμενος του a είναι ο $a + 1$ ενώ ο προηγούμενος είναι ο $a - 1$.

Άσκηση 4. Παίρνουμε ένα ακέραιο αριθμό λ.χ. τον 2.
Προσθέτουμε 5.
Παίρνουμε το αντίθετο αυτού που βρήκαμε.
Προσθέτουμε 5
Παίρνουμε το αντίθετο αυτού που βρήκαμε.
Θα βρούμε πάλι 2.
Δοκιμάστε με άλλο αριθμό στη θέση του 2. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να δώσετε κάποια εξήγηση;

- Αν είναι $\alpha = 0$ η (1) δεν είναι αδύνατη. Γράφεται

  $$0 = 0 \cdot \gamma$$

  και επαληθεύεται από κάθε αριθμό γ. Δηλαδή κάθε αριθμός θα μπορούσε να θεωρηθεί ως πηλίκο. Αυτά είναι κακά νέα! Θέλουμε το αποτέλεσμα μίας πράξης να είναι ένα μόνο. Δηλαδή μόνο ένας αριθμός να μπορεί να είναι αποτέλεσμα της πράξης που εκτελούμε. Εδώ της διαίρεσης. Γιαυτό ούτε επιτρέπεται να διαιρέσουμε μηδέν δια μηδέν.

Τελικά δεν επιτρέπεται να διαιρούμε οτιδήποτε δια μηδέν.

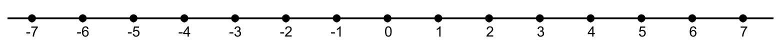
Όταν προσθέτουμε, ή πολλαπλασιάζουμε δύο ακεραίους το αποτέλεσμα είναι ακέραιος. Αλλά και όταν αφαιρούμε δύο ακεραίους το αποτέλεσμα είναι ακέραιος

$$\begin{array}{cc} (-2)+7=5 & (-8)+(-7)=-15 \\ (-2)\cdot 7=-14 & (-8)\cdot(-7)=56 \\ 6-12=-6 & 12-(-6)=18 \end{array}$$

Δηλαδή οι τρεις πράξεις πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, αφαίρεση όταν εφαρμόζονται στους ακεραίους μπορούν να διεκπεραιωθούν «μέσα» στους ακεραίους. Για την διαίρεση αυτό δεν ισχύει. Μπορεί να διαιρούμε δύο ακεραίους και το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος ή να μην είναι.

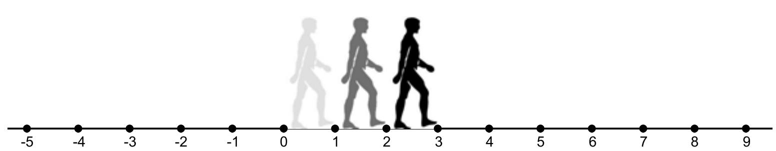
1.2.1 Ο άξονας των Ακεραίων

Από το Γυμνάσιο είσθε εξοικειωμένοι με τη ιδέα του *άξονα* που πολύ χοντρικά σημαίνει μία «βαθμολογημένη» ευθεία. Ας φαντασθούμε μία ευθεία όπου έχουμε τοποθετήσει τους ακεραίους αριθμούς ώστε κάθε αριθμός να απέχει από τον επόμενο του μία μονάδα:



Ο άξονας των ακεραίων

Αν ξεκινήσουμε από το 0 και κινηθούμε προς τα «δεξιά» δηλαδή προς τους «μεγάλους» αριθμού με «βήμα» μήκους 1 θα διατρέξουμε φυσικούς αριθμούς. Αν με τον ίδιο βηματισμό κινηθούμε προς τα «αριστερά» δηλαδή προς τους «μικρούς» αριθμούς θα διατρέξουμε αντιθέτους των φυσικών αριθμών.



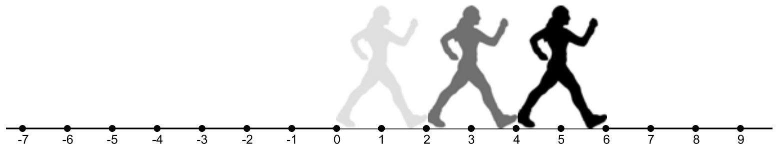
«Βηματίζοντας» στους ακεραίους

1.2.2 Οι άρτιοι αριθμοί.

Αν αλλάξουμε «βήμα» και το κάνουμε να έχει μήκος 2 «ανεβαίνοντας» από το 0 θα διατρέξουμε τους αριθμούς $0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ ενώ «κατεβαίνοντας» από το 0 θα διατρέξουμε τους αριθμούς $-2,\ -4\ -6\ldots$. Όλοι μαζί αυτοί οι αριθμοί:

$$\ldots -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6\ldots$$

είναι οι *άρτιοι* ή αλλιώς *ζυγοί* αριθμοί.



«Βηματίζοντας» στους άρτιους αριθμούς

Οι άρτιοι αριθμοί έχουν μία *χαρακτηριστική ιδιότητα* δηλαδή μία ιδιότητα που τους χαρακτηρίζει ξεχωρίζοντας τους από τους άλλους ακεραίους : Κάθε ένας από αυτούς προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε κάποιο ακέραιο επί 2 δηλαδή είναι πολλαπλάσια του 2. Με άλλα λόγια αν διαιρεθούν με το 2 μας δίνουν ακέραιο αριθμό. Για ένα άρτιο α λοιπόν ισχύει

$$\alpha = 2 \cdot \text{ακέραιος} = 2 \cdot \beta$$

Ο β δεν είναι άλλος από τον $\frac{\alpha}{2}$. Χρησιμοποιώντας το γράμμα β δεν κάναμε τίποτε άλλο από το να ονομάσουμε με ένα όνομα (που προκειμένου για αριθμούς το όνομα συνήθως είναι ένα γράμμα) τον ακέραιο αριθμό $\frac{\alpha}{2}$. Η επιλογή ενός ονόματος (μπορεί να το συναντήσετε και ως εξής : «θέτουμε $\frac{\alpha}{2} = \beta$») μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\frac{\alpha}{2} = \beta$$

και να πούμε ότι

$$\alpha = 2\beta$$

Άρα αν ένας ακέραιος αριθμός α είναι άρτιος τότε είναι της μορφής $\alpha = 2\beta$ για κάποιον ακέραιο αριθμό β. Αλλά και ανάποδα (ο όρος που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά είναι *αντιστρόφως*) αν ένας αριθμός α είναι της μορφής $\alpha = 2\beta$ για κάποιον ακέραιο β τότε ο α είναι άρτιος. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να περιγράψουμε αυτό το γεγονός. Όλοι τους λένε το ίδιο πράγμα :

- Οι άρτιοι αριθμοί είναι ακριβώς εκείνοι που είναι της μορφής $\alpha = 2\beta$ με β ακέραιο.

- Ένας αριθμός α είναι άρτιος αν και μόνο αν είναι της μορφής $\alpha = 2\beta$ με β ακέραιο.

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένας ακέραιος αριθμός α να είναι άρτιος είναι να υπάρχει ακέραιος β τέτοιος ώστε $\alpha = 2\beta$.

Άσκηση 5. Ένας μαθητής έκανε τον εξής συλλογισμό
-Κάθε ακέραιος αριθμός α μπορεί να γραφεί : $\alpha = 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
-Ονομάζουμε $\beta = \frac{\alpha}{2}$

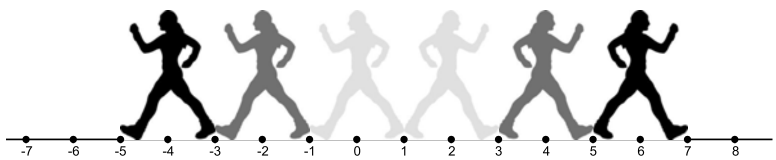
-Άρα ο α είναι της μορφής $\alpha = 2\beta$.
-Άρα ο α είναι άρτιος.
-Άρα κάθε ακέραιος είναι άρτιος.
Τι δεν πάει καλά με τον συλλογισμό αυτό;

1.2.3 Οι περιττοί αριθμοί

Αν αλλάξουμε τον «βηματισμό» των αρτίων και ξεκινήσουμε από το 1 και όχι από το 0 κινούμενοι πάνω-κάτω με βήμα μήκους 2 θα διατρέξουμε τους αριθμούς

$$\ldots -5,\ -3,\ \ -1,\ \ \ 1,\ \ \ 3,\ \ 5,\ \ \ 7,\ \ldots$$

είναι οι περιττοί αριθμοί.



«Βηματίζοντας» στους περιττούς αριθμούς

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να τους περιγράψουμε. Ας δούμε κάποιους:

- Περιττοί είναι οι αριθμοί που δεν είναι άρτιοι.
- Περιττοί είναι οι αριθμοί που είναι επόμενοι αρτίων.

Η δεύτερη περιγραφή μας οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: Αν ένα αριθμός είναι περιττός τότε θα είναι επόμενος κάποιου άρτιου ας τον πούμε α δηλαδή θα είναι ο $\alpha + 1$. Αλλά ο άρτιος αριθμός α είναι της μορφής $\alpha = 2\beta$ για κάποιο ακέραιο β και επομένως ο αρχικός μας περιττός αριθμός θα είναι της μορφής $\alpha + 1 = 2\beta + 1$. Επομένως καταλήγουμε:

- Ένας ακέραιος αριθμός α θα είναι περιττός αν και μόνο αν είναι της μορφής $\alpha = 2\beta + 1$ για κάποιον ακέραιο β.

1.2.4 Μία σύνοψη στις πράξεις

Όπως είδαμε όταν εκτελούμε κάποια από τις 4 πράξεις μεταξύ αριθμών ενός είδους (φυσικών, ακεραίων, ρητών) το αποτέλεσμα μπορεί να είναι αλλά και μπορεί να μην είναι του ιδίου είδους. Ας συνοψίσουμε αυτές τις πληροφορίες:

	Φυσικοί	Ακέραιοι
Άθροισμα	$\checkmark$	$\checkmark$
Γινόμενο	$\checkmark$	$\checkmark$
Διαφορά		$\checkmark$
Πηλίκο		

Η ένδειξη $\checkmark$ σε κάποιο τετραγωνάκι σημαίνει πως το αποτέλεσμα της αντίστοιχης πράξης είναι του ιδίου είδους: Στο τετραγωνάκι Διαφορά-Ακέραιοι το $\checkmark$ που υπάρχει σημαίνει πως

- Όταν αφαιρούμε δύο ακεραίους η διαφορά είναι πάντα ακέραιος.

Συνήθως διατυπώνουμε το παραπάνω πιο «οικονομικά» ως εξής:

- Η διαφορά δύο ακεραίων είναι ακέραιος.

Δηλαδή παραλείψαμε την περιγραφή της ενέργειας « Όταν αφαιρούμε» και το «πάντα». Αυτές οι συντομεύεις είναι συνηθισμένες στα Μαθηματικά. Λέμε για παράδειγμα «Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες» και εννοούμε πως «Όποιο τρίγωνο και αν πάρουμε και αθροίσουμε τις γωνίες του θα βρίσκουμε πάντα 180 μοίρες». Επιστρέφοντας στον πίνακα μας ο ισχυρισμός η αλλιώς η *πρόταση*[2]

- Το γινόμενο δύο φυσικών είναι φυσικός.

είναι μία αληθής πρόταση. Αυτό που ισχυριζόμαστε είναι πως αν πολλαπλασιάσουμε δύο οποιουσδηποτε φυσικούς αριθμούς θα πάρουμε φυσικό αριθμό κάτι που είναι σωστό. Αν πάρουμε την πρόταση:

- Το πηλίκο δύο φυσικών είναι φυσικός.

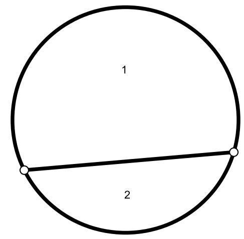
έχουμε τον ισχυρισμό ότι αν διαιρέσουμε δύο οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς θα πάρουμε φυσικό αριθμό. Αυτό δεν είναι σωστό διότι ο ισχυρισμός δεν επαληθεύεται για όλες τις επιλογές μας λ.χ το πηλίκο $3 : 6$ δεν είναι φυσικός αριθμός. Το γεγονός ότι υπάρχουν και επιλογές που επαληθεύουν τον ισχυρισμό δεν είναι αρκετό για να πούμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός. Έχουμε λοιπόν μία ψευδή πρόταση.

1.2.5 Μερικές αποδείξεις

Στα Μαθηματικά για να θεωρήσουμε ότι μία πρόταση είναι αληθής πρέπει να την αποδείξουμε. Η *απόδειξη* μπορεί να είναι μια απλή επαλήθευση αλλά μπορεί να είναι και ένας πιο εκτεταμένος συλλογισμός. Υπάρχουν αποδείξεις που καταλαμβάνουν μία δύο σειρές ως και πολλές - πολλές σελίδες. Ενώ σε άλλες επιστήμες η παρατήρηση και το πείραμα θεωρούνται αρκετά για να στηρίξουν ένα συμπέρασμα στα Μαθηματικά οι παρατηρήσεις δεν επαρκούν. Μπορούν να μας δώσουν κάποια ιδέα αλλά όχι βεβαιότητα. Η βεβαιότητα έρχεται με την απόδειξη και μόνο. Ας δούμε το εξής παράδειγμα:

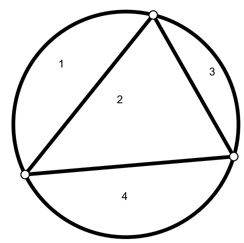
[2]Περισότερα για τις προτάσεις θα δούμε στην ενότητα 1.5 σελίδα 44.

Παράδειγμα 1. Διαλέγουμε δύο σημεία σε ένα κύκλο και τα ενώνουμε. Ο κύκλος χωρίστηκε σε δύο μέρη.



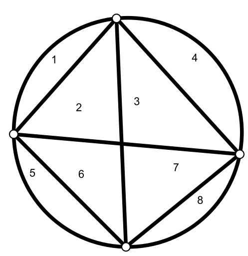
- 2 σημεία δίνουν 2 μέρη.

Συνεχίζουμε παίρνοντας 3 σημεία:



- 3 σημεία δίνουν $4 = 2 \times 2$ μέρη.

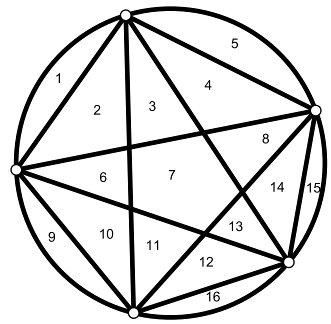
Ας πάρουμε 4 σημεία:



- 4 σημεία δίνουν $8 = 2 \times 2 \times 2$ μέρη.

Τι θα συμβεί αν πάρουμε 5 σημεία; Ποιος είναι ο πιο μεγάλος αριθμός χωρίων στα οποία μπορεί να χωρισθεί ο κύκλος; Είναι «λογικό» να αναμένουμε 16 μέρη. Πράγματι:

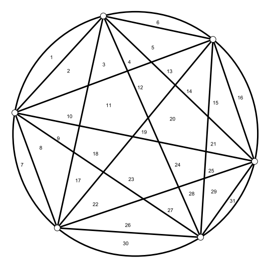
- 5 σημεία δίνουν $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ μέρη.



Επαρκούν οι παρατηρήσεις που έχουμε κάνει για να είμαστε σίγουροι πως

- ν σημεία δίνουν $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\nu-1 \quad \text{φορές}}$ μέρη;

Η απάντηση είναι «Όχι». Τα 6 σημεία αναμένεται να μας δώσουν 32 μέρη. Όμως:



Μετρώντας βλέπουμε πως:

- 6 σημεία **δεν** δίνουν $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ μέρη

Δίνουν 31 μέρη.[3]

Leo Moser
1921-1970

Είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα πως η απλή παρατήρηση δεν επαρκεί για να θεωρήσουμε μία πρόταση αληθή. Χρειάζεται και κάποια «επικύρωση». Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα, πιο απλό από το προηγούμενο.

Παράδειγμα 2. Προσθέτουμε δύο άρτιους αριθμούς. Τι είδους αριθμό θα πάρουμε·

$$2 + 8 = 10\,,\ 12 + 24 = 36,\ 18 + 24 = 42,\ 100 + 98 = 198$$

Φαίνεται πως το αποτέλεσμα θα είναι άρτιος αλλά δεν είμαστε σίγουροι. Δεν ξέρουμε τι θα συμβεί αν προσθέσουμε άλλους άρτιους πέρα από αυτούς που δοκιμάσαμε. Και το πρόβλημα δεν λύνεται με το να συνεχίζουμε να προσθέτουμε ζεύγη αρτίων αριθμών. Όσους και να δοκιμάσουμε δεν θα εξαντλήσουμε όλα τα δυνατά ζεύγη. Πάντα θα απομένουν αριθμοί που δεν θα τους έχουμε δοκιμάσει και δεν ξέρουμε τι μας επιφυλάσσουν.

[3]Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται «*πρόβλημα της διαίρεσης του κύκλου με χορδές*» και είναι γνωστό και ως «πρόβλημα του Moser.» Το πλήθος των χωρίων που μπορούν να προκύψουν αν χρησιμοποιήσουμε ν σημεία είναι $\frac{\nu^4-6\nu^3+23\nu^2-18\nu+24}{24}$

Χρειάζεται ένας τρόπος για να αντιμετωπίσουμε όλες τις περιπτώσεις. Θα προσθέσουμε δύο άρτιους αριθμούς. Αντί να πούμε ότι προσθέτουμε τον 2 με τον 8, τον 12 με τον 24 κ.ο.κ. λέμε ότι προσθέτουμε τον άρτιο κ με τον άρτιο λ και θέλουμε να δούμε τι συμβαίνει με το άθροισμα τους $\kappa + \lambda$. Κοιτώντας το $\kappa + \lambda$ βλέπουμε απλώς ένα άθροισμα ενώ δεν είναι μόνο ένα άθροισμα. *Είναι ένα άθροισμα αρτίων.* Θα πρέπει με κάποιο τρόπο να φανεί αυτό. Και ο τρόπος αυτός υπάρχει: Να θυμηθούμε ότι ένας άρτιος αριθμός δεν είναι όποιος κι όποιος αλλά είναι το διπλάσιο ενός άλλου ακεραίου. Άρα υπάρχουν ακέραιοι μ, ν τέτοιοι ώστε $\kappa = 2\mu$ και $\lambda = 2\nu$. Τώρα μπορούμε να έχουμε περισσότερες πληροφορίες για το άθροισμα $\kappa + \lambda$. Είναι το $2\mu + 2\nu$ ή ακόμη καλλίτερα το $2(\mu + \nu)$. Αλλά ξέρουμε πως το άθροισμα δύο ακεραίων είναι πάλι ακέραιος. Άρα το $\mu + \nu$ είναι κάποιος ακέραιος, ας τον πούμε ρ. Μα τότε $\kappa + \lambda = 2\rho$ δηλαδή είναι το διπλάσιο κάποιου ακεραίου και επομένως είναι άρτιος. Φυσικά όλα αυτά μπορούν, και έτσι συνηθίζουμε, να γραφούν με ένα πιο σύντομο τρόπο:

$$\underbrace{\kappa + \lambda}_{\text{άρτιοι}} = 2\underbrace{\mu}_{\text{ακέραιος}} + 2\underbrace{\nu}_{\text{ακέραιος}} = 2\left(\underbrace{\mu + \nu}_{\text{ακέραιος}}\right) = 2\rho = \text{άρτιος}$$

Οι προτάσεις που αποδεικνύουμε στα Μαθηματικά έχουν ανάλογα με την σημασία τους διάφορα ονόματα[4]. Εμείς αποδείξαμε την πρώτη μας πρόταση:

Πρόταση 1.2.1. Το άθροισμα δύο αρτίων είναι άρτιος.

Τι γίνεται όταν προσθέτουμε δύο περιττούς; Αν δοκιμάσουμε διάφορα ζεύγη αριθμών βρίσκουμε ότι το αποτέλεσμα είναι άρτιος. Μπορούμε να περάσουμε και σε μία απόδειξη:

Πρόταση 1.2.2. Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος.

Απόδειξη Ας κάνουμε την σύντομη, αλλά πειστική, κατάστρωση που κάναμε πιο πάνω:

$$\underbrace{\kappa + \lambda}_{\text{περιττοί}} = 2\underbrace{\mu}_{\text{ακέραιος}} + 1 + 2\underbrace{\nu}_{\text{ακέραιος}} + 1 = 2\mu + 2\nu + 2 = 2\left(\underbrace{\mu + \nu + 1}_{\text{ακέραιος}}\right) = 2\rho = \text{άρτιος}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση:

Πρόταση 1.2.3. Η διαφορά δύο αρτίων είναι άρτιος.
2) Η διαφορά δύο περιττών είναι άρτιος

Άσκηση 6. Να γράψετε μία απόδειξη για την πρόταση 1.2.3.

[4] *Πρόταση*, *Λήμμα* (βοηθητική πρόταση), *Θεώρημα* (σημαντική πρόταση), *Πόρισμα* (πρόταση που είναι ένα σχετικά εύκολο επακόλουθο μιας άλλης πρότασης (συνήθως θεωρήματος)

Δοκιμάζοντας με αριθμούς μπορούμε να «μαντέψουμε» και μετά να αποδείξουμε την πρόταση

Πρόταση 1.2.4. 1) Το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός.
2) Το γινόμενο ενός αρτίου με ένα οποιοδήποτε ακέραιο είναι άρτιος.

Απόδειξη. 1) Αν πάρουμε δύο περιττούς $\kappa = 2\mu + 1$, $\lambda = 2\nu + 1$ όπου μ, ν είναι ακέραιοι. Έχουμε

$$\kappa\lambda = (2\mu + 1)(2\nu + 1)$$

κάνοντας τις πράξεις στο β′ μέλος της ισότητας έχουμε

$$\kappa\lambda = 4\mu\nu + 2\mu + 2\nu + 1$$

βγάζουμε κοινό παράγοντα το 2 από τους προσθετέους $4\mu\nu, 2\mu, 2\nu$ και βρίσκουμε

$$\kappa\lambda = 2(2\mu\nu + \mu + \nu) + 1$$

Αν ονομάσουμε

$$\rho = 2\mu\nu + \mu + \nu$$

παρατηρούμε πως ο ρ είναι άθροισμα του ακεραίου $2\mu\nu$ (είναι ακέραιος διότι είναι γινόμενο ακεραίων), του ακεραίου μ και του ακεραίου ν. Επομένως είναι και ο ίδιος ακέραιος. Και αφού

$$\kappa\lambda = 2\rho + 1$$

συμπεραίνουμε ότι ο $\kappa\lambda$ είναι περιττός.
2) Ας πάρουμε τον $\kappa = 2\mu$ να είναι ο άρτιος παράγοντας μας και λ να είναι ο άλλος παράγοντας μας. Για τον λ δεν χρειάζεται ούτε και επιτρέπεται να γίνει κάποια επιπλέον υπόθεση αφού ξέρουμε απλώς ότι είναι ένας ακέραιος. Πολλαπλασιάζουμε όπως πριν τους αριθμούς μας και βρίσκουμε

$$\kappa\lambda = (2\mu)\lambda$$

όμως το $(2\mu)\lambda$ μπορούμε εξ' ίσου καλά να το γράψουμε και $2(\mu\lambda)$ οπότε:

$$\kappa\lambda = 2(\mu\lambda)$$

Αν ονομάσουμε με ρ τον αριθμό $\mu\lambda$ ο ρ θα είναι ένας ακέραιος αριθμός αφού είναι γινόμενο δύο ακεραίων και ακόμη

$$\kappa\lambda = 2\rho$$

γεγονός πως μας εξασφαλίζει ότι ο $\kappa\lambda$ είναι άρτιος.

Τι θα συμβεί όταν προσθέσουμε ένα άρτιο με ένα περιττό; Πάλι δοκιμές με αριθμούς μας υποβάλλουν την ιδέα πως το αποτέλεσμα πρέπει να είναι περιττός αριθμός. Ας δούμε λοιπόν μία την τελευταία πρόταση αυτής της ενότητας:

Πρόταση 1.2.5. Το άθροισμα ενός αρτίου και ενός περιττού είναι αριθμός περιττός.

Απόδειξη Θα δούμε δύο τρόπους απόδειξης.
1ος Τρόπος Είναι ο αναμενόμενος. Ας πούμε πως $\kappa = 2\mu$ είναι ο άρτιος και $\lambda = 2\nu + 1$ είναι ο περιττός αριθμός. Τότε

$$\kappa + \lambda = 2\mu + 2\nu + 1 = 2\left(\mu + \nu\right) + 1 = 2\rho + 1$$

όπου $\rho = \mu + \nu$ ακέραιος. Επομένως ο $\kappa + \lambda$ είναι περιττός.
2ος Τρόπος Παίρνουμε όπως πριν ένα άρτιο αριθμό κ και ένα περιττό αριθμό λ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το άθροισμα τους, ας το ονομάσουμε $\kappa + \lambda$, είναι ένας περιττός αριθμός. Ο $x = \kappa + \lambda$ είναι ένας ακέραιος αριθμός και όπως συμβαίνει με κάθε ακέραιο υπάρχουν δύο περιπτώσεις :

Περίπτωση 1 Ο x είναι άρτιος

Περίπτωση 2 Ο x είναι περιττός

Εμείς θέλουμε να καταλήξουμε στην δεύτερη περίπτωση. Το πετυχαίνουμε αυτό αποκλείοντας την την πρώτη. Τι θα συνέβαινε αν ίσχυε η πρώτη περίπτωση ; Θα είχαμε ότι $\kappa + \lambda = x$ με τον x να είναι άρτιος. Η σχέση αυτή μας οδηγεί στην

$$\lambda = x - \kappa$$

Στην σχέση αυτή κάτι δεν πάει καλά : Το α′ μέλος είναι ένας περιττός αριθμός. Το β′ μέλος είναι η διαφορά δύο αρτίων αριθμών δηλαδή σύμφωνα με την πρόταση1.2.3 ένας άρτιος αριθμός. Με άλλα λόγια ένας περιττός αριθμός (το α′ μέλος) είναι ίσος με ένα περιττό αριθμό (το β′ μέλος). Αυτό είναι αδύνατο, *άτοπο* όπως λέμε στα Μαθηματικά και επομένως η πρώτη περίπτωση δεν ευσταθεί. Άρα απομένει η δεύτερη. ο.ε.δ.

Σημείωμα 1. Η προηγούμενη απόδειξη τελειώνει με την συντομογραφία ο.ε.δ. Πρόκειται αρκτικόλεξο της φράσης *όπερ έδει δείξαι* (αυτό ακριβώς το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί). Μπαίνει στο τέλος μίας απόδειξης για να δηλωθεί ότι έχει τελειώσει. Σε άλλες γλώσσες συνηθίζεται το αρκτικόλεξο Q.E.D. που προέρχεται από την φράση με παρόμοια σημασία *quod erat demonstrandum* ή και η τοποθέτηση κάποιου συμβόλου (συνήθως του ■).

Σημείωμα 2. Στον δεύτερο τρόπο απόδειξης της πρότασης 1.2.5 χρησιμοποιήσαμε μία μέθοδο *έμμεσης απόδειξης* που ονομάζεται *μέθοδος απαγωγής στο άτοπο* (εις άτοπον απαγωγή). Ήταν γνωστή ήδη στους Πυθαγόρειους και μία ακόμη εφαρμογή της θα δούμε στα επόμενα. Στην μέθοδο αυτή δεν αποδεικνύουμε απευθείας αυτό που θέλουμε. Λέμε ή αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει ή δεν ισχύει. Υποθέτουμε ότι *δεν ισχύει* (δηλαδή υιοθετούμε προσωρινά την εκδοχή ότι δεν ισχύει) και προσπαθούμε να δούμε τι συνέπειες έχει αυτή η υπόθεση. Στόχος είναι να οδηγηθούμε σε κάτι που είναι βέβαιο πως δεν ισχύει (στην απόδειξη που κάναμε στην πρόταση 1.2.5 καταλήξαμε στο ότι κάποιος αριθμός είναι συγχρόνως άρτιος και περιττός). Μόλις καταλήξουμε σε κάτι τέτοιο (το *άτοπο*) η υπόθεση μας *πως το αποδεικτέο δεν ισχύει* καταρρέει και απομένει μόνο η ισχύς του αποδεικτέου.

Συνοψίζοντας όσα αναφέραμε προηγουμένως έχουμε την ακόλουθη «προπαίδεια» για τις πράξεις μεταξύ αρτίων και περιττών:

Προσθαφαίρεση Αρτίων-Περιττών

$\pm$	Άρτιος	Περιττός
Αρτιος	Άρτιος	Περιττός
Περιττός	Περιττός	Άρτιος

Πολλαπλασιασμός Αρτίων-Περιττών

$\cdot$	Άρτιος	Περιττός
Άρτιος	Άρτιος	Άρτιος
Περιττός	Άρτιος	Περιττός

Άσκηση 7. Οι αριθμοί α, β είναι άρτιοι ενώ ο γ είναι περιττός. Να καθορίσετε το είδος *αρτιότητας* (άρτιος ή περιττός) των παρακάτω αριθμών:

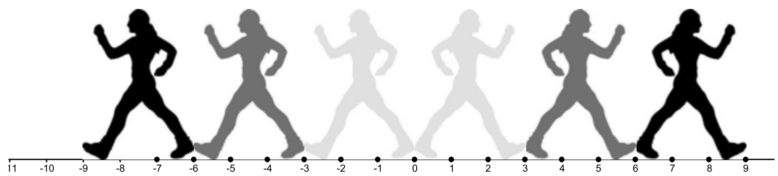
1. $\alpha + \beta + 2011$
2. $\alpha + \gamma - 1$
3. $\alpha\beta + \gamma$
4. $\gamma^2 + 1$

Άσκηση 8. Ο αριθμός α είναι περιττός και ο αριθμός $\alpha\beta + 1$ είναι άρτιος. Να αποδείξετε ότι ο β είναι περιττός.

Άσκηση 9. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο α ο αριθμός $\alpha(\alpha + 1)$ είναι άρτιος.

1.2.6 Πολλαπλάσια, Πρώτοι και Σύνθετοι

Οι άρτιοι και οι περιττοί αριθμοί προέκυψαν «βηματίζοντας» στους ακεραίους με βήμα μήκους 2. Ξεκινώντας από το 0 και «βηματίζοντας» πάνω-κάτω με βήμα μήκους 2 θα καλύψουμε όλους τους άρτιους δηλαδή όλους τους αριθμούς της μορφής 2κ με το κ να είναι ακέραιος. Όσοι αριθμοί απομείνουν θα είναι οι περιττοί και θα έχουν την μορφή $2\kappa + 1$ όπου ο κ πάλι είναι ακέραιος. Αν τώρα ξεκινήσουμε από το 0 αλλάξουμε το μήκος του βήματος και από 2 το κάνουμε 3 τότε θα καλύψουμε τα *πολλαπλάσια* του 3



«Βηματίζοντας» στα πολλαπλάσια του 3

Τα πολλαπλάσια του 3 είναι της μορφής 3κ όπου ο κ να είναι ακέραιος. Για τους αριθμούς που απομένουν δεν έχουμε κάποιο συγκεκριμένο όνομα. Όμως πρόκειται για αριθμούς της μορφής $3\kappa+1$ και της μορφής $3\kappa+2$.

	Πολλαπλάσια του 3	Πολλαπλάσια του 3 συν ένα	Πολλαπλάσια του 3 συν δύο
κ	3κ	$3\kappa+1$	$3\kappa+2$
-3	-9	-8	-7
-2	-6	-5	-4
-1	-3	-2	-1
0	0	1	2
1	3	4	5
2	6	7	8
3	9	10	11

Παρόμοια αν έχουμε βήμα μήκους 4 θα έχουμε τα πολλαπλάσια του 4 που θα είναι της μορφής 4κ με το κ να είναι ακέραιος. Οι αριθμοί που δεν είναι πολλαπλάσια του 4 θα είναι ή της μορφής $4\kappa+1$ ή $4\kappa+2$ ή τέλος $4\kappa+3$. Όπως συνέβη με τους άρτιους και τους περιττούς:

- Κάθε ακέραιος αριθμός θα ανήκει αποκλειστικά σε μία από τις κατηγορίες 3κ, $3\kappa+1$, $3\kappa+2$ με κ ακέραιο.
- Κάθε ακέραιος αριθμός θα ανήκει αποκλειστικά σε μία από τις κατηγορίες 4κ, $4\kappa+1$, $4\kappa+2$, $4\kappa+3$ με κ ακέραιο.

Άσκηση 10. Να αποδείξετε πως αν προσθέσουμε ένα αριθμό της μορφής $3\kappa+1$ με ένα αριθμό της μορφής $3\lambda+2$ (κ, λ ακέραιοι) το αποτέλεσμα θα είναι ένας αριθμός της μορφής 3ρ με ρ ακέραιο.

Άσκηση 11. Να αποδείξετε πως αν πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό της μορφής $4\kappa+2$ με ένα αριθμό της μορφής $4\lambda+3$ (κ, λ ακέραιοι) το αποτέλεσμα θα είναι ένας αριθμός της μορφής $4\rho+2$ με ρ ακέραιο.

Γενικά αν έχουμε δύο ακέραιους αριθμούς x και y, ο y θα ονομάζεται *πολλαπλάσιο* του x και ο x *διαιρέτης* του y αν υπάρχει ένας τρίτος ακέραιος z

έτσι ώστε να είναι $y = xz$. Αν είναι $y \neq \pm x$ ο y θα λέγεται *γνήσιο πολλαπλάσιο* του x και ο x *γνήσιος διαιρέτης* του y.

Παράδειγμα 3.

- ο αριθμός 3 είναι πολλαπλάσιο του -3 διότι υπάρχει ο ακέραιος -1 έτσι ώστε $3 = (-1)(-3)$.
- ο αριθμός 12 είναι διαιρέτης του 36 διότι υπάρχει ο αριθμός 3 ώστε $3 \cdot 12 = 36$.

Στην σχέση $y = xz$ ο y δηλαδή ο xz είναι πολλαπλάσιο του x. Δίνοντας ακέραιες τιμές στο z μπορούμε να έχουμε όλα τα πολλαπλάσια του x που είναι τα:

$$\ldots -5x, \quad -4x, \quad -3x, \quad -2x, \quad -x, \quad 0 \cdot x, \quad x, \quad 2x, \quad 3x, \quad 4x, \quad 5x \ldots$$

Άσκηση 12. Βρείτε όλους τους διαιρέτες του 12

Παρατηρούμε ότι αφού $\alpha = 1 \cdot a$, $\alpha = (-1) \cdot (-a)$:

- Οι ± 1 και $\pm \alpha$ είναι διαιρέτες του a.

Ένας ακέραιος αριθμός α ονομάζεται *πρώτος* αν:

1. Είναι διάφορος του 0.
2. Είναι διάφορος των ± 1.
3. Οι μόνοι διαιρέτες του είναι οι αριθμοί $\pm 1, \pm \alpha$.

Ένας ακέραιος αριθμός α ονομάζεται *σύνθετος* αν

1. Είναι διάφορος του 0
2. Είναι διάφορος των ± 1
3. Έχει και άλλους διαιρέτες εκτός από τους αριθμούς $\pm 1, \pm \alpha$

Ερατοσθένης
276 π.Χ. - 195 π.Χ.

Επομένως ένας σύνθετος αριθμός θα είναι της μορφής $2 \cdot x$ ή $3 \cdot x$ ή $4 \cdot x$ κτλ με $x \neq \pm 1, 0$ δηλαδή θα είναι ένα *γνήσιο* πολλαπλάσιο του 2 ή του 3 ή του 4 κ.ο.κ.

Οι πρώτοι αριθμοί προκύπτουν αν από τους ακεραίους εξαιρέσουμε τους 0, 1, -1 και τους σύνθετους. Δηλαδή αν εξαιρέσουμε ακόμη και όσους αριθμούς α έχουν και άλλους διαιρέτες εκτός από τους ± 1 και $\pm \alpha$. Δηλαδή οι πρώτοι αριθμοί είναι εκείνοι που θα απομείνουν αν από τους ακεραίους απομακρύνουμε τα 0, 1, -1 και όλα τα *γνήσια* πολλαπλάσια των $2, 4, \ldots$. Οι αριθμοί που απομένουν θα είναι οι πρώτοι αριθμοί. Φαντασθείτε αυτή την διαδικασία σαν ένα «κοσκίνισμα» όπου «περνούν» οι 0, 1, -1 και τα πολλαπλάσια των $2, 4, \ldots$ και ότι «μένει» είναι οι πρώτοι αριθμοί. Αυτή η διαδικασία είναι γνωστή από τον Ερατοσθένη και ονομάζεται «Κόσκινο του Ερατοσθένους». Αξίζει να

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340
341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380
381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400

Σχήμα 1.1: Οι πρώτοι αριθμοί μεταξύ 1 και 400

προσθέσουμε πως όταν «περνούν» από το κόσκινο τα γνήσια πολλαπλάσια του 2 αυτομάτως περνούν και όλα τα πολλαπλάσια του 4, του 6 κ.ο.κ. Το ίδιο γίνεται και με τα γνήσια πολλαπλάσια του 3. Απομακρύνοντας τα απομακρύνουμε και εκείνα του 6, του 9 κ.οκ. Στον πίνακα φαίνονται οι πρώτοι αριθμοί που θα απομείνουν αν «κοσκινίσουμε» τους αριθμούς από 1 έως 400. Προσέξτε ότι ενώ «αφαιρούμε» αριθμούς που παρουσιάζουν μία κανονικότητα το αποτέλεσμα δηλαδή ότι απομένει δεν παρουσιάζει κάποια εμφανή κανονικότητα. *Στα επόμενα όταν αναφερόμαστε σε πρώτους αριθμούς θα εννοούμε τους θετικούς πρώτους.*

1.3 Οι Ρητοί Αριθμοί

1.3.1 Τι είναι οι ρητοί αριθμοί

Οι *ρητοί* (δηλαδή οι αριθμοί που μπορούν να *ειπωθούν* να *περιγραφούν*) είναι οι αριθμοί οι οποίοι προκύπτουν ως πηλίκο δύο ακεραίων όπως για παράδειγμα οι αριθμοί

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{5}{3}, \qquad \frac{-3}{4}, \qquad \frac{6}{3}$$

Με άλλα λόγια

- Ρητοί αριθμοί είναι οι αριθμοί της μορφής $\frac{\mu}{\nu}$ όπου οι μ, ν είναι ακέραιοι ($\nu \neq 0$).

Η παράσταση ενός ρητού υπό μορφή κλάσματος είναι η πιο συνηθισμένη[5] αλλά πρέπει να θυμόμαστε ότι κλάσματα με διαφορετικούς αριθμητές παρονομαστές μπορεί να παριστούν τον ίδιο ρητό. Έτσι

$$\frac{36}{72} = \frac{50}{100} = \frac{14}{28} = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

[5] Υπάρχει και η δεκαδική παράσταση βλ. 1.4.12

Κάθε ρητός μπορεί να παρασταθεί με ένα κλάσμα όπου έχουν γίνει όλες οι απλοποιήσεις (*ανάγωγο*) και ο παρονομαστής του είναι φυσικός αριθμός. Τέτοια παράσταση είναι μοναδική και λέγεται *ανηγμένη* (έχει *αναχθεί* μετά τις απλοποιήσεις). Δηλαδή αν δύο τέτοια κλάσματα (ανάγωγα με παρονομαστή φυσικό αριθμό) παριστάνουν τον ίδιο ρητό τότε οι αριθμητές τους είναι ίσοι και οι παρονομαστές τους είναι ίσοι.

Παράδειγμα 4. Ας δούμε μερικές τέτοιες παραστάσεις σε ανηγμένη μορφή:

$$\frac{-125}{60} = \frac{-25}{12} \quad \frac{144}{64} = \frac{9}{4} \quad \frac{-77}{-121} = \frac{7}{11}$$

Άσκηση 13. Να γραφούν σε ανηγμένη μορφή τα $\frac{-122}{56}$, $\frac{70}{80}$, $\frac{71}{81}$

1.3.2 Σύγκριση ρητών αριθμών

Μας είναι γνωστό από το Γυμνάσιο ένα κριτήριο για να ελέγχουμε αν δύο κλάσματα είναι ίσα δηλαδή αν παριστούν τον ίδιο ρητό:

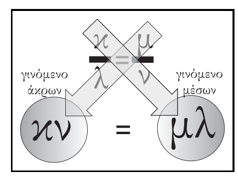
- Αν ισχύει $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu}$ τότε θα ισχύει και $\kappa\nu = \mu\lambda$

αλλά και αντιστρόφως

- Αν ισχύει $\kappa\nu = \mu\lambda$ τότε θα ισχύει και $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu}$

ή χρησιμοποιώντας την ορολογία που είδαμε στην 1.2.2

- Για τους ρητούς $\frac{\kappa}{\lambda}$ και $\frac{\mu}{\nu}$ θα ισχύει $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu}$ αν και μόνο αν ισχύει $\kappa\nu = \mu\lambda$.



Στην σχέση $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu}$ οι κ, ν λέγονται *μέσοι* και οι λ, μ λέγονται *άκροι*. Η ισότητα θα αληθεύει αν το γινόμενο των μέσων είναι ίσο με το γινόμενο των άκρων. Φυσικά:

- Ένας ρητός αριθμός $\frac{\kappa}{\lambda}$ θα είναι ίσος με τον 0 δηλαδή τον ρητό αριθμό $\frac{0}{\nu}$ αν μόνο αν $\kappa = 0$.

Άσκηση 14. Να αποδείξετε ότι (τα α, β, γ είναι μη μηδενικοί ακέραιοι) $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\beta}$

Άσκηση 15. Ισχύει άραγε $\frac{23589878123459}{12345923589878} = \frac{78123459235898}{58987812345923}$;

Άσκηση 16. Οι x, y είναι ακέραιοι αριθμοί και ο ρητός $\frac{x-3}{y}$ είναι μηδέν. Ποιος είναι ο x;

Επίσης με παρόμοιο τρόπο μπορούμε αν έχουμε δύο ρητούς αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\frac{\mu}{\nu}$ με τα λ, ν να είναι *φυσικοί αριθμοί* να βρίσκουμε πότε είναι $\frac{\kappa}{\lambda} > \frac{\mu}{\nu}$ και πότε $\frac{\kappa}{\lambda} < \frac{\mu}{\nu}$.

- Θα είναι $\frac{\kappa}{\lambda} > \frac{\mu}{\nu}$ αν και μόνο αν $\kappa\nu > \mu\lambda$.
- Θα είναι $\frac{\kappa}{\lambda} < \frac{\mu}{\nu}$ αν και μόνο αν $\kappa\nu < \mu\lambda$.

Άσκηση 17. Να βρείτε ποιος από τους ρητούς αριθμούς $\frac{11}{28}$ και $\frac{33}{94}$ είναι μεγαλύτερος.

Άσκηση 18. Να βρείτε ποιος από τους ρητούς αριθμούς $\frac{11}{-17}$ και $\frac{-50}{83}$ είναι μεγαλύτερος.

1.3.3 Πράξεις μεταξύ των Ρητών

Αν προσθέσουμε, αφαιρέσουμε, πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε δύο ρητούς ξέρουμε πως το αποτέλεσμα είναι επίσης ρητός αριθμός:

- $\frac{\kappa}{\lambda} + \frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa\nu+\mu\lambda}{\lambda\nu}$
- $\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa\nu-\mu\lambda}{\lambda\nu}$
- $\frac{\kappa}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}$
- $\frac{\frac{\kappa}{\lambda}}{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\kappa\nu}{\lambda\mu}$

Εννοείται πως στις παραπάνω σχέσεις τα λ, ν είναι διάφορα του 0 και στην τελευταία σχέση είναι και ο μ διάφορος του 0.

Υπενθυμίζουμε ότι οι τεχνικές που έχουμε μάθει για να προσθαφαιρούμε κλάσματα (μετατροπή σε ομώνυμα κ.τ.λ) εξακολουθούν να είναι χρήσιμες.

Παράδειγμα 5. Προκειμένου να βρούμε το άθροισμα $\frac{3}{4}+\frac{5}{84}$ είναι προτιμότερο να κάνουμε ομώνυμα γράφοντας:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{84}=\frac{\overset{\overset{21}{\smile}}{3}}{4}+\frac{\overset{\overset{1}{\smile}}{5}}{84}=\frac{63}{84}+\frac{5}{84}=\frac{58}{84}=\frac{17}{21}$$

παρά να γράψουμε

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{84}=\frac{3\cdot 84+4\cdot 5}{4\cdot 84}=\frac{272}{336}=\frac{17}{21}$$

Άσκηση 19. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τους ρητούς

1. $A = \frac{11}{5} + \frac{3}{8}$
2. $B = \frac{11}{5} - \frac{3}{8}$
3. $\Gamma = \frac{5}{4} \cdot \frac{-2}{15}$
4. $\Delta = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}}$

Όπως ακριβώς ορίσαμε τα πολλαπλάσια του ακεραίου x να είναι οι ακέραιοι αριθμοί της μορφής zx με z ακέραιο έτσι μπορούμε να ορίσουμε αυτή τη φορά τα πολλαπλάσια του ρητού x. Είναι οι ρητοί αριθμοί της μορφής zx με z *πάλι* ακέραιο.

Παράδειγμα 6. Μερικά πολλαπλάσια του $\frac{4}{5}$ είναι τα:

$$(-6)\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{5},\ (-5)\cdot\frac{4}{5}=-4,\quad (-3)\cdot\frac{4}{5}=-\frac{12}{5},\quad (-2)\cdot\frac{4}{5}=-\frac{8}{5},$$

$$(-1)\cdot\frac{4}{5}=-\frac{4}{5},\ 0\cdot\frac{4}{5}=0,\quad 1\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5},\quad 2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5},\quad 2\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$$

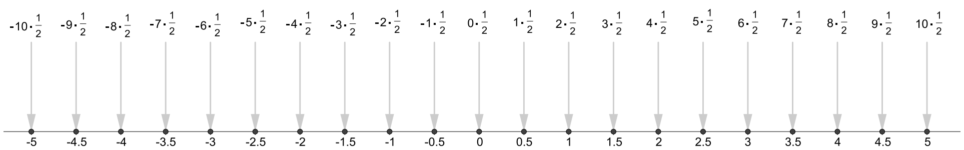
Μπορούμε τώρα να συμπληρώσουμε τον πίνακα της σελίδας 7 ώστε να περιλαμβάνει και τους ρητούς:

	Φυσικοί	Ακέραιοι	Ρητοί
Άθροισμα	✓	✓	✓
Γινόμενο	✓	✓	✓
Διαφορά		✓	✓
Πηλίκο			✓

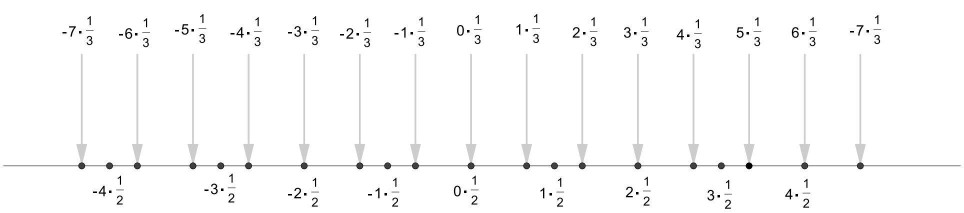
1.3.4 Ο άξονας των Ρητών

Αν πάρουμε ένα άξονα των ακεραίων μπορούμε να συμπληρώσουμε με σημεία που να αντιστοιχούν σε ρητούς αριθμούς. Στον άξονα αυτό τοποθετούνται:

1. Οι ρητοί που είναι πολλαπλάσια του $\frac{1}{2}$



2. Οι ρητοί που είναι πολλαπλάσια του $\frac{1}{3}$



3. Οι ρητοί που είναι πολλαπλάσια του $\frac{1}{4}$.
4. Οι ρητοί που είναι πολλαπλάσια του $\frac{1}{5}$

κ.ο.κ. Έτσι έχουμε τον άξονα των ρητών όπου όλοι οι ρητοί έχουν τοποθετηθεί κατάλληλα [6] στην ευθεία.

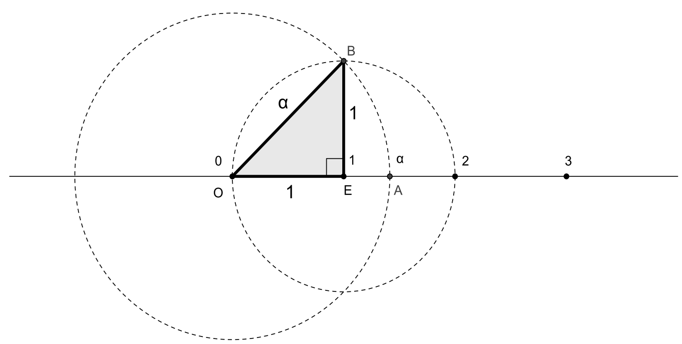
[6] δηλαδή οι θετικοί ρητοί τοποθετούνται προς το ίδιο μέρος του άξονα και ο κάθε $\alpha > 0$ απέχει από το σημείο που τοποθετείται το 0 απόσταση α και τέλος οι αντίθετοι των θετικών ρητών τοποθετούνται συμμετρικά ως προς την αρχή

1.4 Οι Πραγματικοί Αριθμοί

1.4.1 Πως προκύπτουν οι Πραγματικοί Αριθμοί

Όταν τοποθετούμε τους ακεραίους αριθμούς σε μία ευθεία για να πάρουμε ένα άξονα ακεραίων είναι προφανές ότι τα σημεία της ευθείας δεν εξαντλούνται δηλαδή υπάρχουν σημεία στα οποία δεν αντιστοιχεί κανένας ακέραιος. Όταν συμπληρώνουμε με ρητούς για να πάρουμε ένα άξονα ρητών συμπληρώνονται σημεία μεταξύ διαδοχικών ακεραίων. Τίθεται το ερώτημα: Θα εξαντλήσουν οι ρητοί τα σημεία της ευθείας; Με άλλα λόγια θα αντιστοιχεί κάθε σημείο της ευθείας σε ρητό αριθμό; Ή μήπως θα απομείνουν κάποια σημεία στα οποία δεν θα αντιστοιχιστεί ρητός αριθμός;[7]

Ονομάζουμε όπως συνηθίζεται με O την αρχή των αξόνων δηλαδή το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 0. Ονομάζουμε με E το σημείο που αντιστοιχεί στον αριθμό 1. Το τμήμα OE έχει φυσικά μήκος 1. Φέρνουμε κάθετη στον άξονα στο σημείο E και πάνω σε αυτή παίρνουμε ένα σημείο B έτσι ώστε $BE = OE$. Αυτό γίνεται εύκολα γράφοντας κύκλο με κέντρο το E ακτίνα OE δηλαδή 1 και παίρνοντας το B να είναι ένα από τα δύο σημεία που τέμνει ο κύκλος την κάθετη. Το ορθογώνιο τρίγωνο OEB έχει μήκη καθέτων πλευρών 1 και 1. Ας ονομάσουμε α το μήκος της υποτείνουσας του OB. Αν τώρα με κέντρο το O και ακτίνα OB γράψουμε κύκλο και σημειώσουμε με A το σημείο που τέμνει ο κύκλος αυτός την ημιευθεία OE τότε φυσικά το τμήμα OE είναι ίσο με το τμήμα OB και επομένως θα έχει και αυτό μήκος ίσο με α.



Θα αντιστοιχεί άραγε στο A ρητός αριθμός;

Με άλλα λόγια είναι ο αριθμός α ρητός; Ας δούμε τι θα συνέβαινε αν ο α ήταν ρητός. Θα έπαιρνε, όπως κάθε ρητός, μία ανηγμένη μορφή:

$$\alpha = \frac{\mu}{\nu} \quad (*)$$

[7] Όπως αναφέραμε ένας θετικός ρητός τοποθετείται σε σημείο που απέχει από την αρχή του άξονα μήκος ίσο με τον αριθμό. Ο αντίθετος του τοποθετείται συμμετρικά ως προς την αρχή του άξονα. Επομένως οι ρητοί θα εξαντλούν την ευθεία αν μπορούν να εκφράσουν όλα τα μήκη με άλλα λόγια αν κάθε μήκος είναι ρητός αριθμός. Οι αρχαίοι Έλληνες ως μία εποχή πίστευαν ότι αυτό είναι δυνατόν έως ότου οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι αυτό δεν είναι δυνατόν δηλαδή θα υπάρχουν μήκη που δεν θα εκφράζονται με ρητό αριθμό

Στην μορφή $(*)$ θα έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις και οι μ, ν θα είναι φυσικοί αριθμοί.

Το τρίγωνο OEB είναι ορθογώνιο και επομένως θα ισχύει σε αυτό το Θεώρημα του Πυθαγόρα:

$$\alpha^2 = 1^2 + 1^2$$

Επομένως:

$$\alpha^2 = 2 \ \ (**)$$

Αν συνδυάσουμε τις $(*)$, $(**)$ έχουμε $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = 2$ και επομένως

$$\mu^2 = 2\nu^2 \ \ (***)$$

Το δεύτερο μέλος της $(***)$ είναι ένας 2 επί κάποιον ακέραιο (τον ν^2) επομένως θα είναι ένας άρτιος αριθμός. Άρα και το πρώτο μέλος δηλαδή ο μ^2 είναι άρτιος αριθμός. Ο μ μόνος του θα είναι ή άρτιος ή περιττός. Περιττός δε μπορεί να είναι διότι τότε θα ήταν $\mu^2 = \mu \cdot \mu =$ περιττός $\times$ περιττός $=$ περιττός πράγμα αδύνατον. Επομένως ο μ είναι άρτιος. Αλλά τότε $\mu = 2\kappa$ για κάποιον ακέραιο κ και $\mu^2 = (2\kappa)^2 = 4\kappa^2$ και η $(***)$ γίνεται

$$4\kappa^2 = 2\nu^2$$

που μετά τις απλοποιήσεις μας δίνει

$$2\kappa^2 = \nu^2$$

Τώρα είναι η σειρά του ν να βγει άρτιος με ένα συλλογισμό παρόμοιο με εκείνο που κάναμε για το μ. Αν όμως οι μ, ν είναι άρτιοι τότε το $\frac{\mu}{\nu}$ δεν είναι ανάγωγο. Έχουμε ένα άτοπο στο οποίο καταλήξαμε δεχόμενοι ότι ο α είναι ρητός. Άρα ο αριθμός α δεν είναι ρητός. Επομένως το σημείο A δε μπορεί να καλυφθεί από ένα ρητό. Το τελικό μας συμπέρασμα είναι ότι οι ρητοί αριθμοί δεν επαρκούν για να καλύψουν την ευθεία. Χρειαζόμαστε και άλλους αριθμούς. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται *άρρητοι* και όλοι μαζί ρητοί και άρρητοι μας φτιάχνουν τους *πραγματικούς αριθμούς*.

Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α, β αυτοί ή θα είναι ίσοι ή όχι. Το να διαπιστώσουμε αν δύο πραγματικοί αριθμοί είναι ίσοι ή όχι άλλοτε είναι εύκολη υπόθεση άλλοτε όχι. Πάντως ή ιδιότητα του να είναι δύο αριθμοί ίσοι «μεταφέρεται» ή όπως λέμε στα Μαθηματικά είναι *μεταβατική*.

$$\boxed{\text{Μεταβατική Ιδιότητα της Ισότητας Αν } \alpha = \beta \text{ και } \beta = \gamma \text{ τότε } \alpha = \gamma} \qquad (1.1)$$

1.4.2 Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς

Στους πραγματικούς αριθμούς μπορούν, όπως και στους ρητούς, να εκτελεστούν και οι 4 πράξεις. Μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα της σελίδας 19 και με τους πραγματικούς αριθμούς:

	Φυσικοί	Ακέραιοι	Ρητοί	Πραγματικοί
Άθροισμα	✓	✓	✓	✓
Γινόμενο	✓	✓	✓	✓
Διαφορά		✓	✓	✓
Πηλίκο			✓	✓

Αυτό που κάνουμε όταν προσθέτουμε δύο πραγματικούς αριθμούς λ.χ. τους 6 και 7 είναι να αντιστοιχίζουμε στο ζεύγος των αριθμών 6 και 7 ένα νέο αριθμό: το άθροισμα τους $6+7$ δηλαδή το 13. Αν χρησιμοποιούσαμε δύο ίσους με αυτούς αριθμούς για παράδειγμα τους $\frac{12}{2}$ και $10-3$ και τους προσθέταμε πάλι 13 θα βρίσκαμε. Πρόκειται για μία γενική αρχή που έχουμε στην Άλγεβρα όταν εκτελούμε πράξεις: Σε ίσους προσθετέους αντιστοιχούν ίσα αθροίσματα, σε ίσους παράγοντες αντιστοιχούν ίσα γινόμενα κτλ. Δηλαδή γενικά έχουμε ότι:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha = \alpha' \text{ και } \beta = \beta' \text{ τότε } \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \text{ και } \alpha \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta'} \tag{1.2}$$

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει να προσθέτουμε κατά μέλη ισότητες ή να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ισότητες. Αναφέρεται σε δύο ισότητες αλλά ισχύει και για περισσότερες. Έτσι αν για παράδειγμα έχουμε την πληροφορία πως $\alpha = x$ και $\beta = y$ τότε αυτομάτως ξέρουμε πως $\alpha+\beta = x+y$. Επίσης διαβάζοντας την $\beta = y$ ανάποδα σαν $y = \beta$ έχουμε ότι $\alpha + y = x + \beta$. Μια ειδική περίπτωση είναι όταν έχουμε την πληροφορία ότι ισχύει η ισότητα $\alpha = \beta$. Τότε επειδή η ισότητα $\gamma = \gamma$ ισχύει πάντα, όποιος και να είναι ο γ μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε αυτές τις δύο ισότητες. Θα βρούμε πως $\alpha+\gamma = \beta+\gamma$ και $\alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma$. Δηλαδή μπορούμε και στα δύο μέλη μίας ισότητας να προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό και να πάρουμε ισότητα ή να πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αριθμό και να πάρουμε ισότητα:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma \text{ και } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma} \tag{1.3}$$

Συνηθίζεται στην Άλγεβρα να θεωρούμε τις πράξεις «+» της πρόσθεσης και «·» του πολλαπλασιασμού ως βασικές πράξεις και τις πράξεις «−» της αφαίρεσης και «:» της διαίρεσης ως παράγωγες που ορίζονται με βάση αυτές. Για τον ορισμό τους χρησιμοποιείται ο *αντίθετος* και ο *αντίστροφος* ενός (μη μηδενικού) αριθμού.

Άσκηση 20. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha = \beta$ τότε $3\alpha + 2 = 3\beta + 2$.

Άσκηση 21. Να αποδείξετε ότι αν $x = x'$ τότε $\alpha x + \beta = \alpha x' + \beta$.

1.4.3 Θεμελιώδεις ιδιότητες των Πράξεων

Κάποιες ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι θεμελιώδεις και οι υπόλοιπες μπορούν να παραχθούν με αποδείξεις από αυτές. Οι Θεμελιώδεις ιδιότητες είναι οι ακόλουθες:

$$\boxed{\text{Αντιμεταθετική: } \alpha + \beta = \beta + \alpha \text{ και } \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha} \tag{1.4}$$

Η ιδιότητα (1.4) μας λέει ότι δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία προσθέτουμε ή πολλαπλασιάζουμε δύο αριθμούς: Οι αριθμοί μπορούν να αντιμετατεθούν δηλαδή ο ένας να πάρει την σειρά του άλλου χωρίς το αποτέλεσμα να αλλάξει.

$$\boxed{\text{Προσεταιριστική: } \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma \text{ και } \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma} \tag{1.5}$$

Η πράξη της πρόσθεσης ή του πολλαπλασιασμού γίνεται μεταξύ δύο αριθμών. Αν έχουμε τρεις αριθμούς η ιδιότητα (1.5) μας λέει ότι μπορούμε να εκτελέσουμε την πράξη μεταξύ των δύο πρώτων (να προσεταιρισθεί ο πρώτος τον δεύτερο) και το μετά να εκτελεσθεί η πράξη μεταξύ του αποτελέσματος και του τρίτου ή να εκτελεσθεί η πράξη μεταξύ του πρώτου και του αποτελέσματος της πράξης δεύτερου και τρίτου. Το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο και γιαυτό γράφουμε:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα σε συνδυασμό με την αντιμεταθετική μας επιτρέπει να αλλάζουμε σειρά και να προσθαφαιρούμε παρενθέσεις. Έτσι

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot (\gamma \cdot (\delta \cdot \varepsilon))) = (\alpha \cdot \gamma \cdot \beta) \cdot (\delta \cdot \varepsilon)$$

$$\boxed{\text{Ύπαρξη ουδετέρου στοιχείου: } \quad \alpha + 0 = \alpha \text{ και } \alpha \cdot 1 = \alpha} \tag{1.6}$$

Η ιδιότητα (3) αναφέρεται στο γεγονός ότι κάθε πράξη έχει ένα ουδέτερο στοιχείο δηλαδή ένα στοιχείο που όταν συμμετέχει στην πράξη με οποιοδήποτε άλλο στοιχείο συμπεριφέρεται «ουδέτερα» δηλαδή δεν το μεταβάλλει: Είναι σαν να μην έγινε η πράξη. Αν προσθέσουμε το 0 σε οποιοδήποτε αριθμό ή αν πολλαπλασιάσουμε με το 1 οποιοδήποτε αριθμό το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός μας. Δεν υπάρχουν άλλοι αριθμοί με αυτές τις ιδιότητες. Δεν είναι σπουδαίο αλλά μπορούμε να δώσουμε και μία μικρή απόδειξη: Αν υπήρχε και άλλος αριθμός ας τον πούμε $0'$ ώστε για κάθε α να ήταν $0' + \alpha = \alpha$ τότε αφενός $0 + 0' = 0$ και αφετέρου $0 + 0' = 0'$ οπότε τελικά $0 = 0'$.

$$\boxed{\text{Ύπαρξη συμμετρικού στοιχείου: } \alpha + (-\alpha) = 0 \text{ και } \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,\ (\alpha \neq 0)} \tag{1.7}$$

Η ισότητα αυτή μας λέει ότι κάθε στοιχείο (στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού πρέπει να είναι και μη μηδενικό) μπορεί να «εξουδετερωθεί» από ένα άλλο ώστε να μας δώσει το «αδρανές» ουδέτερο στοιχείο. Στην περίπτωση της πρόσθεσης αυτό επιτυγχάνεται προσθέτοντας τον *αντίθετο* αριθμό $-\alpha$ ενώ στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού πολλαπλασιάζοντας με το *αντίστροφο* στοιχείο $\frac{1}{\alpha}$.

$$\boxed{\text{Επιμεριστική: } \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma} \tag{1.8}$$

Η επιμεριστική ιδιότητα[8] μας λέει πως όταν θέλουμε να πολλαπλασιάσουμε ένα αριθμό με ένα άθροισμα η δουλειά αυτή μπορεί να «επιμεριστεί» δηλαδή να χωριστεί σε άλλες απλούστερες: Να γίνουν οι επιμέρους πολλαπλασιασμοί του αριθμού με τους προσθετέους και να προστεθούν αποτελέσματα. Μία ισότητα όπως η $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ μας λέει πως το πρώτο μέλος είναι ίσο με το δεύτερο. Αλλά εξ' ίσου καλά μας λέει πως το δεύτερο είναι ίσο με το πρώτο. Από το πρώτο μεταβαίνουμε στο δεύτερο εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς αλλά και από το δεύτερο στο πρώτο βγάζοντας όπως λέμε κοινό παράγοντα.

Οι δύο άλλες πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης ορίζονται πλέον ως εξής:

$$\boxed{\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)} \tag{1.9}$$

και

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}} \tag{1.10}$$

Άσκηση 22. Βρείτε χωρίς χαρτί και μολύβι το άθροισμα: $1+671+999$

Άσκηση 23. Βρείτε χωρίς χαρτί και μολύβι το άθροισμα $\frac{12}{19}+3+\frac{7}{19}$

Άσκηση 24. Αν $A+B=7$ βρείτε το $3A+3B$.

Άσκηση 25. Να γράψετε ως γινόμενο παραγόντων τα:

1. $6x+12$
2. $3\alpha\beta+\alpha$
3. $\alpha A+\alpha B+\beta A+\beta B$

1.4.4 Άλλες Ιδιότητες των πράξεων

Οι ιδιότητες 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, λίγες τον αριθμό, μας επιτρέπουν να αποδείξουμε όλες τις άλλες ιδιότητες των πράξεων που ξέρουμε[9]. Ας θυμηθούμε μερικές:

$$\boxed{-(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta) \ \text{ και } \ \frac{1}{\alpha\cdot\beta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}} \tag{1.11}$$

που μας λέει ότι:

ο αντίθετος (αντιστοίχως ο αντίστροφος) αθροίσματος (αντιστοίχως γινομένου) είναι ίσος με το άθροισμα (αντιστοίχως το γινόμενο) των αντιθέτων (αντιστοίχως των αντιστρόφων)[10]

[8]Το πλήρες όνομα της είναι «επιμεριστική ιδιότητα το πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση».

[9]Τις αποδείξεις αυτές αν και δεν είναι δύσκολες θα τις παραλείψουμε.

[10]Σπάνια μιλάμε έτσι στην καθημερινή κουβέντα μας. Στα Μαθηματικά αυτού του είδους οι εκφράσεις συνηθίζονται και προτιμώνται για να δειχθεί κάποιο είδος ομοιότητας. Στην πραγματικότητα πρόκειται για δύο προτάσεις:
ο αντίθετος αθροίσματος είναι ίσος με το άθροισμα των αντιθέτων
ο αντίστροφος γινομένου είναι ίσος με το το γινόμενο των αντιστρόφων

Μία άλλη βασική ιδιότητα είναι η ιδιότητα *της διαγραφής*:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} \text{Αν} & \alpha + \gamma = \beta + \gamma & & \text{τότε} & \alpha = \beta \\ \text{Αν} & \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma & \text{και} \quad \gamma \neq 0 & \text{τότε} & \alpha = \beta \end{array}} \tag{1.12}$$

Πολλοί χειρισμοί που κάνουμε στην Άλγεβρα στηρίζονται σε αυτή την ιδιότητα:

Παράδειγμα 7. Αν έχουμε ότι $x+3 = 7+3$ τότε διαγράφουμε το 3 σημειώνοντας $x + \cancel{3} = 7 + \cancel{3}$ και καταλήγουμε στο συμπέρασμα $x = 7$. Όμοια από στην σχέση $\alpha(x + y) = a\beta$ αν το α είναι διάφορο του μηδενός μπορούμε να το διαγράψουμε $\cancel{\alpha}(x + y) = \cancel{\alpha}\beta$ και να συμπεράνουμε ότι $x + y = \beta$.

Το 0 παίζει ένα ειδικό ρόλο στον πολλαπλασιασμό (λέγεται γιαυτό *απορροφητικό* στοιχείο):

$$\boxed{0 \cdot x = 0} \tag{1.13}$$

δηλαδή αν πάρουμε το γινόμενο του 0 με κάποιο αριθμό τότε το αποτέλεσμα θα είναι μηδέν. Αυτός είναι και ο μόνος τρόπος για να γίνει ένα γινόμενο μηδέν δηλαδή πρέπει οπωσδήποτε κάποιος παράγοντας του να είναι μηδέν:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha \cdot \beta = 0 \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0} \tag{1.14}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική στην επίλυση εξισώσεων και ισχύει και για περισσότερους απο δύο παράγοντες.

Παράδειγμα 8. Αν έχουμε μία εξίσωση με άγνωστο το x και με κάποιο τρόπο πετύχουμε να την φέρουμε στην μορφή

$$(x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$$

τότε επειδή κάποιος από τους παράγοντες θα είναι μηδέν ή πρέπει $x - 1 = 0$ ή $x + 1 = 0$ ή τέλος $x - 3 = 0$. Επομένως υπάρχουν τρία ενδεχόμενα για το x. Θα είναι $x = 1$ η $x = -1$ ή τέλος $x = 3$.

Επίσης μπορεί να αποδειχθεί η γνωστή ιδιότητα:

$$\boxed{\alpha(-\beta) = (-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)} \tag{1.15}$$

καθώς και η

$$\boxed{(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta} \tag{1.16}$$

Τέλος αποδεικνύεται ότι η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει και πιο γενικά για τρεις ή περισσότερους αριθμούς

$$\boxed{\alpha(\pm\beta \pm \gamma \pm \delta \pm \ldots) = \alpha(\pm\beta) + \alpha(\pm\gamma) + \alpha(\pm\delta) + \ldots} \tag{1.17}$$

Άσκηση 26. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί

1. $x\,(y+z-t)$
2. $(x+\alpha)\,(y+z-t)$
3. $(x\alpha)\,(y+z-t)$
4. $(\alpha+\beta-\gamma)\,(\kappa-\lambda+\mu)$

Άσκηση 27. Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
3. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
4. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y-2}$

Άσκηση 28. Δίνεται η παράσταση $A=\frac{xy+1}{x+y}$. Να βρείτε την τιμή της A όταν

1. $x=1,\ y=2$
2. $x=-\frac{1}{4},\ y=8$

Άσκηση 29. Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις:

1. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$
2. $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{x}{y}}$
3. $\frac{\alpha}{\frac{x}{y}}$
4. $\frac{\frac{\alpha}{x}}{y}$

Άσκηση 30. Να αποδείξετε ότι αν $2x+5=2y+5$ τότε $x=y$

Άσκηση 31. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $\alpha\beta-5\alpha-3\beta+15$
2. $pc+qc+pd+qd$
3. $ab-bd+ae-de$
4. $ab+5b+6a+30$
5. $ab-5b-6a+30$
6. $2ab-10a+3b-15$

Άσκηση 32. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $\frac{x\alpha+x\beta}{x\gamma+x\delta}$
2. $\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\beta\delta}{\beta\varepsilon}$
3. $\frac{xa-xb-ya+yb}{xa+xb-ya-yb}$
4. $\frac{xm+xn+3m+3n}{2xm+2xn-3m-3n}$
5. $\frac{2t\alpha+2t\beta+s\alpha+s\beta}{2t\alpha-2t\beta+s\alpha-s\beta}$
6. $\frac{xy-\beta x-\alpha y+\alpha\beta}{xy+\beta x-\alpha y-\alpha\beta}$

Άσκηση 33. Για τον αριθμό y είναι γνωστό πως $(y-1)\,(y-2)\,(y-3)=0$. Ποιές είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει το γινόμενο $(y+1)\,(y+2)\,(y+3)$;

Άσκηση 34. Να αποδείξετε ότι αν $(\alpha-\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)=0$ τότε $\alpha=\beta$.

Άσκηση 35. Τι θα σήμαινε να ήταν η πρόσθεση επιμεριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό; Ισχύει τέτοια ιδιότητα;

1.4.5 Συντομεύσεις και προτεραιότητες

Στον πολλαπλασιασμό παραλείπουμε όπου μπορούμε, και δεν υπάρχει κίνδυνος να δημιουργηθεί σύγχυση, το σύμβολο «·» της πράξης του πολλαπλασιασμού. Έτσι γράφουμε $2x$ αντί $2 \cdot x$ και $\alpha\left(\beta-\gamma\right)$ αντί $\alpha \cdot \left(\beta-\gamma\right)$. Φυσικά δε μπορούμε αντί για $3 \cdot 7$ να γράψουμε 37 ούτε αντί για $3 \cdot \frac{4}{5}$ να γράψουμε $3\frac{4}{5}$ (το πρώτο είναι ίσο με $\frac{12}{5}$ και το δεύτερο με $\frac{19}{5}$)

Όπου είναι δυνατόν παραλείπουμε παρενθέσεις. Έτσι γράφοντας $a+\beta\gamma$ εννοούμε το $a+\left(\beta\gamma\right)$. Αντίθετα στην παράσταση $\alpha\left(\beta+\gamma\right)$ δε μπορούμε να παραλείψουμε την παρένθεση αφού αν την παραλείπαμε θα ήταν $\alpha\beta+\gamma$ αντί του σωστού $\alpha\beta+\alpha\gamma$. Κατά τα άλλα ακολουθούμε τον γενικό κανόνα για την προτεραιότητα των πράξεων που μάθαμε στο Γυμνάσιο: Αν δεν υπάρχουν παρενθέσεις η εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων προηγείται της εκτέλεσης των προσθέσεων και αφαιρέσεων. Αν έχουμε μία αλυσίδα από προσθαφαιρέσεις ή μία αλυσίδα από πολλαπλασιασμού και διαιρέσεις τότε συνηθίζεται[11] οι πράξεις να εκτελούνται από τα αριστερά προς τα δεξιά.

Άσκηση 36. Βρείτε το $12 \cdot 2 + 3 \cdot 4$

Άσκηση 37. Βρείτε το $12 \cdot 2 : 3 \cdot 4$

1.4.6 Δυνάμεις και πολλαπλάσια

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μπορούν φυσικά να εφαρμοσθούν σε ίσους προσθετέους ή ίσους παράγοντες. Έτσι αν έχουμε ένα αριθμό α και ένα θετικό ακέραιο ν μπορούμε να σχηματίσουμε:

$$\text{Το άθροισμα} \quad \underbrace{a+\alpha+\ldots+\alpha}_{\nu \text{ φορές}} \qquad \text{Το γινόμενο} \quad \underbrace{a\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ φορές}}$$

Το ν δηλώνει πόσες φορές επαναλαμβάνουμε το α δηλαδή 1, 2, 3 κτλ και σε καμία περίπτωση δεν σημαίνει «άπειρες φορές». Για το άθροισμα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\nu\alpha$ και δεν είναι παρά ένα πολλαπλάσιο του α ενώ για το γινόμενο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό α^{ν} και έχουμε μία *δύναμη* με *βάση* το α και *εκθέτη* το ν. Υπενθυμίζουμε το α^{ν} λέγεται *δύναμη*, το α λέγεται *βάση* και το ν *εκθέτης*. Οι συντομογραφίες αυτές είναι χρήσιμες και διευκολύνουν τους υπολογισμούς. Για τον λόγο αυτό τις επεκτείνουμε και για την περίπτωση όπου ο ν είναι μηδέν ή και αρνητικός ακέραιος. Μόνο που στην περίπτωση της δύναμης με μηδενικό ή αρνητικό εκθέτη απαιτούμε η βάση να είναι διάφορη του 0. Είναι $0 \cdot \alpha = 0$ και *ορίζουμε* να είναι $\alpha^0 = 1$ για $\alpha \neq 0$. Αν τώρα το ν είναι αρνητικό τότε

$$\nu\alpha = \left(-\nu\right)\left(-\alpha\right) = \underbrace{\left(-a\right)+\left(-\alpha\right)+\ldots+\left(-\alpha\right)}_{-\nu \text{ φορές}}$$

[11] Μερικά υπολογιστικά προγράμματα υιοθετούν άλλους κανόνες

και

$$\alpha^{\nu} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{-\nu} = \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\alpha}}_{-\nu \text{ φορές}} = \frac{1}{\alpha^{-\nu}}$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\boxed{\nu\alpha = \begin{cases} \underbrace{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{\nu \text{ φορές}} & \text{αν} \quad \nu > 0 \\ 0 & \text{αν} \quad \nu = 0 \\ \underbrace{(-\alpha)+(-\alpha)+\ldots+(-\alpha)}_{-\nu \text{ φορές}} & \text{αν} \quad \nu < 0 \end{cases}}$$

και

$$\boxed{\alpha^{\nu} = \begin{cases} \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ φορές}} & \text{αν} \quad \nu > 0 \\ 1 & \text{αν} \quad \alpha \neq 0, \ \nu = 0 \\ \underbrace{\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\alpha}}_{-\nu \text{ φορές}} = \frac{1}{\alpha^{-\nu}} & \text{αν} \quad \nu < 0 \end{cases}}$$

Ο παραπάνω συμβολισμός είναι κάπως ενοχλητικός αλλά καλό είναι να εξοικειωθείτε όσο γίνεται νωρίτερα. Η βασική του δομή είναι

$$\text{Κάποια παράσταση} = \begin{cases} \text{Κάποια παράσταση 1} & \text{αν} & \text{Ισχύει κάποια συνθήκη 1} \\ \text{Κάποια παράσταση 2} & \text{αν} & \text{Ισχύει κάποια συνθήκη 2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

όπου οι συνθήκες 1, 2, ... είναι αλληλοαποκλειόμενες δηλαδή όταν ισχύει μία από αυτές δεν ισχύουν οι άλλες. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Ας πούμε ότι ο ν είναι φυσικός αριθμός. Ποιές είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει ο $(-1)^{\nu}$; Αν $\nu = 0$ τότε $(-1)^{\nu} = (-1)^{0} = 1$. Αν ο ν είναι κάποιος άρτιος $\nu = 2\kappa$ τότε:

$$(-1)^{\nu} = \underbrace{(-1)(-1)\ldots(-1)}_{\nu \text{ φορές}} = \underbrace{\overbrace{(-1)(-1)}^{\text{Ζεύγος } 1}\overbrace{(-1)(-1)}^{\text{Ζεύγος } 2}\ldots\overbrace{(-1)(-1)}^{\text{Ζεύγος } \kappa}}_{\kappa \text{ φορές}} = \underbrace{1\cdot1\cdot\ldots\cdot1}_{\kappa \text{ φορές}} = 1$$

Αν πάλι ο ν είναι περιττός, $\nu = 2\kappa + 1$ τότε όταν γράψουμε το $(-1)^{\nu}$ υπό μορφή γινομένου θα έχουμε κ γινόμενα ζευγών $(-1)(-1)$ που δίνουν 1 επί ένα ακόμη -1 που θα μας γυρίσει το γινόμενο σε -1. Επειδή και ο 0 είναι άρτιος συμπεραίνουμε πως το $(-1)^{\nu}$ είναι 1 ή -1 ανάλογα με το αν ο ν είναι άρτιος η περιττός. Τελικά:

$$(-1)^{\nu} = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad \nu = \text{άρτιος} \\ -1 & \text{αν} \quad \nu = \text{περιττός} \end{cases}$$

Άσκηση 38. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (-1)^{3} + 2^{4} + 3^{-1}$

Άσκηση 39. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + 2^{-4} + (-3)^{3}$

1.4.7 Ιδιότητες Δυνάμεων και Πολλαπλασίων

Για τις δυνάμεις ισχύουν οι ακόλουθες (γνωστές από το Γυμνάσιο) ιδιότητες (οι μ, ν είναι ακέραιοι και όπου χρειάζεται είναι $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$):

$$\boxed{\mu\alpha + \nu\alpha = (\mu + \nu)\,\alpha \quad \text{και} \quad \alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}} \tag{1.18}$$

$$\boxed{\mu\alpha - \nu\alpha = (\mu - \nu)\,\alpha \quad \text{και} \quad \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}} \tag{1.19}$$

$$\boxed{\nu\,(\mu\alpha) = (\mu\nu)\,a \quad \text{και} \quad (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}} \tag{1.20}$$

$$\boxed{\nu\,(\alpha + \beta) = \nu\alpha + \nu\beta \quad \text{και} \quad (\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}} \tag{1.21}$$

$$\boxed{\nu\,(\alpha - \beta) = \nu\alpha - \nu\beta \quad \text{και} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}} \tag{1.22}$$

Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών δεν είναι δύσκολες απλώς χρειάζονται κατάλληλο χειρισμό των επιμέρους περιπτώσεων. Κάποιες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Άσκηση 40. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

1. 2^4
2. 4^2
3. 2^5
4. 5^2
5. 2^{-3}
6. $(-3)^2$

Άσκηση 41. Αν είναι $\alpha^{\mu} = 5$ και $\alpha^{\nu} = 12$ βρείτε τα $\alpha^{\mu+\nu}$ και $\alpha^{\mu-\nu}$.

Άσκηση 42. Αν $\alpha^{\mu} = p$ και $\alpha^{\mu+1} = q$ όπου p, q είναι γνωστοί αριθμοί βρείτε το α.

Άσκηση 43. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^4$
2. $\left(\frac{6}{5}\right)^3$
3. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$
4. $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$

Άσκηση 44. Να γράψετε ως μία δύναμη του α τους αριθμούς:

1. $\alpha^3\alpha^5$
2. $\frac{\alpha^3}{\alpha^5}$
3. $\left(\alpha^2\right)^3$
4. $\left(\alpha^2\alpha^3\alpha^4\right)^2\left(\alpha^2\alpha^3\alpha^4\right)^3$
5. $\left(\alpha^4\right)^{-3}\alpha^5\frac{1}{(\alpha^{-3})^2}$
6. $\left(\left(\alpha^{-3}\right)^{-4}\left(\alpha^{-5}\right)^{-6}\right)^2$

Άσκηση 45. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1. $2^2 + 3^{-2} - (-3)^2$
2. $2^9 + (-2)^9 + 2^0$
3. $(-t)^{51} + t^{51} + (-t)^{-51} + t^{-51}$
4. $\frac{\xi^2+\xi}{\xi} - \xi - 1$

Άσκηση 46. Να αποδείξετε την ιδιότητα $\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^\mu \alpha^\nu$ όταν οι μ, ν είναι φυσικοί αριθμοί.

Άσκηση 47. Να αποδείξετε την ιδιότητα $\alpha^{\mu-\nu} = \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}$ όταν οι μ, ν είναι φυσικοί αριθμοί με $\mu > \nu$.

Άσκηση 48. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $\alpha x^2 + \alpha^2 x - \alpha\beta - \beta x$
2. $x^2 + \alpha x - \beta x - \alpha\beta$
3. $x^5 y^2 + x^4 y^3$
4. $a^{13} b^{11} - a^{14} b^{12}$
5. $x^2 y^4 + x^2 b^3 + a^4 y^4 + a^4 b^3$
6. $16\alpha^2\beta - 4\beta^2 - 4\alpha^4 + \alpha^2\beta$

Άσκηση 49. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $\frac{x^3 a + x^3 b^2 + y^4 a + y^4 b^2}{x^3 a^2 + x^3 b + y^4 a^2 + y^4 b}$
2. $\frac{x^4 y^2 r - x^4 y^2 s}{x^4 y^2 r + x^4 y^2 s}$
3. $\frac{5x^2 y z^2}{5x^2 y + 10x^2 z}$
4. $\frac{rm + rt^3 + s^3 m + s^3 t^3}{rm - rt^3 + s^3 m - s^3 t^3}$

1.4.8 Δείκτες

Στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε γράμματα για να συμβολίσουμε αριθμούς, σημεία ή άλλα αντικείμενα. Μερικές φορές χρησιμοποιούμε και τονούμενα γράμματα. Γα δύο λόγους: Ο πρώτος γιατί θέλουμε κάποιο γράμμα να μας υπενθυμίζει ένα άλλο γιατί οι δύο αριθμοί που συμβολίζουν έχουν μεταξύ τους κάποια σχέση. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι μπορεί τα διαθέσιμα γράμματα να μην επαρκούν, δεδομένου ότι δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα για να συμβολίσουμε δύο διαφορετικούς αριθμούς. Όμως η επανάληψη των τόνων στα τονούμενα γράμματα μας δημιουργεί κάποια προβλήματα. Μπορούμε να ξεχωρίσουμε το a' από το a''' αλλά τα πράγματα θα δυσκόλευαν αν είχαμε τα $a''''''''''''''''''''''''$ και $a'''''''''''''''''''''''''$. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τους *δείκτες*. Αντι για a', a'', a''' μπορούμε να γράφουμε a_1, a_2, a_3. Αν για παράδειγμα θέλαμε να συμβολίσουμε τους 12 μήνες μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $M_1, M_2, ...$ για τον πρώτο μήνα (Ιανουάριο) τον δεύτερο μήνα (Φεβρουάριο) κ.ο.κ. Με τους δείκτες πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο εξής σημείο: *Δεν συμπεριφέρονται όπως οι δυνάμεις* ακόμη και όταν δουλεύουμε με αριθμούς. Έτσι δεν είναι σωστό να πούμε πως $\alpha_3 \alpha_4 = a_7$.

Άσκηση 50. Έστω ότι $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = -2$. Βρείτε τα

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
2. $a_{1+3} a_{1+2}$
3. $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$

4. $\frac{a_1 a_2}{a_3 - a_4^4}$

Άσκηση 51. Να κάνετε τις πράξεις

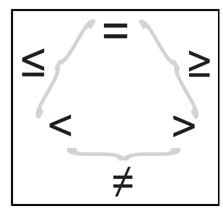
1. $\left(\alpha_1^4 \alpha_2^5\right)\left(\alpha_1^3 \alpha_2^6\right)$
2. $\left(\alpha_1^3 \beta_1^2\right)^3 \alpha_1^3 \beta_1^2$
3. $(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$
4. $\left(x_1 x_2^2 x_3^3\right)^2 \left(x_1^2 x_2^3 x_3\right)^2$

1.4.9 Η Διάταξη στους Πραγματικούς

Οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να συγκρίνονται όπως οι ρητοί αριθμοί. Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α, β τότε κάποιο (και ένα μόνο) από τα επόμενα θα ισχύει

- Οι αριθμοί είναι ίσοι.
- Μεγαλύτερος είναι ο α και μικρότερος ο β.
- Μεγαλύτερος είναι ο β και μικρότερος ο α.

Οι αντίστοιχοι συμβολισμοί κατά περίπτωση είναι $\alpha = \beta$ (αλλά και $\beta = \alpha$), $\alpha > \beta$ (αλλά και $\beta < \alpha$), $\beta > \alpha$ (αλλά και $\alpha < \beta$). Επομένως για δύο πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει μόνο ένα από τα



$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Για δύο πραγματικούς } \alpha, \beta \textit{ ένα μόνο από τα επόμενα ισχύει} \\ \alpha = \beta \text{ ή } \alpha > \beta \text{ ή } \alpha, < \beta\end{array}} \tag{1.23}$$

Επίσης έχουμε και ανάμεικτες περιπτώσεις

- Να είναι $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$ δηλαδή να αποκλειστεί η $\alpha = \beta$ οπότε οι αριθμοί είναι διάφοροι. Γράφουμε $\alpha \neq \beta$ (αλλά και $\beta \neq \alpha$).
- Να είναι $\alpha < \beta$ ή $\alpha = \beta$ δηλαδή να αποκλειστεί η $\alpha > \beta$ οπότε ο α είναι μικρότερος ή ίσος του β. Γράφουμε $\alpha \leq \beta$ (αλλά και $\beta \geq \alpha$).
- Να είναι $\beta < \alpha$ ή $\beta = \alpha$ δηλαδή να αποκλειστεί η $\alpha > \beta$ οπότε ο β είναι μικρότερος ή ίσος του α. Γράφουμε $\beta \leq \alpha$ (αλλά και $\alpha \geq \beta$).

Σχέσεις όπως οι $A \leq B$, $A \geq B$, $A < B$, $A > B$ λέγονται *ανισότητες* και οι αριθμοί A, B λέγονται *μέλη* τους.

Παράδειγμα 9. Είναι $3 < 6$, $6 > 3$, $3 \leq 6$, $6 \geq 3$, $3 \neq 6$, $6 \neq 3$, $3 = 3$, $3 \leq 3$, $3 \geq 3$.

Αν είναι $\alpha > 0$ τότε ο α λέγεται *θετικός*. Αν είναι $\alpha < 0$ τότε λέγεται αρνητικός ενώ αν $\alpha \geq 0$ λέγεται *μη αρνητικός*.

Άσκηση 52. Ποιες από τις επόμενες σχέσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

1. $\frac{5}{3} \leq \frac{17}{8}$
2. $\frac{8}{16} \leq \frac{1}{2}$
3. $-7 \leq -12$
4. $7 \neq -7$
5. $(-11)^2 \neq 121$
6. $(-2)^3 > 0$

1.4.10 Θεμελιώδεις ιδιότητες της Διάταξης

Υπενθυμίζουμε μερικές, γνωστές από το Γυμνάσιο, θεμελιώδεις ιδιότητες της διάταξης.

$$\boxed{\text{Μεταβατική Ιδιότητα: Αν } \alpha < \beta \text{ και } \beta < \gamma \text{ τότε } \alpha < \gamma} \tag{1.24}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ακόμη πως ισχύει

$$\boxed{\text{Αν } \alpha \leq \beta \text{ και } \beta < \gamma \text{ τότε } \alpha < \gamma} \tag{1.25}$$

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \beta \leq \gamma \text{ τότε } \alpha < \gamma} \tag{1.26}$$

$$\boxed{\text{Αν } \alpha \leq \beta \text{ και } \beta \leq \gamma \text{ τότε } \alpha \leq \gamma} \tag{1.27}$$

Η *μεταβατική ιδιότητα* με την μορφή (1.24) ή τις μορφές (1.25), (1.26), (1.27) μας επιτρέπει να *μεταβαίνουμε* από δύο ανισότητες σε μία τρίτη. Έτσι

- Αν ξέρουμε πως $2 < x$ και $x < y$ συμπεραίνουμε πως $2 < y$.
- Αν ξέρουμε πως $a < b$, $b < c$, $c < d$ τότε ξέρουμε πως $a < c$ και $c < d$ επομένως $a < d$.

Σε ένα οριζόντιο άξονα πραγματικών αριθμών η σχέση $a < b$ σημαίνει πως το b είναι τοποθετημένο δεξιά του a. Η σχέση $b < c$ σημαίνει πως το c είναι τοποθετημένο δεξιά του b. Τέλος η σχέση $c < d$ μας λέει πως το d είναι δεξιά του c. Η μεταβατική ιδιότητα ουσιαστικά μας λέει πως αν το b είναι δεξιά του a και το c δεξιά του b τότε το c είναι δεξιά του a.

Η μεταβατική ιδιότητα μας επιτρέπει να γράφουμε διπλές ανισότητες όπως $a < b < c$. Η σχέση αυτή σημαίνει δύο πράγματα: ότι $a < b$ και ότι $b < c$. Και φυσικά, ως συνέπεια, σημαίνει και ότι $a < c$. Αν ισχύει $a < b < c$ λέμε ότι ο b είναι *μεταξύ* των a και c.

Ισχύει και η παρακάτω ιδιότητα[12]:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha \leq \beta \text{ και } \beta \leq \alpha \text{ τότε } \alpha = \alpha} \tag{1.28}$$

[12] Λέγεται *αντισυμμετρική* σε αντιδιαστολή με την ιδιότητα της ισότητας «Αν $\alpha = \beta$ τοτε και $\beta = \alpha$» που ονομάζεται *συμμετρική*

Άσκηση 53. Υποθέτουμε ότι $a > b$, $a < c$, $d > c$. Να συγκρίνετε τους d, b.

Άσκηση 54. Αν $2 < x$ και $3 < y$ μπορούμε να συγκρίνουμε τα x, y;

Άσκηση 55. Να γράψετε είκοσι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $1 < x < 13$.

Άσκηση 56. Για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ είναι γνωστό ότι $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, $\delta < \beta$, $\varepsilon > \beta$. Ποιές από τις παρακάτω σχέσεις προκύπτουν από τα παραπάνω δεδομένα;

1. $\alpha < \delta$
2. $\varepsilon > \delta$
3. $\gamma > \delta$
4. $\alpha \leq \varepsilon$

Άσκηση 57. Να τοποθετήσετε κατά αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{4}{8}$$

1.4.11 Διάταξη και πράξεις

Η διάταξη στους πραγματικούς είναι άμεσα συνδεδεμένη με τις πράξεις και δεν λειτουργεί ανεξάρτητα από αυτές. Είναι όπως λέμε *συμβιβαστή* με τις πράξεις. Το γεγονός αυτό περιγράφεται από τις εξής ιδιότητες

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma < \beta + \gamma} \tag{1.29}$$

$$\boxed{\text{Αν } \alpha > 0, \ \beta > 0 \text{ τότε } \alpha\beta > 0} \tag{1.30}$$

Η ιδιότητα (1.29) περιγράφεται ως εξής:

«Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό θα προκύψει ανισότητα που θα έχει ίδια φορά με της αρχική»

ενώ η (1.30) ως

«Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι θετικό»

Συνδυάζοντας τις τις ιδιότητες αυτές με τις ιδιότητες (1.23),(1.24) και τις ιδιότητες των πράξεων μπορούμε να αποδείξουμε και άλλες ιδιότητες γνωστές από το Γυμνάσιο:

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. Τότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη το $-\gamma$ έχουμε $\alpha + \gamma + (-\gamma) < \beta + \gamma + (-\gamma)$ δηλαδή $\alpha + 0 < \beta + 0$ και τελικά $\alpha < \beta$. Επομένως:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha + \gamma < \beta + \gamma \text{ τότε } \alpha < \beta} \tag{1.31}$$

που περιγράφεται και ως

«Αν απο τα δύο μέλη μια ανισότητας διαγράψουμε τον ίδιο προσθετέο τότε προκύπτει ανισότητα που έχει ίδια φορά με την αρχική»

Ας υποθέσουμε τώρα πως $\alpha > \beta$. Τότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη το $-\beta$ βρίσκουμε ότι $\alpha + (-\beta) > \beta + (-\beta)$ δηλαδή $\alpha - \beta > 0$. Αλλά και αντιστρόφως αν υποτεθεί πως $\alpha - \beta > 0$ τότε προσθέτοντας αυτή τη φορά το β βρίσκουμε πως $\alpha > \beta$. Έχουμε αποδείξει λοιπόν πως

$$\boxed{\alpha > \beta \text{ αν και μόνο αν } \alpha - \beta > 0} \tag{1.32}$$

Η ιδιότητα (1.30) μας πληροφορεί για το γινόμενο θετικών αριθμών. Μπορούμε να αποδείξουμε ανάλογη ιδιότητα για το άθροισμα: Ας υποθέσουμε πως $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Τότε προσθέτοντας στα μέλη της πρώτης το β βρίσκουμε πως $\alpha + \beta > \beta$ που αν συνδυαστεί με την $\beta > 0$ λόγω της μεταβατικής ιδιότητας μας δίνει την $\alpha + \beta > 0$. Επομένως αποδείξαμε ότι:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha > 0,\ \ \beta > 0 \text{ τότε } \alpha + \beta > 0} \tag{1.33}$$

Δηλαδή ότι

Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε πως:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha \geq 0,\ \ \beta > 0 \text{ τότε } \alpha + \beta > 0} \tag{1.34}$$

και ακόμη

$$\boxed{\text{Αν } \alpha \geq 0,\ \ \beta \geq 0 \text{ τότε } \alpha + \beta \geq 0} \tag{1.35}$$

Ξέρετε ότι ο αντίθετος ενός θετικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός και ο αντίθετος ενός αρνητικού αριθμού είναι θετικός. Αυτό μπορεί να προκύψει και από τις ιδιότητες που προαναφέραμε: Αν υποτεθεί πως $\alpha > 0$ τότε προσθέτοντας αι στα δύο μέλη το $-\alpha$ βρίσκουμε ότι $\alpha - \alpha > -\alpha$ δηλαδή ότι $0 > -\alpha$ επομένως ο $-\alpha$ είναι αρνητικός. Αν πάλι υποθέσουμε ότι ο αριθμός α είναι αρνητικός δηλαδή $\alpha < 0$ πάλι προσθέτοντας το $-\alpha$ θα καταλήξουμε στο ότι $\alpha > 0$. Επομένως:

$$\boxed{\alpha > 0 \text{ αν και μόνο αν } \ -\alpha < 0} \tag{1.36}$$

Η ιδιότητα (1.29) μας λέει τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε σε μία ανισότητα ένα αριθμό. Από το Γυμνάσιο γνωρίζετε πως όταν πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη μίας ανισότητας με ένα *θετικό* αριθμό προκύπτει μία ανισότητα που έχει την ίδια φορά με την αρχική. Θα αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει $\alpha < \beta$ και $\gamma > 0$. Τότε είναι $\beta - \alpha > 0$ και επομένως ισχύει (λόγω της (1.30)) ότι το γινόμενο των θετικών αριθμών είναι θετικός δηλαδή $\gamma\,(\beta - \alpha) > 0$. Άρα $\gamma\beta - \gamma\alpha > 0$ και επομένως $\gamma\beta > \gamma\alpha$ ή αλλιώς $\gamma\alpha < \gamma\beta$. Άρα

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha\gamma < \beta\gamma} \tag{1.37}$$

Αν τώρα $\alpha < \beta$ και είναι $\gamma < 0$ τότε $-\gamma > 0$ και μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της $\alpha < \beta$ με τον θετικό αριθμό $-\gamma$ για να πάρουμε $-\alpha\gamma < -\beta\gamma$ οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$. Δηλαδή:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma} \tag{1.38}$$

Η ιδιότητα (1.30) δεν είναι άλλη από τον κανόνα $(+)\cdot(+) = (+)$. Δηλαδή ένας από τους κανόνες των προσήμων για τον πολλαπλασιασμό. Ας αποδείξουμε και τους άλλους κανόνες των προσήμων που κωδικοποιήθηκαν από τον Διόφαντο στο έργο του «Αριθμητικά»[13].

[13] Μπορεί να βρεθεί στην διεύθυνση
http://www.archive.org/details/diophantialexan01plangoog

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν, καὶ τῆς λείψεως σημεῖον Ψ ἐλλιπὲς κάτω νεῦον, ⋔.

Από τα «Αριθμητικά» του Διόφαντου έκδοση Teubner, 1893.

Αν είναι $\alpha > 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha > 0$ και $-\beta > 0$ οπότε από την (1.30) είναι $\alpha(-\beta) > 0$. Αλλά $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$ και επομένως $-(\alpha\beta) > 0$ άρα $\alpha\beta < 0$. Αποδείξαμε ότι

$$\boxed{\text{Αν } \alpha > 0 \text{ και } \beta < 0 \text{ τότε } \alpha\beta < 0} \tag{1.39}$$

Δηλαδή αποδείξαμε τον κανόνα $(+)\cdot(-) = (-)$. Τέλος αν υποθέσουμε ότι $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha\beta = \underbrace{(-\alpha)}_{+}\underbrace{(-\beta)}_{+} > 0$ δηλαδή έχουμε:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < 0 \text{ και } \beta < 0 \text{ τότε } \alpha\beta > 0} \tag{1.40}$$

με άλλα λόγια τον γνωστό μας κανόνα $(-)\cdot(-) = (+)$

Ας αποδείξουμε άλλη μία γνωστή μας ιδιότητα: Εκείνη που έχει σχέση με τον πολλαπλασιασμό των μελών μίας ανισότητας με ένα *αρνητικό* αριθμό. Αν είναι $\alpha < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\beta - \alpha > 0$ και επομένως $\gamma(\beta - \alpha) < 0$ από την οποία προκύπτει ότι $\alpha\gamma > \beta\gamma$ δηλαδή η αρχική αναισότητα άλλαξε φορά. Επομένως έχουμε:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha\gamma > \beta\gamma} \tag{1.41}$$

Ξέρετε πως ο αντίστροφος ενός θετικού αριθμού είναι θετικός και ο αντίστροφος ενός αρνητικού είναι αρνητικός. Ας το αποδείξουμε. Είναι $\alpha\cdot\frac{1}{\alpha} = 1$. Αφού $1 > 0$ αν μεν είναι $\alpha > 0$ θα είναι αναγκαστικά και $\frac{1}{\alpha} > 0$ διαφορετικά το γινόμενο του επί το α θα ήταν αρνητικό και όχι θετικό. Αν πάλι είναι $\alpha < 0$ θα πρέπει να είναι και $\frac{1}{\alpha} < 0$ αφού σε ενάντια περίπτωση το γινόμενο του με τον α θα ήταν πάλι αρνητικό. Με άλλα λόγια

$$\boxed{\text{Αν } \alpha > 0 \text{ τότε } \frac{1}{\alpha} > 0} \tag{1.42}$$

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < 0 \text{ τότε } \frac{1}{\alpha} < 0} \tag{1.43}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν έχουμε δύο μη μηδενικούς αριθμούς τότε αυτοί λέγονται ομόσημοι αν είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί. Αν δεν είναι *ομόσημοι*, που σημαίνει πως ο ένας θα είναι θετικός και ο άλλος αρνητικός τότε λέγονται *ετερόσημοι.* Οι δύο προηγούμενες ιδιότητες μας λένε πως ένας αριθμός και ο αντίστροφος του θα είναι πάντα ομόσημοι.

Οι κανόνες των προσήμων μας λένε ότι αν πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς το αποτέλεσμα θα είναι ένας θετικός αριθμός ενώ αν πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους το αποτέλεσμα θα είναι αρνητικός. Επίσης αφού $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ και οι αριθμοί $\frac{1}{\beta}$ και β είναι ομόσημοι είτε πολλαπλασιάσουμε τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β είτε τους διαιρέσουμε θα βρούμε ομόσημους αριθμούς. Όχι φυσικά τους ίδιους, απλώς ομόσημους.

Είμαστε συνηθισμένοι όταν λέμε *πρόσημο* ενός μη μηδενικού αριθμού να εννοούμε το + αν ο αριθμός είναι θετικός και το − αν ο αριθμός είναι αρνητικός. Μπορούμε να ορίσουμε και κάπως διαφορετικά το πρόσημο ενός αριθμού με ένα τρόπο που σε κάποιες περιπτώσεις είναι πιο εξυπηρετικός. Ορίζουμε:

$$\boxed{\text{πρόσημο του } x = \begin{cases} -1 & \text{αν} \quad x < 0 \\ 0 & \text{αν} \quad x = 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}} \tag{1.44}$$

Έχουμε λοιπόν τρόπους για να φανταζόμαστε το πρόσημο ενός μη μηδενικού αριθμού: Ή σαν $-1, +1$ ή σαν $+, -$. Απλώς με τον ορισμό του προσήμου που δόθηκε πιο πάνω και είναι ο «επίσημος» ορισμός καλύπτουμε και την περίπτωση του 0 αποδίδοντας του πρόσημο: το 0.

Οι προηγούμενες ιδιότητες μας πληροφορούν ότι:

$$\boxed{\text{πρόσημο}\,(\alpha\beta) = \text{πρόσημο}\,(\alpha)\text{πρόσημο}\,(\beta)} \tag{1.45}$$

και για $\beta \neq 0$

$$\boxed{\text{πρόσημο}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\text{πρόσημο}\,(\alpha)}{\text{πρόσημο}\,(\beta)}} \tag{1.46}$$

και

$$\boxed{\text{πρόσημο}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \text{πρόσημο}\,(\alpha\beta)} \tag{1.47}$$

Άσκηση 58. Έστω ότι $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι:

1. $6\alpha - 3 < 6\beta - 3$
2. $5(\alpha + 1) < 5(\beta + 1)$
3. $6(\alpha - \beta) < \alpha - \beta$

Άσκηση 59. Έστω ότι $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$. Να αποδείξετε ότι:

1. $2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$
2. $2\alpha - 5\delta < 2\beta - 5\gamma$
3. $\frac{\alpha+\gamma}{2} + 4 < \frac{\beta+\delta}{2} + 4$

Άσκηση 60. Έστω ότι $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$. Να αποδείξετε ότι $\alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta > 0$.

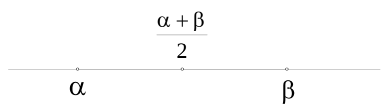
Άσκηση 61. Έστω ότι

$$\alpha < \beta \qquad (1)$$

Ποιες από τις παρακάτω ανισότητες είναι βέβαιο ότι προκύπτουν από την (1);

1. $2\alpha < 2\beta$
2. $\alpha < 2\beta$
3. $2\alpha < \beta$
4. $2 + \alpha < \beta$
5. $\frac{\alpha}{2} < \beta$
6. $\alpha < \beta + 2$

Άσκηση 62. Έστω ότι ισχύει $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι ισχύει και $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.



Στη συνέχεια να γράψετε δέκα τιμές του x για τις οποίες ισχύει

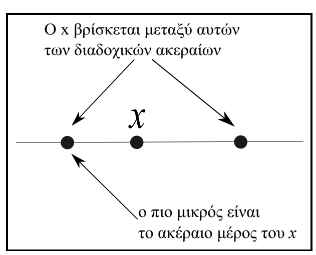
$$\alpha < x < \beta$$

Άσκηση 63. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma < 0$ να καθορίσετε το πρόσημο των αριθμών

1. $-(\alpha + \beta)$
2. $\frac{\alpha\beta}{\gamma}\gamma$
3. $(\alpha + 1)(\gamma - 1)$
4. $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$
5. $\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{1-\gamma}$
6. $\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+1)(\beta+1)}$

1.4.12 Ακέραιες και δεκαδικές προσεγγίσεις

Αν ένας πραγματικός αριθμός x δεν είναι ακέραιος τότε θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών ακεραίων. Ο πιο μικρός από αυτούς ονομάζεται *ακέραιο μέρος* του αριθμού x. Αν ο x είναι ακέραιος τότε το ακέραιο μέρος του ορίζεται να είναι ο ίδιος ο x.



Το ακέραιο μέρος του x συμβολίζεται με $[x]$ και πιο σπάνια με $\lfloor x \rfloor$. Είναι λοιπόν $[2,3] = 2$, $[-7] = -7$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $\left[-\frac{2}{2}\right] = -2$. Μια άλλη πιο σύντομη περιγραφή του ακεραίου μέρους είναι η ακόλουθη:

$$\boxed{\text{ακέραιο μέρος του } x = [x] = \begin{cases} \text{ο μεγαλύτερος} \\ \text{από τους ακεραίους} \\ \text{που δεν υπερβαίνουν το } x \end{cases}} \tag{1.48}$$

Φυσικά ισχύει

$$\boxed{[x] \leq x < [x] + 1} \tag{1.49}$$

Το ακέραιο μέρος είναι μία πολύ πρόχειρη και ανακριβής προσέγγιση ενός αριθμού. Αν ο αριθμός x δεν είναι ακέραιος, οπότε είναι μεγαλύτερος από το ακέραιο μέρος του τότε χρειάζεται να συμπληρώσουμε το ακέραιο μέρος με κάτι ακόμη, δηλαδή να προσθέσουμε κάτι, για να έχουμε τον αριθμό μας. Ο αριθμός αυτός λέγεται δεκαδικό μέρος του x. Είναι λοιπόν

$$\boxed{x = \text{ακέραιο μέρος του } x + \text{ δεκαδικό μέρος του } x} \tag{1.50}$$

επομένως

$$\boxed{\text{δεκαδικό μέρος του } x = x - [x]} \tag{1.51}$$

Έτσι το δεκαδικό μέρος του $3,2$ είναι $3,2 - 3 = 0,2$ το δεκαδικό μέρος του $-4,78$ είναι $0,22$.

Μια άλλη προσέγγιση των αριθμών, με την οποία είστε εξοικειωμένοι από το Δημοτικό είναι η δεκαδική προσέγγιση. Αντί να χρησιμοποιήσουμε τους ακεραίους χρησιμοποιούμε τις δυνάμεις του 10:

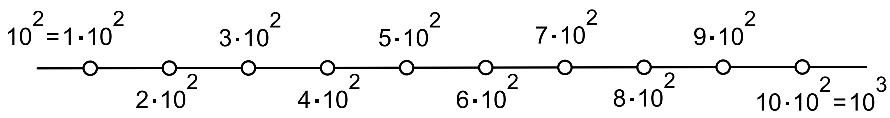
$$\begin{gathered} \ldots \\ 10^{-4} = \frac{1}{1000}, \\ 10^{-3} = \frac{1}{1000}, \\ 10^{-2} = \frac{1}{100}, \\ 10^{-1} = \frac{1}{10}, \\ 10^{0} = 1, \\ 10^{1} = 10, \\ 10^{2} = 100 \\ \ldots \end{gathered} \tag{1.52}$$

Σημειώστε ότι αν πολλαπλασιάσουμε μία δύναμη του παραπάνω καταλόγου (1.52) επί 10 θα βρούμε την αμέσως επόμενη δύναμη που είναι γραμμένη ακριβώς από κάτω. Μπορούμε φυσικά να έχουμε οσοδήποτε μικρές δυνάμεις του 10 και οσοδήποτε μεγάλες. Ας δούμε πως χρησιμοποιούμε αυτές τις δυνάμεις για να προσεγγίσουμε τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς. Ας θεωρήσουμε ένα θετικό πραγματικό αριθμό x. Αν ο x είναι δύναμη του 10 είμαστε τυχεροί: δεν έχουμε προσέγγιση του x αλλά τον ίδιο τον x οποίος θα είναι κάποιος από τους αριθμούς του καταλόγου (1.52) Αν ένας αριθμός x δεν είναι δύναμη του 10 βρίσκεται μεταξύ δύο *διαδοχικών δυνάμεων* του 10 δηλαδή δύο δυνάμεων *που έχουν εκθέτες διαδοχικούς ακεραίους*. Ας δούμε τον συγκεκριμένο αριθμό $x = \frac{824}{3}$. Ο x βρίσκεται μεταξύ των $10^2 = 100$ και $10^3 = 1000$. Δηλαδή:

$$10^2 < \frac{824}{3} < 10^3$$

Μπορούμε να «κινηθούμε» ξεκινώντας από το 10^2 και να φθάσουμε στο 10^3 διατρέχοντας τα πολλαπλάσια του 10^2 δηλαδή ανεβαίνοντας ανά 100.

$$100 = 1 \cdot 100,\ \ 2 \cdot 100,\ 3 \cdot 100,\ 4 \cdot 100,\ 5 \cdot 100,\ 6 \cdot 100,\ 7 \cdot 100,\ 8 \cdot 100,\ 9 \cdot 100 = 1000$$



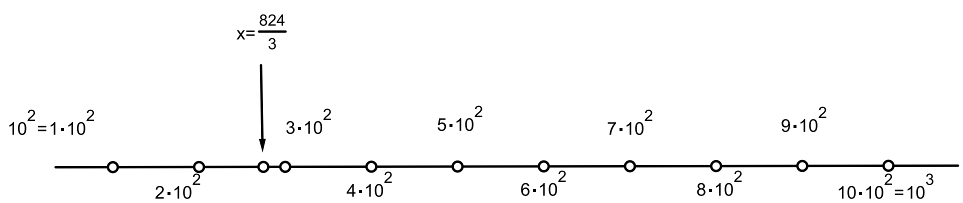
Αν ο αριθμός μας είναι κάποιος από αυτά τα πολλαπλάσια πάλι είμαστε τυχεροί αφού έχουμε την τιμή του αριθμού μας. Στην περίπτωση μας όπου $x = \frac{824}{3}$ αυτό δεν συμβαίνει. Επομένως ο x, βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών πολλαπλασίων του $10^2 = 100$. Προχωράμε σε συγκρίσεις του x με αυτά τα πολλαπλάσια:

Είναι $100 < \frac{824}{3}$ αφού $3 \cdot 100 < 824$

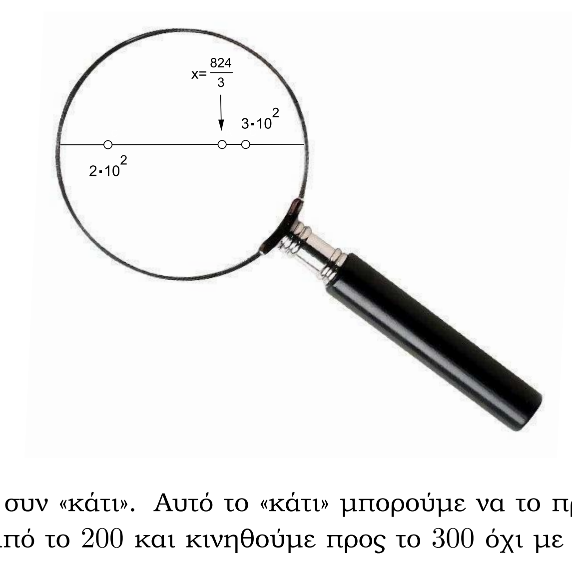
Είναι $200 < \frac{824}{3}$ αφού $3 \cdot 200 < 824$

Αλλά είναι $300 > \frac{824}{3}$ αφού $3 \cdot 300 > 824$ Βρίσκουμε λοιπόν ότι ο x βρίσκεται μεταξύ των $2 \cdot 100$ και $3 \cdot 100$ δηλαδή ισχύει:

$$2 \cdot 100 < \frac{824}{3} < 3 \cdot 100$$



Αυτή είναι μία πρώτη προσέγγιση του x: Με βήματα πλάτους 100, Εστιάζουμε την προσοχή μας στους αριθμούς μεταξύ 200 και 300



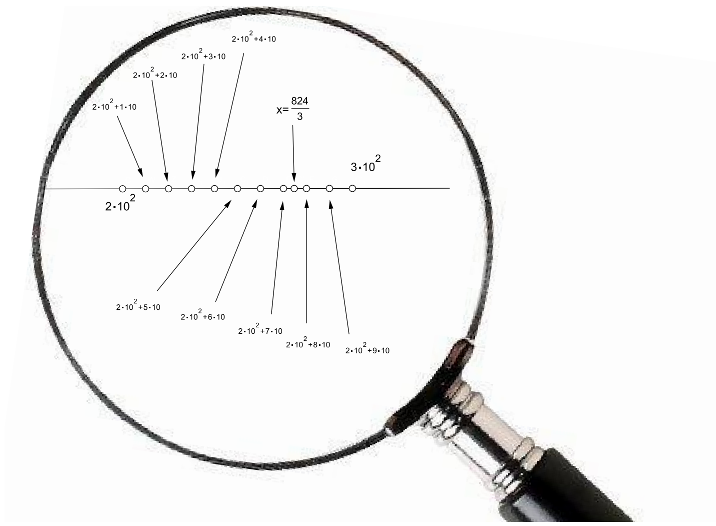
Ο x είναι 200 συν «κάτι». Αυτό το «κάτι» μπορούμε να το προσεγγίσουμε αν ξεκινήσουμε από το 200 και κινηθούμε προς το 300 όχι με βήματα πλάτους

$100 = 10^2$ αλλά με μικρότερα ίσα με την αμέσως κατώτερη δύναμη. Δηλαδή βήματα πλάτους 10^1. Θα καλύψουμε τους αριθμούς

$$2\cdot 10^2+1\cdot 10,\quad 2\cdot 10^2+2\cdot 10,\quad 2\cdot 10^2+2\cdot 10,\quad \ldots,\quad 2\cdot 10^2+10\cdot 10$$

Η κάποιο από αυτά τα βήματα θα «πατήσει» στο x ή το x θα βρεθεί μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων. Συγκρίνοντας τον αριθμό x με τους παραπάνω αριθμούς βρίσκουμε ότι

$$2\cdot 10^2+7\cdot 10<\frac{824}{3}<2\cdot 10^2+8\cdot 10$$



Αν τώρα συνεχίσουμε με βήματα της αμέσως μικρότερης δύναμης του 10 δηλαδή του $10^0 = 1$ βρίσκουμε ότι

$$2\cdot 100^2+7\cdot 10+4\cdot 10^0<\frac{824}{3}<2\cdot 100^2+7\cdot 10+5\cdot 10^0$$

Η αμέσως επόμενη δύναμη που θα μας δώσει μία πιο καλή προσέγγιση είναι το $10^{-1}=\frac{1}{10}$. Είναι:

$$2\cdot 100^2+7\cdot 10+4\cdot 10^0+6\cdot 10^{-1}<\frac{824}{3}<2\cdot 100^2+7\cdot 10+4\cdot 10^0+7\cdot 10^{-1}$$

Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο δουλεύοντας με τις επόμενες δυνάμεις: $10^{-2},\ 10^{-3}$ σωρεύοντας ολοένα μικρότερους προσθετέους. Θα δούμε ότι χρειάζεται να προσθέτουμε τους

$$\mathbf{2}\cdot 10^2,\ \ \mathbf{7}\cdot 10^1,\ \ \mathbf{4}\cdot 10^0,\ \ \mathbf{6}\cdot 10^{-1},\ \ \mathbf{6}\cdot 10^{-2},\ \ \mathbf{6}\cdot 10^{-3},\ \ \mathbf{6}\cdot 10^{-4},..\ (*)$$

Τα αποσιωπητικά στην (**;;**) υποδηλώνουν ότι με τα ενδιάμεσα βήματα (που θα έχουν μήκος $10^{\text{κάποιος αρνητικός ακέραιος}}$) που θα κάνουμε δεν θα «πατήσουμε» στον αριθμό x. Στην $(*)$ οι αριθμοί που είναι γραμμένοι έντονα (bold) δηλώνουν πόσα βήματα χρησιμοποιήσαμε από κάθε πλάτος:

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{2}\cdot 10^2 & \mathbf{7}\cdot 10^1 & \mathbf{4}\cdot 10 & \mathbf{6}\cdot 10^{-1} & \mathbf{6}\cdot 10^{-2} & \mathbf{6}\cdot 10^{-3}, & \mathbf{6}\cdot 10^{-4} & \ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \mathbf{6} & \ldots
\end{array}$$

Οι αριθμοί

$$\mathbf{2} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{6} \quad \ldots$$

μας δίνουν σχεδόν όλες τις πληροφορίες της «διαδρομής» μας. *Σχεδόν* και όχι *όλες* γιατί δεν φαίνεται που άρχισαν τα «μικρά» βήματα δηλαδή εκείνα που είχαν πλάτος μία δύναμη του 10 με αρνητικό εκθέτη. Αυτό τακτοποιείται αν βάλουμε ένα σημαδάκι για να δείξουμε που συνέβη αυτό. Είναι η γνωστή μας υποδιαστολή «,»:

$$\mathbf{2} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{4} \quad , \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{6} \quad \ldots$$

Στο παραπάνω αποτέλεσμα μπορούσαμε φυσικά να φθάσουμε αν κάναμε την διαίρεση:

$$\begin{array}{ccccccc|l}
 & 8 & 2 & 4 & & & & 3 \\
\hline
- & 6 & & & & & & 2\ \ 7\ \ 4,\ \ 6\ \ 6\ \ 6 \\
 & 2 & 2 & & & & & \\
- & 2 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & 4 & & & & \\
 & - & 11 & 2 & & & & \\
 & & & 2 & 0 & & & \\
 & & - & 1 & 8 & & & \\
 & & & & 2 & 00 & & \\
 & & & - & 1 & 8 & & \\
 & & & & & 2 & 0 &
\end{array}$$

Η παραπάνω διαδικασία μας οδηγεί στην *δεκαδική παράσταση* του αριθμού x. Αυτό συμβαίνει με κάθε αριθμό όχι μόνο με τον συγκεκριμένο $x = \frac{824}{3}$. Για να σχηματίσουμε τα πολλαπλάσια των επιμέρους δυνάμεων του 10 πολλαπλασιάζουμε αυτές τις δυνάμεις επί κάποιον από τους αριθμούς

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

(το 0 θα χρησιμοποιηθεί αν δεν χρειασθεί το αντίστοιχο πολλαπλάσιο) και έτσι σχηματίζονται τα *ψηφία* της δεκαδικής παράστασης. Γενικά στην δεκαδική παράσταση ενός αριθμού δύο πράγματα μπορούν να συμβούν.

- Η διαδικασία κάποια στιγμή θα τερματισθεί και θα σχηματισθεί ο αριθμός μας (όταν κάποιο ενδιάμεσο βήμα «πατήσει» στον αριθμό) ή η διαδικασία θα συνεχίζεται επ'απειρον αλλά θα εμφανίζεται συνεχώς ένα και το αυτό σύμπλεγμα ψηφίων (λέγεται *περίοδος*).

- Η διαδικασία θα συνεχίζεται επ'απειρον αλλά δεν θα εμφανίζεται επαναλαμβανόμενο συνεχώς ένα και το αυτό σύμπλεγμα ψηφίων.

Η πρώτη περίπτωση εμφανίζεται όταν πρόκειται για ρητούς αριθμούς και μόνο. Η δεύτερη εμφανίζεται όταν πρόκειται για άρρητους αριθμούς και μόνο. Η δεκαδική παράσταση λοιπόν μας δίνει και ένα κριτήριο για το αν ένας αριθμός είναι ρητός ή όχι:

- Τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση ή από κάποιο σημείο και μετά επαναλαμβανόμενη: Ο αριθμός είναι ρητός.

- Δεκαδική παράσταση μη τερματιζόμενη και μη επαναλαμβανόμενη από κάποιο σημείο και μετά: Ο αριθμός είναι άρρητος.

Αν η δεκαδική παράσταση ενός αριθμού τερματίζεται μπορούμε και αυτήν να την θεωρούμε ως περιοδική με επαναλαμβανόμενη περίοδο το 0.

Κάθε αριθμός έχει και μία δεκαδική παράσταση και κάθε δεκαδική παράσταση αντιστοιχεί σε ένα αριθμό. Μας ενδιαφέρει, όπως είναι λογικό, σε κάθε αριθμό να αντιστοιχεί *μόνο μία* δεκαδική παράσταση. Αυτό επιτυγχάνεται αν *δεν επιτρέψουμε* να χρησιμοποιούνται δεκαδικές παραστάσεις έχουν περίοδο το 9. Ο λόγος είναι ότι αν τις επιτρέψουμε θα έχουμε διπλές παραστάσεις ορισμένων αριθμών. Για παράδειγμα η δεκαδική παράσταση $0,999...$ οδηγεί στον αριθμό 1. Αυτό διότι **αν** επιτρέψουμε τον συμβολισμό $0,9999$ και ονομάσουμε $a = 0,9999$ τότε $10a = 9,9999...$ δηλαδή $10a = 9 + a$ και $9a = 9$ άρα $a = 1$. Αν λοιπόν επιτρέπαμε παραστάσεις με περίοδο 9 η μονάδα εκτός από την παράσταση 1 θα διέθετε και την $0,9999$. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε προηγουμένως η δεκαδική παράσταση ενός αριθμού θα έχει την γενική μορφή

$$\underbrace{\alpha_m\alpha_{m-1}...\alpha_0}_{\text{Ακέραιο Μέρος}},\ \underbrace{\beta_1\beta_2\beta_2...}_{\text{Δεκαδικό Μέρος}}$$

Άσκηση 64. Ο αριθμός $\frac{19}{7}$ είναι ρητός. Βρείτε την δεκαδική του παράσταση.

Άσκηση 65. Ποιος αριθμός έχει ακέραιο μέρος 3 και δεκαδικό μέρος $0,23$

Άσκηση 66. Για τους τριψήφιους ακέραιους $a_2a_1a_0$ και $b_2b_1b_0$ είναι γνωστό ότι $a_2 + b_2 = a_1 + b_1 = a_0 + b_0 = 11$. Βρείτε το άθροισμα τους $a_2a_1a_0 + b_2b_1b_0$.

Άσκηση 67. Βρείτε τον αντίστροφο του $0,\overline{3}$ (η παύλα δηλώνει περίοδο)

Άσκηση 68. Να εξετάσετε αν αν ο παρακάτω αριθμός (άπειρα δεκαδικά ψηφία):

$$0,\quad 1\underbrace{0}_{1}\,1\underbrace{0\ \ 0}_{2}\,1\underbrace{0\ \ 0\ \ 0}_{3}\,1\underbrace{0\ \ 0\ \ 0\ 0}_{1}...$$

είναι ρητός ή άρρητος

Άσκηση 69. Για τον αριθμό με x με δεκαδική παράσταση $a_3a_2a_1a_0$ ισχύει $a_1 = 3 + a_0$, $a_2 = 3 + a_1$, $a_3 = 3 + a_2$. Βρείτε τον x.

Άσκηση 70. Πάρτε ένα οποιοδήποτε τριψήφιο ακέραιο a που δεν είναι όλα τα ψηφία του ίδια δηλαδή τουλάχιστον δύο είναι διαφορετικά. Σχηματίστε τον μεγαλύτερο και τον μικρότερο τριψήφιο που μπορείτε να φτιάξετε με τα ψηφία του a. Συνεχίστε με αυτό τον τρόπο. Τι παρατηρείτε;

1.4.13 Τετραγωνικές Ρίζες

Είδαμε στην 1.4.1 ότι ο αριθμός που εκφράζει το μήκος της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με μήκη καθέτων πλευρών ίσα με 1 δεν είναι ρητός αριθμός. Ονομάσαμε αυτό *τον* αριθμό με α και φυσικά ισχύει $\alpha^2 = 2$. Χρησιμοποιούμε ο οριστικό άρθρο γιατί κάθε *θετικός* αριθμός με αυτή την ιδιότητα αναγκαστικά θα είναι ίσος με τον α. Διότι αν υποτεθεί πως για ένα θετικό αριθμό β ισχύει $\beta^2 = 2$ τότε θα είναι $\alpha^2 = \beta^2$ και επομένως $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ δηλαδή

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$$

Στην παραπάνω ισότητα πρέπει κάποιος από τους παράγοντες του α΄ μέλους να είναι μηδέν. Ο $\alpha + \beta$ ως άθροισμα θετικών είναι θετικός και όχι μηδέν. Επομένως θα είναι $\alpha - \beta = 0$ και επομένως $\alpha = \beta = 0$.

Μέχρι στιγμής ο μόνος διαθέσιμος τρόπος για να αναφερθούμε στον α είναι να πούμε «ο θετικός αριθμός που το τετράγωνο του είναι 2». Ο αριθμός α είναι και η πλευρά εκείνου του τετραγώνου που έχει εμβαδόν 2. Ο Διόφαντος χρησιμοποιούσε τον όρο «πλευρά». Αν χρησιμοποιούσαμε την ορολογία του Διόφαντου θα αποκαλούσαμε τον α «πλευρά του 2». Ωστόσο επικράτησε η ορολογία των γεωμετρών του Μεσαίωνα σύμφωνα με την οποία ο α αποκαλείται «ρίζα του 2» και ακριβέστερα «τετραγωνική ρίζα του 2». Πιο γενικά έχουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 1.4.1. Έστω x ένας μη αρνητικός πραγματικός. Ονομάζουμε *τετραγωνική ρίζα του* x τον μοναδικό μη αρνητικό αριθμό y για τον οποίο ισχύει $y^2 = x$. Η τετραγωνική ρίζα του x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$.

Παράδειγμα 10. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

Αξίζει να θυμόμαστε ότι ο συμβολισμός $y = \sqrt{x}$ σημαίνει τρία πράγματα:

- Ο x (λέγεται και υπόρριζο) είναι μη αρνητικός
- Ο y (δηλαδή η τετραγωνική ρίζα του x) είναι μη αρνητικός
- $y^2 = x$

Όπως είδαμε δεν έχουμε καμία ελπίδα να γράψουμε τον $\sqrt{2}$ ως κλάσμα με όρους ακεραίους αφού δεν είναι ρητός. Μπορούμε όμως να τον προσεγγίσουμε με την βοήθεια των δεκαδικών παραστάσεων. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειασθούμε την εξής παρατήρηση. Αν α, β είνα θετικοί αριθμοί τότε αφού $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ και $\alpha + \beta > 0$ το πρόσημο του $\alpha^2 - \beta^2$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $\alpha - \beta$. Αν ο ένας είναι θετικός, αρνητικός ή μηδέν θα είναι και ο άλλος. Και επομένως θα είναι $a = \beta$, $a < \beta$ ή $a > \beta$ αν και μόνο αν ισχύει η ανάλογη σχέση για τα τετράγωνα τους. Μετά από αυτή την παρατήρηση ας επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε το $\sqrt{2}$

1. Είναι $1^2 < \sqrt{2}^2$ και επομένως $1 < \sqrt{2}$. Επίσης $2^2 > \sqrt{2}^2$ και επομένως $\sqrt{2} < 2$. Αυτή είναι και η πρώτη μας προσέγγιση:

$$\boxed{1 < \sqrt{2} < 2}$$

2. Δοκιμάζουμε τώρα τους αριθμούς μεταξύ των 1 και 2 με «βηματισμό» δεκάτου $0,1$. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 1,1^2 &= 1,21 < 2 \\ 1,2^2 &= 1,44 < 2 \\ 1,3^2 &= 1,69 < 2 \\ 1,4^2 &= 1,96 < 2 \\ 1,5^2 &= 2,25 > 2 \end{aligned}$$

οπότε η δεύτερη προσέγγιση μας είναι

$$\boxed{1,4 < \sqrt{2} < 1,5}$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο μπορούμε να βρούμε οσοδήποτε καλή προσέγγιση του $\sqrt{2}$ επιθυμούμε.

Άσκηση 71. Να βρείτε τις $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$, $\sqrt{225}$, $\sqrt{\frac{169}{196}}$, $\sqrt{\frac{225}{196}}$

Άσκηση 72. Να βρείτε μία δεκαδική προσέγγιση του $\sqrt{3}$ «με το χέρι» δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιήσετε αριθμομηχανή, υπολογιστή, κινητό κτλ.

1.5 Η Γλώσσα της Λογικής

1.5.1 Pons Asinorum

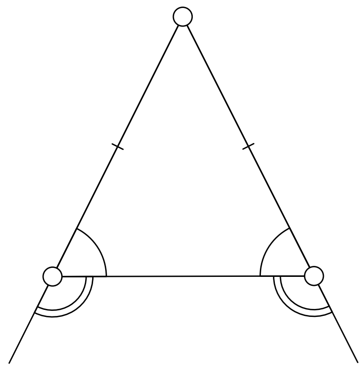
Η λατινική έκφραση Pons Asinorum στην κυριολεξία σημαίνει «η γέφυρα των γαϊδάρων». Της έχει αποδοθεί και η μεταφορική σημασία «η γέφυρα των ηλιθίων». Χρησιμοποιήθηκε τον Μεσαίωνα για να περιγράψει την 5η πρόταση των Στοιχείων[14] του Ευκλείδη[15]:

[14] Το αρχείο κείμενο μπορεί να βρεθεί εδώ:
upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/ce/Euclid-Elements.pdf

[15] Υπάρχουν διάφορες εξηγήσεις για τον λόγο που δόθηκε αυτή η ονομασία. Μία από τις επικρατέστερες είναι ότι δόθηκε μιας και η συγκεκριμένη πρόταση όπως εκτίθεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη είναι η πρώτη που παρουσιάζει κάποια δυσκολία και επομένως αποτελούσε ένα κριτήριο διαχωρισμού των ικανών μαθητών από τους υπόλοιπους

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

που μας λέει ότι σε ένα ισοσκελές τρίγωνο οι γωνίες που πρόσκεινται στην βάση του καθώς και οι γωνίες που σχηματίζει η βάση με τις προεκτάσεις των ίσων πλευρών είναι ίσες.



Δεν μιλάμε όλοι με τον ίδιο τρόπο για τα Μαθηματικά. Ας δούμε μερικές διατυπώσεις για την *ίδια* πρόταση (μόνο για το κομμάτι που αναφέρεται στις παρά την βάση γωνίες αφού η ισότητα των εξωτερικών γωνιών είναι άμεση) που εμφανίσθηκαν σε διάφορα βιβλία Γεωμετρίας τα οποία εκδόθηκαν στην Ελληνική γλώσσα. Οι τρεις πρώτες διατυπώσεις προέρχονται από ισάριθμα καταξιωμένα βιβλία Γεωμετρίας ενώ οι επόμενες έχουν ληθφεί από τα σχολικά βιβλία Γεωμετρίας από την δεκαετία του 60 και μετά.

1. Εις παν τρίγωνον ισοσκελές, αι γωνίαι αι εις τας ίσας πλευρά αντικείμεναι, είναι ίσαι.[16]
2. Εις παν ισοσκελές τρίγωνον αι γωνίαι αι απέναντι των ίσων πλευρών του είναι ίσαι.[17]
3. Εις κάθε ισοσκελές τρίγωνον, αι γωνίαι του, αι οποίαι κείνται απέναντι των ίσων πλευρών του, είναι ίσαι.[18]
4. Αι παρά την βάσιν γωνίαι παντός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσαι.
5. Αν δύο πλευραί τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσαι, τότε αι απέναντι αυτών γωνίαι είναι ίσαι.
6. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες.
7. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες....
8. Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

[16] *Λεγένδρου, Στοιχεία Γεωμετρίας*, Μετ. Γ. Ζωχιού. Πρόκειται για μετάφραση της περίφημης Γεωμετρίας του Legendre. Εκδόθηκε στα τέλη 19ου αι.

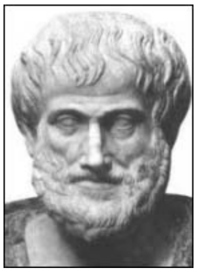
[17] *Χρίστου Μπαρμπαστάθη : Μεγάλη Γεωμετρία*, μέσα 20ου αι.

[18] *Πέτρου Τόγκα : Θεωρητική Γεωμετρία*, μέσα 20ου αι.

9. Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες

10. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο: Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες...

Πέρα από τις διαφορετικές διατυπώσεις όλα τα αποσπάσματα μας πληροφορούν ένα και το αυτό πράγμα. Ότι σε όλα τα ισοσκελή τρίγωνα συμβαίνει οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από τα σκέλη του δηλαδή απέναντι από τις ίσες πλευρές του ή αλλιώς αυτές που πρόσκεινται στη βάση του είναι ίσες. Πράγμα που σημαίνει ότι αν συναντήσουμε ένα οποιοδήποτε τρίγωνο που επιπλέον συμβαίνει να είναι ισοσκελές θα ισχύει αυτό το συμπέρασμα. Πρόκειται για μία πρόταση από τις πολλές που έχουμε στα Μαθηματικά που μας λέει ότι αν συμβαίνει κάτι τότε συμβαίνει και κάτι άλλο. Αυτού του είδους οι προτάσεις που δεν χρησιμοποιούνται μόνο στα Μαθηματικά είχαν μελετηθεί από τον Αριστοτέλη ο οποίος θεωρείται ο θεμελιωτής της επιστήμης της Λογικής. Αν αναλύσουμε την παραπάνω πρόταση θα δούμε ότι υπάρχουν δύο ευδιάκριτα κομμάτια: Η *υπόθεση* και το *συμπέρασμα*.



Αριστοτέλης
384 π.Χ. - 322 π.Χ.

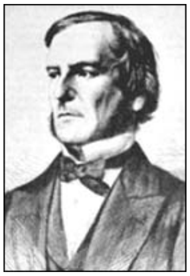
$$\text{Αν}\underbrace{\text{το τρίγωνο είναι ισοσκελές}}_{\text{Υπόθεση}}\text{τότε}\underbrace{\text{οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες}}_{\text{Συμπέρασμα}}$$

Σε ποιο τρίγωνο αναφέρεται η υπόθεση; «Εις παν» μας λένε οι διατυπώσεις 1, 2, «παντός» λέει η 4, «σε κάθε» οι 6, 7, 9. Οι διατυπώσεις 5 και 9 είναι κάπως διαφορετικές. Λένε «αν». Εννοούν και αυτές ότι αν έχουμε ένα τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες θα έχουμε και τις απέναντι γωνίες ίσες. Η διατύπωση 8 δεν περιέχει ούτε το υποθετικό «αν». Αλλά και αυτή υπονοεί το «κάθε» πριν την λέξη «ισοσκελούς». Όλες μας λένε, με διαφορετικό τρόπο είναι αλήθεια, πως οποτεδήποτε συναντάμε ένα τρίγωνο που ικανοποιεί την υπόθεση θα ικανοποιεί και το συμπέρασμα. Και αυτή ακριβώς είναι η αξία των μαθηματικών προτάσεων. Εφαρμόζονται σε οποιαδήποτε περίσταση ικανοποιούνται οι υποθέσεις μας και μας απαλλάσσουν από τον έλεγχο, κάθε φορά, του αν ισχύει το συμπέρασμα.

Μέχρι τον 19ο αιώνα τα Μαθηματικά διατυπώνονταν και διεκπεραιώνονταν σε τρέχουσα γλώσσα. Σε μια γλώσσα βέβαια πιο ακριβή στις διατυπώσεις της από την καθομιλουμένη. Η εμφάνιση Γεωμετριών που ήσαν μη Ευκλείδειες και οι δυσκολίες στην θεμελίωση του κλάδου της Μαθηματικής Ανάλυσης έστρεψαν την προσοχή των μαθηματικών στην εντατική μελέτη της Λογικής και των Θεμελίων των Μαθηματικών.

Augustus De Morgan
1806 - 1871

Οι επιτυχίες της συμβολικής γραφής στον κλάδο της Άλγεβρας έδωσαν την ώθηση ώστε να εισαχθούν αλγεβρικές ιδέες και συμβολισμός στην μελέτη της Λογικής. Έτσι αναδύθηκε ο κλάδος της Μαθηματικής (ή Συμβολικής) Λογικής που αποτέλεσε μία μαθηματικοποιημένη εκδοχή της κλασικής Λογικής. Πρωτεργάτες θεωρούνται ο De Morgan και ο Boole. Ο συμβολισμός που εισήχθη δεν είχε σκοπό να χρησιμοποιηθεί στα Μαθηματικά (τα Μαθηματικά μπορούν και χωρίς αυτόν) αλλά για να μελετηθεί καλλίτερα η Μαθηματική Λογική. Ωστόσο ένα κομμάτι από τον συμβολισμό αυτό έχει περάσει στα καθη-μερινά Μαθη-



George Boole
1815 - 1864

ματικά και θεωρείται χρήσιμος διότι αναδεικνύει τις λογικές σχέσεις μεταξύ των προτάσεων.

1.5.2 Προτάσεις

Η Μαθηματική Λογική έχει ως αντικείμενο μελέτης τις προτάσεις και τις μεταξύ τους σχέσεις. Μόνο που αποδίδει στην λέξη «πρόταση» μία διαφορετική σημασία από εκείνη που αποδώσαμε στην σελίδα 7. Επίσης υπάρχει διαφορά στην σημασία που αποδίδει στην ίδια λέξη η καθομιλουμένη γλώσσα. Λέγοντας *πρόταση* στη Μαθηματική Λογική εννοούμε μία *μαθηματική έκφραση* που έχει *πλήρες νόημα* και *επιπλέον* έχουμε ένα κριτήριο για να καθορίσουμε αν *αληθής* ή *ψευδής* ή όπως αλλιώς λέμε να αποδώσουμε σε αυτήν μία *τιμή αληθείας*.

Παράδειγμα 11.

1. Η έκφραση «$3 > 5+ >$» δεν έχει νόημα και επομένως δεν είναι πρόταση.
2. Η έκφραση «ο αριθμός 11 είναι ωραίος» ενδεχομένως να έχει κάποιο νόημα στην καθομιλουμένη γλώσσα αλλά όχι στα Μαθηματικά.
3. Η έκφραση «$3 > 5$» είναι πρόταση και είναι ψευδής
4. Η έκφραση «$33 > 5$» είναι πρόταση και είναι αληθής.
5. Η έκφραση «$x + 2 = 3$» δεν είναι πρόταση διότι δεν ξέρουμε για ποιο x μιλάμε. Και επομένως δεν έχουμε τρόπο να αποφανθούμε αν είναι αληθής ή ψευδής. Αν για παράδειγμα συμβαίνει το x να είναι ο 3 τότε έχουμε την έκφραση «$3 + 2 = 3$» που είναι μία ψευδής πρόταση. Αν ο x γίνει ίσος με 1 τότε έχουμε την αληθή πρόταση «$1 + 2 = 3$».

Στην σελίδα 7 είπαμε ότι πρόταση είναι ένα αποδεδειγμένο θεώρημα. Ωστόσο χρειάζονται και κάποιες αλήθειες στις οποίες στηριζόμαστε για να κάνουμε τις αποδείξεις μας. Πρόκειται για τα *αξιώματα*: Είναι προτάσεις της Μαθηματικής Λογικής που τις δεχόμαστε ως αληθείς χωρίς απόδειξη. Έτσι στα Μαθηματικά συναντάμε δύο ειδών προτάσεις της Μαθηματικής Λογικής:

- Εκείνες για τις οποίες *διαθέτουμε απόδειξη.*[19].
- Εκείνες για τις οποίες δεν διαθέτουμε απόδειξη αλλά δεχόμαστε χωρίς απόδειξη δηλαδή τα αξιώματα. Αποτελούν την βάση πάνω στην οποία στηρίζεται μία μαθηματική θεωρία.

[19]Προτάσεις (της Μαθηματικής Λογικής) που δεν ξέρουμε αν είναι αληθείς αλλά υπάρχουν κάποιες ενδείξεις που συνηγορούν για αυτό λέγονται *εικασίες*. Υπάρχουν αρκετές άλυτες διάσημες εικασίες. Κάποιες από αυτές έχουν απλή και διατύπωση. Μία τέτοια είναι η φημισμένη εικασία του Goldbach:
*Κάθε άρτιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών. Δείτε και άσκηση 428.*Παραμένει άλυτη από το 1742!

1.5.3 Προτασιακοί Τύποι

Εκφράσεις όπως η «$x + 2 = 3$» που δεν είναι μεν πρόταση αλλά γίνονται πρόταση αν δώσουμε κάποιες τιμές στις *μεταβλητές* που περιέχουν (εδώ μεταβλητή είναι ο x) λέγονται προτασιακοί τύποι. Οι προτασιακοί τύποι μπορεί να μην αληθεύουν για καμία τιμή των μεταβλητών τους όπως ο προτασιακός τύπος «$0 \cdot x = 2$», για ορισμένες τιμές όπως ο «$x + 2 = 3$» και για όλες όπως ο «$0 \cdot x = 0$». Οι τελευταίοι λέγονται και *καθολικά αληθείς* προτασιακοί τύποι. Στην περίπτωση της γέφυρας των γαϊδάρων η μετάβλητή είναι το *τρίγωνο* και πρόκειται φυσικά για ένα καθολικά αληθή προτασιακό τύπο. Οι προτάσεις - θεωρήματα που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά είναι καθολικά αληθείς προτασιακοί τύποι για τους οποίους διαθέτουμε και μία απόδειξη.

Στα επόμενα σε όσες περιπτώσεις προτασιακών τύπων τίθεται το ερώτημα αν είναι αληθείς ή ψευδείς θα εννοείται ότι τίθεται το ερώτημα αν είναι καθολικά αληθείς προτασιακοί τύποι[20].

1.5.4 Η Συνεπαγωγή

Η πρόταση με το ισοσκελές τρίγωνο στην οποία αναφερθήκαμε έχει την ακόλουθη δομή:

$$\text{Αν } \underbrace{P}_{\text{Υπόθεση}} \text{ τότε } \underbrace{Q}_{\text{Συμπέρασμα}}$$

Μία πρόταση αυτού του είδους ονομάζεται *συνεπαγωγή*. Γράφουμε και

$$\boxed{P \Rightarrow Q}$$

Η συνεπαγωγή συσχετίζει την αλήθεια του μίας πρότασης (υπόθεση) με την αλήθεια μίας άλλης (συμπέρασμα). Μας βεβαιώνει ότι αν συμβεί η υπόθεση να αληθεύει θα αληθεύει και το συμπέρασμα.

Η συνεπαγωγή λοιπόν θα είναι ψευδής μόνο όταν αυτό που βεβαιώνει δεν ισχύει. Δηλαδή μόνο όταν η υπόθεση είναι αληθής και το συμπέρασμα είναι ψευδές. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι αληθής.

Πολλές από τις ιδιότητες που αναφέραμε είναι συνεπαγωγές. Για παράδειγμα αναφέραμε ότι:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha = \beta \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$$

που σημαίνει ότι αν σε οποιουσδήποτε ίσους αριθμούς προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό θα προκύψουν ίσοι αριθμοί. Ή αλλιώς για κάθε α, β και γ η σχέση $\alpha = \beta$ συνεπάγεται την σχέση $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Το παραπάνω ως συνεπαγωγή συντομευμένα γράφεται:

$$\boxed{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma}$$

[20]Πρόκειται για μία σύμβαση που ακολουθείται ευρύτατα στα Μαθηματικά και ευκολύνει την ζωή μας: Όταν λέμε ότι κάποιος ισχυρισμός αληθεύει εννοούμε ότι αληθεύει για όλες τις περιπτώσεις δηλαδή είναι καθολικά αληθής προτασιακός τύπος.

και θα εννοείται[21] *και ότι αναφερόμαστε σε κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών* α, β *και* γ.

Η παραπάνω συνεπαγωγή είναι αληθής. Επίσης αληθής είναι και η συνεπαγωγή:

$$\boxed{\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta}$$

και καταλαβαίνουμε ότι αυτό που μας λέει είναι ότι οποτεδήποτε έχουμε $\alpha+\gamma = \beta + \gamma$ θα έχουμε αυτομάτως και $\alpha = \beta$. Αντίθετα η πρόταση

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta \Rightarrow \alpha = \beta$$

είναι ψευδής διότι δεν είναι αληθής για όλα τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ διότι δεν αληθεύει για όλες τις δυνατές επιλογές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Για παράδειγμα όταν $a = 5$, $\beta = 7$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$ η υπόθεση αληθεύει αλλά όχι το συμπέρασμα.

Τα θεωρήματα στα Μαθηματικά διατυπώνονται με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο υπό μορφή συνεπαγωγών: Μας λένε ότι αν ισχύουν κάποιες υποθέσεις ισχύουν και κάποια συμπεράσματα.

Άσκηση 73. Ποιες από τις παρακάτω συνεπαγωγές είναι αληθείς;

1. $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha + 5 > 5$
2. $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
3. $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + 1 < \beta + 5$
4. $\frac{\alpha}{3} > \frac{\beta}{5} \Rightarrow \alpha > \beta$
5. $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow a^3 + \beta^3 = 0$

Άσκηση 74. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ;

1. $2x = 6 \Rightarrow x = 3$
2. $x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$
3. $x = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 = 6$
4. $x < -6 \Rightarrow x^2 = 6$
5. $x^2 = 6 \Rightarrow x < -6$

Άσκηση 75. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ;

1. $x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1$
2. $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 2$
3. $x^2 = 2 \Rightarrow x^2 > 1$
4. $x^2 = -1 \Rightarrow 5 = 3$
5. $5 = 3 \Rightarrow x = 3$

---

[21]βλ.1.5.3

1.5.5 Η Ισοδυναμία

Ξέρουμε ότι εκτός από την πρόταση

$$\text{Αν}\underbrace{\text{το τρίγωνο είναι ισοσκελές}}_{\text{Υπόθεση}}\text{τότε}\underbrace{\text{οι παρά την βάση γωνίες είναι ίσες}}_{\text{Συμπέρασμα}}$$

ισχύει και η αντίστροφη πρόταση (την οποία διατυπώνουμε με κάποιες μικροδιαφορές για να έχει νόημα):

$$\text{Αν}\underbrace{\text{το τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες}}_{\text{Υπόθεση}}\text{τότε}\underbrace{\text{είναι ισοσκελές}}_{\text{Συμπέρασμα}}$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε τα παραπάνω και αλλιώς.

Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

$$\beta = \gamma \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$$

$$\widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Rightarrow \beta = \gamma$$

δηλαδή η συνεπαγωγή αληθεύει και προς τις δύο κατευθύνσεις. Ο ισχυρισμός ότι συμβαίνει αυτό γράφεται συμβολικά:

$$\beta = \gamma \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$$

Πρόκειται για μία νέα σύνδεση προτάσεων που λέγεται *ισοδυναμία*. Αν έχουμε οποιεσδήποτε προτάσεις P και Q η ισοδυναμία τους συμβολίζεται με

$$\boxed{P \Leftrightarrow Q}$$

Μία ισοδυναμία είναι αληθής μόνο αν οι συνεπαγωγές προς τις δύο κατευθύνσεις είναι αληθείς. Επομένως *μία ισοδυναμία θα είναι αληθής αν ή και οι δύο προτάσεις που συνδέει είναι αληθείς ή και οι δύο ψευδείς.*

Άσκηση 76. Ποιες από τις παρακάτω ισοδυναμίες είναι αληθείς;

1. $\alpha > 5 \Leftrightarrow 2\alpha > 10$
2. $\alpha^2 < 0 \Leftrightarrow \alpha^4 < 0$
3. $\alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha > \beta$
4. $\alpha\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$
5. $\alpha > 2 \Leftrightarrow \alpha > 7$

Άσκηση 77. Ποιες από τις παρακάτω ισοδυναμίες είναι αληθείς ;

1. $x \neq 2 \Leftrightarrow x + 2 \neq 4$
2. $x \neq 2 \Leftrightarrow x > 2$
3. $x \neq y \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$
4. $x = y + 1 \Leftrightarrow x \neq y$
5. $x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$

1.5.6 Η Σύζευξη

Όταν γράφουμε $1 < 2 < 3$ εννοούμε ότι ισχύουν συγχρόνως δύο πράγματα: Ότι $1 < 2$ και $2 < 3$. Δηλαδή η πρόταση $1 < 2 < 3$ είναι μία σύνθετη πρόταση που απαρτίζεται από δύο κομμάτια τις $1 < 2$ και $2 < 3$. Ονομάζεται σύζευξη των $1 < 2$ και $2 < 3$. Η αλήθεια της προϋποθέτει την αλήθεια και των δύο. Γενικά αν έχουμε δύο προτάσεις η P, Q ορίζεται η πρόταση

$$\boxed{P \textbf{ και } Q}$$

που ονομάζεται η σύζευξη τους[22] *και είναι αληθής μόνο όταν και οι δύο προτάσεις είναι αληθείς.*

Άσκηση 78. Ποιες από τις παρακάτω συζεύξεις είναι αληθείς ;

1. $3 < 8$ **και** $5 < 3$
2. $2 < 3$ **και** $3 < 5$
3. $x \neq y$ **και** $x^2 \neq y^2$
4. $2x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x$ **και** $x^2 \neq -1$
5. $x > x - 1$ **και** $y > y - 1$

1.5.7 Η Διάζευξη

Αν είναι $\alpha\beta = 0$ τότε ή θα είναι $\alpha = 0$ ή θα είναι $\beta = 0$ χωρίς να αποκλείεται να ισχύουν και τα δύο. Αν έχουμε δύο προτάσεις P και Q η σύνθετη πρόταση

$$\boxed{P \textbf{ ή } Q}$$

μας πληροφορεί ότι αληθεύει κάποια από τις P και Q δηλαδή ότι τουλάχιστον μία από τις δύο είναι αληθής χωρίς να αποκλείεται να είναι και οι δύο. Λέγεται *διάζευξη*[23] των P και Q. *Μία διάζευξη θα είναι ψευδής όταν και οι δύο προτάσεις που συνδέει είναι ψευδείς και σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις θα είναι αληθής.*

Άσκηση 79. Ποιες από τις παρακάτω διαζεύξεις είναι αληθείς ;

1. $3 < 1$ **ή** $5 < 3$
2. $2 < 3$ **ή** $3 < 5$
3. $x \neq y$ **ή** $x^2 \neq y^2$
4. $2x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x$ **και** $x^2 \neq -1$
5. $x > x - 1$ **ή** $y < y - 1$

[22] χρησιμοποιειται και ο συμβολισμός $P \wedge Q$
[23] Χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $P \vee Q$

1.5.8 Η Άρνηση

Σε πολλές περιπτώσεις σχηματίζουμε την άρνηση μίας πρότασης ή ενός προτασιακού τύπου. Για παράδειγμα η άρνηση του $\alpha = \beta$ είναι ο $\alpha \neq \beta$. Γενικά αν έχουμε μία πρόταση P η ορίζεται η άρνηση της[24]

$$\boxed{\text{όχι } P}$$

η οποία *είναι αληθής μόνο αν η P είναι ψευδής.*

Άσκηση 80. Ποιες από τις παρακάτω αρνήσεις είναι αληθείς ;

1. **όχι** $2 > 3$
2. **όχι** $2 \neq 3$
3. **όχι** $x < x + 1$
4. **όχι** $2 \geq 7$
5. **όχι** $(a + \beta)\,\gamma = \alpha\gamma$

1.5.9 Αποδείξεις

Έχουμε δει δύο βασικές τεχνικές απόδειξης. Την *ευθεία απόδειξη* σύμφωνα με την οποία ξεκινάμε από κάτι που ισχύει και καταλήγουμε με σωστό συλλογισμό στο αποδεικτέο και την *έμμεση απόδειξη* με την οποία καταλήγουμε στο αποδεικτέο αποκλείοντας την ενάντια περίπτωση. Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο στις αποδείξεις μας χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές ή ισοδυναμίες. Συχνά γράφουμε

$$\underbrace{P_1}_{\text{Υποθέσεις}} \Rightarrow P_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underbrace{P_\nu}_{\text{Αποδεικτέο}}$$

όπου έχουμε βεβαιωθεί ότι οι επιμέρους συνεπαγωγές $P_1 \Rightarrow P_2$, $P_2 \Rightarrow P_3$, $P_{\nu-1} \Rightarrow P_\nu$ και αυτό είναι αρκετό για να είναι και το αποδεικτέο αληθές. Ο λόγος: Αφού η υποθέσεις P_1 αποτελούν αληθή πρόταση και η συνεπαγωγή $P_1 \Rightarrow P_2$ είναι αληθής και η P_2 είναι αληθής (θυμηθείτε πότε μία συνεπαγωγή είναι αληθής). Με την P_2 τώρα αληθή και την συνεπαγωγή $P_2 \Rightarrow P_3$ αληθή είναι και η επόμενη πρόταση της αλυσίδας μας δηλαδή η P_3 αληθής. Τελικά με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στο ότι η αποδεικτέα μας P_ν είναι αληθής.

Παράδειγμα 12. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι αν $x < y$ τότε $\frac{2x-3}{4} < \frac{2y-3}{4}$. Μπορούμε να γράψουμε:

$$x < y \Rightarrow 2x < 2y \Rightarrow 2x - 3 < 2y - 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{4} < \frac{2y-3}{4}$$

και αφού οι επιμέρους συνεπαγωγές είναι αληθείς (στηρίζονται σε γνωστές ιδιότητες) και το συμπέρασμα είναι αληθές.

[24] συμβολίζεται και με $\sim P$

Συνηθισμένη τεχνική είναι να χρησιμοποιούμε ισοδυναμίες:

$$\underbrace{Q_1}_{\text{Αποδεικτέο}} \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \underbrace{Q_\nu}_{\text{Υποθέσεις}}$$

Δηλαδή ξεκινάμε από το αποδεικτέο και με κατάλληλη επεξεργασία μεταβαίνουμε με ισοδυναμίες σε κάτι ξέρουμε πως αληθεύει. Αφού τώρα η υπόθεση Q_ν αληθεύει και αληθεύει η ισοδυναμία $Q_{\nu-1} \Leftrightarrow Q_\nu$ θα αληθεύει η $Q_{\nu-1}$ κτλ έως ότου καταλήγουμε ότι αληθεύει η αποδεικτέα. Ας δούμε πως δουλεύει αυτό στο ίδιο παράδειγμα που αναφερθήκαμε πιο πάνω:

$$\frac{2x-3}{4} < \frac{2y-3}{4} \Leftrightarrow \frac{2x-3}{4} - \frac{2y-3}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3-(2y-3)}{4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x-2y}{4} < 0 \Leftrightarrow 2x-2y < 0 \Leftrightarrow 2\left(x-y\right) < 0 \Leftrightarrow x-y < 0 \Leftrightarrow x < y$$

2

Σύνολα και Πιθανότητες

2.1 Σύνολα

2.1.1 Η έννοια του συνόλου

Λέγοντας «σύνολο» θα εννοούμε οποιαδήποτε συλλογή σε μία ολότητα M κάποιων καθορισμένων και διαφορετικών αντικειμένων της αντίληψης ή της σκέψης μας. Αυτά τα αντικείμενα θα ονομάζονται «στοιχεία» της M.

Georg Cantor
1845 - 1918

Έτσι άρχιζε ο Georg Cantor σε ένα θεμελιώδες άρθρο του που δημοσιεύθηκε το 1895 και με το οποίο δημιουργήθηκε αυτό που λέμε σήμερα «Θεωρία Συνόλων». Η Θεωρία Συνόλων ξεκίνησε από την ανάγκη να «βλέπουμε» μεμονωμένα αντικείμενα σαν μία ενιαία συλλογή και να την μεταχειριζόμαστε σαν τέτοια. Λέγοντας «το A_1 του Λυκείου της Ευαγγελικής» εννοούμε τα παιδιά του A_1 σαν μία ολότητα δηλαδή σαν ένα σύνολο. Κάθε μαθητής ή μαθήτρια του A_1 είναι στοιχείο του συνόλου αυτού. Το σύνολο A_1 περιλαμβάνει μόνο τους μαθητές του A_1. Δεν περιλαμβάνει μαθητές άλλων τμημάτων ή αντικείμενα που βρίσκονται στην αίθουσα του A_1 κτλ.

2.1.2 Η έννοια του ανήκειν

Ένα σύνολο λοιπόν απαρτίζεται από στοιχεία και τα στοιχεία φτιάχνουν σύνολα. Για παράδειγμα αν έχουμε τους αριθμούς $1, 4, 5, 8$ μπορούμε να φαντασθούμε το σύνολο που έχει ως στοιχεία αυτούς τους αριθμούς. Το γράφουμε χρησιμοποιώντας άγκιστρα $\{,\}$ με τα οποία περικλείονται τα στοιχεία του: $\{1, 4, 5, 8\}$. Χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για να ονομάσουμε τα σύνολα. Αν αποφασίζαμε να ονομάσουμε με M το παραπάνω σύνολο θα γράφαμε $M = \{1, 4, 5, 8\}$. Το στοιχείο 1 ανήκει στο σύνολο M δηλαδή περιλαμβάνεται σε αυτό. Γράφουμε συμβολικά $1 \in M$. Στο σύνολο M δεν έχουμε συμπεριλάβει το στοιχείο 9 δηλαδή το 9 δεν ανήκει στο M. Γράφουμε $9 \notin M$.

2.1.3 Αναγραφή, περιγραφή και βασικά σύνολα αριθμών

Αν θέλουμε να γράψουμε ένα σύνολο μπορούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα να γράψουμε τα στοιχεία του όπως λ.χ.

$$M = \{1, 4, 5, 8\}$$

Αν τώρα θέλαμε το σύνολο μας να περιλαμβάνει τους ακέραιους αριθμούς από 1 έως 100 θα γράφαμε

$$A = \{1, 2, ..., 100\}$$

μιας και δεν είναι καθόλου πρακτικό να γράψουμε όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 100. Τα αποσιωπητικά «...» υπονοούν τους αριθμούς που αποσιωπώνται αλλά είναι στο σύνολο: τον 3, τον 4, τον 5 και πάει λέγοντας. Οι αριθμοί όπως τους συναντήσαμε συγκροτούν σύνολα. Έτσι έχουμε το σύνολο των φυσικών, που τα στοιχεία του είναι αποκλειστικά φυσικοί αριθμοί:

$$\{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Συμβολίζουμε[1] το σύνολο των φυσικών με $\mathbb{N}$. Έτσι:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Και εδώ τα αποσιωπητικά υποδηλώνουν αριθμούς που υπάρχουν στο σύνολο αλλά δεν γράφονται. Μόνο που αυτή την φορά το πλήθος τους δεν είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός αλλά είναι *άπειρο*.

Οι ακέραιοι επίσης συγκροτούν το σύνολο των ακεραίων. Συμβολίζεται[2] με $\mathbb{Z}$. Έτσι:

$$\mathbb{Z} = \{... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

ή και

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$$

Μερικές φορές συμβαίνει η *αναγραφή* (δηλαδή το γράψιμο) των στοιχείων να μην είναι εξυπηρετική με ή χωρίς αποσιωπητικά. Υπάρχει και κάποιος άλλος τρόπος για να εξηγήσουμε σε ποιο σύνολο αναφερόμαστε: Να *περιγράψουμε* τα στοιχεία του συνόλου που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα το σύνολο $A = \{1, 2, ..., 100\}$ που είδαμε πιο πάνω μπορεί να γραφεί με *περιγραφή* ως εξής

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 100\}$$

Η παραπάνω γραφή ακολουθεί μία τυποποιημένη σύνταξη:

$$A = \{\text{από που παίρνουμε τα στοιχεία} \mid \text{ποια συνθήκη ικανοποιούν τα στοιχεία}\}$$

[1] Από το natura και τα παράγωγα του. Αναφέρεται ότι η πρώτη φορά όπου εμφανίσθηκε ο όρος «φυσικός» ήταν από τον Chuquet το 1484

[2] Από την Γερμανική λέξη zahl=αριθμός

Άσκηση 81. Να γράψετε με περιγραφή το σύνολο $B = \{-3, -2, -1, 0, ..., 19, 20\}$

Άσκηση 82. Να γράψετε με περιγραφή το σύνολο των αρτίων. Να κάνετει το ίδιο για το σύνολο των περιττών

Άσκηση 83. Να γράψετε το σύνολο των διαιρετών του 12

Άσκηση 84. Να γράψετε το σύνολο των πολλαπλασίων του του 6

Μπορούμε να θεωρήσουμε όλους τους ρητούς ως σύνολο. Συμβολίζεται[3] με $\mathbb{Q}$. Το ίδιο και για τους πραγματικούς αριθμούς των οποίων το σύνολο συμβολίζεται[4] με $\mathbb{R}$.

2.1.4 Ίσα σύνολα. Υποσύνολα.

Δύο σύνολα A και B θα λέγονται *ίσα* αν έχουν τα ίδια στοιχεία. Γράφουμε $A = B$. Για παράδειγμα τα σύνολα $A = \{x \in R \mid (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$ είναι ίσα.

Τα A, B είναι ίσα αν αληθεύει η πρόταση

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Άσκηση 85. Για ποιές τιμές των x, y τα σύνολα $A = \{1, 4, -2\}$ και $B = \left\{1, x+2, y^2\right\}$ είναι ίσα;

Αν κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B τότε το A λέγεται υποσύνολο του συνόλου B. Γράφουμε συμβολικά $A \subseteq B$. Προφανώς ισχύει $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Φυσικά μπορούμε να γράψουμε και:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Προφανώς αν τα σύνολα A και B είναι ίσα κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και επομένως το A είναι υποσύνολο του B. Επομένως ισχύει:

$$A = B \Rightarrow A \subseteq B \tag{2.1}$$

Και ακόμη

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \quad \text{και} \quad B \subseteq A \tag{2.2}$$

Άσκηση 86. Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει $X \subseteq Y$;

1. $X = \{-1, 1\}$, $Y = \left\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 = 0\right\}$
2. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
3. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$, $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$
4. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 12\}$

---

[3] Ο συμβολισμός προέρχεται από το quotient=πηλίκο
[4] από το real=πραγματικός

2.1.5 Το κενό σύνολο. Το βασικό σύνολο.

Ένα σύνολο που δεν έχει στοιχεία λέγεται κενό. Για παράδειγμα το σύνολο $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 3 = 0\}$ είναι κενό αφού δεν υπάρχει ακέραιος x ώστε $2x + 3 = 0$. Όλα τα κενά σύνολα είναι ίσα. Το σύνολο συμβολίζεται με $\varnothing$.

Άσκηση 87. Να εξηγήσετε γιατί όλα τα κενά σύνολα είναι ίσα.

Όταν δημιουργήθηκε η Θεωρία Συνόλων έγινε αντιληπτό ότι δε μπορούμε να χρησιμοποιούμε «πολύ μεγάλα» σύνολα. Με άλλα λόγια εκείνο το «της αντίληψης ή της σκέψης μας» του Cantor υπόκειται σε κάποιους περιορισμούς [5]. Για τον λόγο αυτό όλα τα σύνολα που θα χρησιμοποιούμε θα είναι υποσύνολα ενός βασικού συνόλου που θα προσδιορίζεται και συνήθως συμβολίζεται με Ω. Αν για παράδειγμα θέλουμε να δουλέψουμε με αριθμούς μπορούμε να πάρουμε $\Omega = \mathbb{R}$, αν δουλεύουμε με σημεία μπορούμε να πάρουμε ως Ω το σύνολο των σημείων του επιπέδου κ.ο.κ.

Άσκηση 88. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι κενά;

1. $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 4 = 0\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3 = 0\right\}$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3 = 0\right\}$
4. $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid 2x^2 - 4 = 0\right\}$

2.1.6 Το Δυναμοσύνολο ενός συνόλου

Αν έχουμε ένα σύνολο A τότε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A ονομάζεται *δυναμοσύνολο* του A. Στα υποσύνολα του A συγκαταλέγονται το A αλλά και το κενό σύνολο $\varnothing$. Αν για παράδειγμα $A = \{1, 2, 3, 4\}$ τότε το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο:

$$\{\ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, A\ \}$$

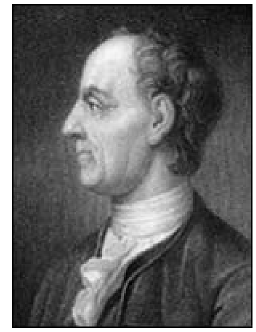
Άσκηση 89. Να γράψετε το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{p, q, r\}$.

Άσκηση 90. Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του συνόλου $\{a, b, c, d\}$ που δεν περιέχουν το στοιχείο d.

2.1.7 Τα διαγράμματα Euler-Venn

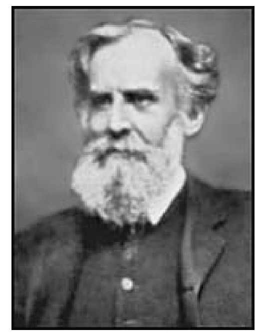
Υπάρχει ένας πολύ παραστατικός τρόπος για να απεικονίζουμε τα σύνολα: Σχεδιάζουμε το βασικό σύνολο Ω στο οποίο δουλεύουμε και τα υποσύνολα του τα σχεδιάζουμε σαν επίπεδα χωρία. Στο εσωτερικό τους μπορούμε να

[5] Ένα διάσημο παράδειγμα είναι το ακόλουθο: Υπάρχουν σύνολα που δεν έχουν σαν στοιχείο τον εαυτό τους (βρείτε μερικά). Ας φαντασθούμε το σύνολο όλων των συνόλων που δεν έχουν στοιχεί τον εαυτό τους και ας το πούμε S. Περιέχει άραγε το S τον εαυτό του;



Leonhard Euler

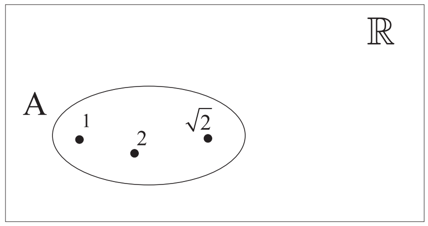
1707 - 1783



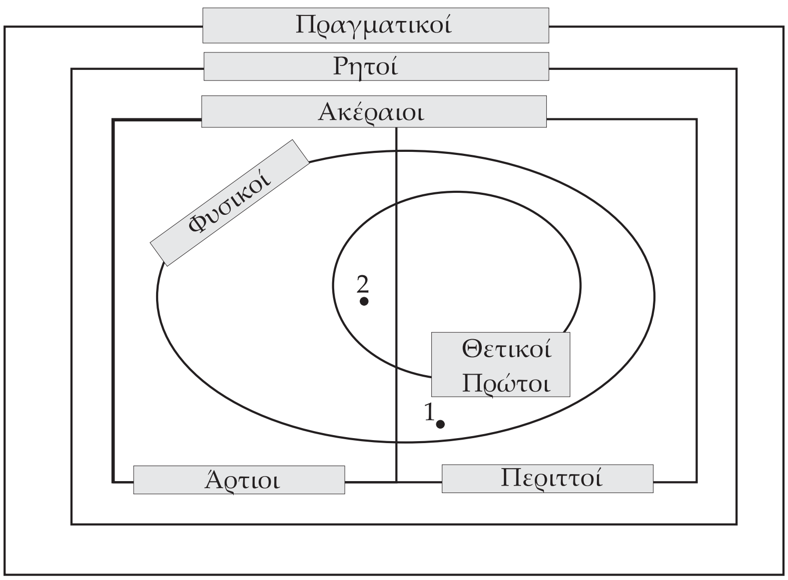
John Venn

1834 - 1923

σημειώσουμε τα στοιχεία τους. Αν για παράδειγμα το βασικό μας σύνολο είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών και $A = \left\{1, 2, \sqrt{2}\right\}$ μπορούμε να έχουμε το εξής διάγραμμα:



Διαγράμματα αυτού του είδους όπου η κλίμακα δεν έχει σημασία αλλά έχει σημασία η αποτύπωση των σχέσεων περιέχεσθαι ονομάζονται *διαγράμματα* Euler-Venn. Για παράδειγμα τα γνωστά μας σύνολα αριθμών μπορούν να παρασταθούν σε ένα διάγραμμα Euler-Venn ως εξής:



Άσκηση 91. Να κάνετε ένα διάγραμμα Euler-Venn όπου να απεικονίζονται τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 8\}$, $\Gamma = \{3, 4, 7, 8\}$, $\Delta = \{10, 11\}$.

2.1.8 Διαστήματα στο $\mathbb{R}$

Υπάρχουν περιπτώσεις που χρειάζεται να δουλέψουμε όχι σε ολόκληρο το σύνολο των πραγματικών αριθμών αλλά σε κομμάτια του. Μερικές συνηθισμένες περιπτώσεις είναι όταν ενδιαφερόμαστε για αριθμούς μεταξύ δύο συγκεκριμένων αριθμών, πάνω από ένα αριθμό ή κάτω από ένα αριθμό. Τα αντίστοιχα σύνολα ονομάζονται *διαστήματα*. Έχουμε 8 είδη διαστημάτων. Έστω με $\alpha < \beta$.

- Με (α, β) συμβολίζουμε το σύνολο

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$$

Ονομάζεται *ανοικτό διάστημα* με άκρα α, β.

Χρησιμοποιούμε δύο τρόπους για να απεικονίσουμε αυτό το διάστημα. Ο ένας είναι να γράψουμε πιο έντονο το κομμάτι που αντιστοιχεί στους αριθμούς μεταξύ των α και β και τα σημεία που αντιστοιχούν στα άκρα να τα αφήσουμε λευκά:

Ο άλλος είναι να δημιουργήσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίοι η μία πλευρά να είναι έχει άκρα τα σημεία που αντιστοιχούν στα άκρα του διαστήματος. Δηλώνουμε ότι τα άκρα δεν περιλαμβάνονται στο διάστημα γράφοντας με διακεκομμένες γραμμές εκείνες τις πλευρές του ορθογωνίου που είναι κάθετες στον άξονα των πραγματικών:

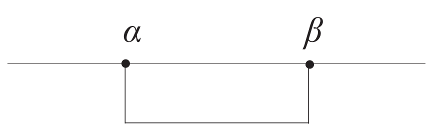
- Με $[\alpha, \beta]$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$$

Ονομάζεται *κλειστό διάστημα* με άκρα α, β.

Η απεικόνιση του είναι ανάλογη με του ανοικτού διαστήματος. Απλώς τώρα για να δηλώσουμε ότι αυτή τη φορά τα άκρα συμπεριλαμβάνονται στο διάστημα μας τα σημειώνουμε με γέμισμα.

Ο δεύτερος τρόπος απεικόνισης γίνεται όπως στο ανοικτό μόνο που οι κάθετες γραμμές είναι συνεχείς και όχι διακεκομμένες:

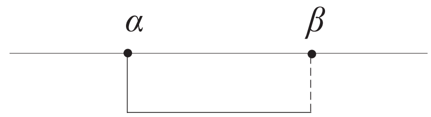


- Με $[\alpha, \beta)$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$[\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}$$

Ονομάζεται *αριστερά κλειστό -δεξιά ανοικτό διάστημα* με άκρα α, β.

• ή αλλιώς:

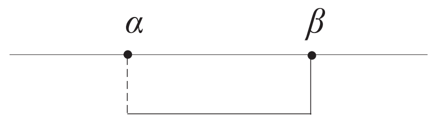


- Με $(\alpha, \beta]$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}$$

Ονομάζεται *αριστερά ανοικτό - δεξιά κλειστό διάστημα* με άκρα α, β.

ή αλλιώς:



- Με $(\alpha, +\infty)$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$(\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x\}$$

ή αλλιώς:

- Με $[\alpha, +\infty)$ συμβολίζουμε το σύνολο

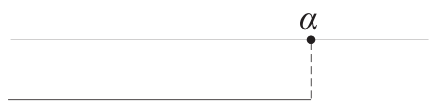
$$[\alpha, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x\}$$

ή αλλιώς:

- Με $(-\infty, \alpha)$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$(-\infty, \alpha) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \alpha\}$$

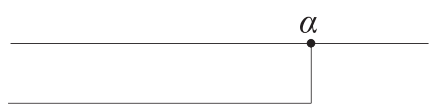
ή αλλιώς:



- Με $(-\infty, \alpha]$ συμβολίζουμε το σύνολο

$$(-\infty, \alpha] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \alpha\}$$

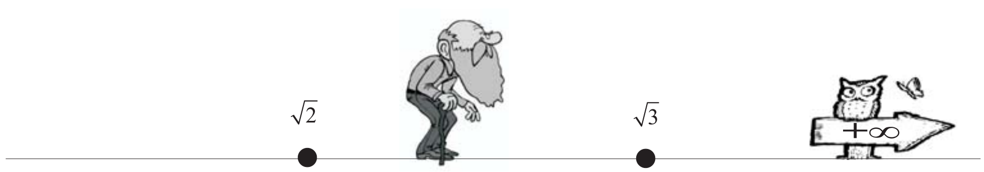
ή αλλιώς:



Σημείωση 1. Το ίδιο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γράφεται υπό μορφή διαστήματος ως εξής:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Σημείωση 2. Ένα σημείο που πρέπει να είμαστε προσεκτικοί είναι το ότι τα $-\infty, +\infty$ δηλώνουν κατευθύνσεις στην ευθεία των πραγματικών αριθμών και **δεν είναι πραγματικοί αριθμοί**.



Σημείωση 3. Όταν γράφουμε (α, β), $[\alpha, \beta]$, $(\alpha, \beta]$ ή $[\alpha, \beta)$ θα εννοείται ότι $\alpha < \beta$.

Άσκηση 92. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

1. $2 \in (0, 4)$
2. $\sqrt{2} \in (1, 2)$
3. $\frac{5}{8} \in \left(\frac{4}{7}, 1\right)$

4. $3 \in (3, 11]$

Το ίδιο το σύνολο των πραγματικών αριθμών γράφεται υπό μορφή διαστήματος ως εξής:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Άσκηση 93. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς;

1. $x \in (1, +\infty) \Rightarrow x + 1 \in (1, +\infty)$
2. $x \in (1, +\infty) \Rightarrow x - 1 \in (1, +\infty)$
3. $x \in (1, +\infty) \Rightarrow 2x \in (1, +\infty)$
4. $x \in (1, +\infty) \Rightarrow \frac{x}{2} \in (1, +\infty)$

Άσκηση 94. Να γράψετε 20 αριθμούς του διαστήματος $(0, 1)$.

Άσκηση 95. Να γράψετε 20 αριθμούς του διαστήματος $(0, 2)$.

Άσκηση 96. Να γράψετε 20 αριθμούς του διαστήματος $(-1, 0)$.

Άσκηση 97. Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι αληθείς;

1. $[2, 4] \subseteq [2, 4]$
2. $[2, 4] \subseteq [2, 4)$
3. $[2, 4] \subseteq [2, +\infty)$
4. $[2, 4] \subseteq (-\infty, 5)$

Άσκηση 98. Για ποια τιμή του x είναι $(2, 6) = (4 - x, 4 + x)$;

Άσκηση 99. Για ποια τιμή του x είναι $(2, 6) = [4 - x, 4 + x]$;

Άσκηση 100. Να αποδείξετε ότι ισχύει $x \in (2, 4) \Rightarrow 2x + 3 \in (7, 11)$. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

Άσκηση 101. Να αποδείξετε ότι:

1. $x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow -x \in (-\beta, -\alpha)$
2. $x \notin (\alpha, \beta) \Leftrightarrow -x \notin (-\beta, -\alpha)$

Άσκηση 102. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $(a, x) \subseteq (a, \beta)$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\left(a, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \subseteq (a, \beta)$.

Άσκηση 103. Να βρείτε όλα τα πολλαπλάσια του $\sqrt{2}$ που ανήκουν στο διάστημα $(2, 10)$

2.1.9 Πράξεις μεταξύ συνόλων

Σε πολλές περιπτώσεις κάποια σύνολα προκύπτουν με την βοήθεια κάποιων άλλων συνόλων με ένα καθορισμένο τρόπο. Είναι οι περιπτώσεις όπου εκτελούμε κάποια *πράξη συνόλων*. Στα επόμενα θα δούμε κάποιες πράξεις μεταξύ συνόλων και μερικές ιδιότητες τους. Οι ιδιότητες των πράξεων μεταξύ συνόλων παρουσιάζουν πολλές ομοιότητες με τις πράξεις των πραγματικών αριθμών αλλά και πολλές σημαντικές διαφορές.

2.1.10 Η τομή δύο συνόλων

Ας πάρουμε τους αριθμούς 18 και 24. Το σύνολο των διαιρετών του 24 είναι το

$$A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6, -9, 9, -18, 18\}$$

$$B = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8, -12, 12, -24, 24\}$$

Οι αριθμοί που διαιρούν και τον 18 και τον 24 δηλαδή οι κοινοί διαιρέτες τους ορίζουν ένα νέο σύνολο που περιέχει τα κοινά στοιχεία των A, B:

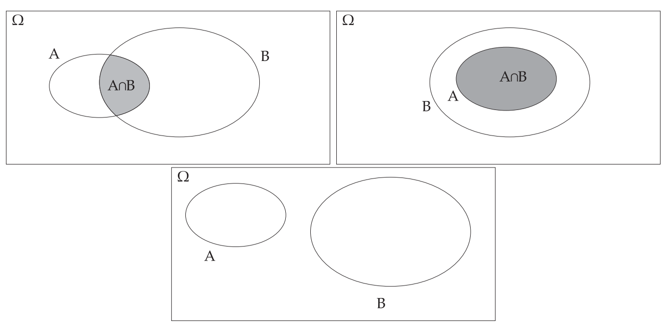
$$\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$$

Το σύνολο αυτό λέγεται τομή των A, B. Γενικά:

- Αν A και B είναι δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω τότε το σύνολο των κοινών στοιχείων τους ονομάζεται *τομή* των A, B και συμβολίζεται με $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid \; x \in A \;\; \textbf{και} \;\; x \in B\} \tag{2.3}$$

Αν τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία δηλαδή τα σύνολα είναι *ξένα* τότε η τομή τους είναι το κενό σύνολο. Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζεται η τομή των A και B ως το σκιασμένο σύνολο. Στην τρίτη περίπτωση όπου τα σύνολα είναι ξένα δεν σημειώνεται τίποτε αφού η τομή τους είναι το κενό σύνολο.



Άσκηση 104. Ποια είναι η τομή του συνόλου των αρτίων με το σύνολο των περιττών αριθμών;

Άσκηση 105. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

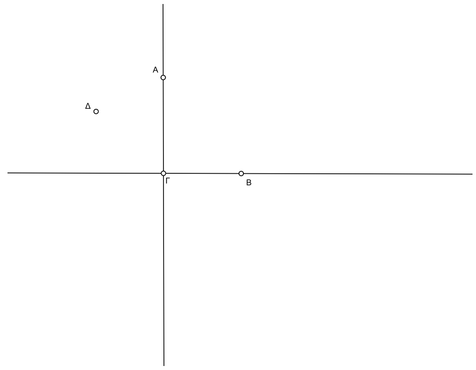
1. $\{1, 2, 4, 7\} \cap \{1, -2, 4, -7\} =$
2. $[-1, 4] \cap [0, 7] =$
3. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q} =$
4. $(-2, 4) \cap [0, +\infty) =$

Άσκηση 106. Να βρείτε την τομή $\left(2, \frac{19}{7}\right) \cap \left(\frac{23}{11}, 10\right)$

Άσκηση 107. Για ποιες τιμές του x ισχύει $\{1, 3, 5\} \cap \{x, 11, 12\} = \{x\}$;

2.1.11 Η ένωση δύο συνόλων

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται δύο τεμνόμενες ευθείες.

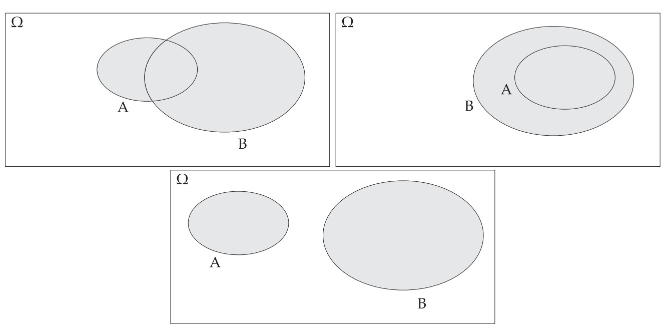


Αν θέλουμε να περιγράψουμε το σχήμα που δημιουργούν και οι δύο ευθείες μαζί θα πούμε ότι απαρτίζεται από τα σημεία και των δύο ευθειών δηλαδή από τα σημεία που ανήκουν τουλάχιστον σε μία από τις δύο ευθείες. Στο σχήμα αυτό λ.χ. θα συμπεριληφθεί το σημείο A γιατί ανήκει στην μία ευθεία, το σημείο B γιατί ανήκει στην άλλη ευθεία. Επίσης θα συμπεριληφθεί το σημείο Γ γιατί ανήκει και στις δύο. Δεν θα συμπεριληφθεί όμως το σημείο Δ διότι δεν ανήκει σε καμία από τις δύο ευθείες. Το σύνολο αυτό λέγεται ένωση των δύο ευθειών.

- Αν A και B είναι δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω τότε το σύνολο όλων των στοιχείων τους κοινών ή όχι ονομάζεται *ένωση* των A, B και συμβολίζεται με $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid \; x \in A \;\; \textbf{ή} \;\; x \in B\} \tag{2.4}$$

Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζεται η ένωση των A και B ως το σκιασμένο σύνολο.



Άσκηση 108. Βρείτε την ένωση $\{-1, 4, 5\} \cup \{4, 5, 7\}$

Άσκηση 109. Να αποδείξετε ότι $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Άσκηση 110. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $(2,4)\cup[3,5]=$
2. $(-\infty,0)\cup[0,+\infty)=$

2.1.12 Η διαφορά δύο συνόλων

Ας ονομάσουμε A το σύνολο των πολλαπλασίων του 7. Είναι

$A=\{...,-63,-56,-49,-42,-35,-28,-21,-14,-7,0,7,14,21,28,35,42,49,56,63,...\}$

Ας ονομάσουμε B το σύνολο των πολλαπλασίων του 5. Είναι:

$B=\{...,-50,-45,-40,-35,-30,-25,-20,-15,-10,-5,0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,...\}$

Τα πολλαπλάσια του 7 που δεν είναι πολλαπλάσια του 5 συγκροτούν ένα νέο σύνολο. Προκύπτει αν από το A αφαιρέσουμε δηλαδή εξαιρέσουμε όσα στοιχεία του είναι και στοιχεία του B. Πρόκειται για το σύνολο:

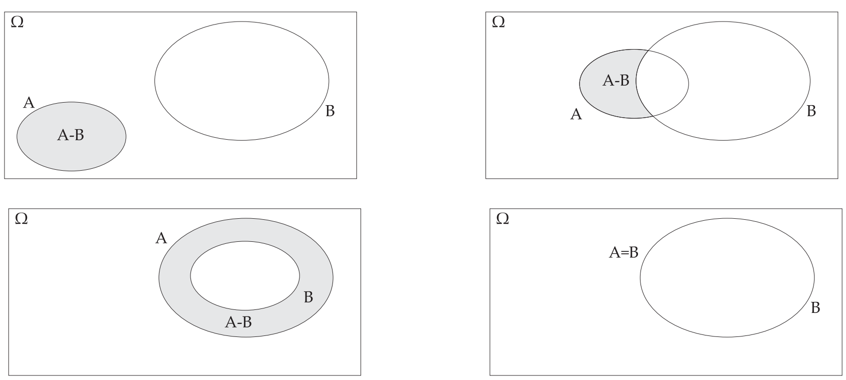
$$\{...,-63,-56,-49,-42,-28,-21,-14,-7,7,14,21,28,42,49,56,63,...\}$$

Ονομάζεται, όπως είναι φυσικό, διαφορά του συνόλου A ως προς το σύνολο B. Γενικά

- Αν A και B είναι δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω τότε το σύνολο των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B ονομάζεται *διαφορά* του συνόλου A ως προς το σύνολο B και συμβολίζεται με $A-B$:

$$A-B=\{x\in\Omega \mid x\in A \ \textbf{και}\ x\notin B\} \tag{2.5}$$

Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζεται η διαφορά των $A-B$ ως το σκιασμένο σύνολο. Σημειώστε ότι στο τέταρτο σχήμα όπου τα A και B είναι ίσα δεν εμφανίζεται σκιασμένη διαφορά διότι πρόκειται για το κενό σύνολο.



Άσκηση 111. Βρείτε τις διαφορές

1. $\{1,2,3\}-\{1,2\}$
2. $\{1,2,3\}-\{4,5\}$
3. $[5,10]-(6,11)$

2.1.13 Συμπλήρωμα συνόλου

Ας θεωρήσουμε την παράσταση

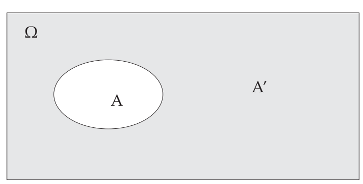
$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός. Ο παρονομαστής της παράστασης πρέπει να είναι διάφορος του 0 επομένως ο x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός που δεν μηδενίζει τον παρονομαστή. Εύκολα βρίσκουμε ότι ο παρονομαστής μηδενίζεται μόνο όταν ο x γίνει 1, 2 ή 3 και επομένως ο x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός που δεν ανήκει στο σύνολο των «απαγορευμένων» τιμών $\{1,2,3\}$. Άρα x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός «έξω» από το $\{1,2,3\}$ ή όπως αλλιώς λέμε αριθμός από το συμπλήρωμα του $\{1,2,3\}$. Γενικά:

- Αν A είναι ένα υποσύνολο του βασικού συνόλου Ω τότε το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A ονομάζεται *συμπλήρωμα* του συνόλου A ως προς το σύνολο Ω και συμβολίζεται με A':

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\} \tag{2.6}$$

Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζεται το συμπλήρωμα του A ως το σκιασμένο σύνολο.

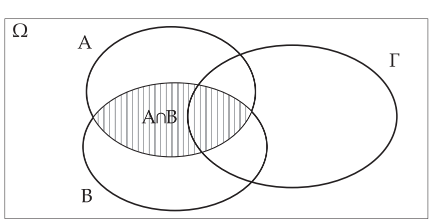


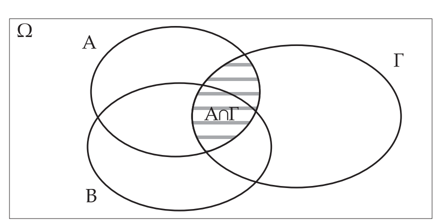
Άσκηση 112. Αν το βασικό σύνολο είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών ποιό είναι το συμπλήρωμα του συνόλου των ρητών;

Άσκηση 113. Με βασικό σύνολο το $\mathbb{R}$ να γράψετε ως ένωση διαστημάτων το συμπλήρωμα του $\{7\}$.

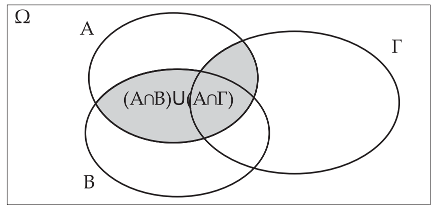
2.1.14 Ιδιότητες των πράξεων συνόλων

Ας πάρουμε τρία σύνολα A, B και Γ. Ας σχηματίσουμε σε δύο διαγράμματα τις τομές $A \cap B$ και $A \cap \Gamma$





και ας σχηματίσουεμε την ένωση τους:



βλέπουμε ότι το σύνολο που προκύπτει δεν είναι άλλο από το $A \cap (B \cup \Gamma)$.

Αυτό που φαίνεται από το σχήμα μπορεί να αποδειχθεί ως εξής: Για κάθε $x \in \Omega$ ισχύει:

$$x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$x \in A \ \textbf{και} \ \ x \in B \cup \Gamma \Leftrightarrow$$

$$x \in A \ \textbf{και} \ \ (x \in B \ \ \textbf{ή} \ \ x \in \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \ \textbf{και} \ \ x \in B) \ \ \textbf{ή} \ \ (x \in A \ \textbf{και} \ \ x \in \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$(x \in A \cap B) \ \ \textbf{ή} \ \ (x \in A \cap \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται μερικές βασικές ιδιότητες των πράξεων των συνόλων. Όλες μπορούν να αποδειχθούν με τρόπο ανάλογο με εκείνο που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω:

$$\text{Αντιμεταθετική} \ \ A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \tag{2.7}$$

$$\text{Προσεταιριστική} \ \ A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma \qquad A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma \tag{2.8}$$

$$\text{Ουδέτερο στοιχείο} \ \ A \cap \Omega = A \qquad A \cup \varnothing = A \tag{2.9}$$

$$\text{Ταυτοδυναμία} \ \ A \cap A = A \qquad A \cup A = A \tag{2.10}$$

$$\text{Επιμεριστική} \ A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \ \ A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \tag{2.11}$$

Επίσης η διαφορά μπορεί να εκφρασθεί με την βοήθεια της τομής και του συμπληρώματος

$$A - B = A \cap B' \tag{2.12}$$

Άσκηση 114. Να αποδείξετε όσες περισσότερες από τις προηγούμενες ιδιότητες μπορείτε.

2.1.15 Απαρίθμηση και Πληθάριθμοι

Κάθε φορά που μετράμε, μετράμε τα στοιχεία ενός συνόλου: Του συνόλου των μαθητών μίας τάξης, των θεατών μίας θεατρικής παράστασης, των βιβλίων μας κτλ. Αυτό που κάνουμε όταν μετράμε τα στοιχεία ενός συνόλου είναι να αντιστοιχίζουμε σε κάθε στοιχείο του συνόλου και ένα αριθμό φυσικό αριθμό ξεκινώντας από το 1 και ανεβαίνοντας ανά ένα. Όταν εξαντλήσουμε τα στοιχεία του συνόλου, δηλαδή όταν τα μετρήσουμε όλα, κοιτάμε ποιος είναι ο τελευταίος αριθμός που χρησιμοποιήσαμε και αυτός δηλώνει το *πλήθος των στοιχείων* του συνόλου μας. Λέγεται και *πληθάριθμος* του συνόλου. Βέβαια αυτή η διαδικασία που λέγεται και *απαρίθμηση* μπορεί να ολοκληρωθεί όταν το σύνολο είναι πεπερασμένο. Δεν είναι όλα τα σύνολα πεπερασμένα: Τα σύνολα των πραγματικών, των ρητών των ακεραίων, των φυσικών, των αρτίων, των περιττών, των πρώτων δεν είναι πεπερασμένα. Λέγονται *απειροσύνολα.* Λέμε ότι το πλήθος των στοιχείων τους είναι *άπειρο.* Ο Cantor μελέτησε συστηματικά τα απειροσύνολα και απέδειξε ότι υπάρχουν διαφορετικά είδη απείρου.

Έχει σημασία να θυμόμαστε ότι ένας πλήθος στοιχείων που δεν γνωρίζουμε δεν είναι κατ΄ ανάγκην άπειρο. Για παράδειγμα το πλήθος των παρακάτω αριθμών

$$1, 2, 3, ..., \nu$$

είναι ν και όχι άπειρο.

Το πλήθος των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A θα συμβολίζεται με $N(A)$. Το κενό θεωρείται πεπερασμένο σύνολο με πληθάριθμο 0. Δηλαδή

$$N(\varnothing) = 0$$

Προφανώς ο πληθάριθμος κάθε πεπερασμένου συνόλου είναι ένας φυσικός αριθμός.

Άσκηση 115. Να βρείτε το πλήθος των παρακάτω αριθμών:

1. $1, 2, 3, ..., 2012$
2. $11, 12, 13, ..., 2012$
3. $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{100}$

Άσκηση 116. Βρείτε το $N(A)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. $A = \left\{-3, 3, \frac{2}{3}, 6\right\}$
2. $A = [2, 12] \cap \mathbb{Z}$
3. $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \quad | \quad x^2 < 11\right\}$

Αν έχουμε δύο πεπερασμένα σύνολα A, B τότε προφανώς ισχύουν τα επόμενα:

$$A = B \Rightarrow N(A) = N(B) \tag{2.13}$$

$$A \subseteq B \Rightarrow N(A) \leq N(B) \tag{2.14}$$

Ας πάρουμε δύο ξένα σύνολα λ.χ. τα $A = \{1, 2, 3, 11\}$ και $B = \{-2, 6, 7\}$. Είναι $N(A) = 4$ και $N(B) = 3$. Είναι $\{1, 2, 3, 11\} \cup \{-2, 6, 7\} = \{1, -2, 2, 3, 6, 7, 11\}$ και επομένως $N(A \cup B) = 7 = N(A) + N(B)$. Προφανώς αυτό ισχύει γενικά: Αν τα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία δηλαδή είναι ξένα ο πληθάριθμος της ένωσης τους είναι το άθροισμα των επιμέρους πληθαρίθμων. Με άλλα λόγια:

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow N(A \cup B) = N(A) + N(B) \tag{2.15}$$

Στην περίπτωση όπου τα A και B δεν είναι ξένα ο υπολογισμός του πληθαρίθμου της ένωσης θέλει μεγαλύτερη προσοχή. Αν $A = \{1, 2, 6, 7\}$ και $B = \{-2, 6, 7, 8, 9\}$ τότε $A \cup B = \{1, 2, 6, 7\} \cup \{-2, 6, 7, 8, 9\} = \{1, -2, 2, 6, 7, 8, 9\}$. Εδώ $N(A \cup B) = 7$ ενώ $N(A) = 4$ και $N(B) = 5$. Δηλαδή $N(A \cup B) = 7$ ενώ $N(A) + N(B) = 9$. Αυτή τη φορά ο πληθάριθμος της ένωσης είναι μικρότερος από το άθροισμα των επιμέρους πληθαρίθμων γιατί αθροίζοντας τους πληθαρίθμους τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων τα υπολογίζουμε δύο φορές επομένως πρέπει να αφαιρεθούν από το άθροισμα. Τα κοινά στοιχεία είναι 2 αφού $A \cap B = \{1, 2, 6, 7\} \cap \{-2, 6, 7, 8, 9\} = \{6, 7\}$ και τώρα είναι $\underbrace{N(A \cup B)}_{7} = \underbrace{N(A)}_{4} + \underbrace{N(B)}_{5} - \underbrace{N(A \cap B)}_{2}$. Προφανώς αυτό ισχύει ως γενικός κανόνας:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) \tag{2.16}$$

ή πιο συμμετρικά:

$$N(A \cup B) + N(A \cap B) = N(A) + N(B) \tag{2.17}$$

Τέλος εύκολα διαπιστώνουμε ότι ισχύει:

$$N(A - B) = N(A) - N(A \cap B) \tag{2.18}$$

Άσκηση 117. Αν $A \subseteq B$ και $N(B) = 11$ ποιές είναι οι δυνατές τιμές του $N(A)$;

Άσκηση 118. Αν $A \subseteq B$ και $N(A) = 11$ ποιές είναι οι δυνατές τιμές του $N(B)$;

Άσκηση 119. Αν $N(A) = 10$, $N(B) = 20$ και $N(A \cap B) = 7$ βρείτε το $N(A \cup B)$.

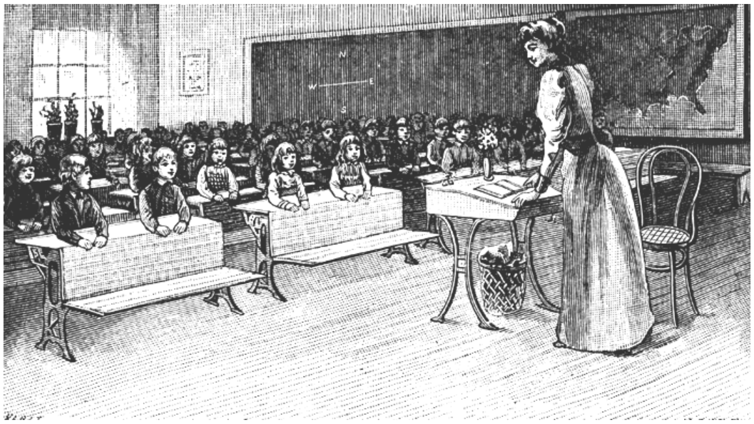
Άσκηση 120. Αν $N(A) = 10$, $N(B) = 20$ και $N(A \cup B) = 27$ βρείτε το $N(A \cap B)$.

2.2 Πιθανότητες

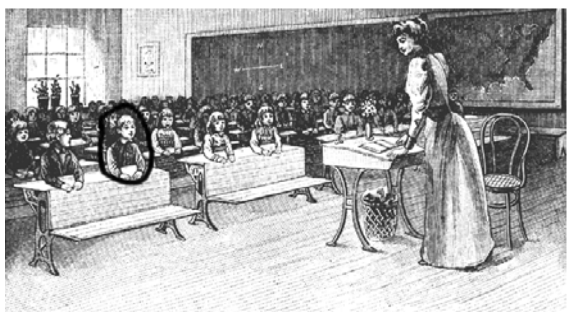
Όταν κάνουμε Μαθηματικά είμαστε συνηθισμένοι σε ακριβείς απαντήσεις. Ωστόσο τα Μαθηματικά δεν αντιμετωπίζουν μόνο μετρήσεις υπολογισμούς και ακριβείς συλλογισμούς. Αντιμετωπίζουν και το Τυχαίο αναπτύσσοντας μεθόδους για να το κάνουν πιο κατανοητό. Στα επόμενα θα κάνουμε μία πρώτη γνωριμία με αυτές τις μεθόδους.

2.2.1 Η έννοια της πιθανότητας

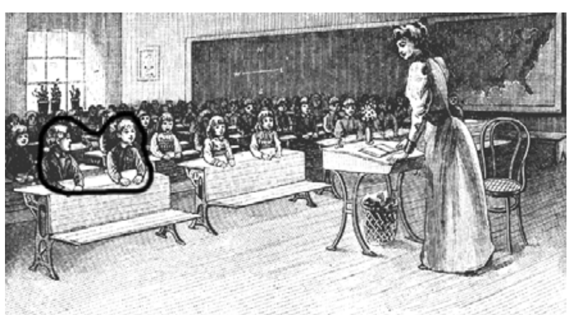
Μια τάξη έχει 31 παιδιά, μαθητές - μαθήτριες.



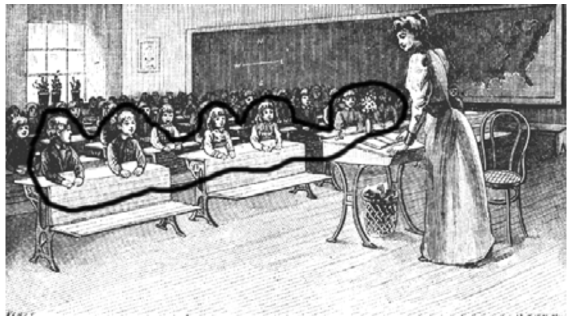
Σε μια γιορτή κληρώνεται ένα βιβλίο. Το βιβλίο θα το κερδίσει ένα από τα 31 παιδιά της τάξης. Ας πάρουμε ένα συγκεκριμένο παιδί:



Στην καθημερινή ζωή σε μία τέτοια περίσταση θα λέγαμε ότι ένα συγκεκριμένο παιδί έχει πιθανότητα 1 στις 31 δηλαδή $\frac{1}{31}$ να κερδίσει το βιβλίο. Ας πάρουμε δύο παιδιά λ.χ. από το ίδιο θρανίο:



Θα λέγαμε τότε ότι η πιθανότητα να κερδίσει κάποιο από τα δύο αυτά παιδιά δηλαδή η πιθανότητα να «πάει» το βιβλίο στο συγκεκριμένο θρανίο είναι $\frac{2}{31}$. Ας πάρουμε τα 6 παιδιά των τριών αππό τα αριστερά πρώτων θρανίων:

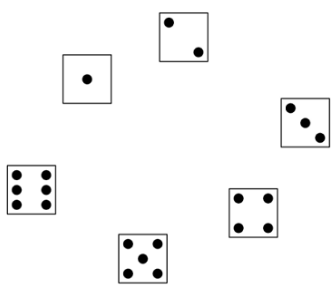


Η πιθανότητα να κερδίσει κάποιο από αυτά τα παιδιά το βιβλίο είναι $\frac{6}{31}$. Ας πάρουμε ένα οποιοδήποτε υποσύνολο A του συνόλου Ω των παιδιών της τάξης. Αν το A έχει k στοιχεία δηλαδή παιδιά τότε η πιθανότητα να «πάει» το βιβλίο στο A δηλαδή να το κερδίσει κάποιο παιδί που συγκαταλέγεται στο A είναι $\frac{k}{31}$ με άλλα λόγια είναι ίση με:

$$\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Η κλήρωση που περιγράψαμε αποτελεί ένα όπως λέμε στα Μαθηματικά *πείραμα τύχης*. Κάθε πείραμα τύχης συνδέεται με κάποια *αποτελέσματα*. Στην προκειμένη περίπτωση ως αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί το ποιος μαθητής κέρδισε το βιβλίο οπότε τα δυνατά αποτελέσματα είναι τα παιδιά που μετέχουν στην κλήρωση δηλαδή τα παιδιά της τάξης. Το σύνολο όλων των αποτελεσμάτων ονομάζεται *δειγματικός χώρος*. Στην περίπτωση μας ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο Ω των παιδιών της τάξης.

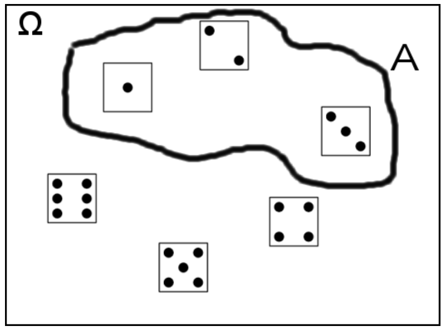
Ας δούμε ένα άλλο πείραμα τύχης: Την ρίψη ζαριού μία φορά. Τα δυνατά αποτελέσματα είναι οι ενδείξεις του ζαριού δηλαδή οι αριθμοί $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$:



Τώρα ο δειγματικός χώρος είναι το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι

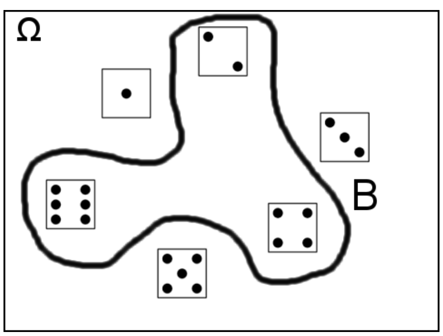
1. Κάποιος στοιχηματίζει πως το ζάρι θα φέρει κάποιον από τους αριθμούς 1, 2 ή 3.
2. Κάποιος στοιχηματίζει πως το ζάρι θα φέρει αριθμό μικρότερο του 4.
3. Κάποιος, πιο εκκεντρικός, στοιχηματίζει πως το ζάρι θα φέρει αριθμό x που ικανοποιεί την ισότητα $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.

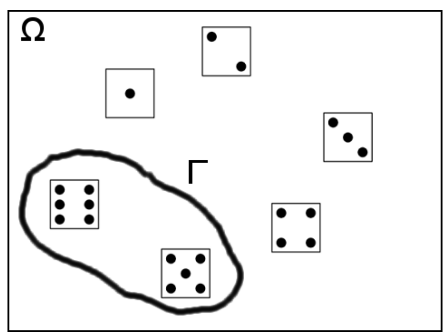
Και οι τρεις στοιχημάτισαν το ίδιο πράγμα: Πως αυτό που θα δείξει το ζάρι είναι 1, 2 ή 3. Δηλαδή ότι θα εμφανισθεί κάποιο στοιχείο του συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$.



Το σύνολο αυτό, πέρα από τις λεκτικές διαφορές, συνοψίζει την ουσία των τριών στοιχημάτων. Αποτελεί ένα *ενδεχόμενο* του πειράματος τύχης. Το ενδεχόμενο αυτό *πραγματοποιείται* όταν το ζάρι έχει ένδειξη κάποιο από τα στοιχεία. Στην αντίθετη περίπτωση δεν πραγματοποιείται. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A συμβολίζεται με $P(A)$[6] και είναι όπως πριν $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 121. Στο πείραμα τύχης «ρίψη ζαριού μία φορά» να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων B και Γ:





Μπορείτε να προτείνετε κάποια περιγραφή αυτών των ενδεχομένων ;

2.2.2 Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας

Η Θεωρία Πιθανοτήτων, ένας καθ' όλα αξιοσέβαστος κλάδος των Μαθηματικών, ξεκίνησε από τα τυχερά παιγνίδια. Η προσπάθεια του ανθρώπου να κατανοήσει και να τιθασεύσει το τυχαίο ξεκινάει από πολύ παλιά. Υπάρχει όμως γενική συμφωνία ότι η σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων γεννήθηκε το 1654 οπότε κάποιος διάσημος παίκτης της εποχής έθεσε στον Γάλλο μαθηματικό και φιλόσοφο Blaise Pascal ένα ερώτημα σχετικό με το πως θα έπρεπε

[6]το P από το αρχικό του probability=πιθανότητα

Blaise Pascal
1623 - 1662

Pierre de Fermat
1601 - 1665

να μοιραστούν τα χρήματα μίας παρτίδας χαρτοπαιγνίου που διακόπηκε. Ο Pascal ασχολήθηκε με το θέμα και συγχρόνως αντάλλαξε απόψεις αλληλογραφώντας με τον επίσης Γάλλο μαθηματικό και νομικό Pierre de Fermat. Άρχισε έτσι να δημιουργείται ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών που αρχικά ονομάσθηκε από τον Pascal «Γεωμετρία της Τύχης». Η θεμελίωση της θεωρίας των πιθανοτήτων προχώρησε με αρκετές δυσκολίες και σε αυτή την μακρά πορεία συνέβαλαν πολλοί μαθηματικοί. Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με την *κλασική προσέγγιση* της θεωρίας των πιθανοτήτων δηλαδή όπως αυτή διαμορφώθηκε στο ξεκίνημα της. Δεν μπορεί να καλύψει όλα τα πειράματα τύχης *αλλά μόνο εκείνα όπου τα αποτελέσματα τους θεωρούνται ισοπίθανα.* Με τέτοια πειράματα θα ασχοληθούμε στα επόμενα.

1. Στο πείραμα τύχης «κλήρωση ενός μαθητή από μία τάξη 31 μαθητών» λάβαμε ως δεδομένο ότι η κλήρωση είναι δίκαιη δηλαδή ότι έχουν μπει στην κληρωτίδα όλα τα ονόματα των μαθητών και ότι οι κλήροι έχουν ανακατευτεί ώστε να υπάρχει εγγύηση πως κανένα παιδί δεν θα ευνοηθεί έναντι των άλλων.

2. Στο πείραμα τύχης «ρίψη ζαριού μία φορά» λαμβάνουμε ως δεδομένο ότι η κατασκευή και ο τρόπος ρίψης του ζαριού είναι τέτοιες ώστε να εξασφαλίζεται πως κανένας αριθμός δεν ευνοείται.

Αντίθετα ας φαντασθούμε το εξής πείραμα τύχης: Βγαίνουμε από το σπίτι μας και καταγράφουμε το πρώτο πρόσωπο που θα δούμε. Θεωρητικά μπορεί να δούμε οποιοδήποτε κάτοικο της Γης αλλά κάποια πρόσωπα (λ.χ. οι γείτονες) έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να εμφανισθούν έναντι άλλων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πείραμα τύχης του οποίου τα αποτελέσματα είναι τα $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu$. Υποθέτουμε πως όλα τα ενδεχόμενα $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu$ είναι ισοπίθανα. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης και A ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο του Ω δηλαδή ένα υποσύνολο του Ω. Ορίζουμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A τον αριθμό

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων δηλαδή στοιχείων του } A}{\text{Πλήθος όλων των περιπτώσεων δηλαδή στοιχείων του } \Omega}} \tag{2.19}$$

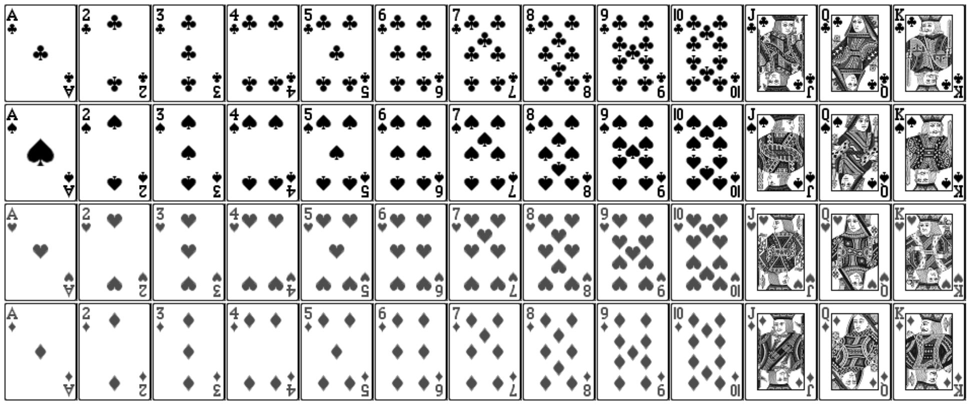
Προφανώς

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1} \tag{2.20}$$

Ειδικά αν ένα ενδεχόμενο A είναι μονοσύνολο λ.χ. $A = \{\omega\}$ τότε γράφουμε $P(\omega)$ αντί για $P(\{\omega\})$. Έχουμε ότι $P(\omega_1) = \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{1}{\nu}, P(\omega_2) = \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{1}{\nu}$ κ.τ.λ.

Άσκηση 122. Αν ο δειγματικός χώρος έχει 3μ στοιχεία ποια είναι ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο του $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

Άσκηση 123. Από μια τράπουλα 52 φύλλων (βλ. σχήμα) επιλέγουμε τυχαία ένα φύλλο.



Να βρείτε την πιθανότητα το φύλο να είναι:

1. Βαλές (J).
2. Ντάμα (Q).
3. Κούπα (♡)
4. Ντάμα κούπα.

2.2.3 Μερικά παραδείγματα.

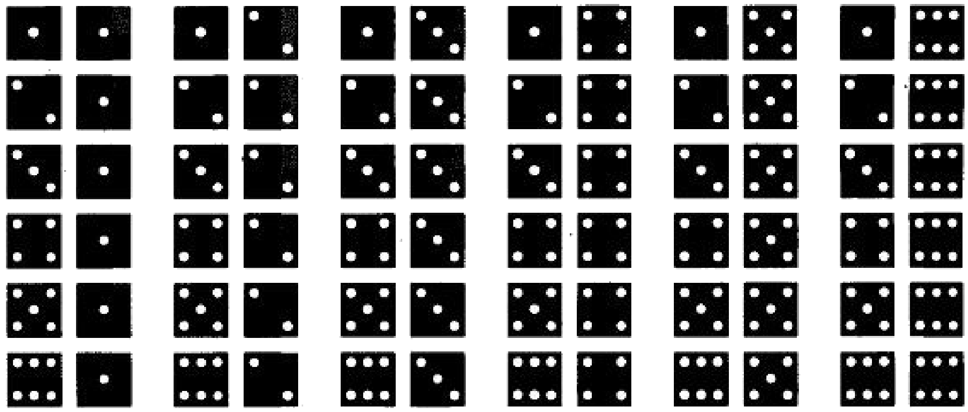
Όταν θέλουμε να υπολογίσουμε πιθανότητες χρειάζεται κάποια προσοχή στην εύρεση του δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα 13. Ας υποθέσουμε ότι εκτελούμε το εξής πείραμα τύχης: Ρίχνουμε δύο ζάρια συγχρόνως. Ποια είναι άραγε η πιθανότητα να έλθουν 1 και 2;

Τα ζάρια θα εμφανίσουν τις εξής ενδείξεις:

$$1-1, \quad 1-2 \quad, \ldots, \quad 1-6, \quad 2-2 \quad, \ldots, \quad 2-6 \quad, \ldots, \quad 6-6$$

Το πλήθος τους είναι $6+5+4+3+2+1=21$. Φαινομενικά η πιθανότητα που ζητάμε είναι $\frac{1}{21}$. Όμως *τα ζάρια είναι δύο* και μια ένδειξη που καταγράφουμε μπορεί να έχει προέλθει με διαφορετικούς τρόπους. Λ.χ. η ένδειξη $2-6$ μπορεί να προέλθει είτε αν το ένα ζάρι (ας το ονομάσουμε «Ζάρι 1») φέρει 2 και το άλλο (ας το ονομάσουμε «Ζάρι 2») φέρει 6 είτε αν το Ζάρι 2 φέρει 2 και το Ζάρι 1 φέρει 6. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος μας περιλαμβάνει όλες τις δυνατές ενδείξεις Ζάρι 1-Ζάρι 2:



Ο δειγματικός χώρος έχει 36 στοιχεία και το ενδεχόμενο να έλθουν 1 και 2 απαρτίζεται από δύο στοιχεία επομένως η πιθανότητα πραγματοποίησης του είναι $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Άσκηση 124. Στο προηγούμενο πείραμα τύχης «Ρίψη δύο ζαριών» να βρείτε την πιθανότητα τα δύο ζάρια να φέρουν άθροισμα 7.

Άσκηση 125. Στο πείραμα τύχης «Ρίψη δύο ζαριών» να βρείτε την πιθανότητα τα δύο ζάρια να φέρουν άθροισμα 8. Ποιο από όλα τα δυνατά αθροίσματα είναι πιθανότερο από τα άλλα;

Παράδειγμα 14. Ένας φοιτητής βρίσκεται σε διακοπές και έχει μαζί του:

4 πουκάμισα

4 παντελόνια

3 ζευγάρια παπούτσια

Μία μέρα αποφασίζει να ντυθεί τυχαία δηλαδή να διαλέξει τυχαία πουκάμισο-παντελόνι-παπούτσια. Ποια είναι η πιθανότητα να φορέσει το πρώτο παντελόνι το δεύτερο πουκάμισο και το τρίτο ζευγάρι παπούτσια;

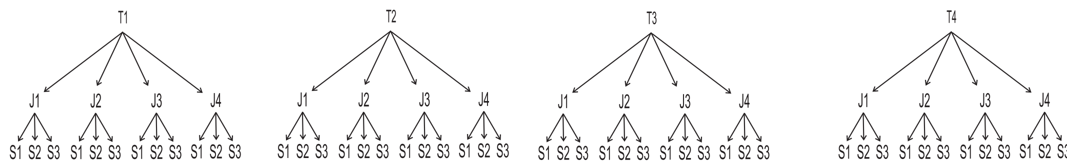
Λύση. Πρέπει να υπολογίσουμε τον δειγματικό χώρο του πειράματος δηλαδή να βρούμε πόσες διαφορετικές «φορεσιές» μπορούν να υπάρξουν. Ας ξεκινήσουμε από το 1ο πουκάμισο. Αυτό μπορεί να συνδυαστεί με 4 παντελόνια που το κάθε ένα συνδυάζεται με 3 ζευγάρια παπούτσια:

Συνολικά 12 φορεσιές. Το 2ο πουκάμισο μας δίνει άλλες 12 φορεσιές.

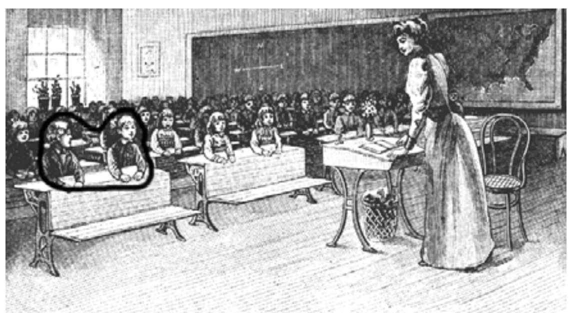
Το 3ο πουκάμισο άλλες 12.

Και 12 φορεσιές το 4ο πουκάμισο:

Επομένως ο δειγματικός μας χώρος έχει $4{\cdot}12 = 48$ στοιχεία=φορεσιές. Επομένως η πιθανότητα που ζητάμε είναι $\frac{1}{48}$. Στο παράδειγμα μας ας συμβολίσουμε με T1, T2, T3, T4 τα πουκάμισα, με J1, J2, J3, J4 τα παντελόνια και με S1, S2, S3 τα παπούτσια τότε ο δειγματικός μας χώρος που περιλαμβάνει όλες τις δυνατές φορεσιές απεικονίζεται στο παρακάτω *δενδροδιάγραμμα*.



Παράδειγμα 15. Ας επανέλθουμε στο παράδειγμα της τάξης με τα 31 παιδιά που είδαμε στην σελίδα 71. Είδαμε ότι αν κληρώσουμε **ένα** βιβλίο η πιθανότητα να το κερδίσει κάποιο από τα δύο παιδιά ενός συγκεκριμένου θρανίου είναι $\frac{2}{31}$



Ας υποθέσουμε τώρα ότι κληρώνουμε **δύο** βιβλία ως εξής: Τραβάμε ένα κλήρο και δίνουμε στο παιδί που γράφει ο κλήρος το ένα βιβλίο. Κατόπιν από τους υπόλοιπους 30 κλήρους τραβάμε άλλο ένα και δίνουμε στο παιδί που γράφει ο κλήρος το δεύτερο βιβλίο. Ποια είναι η πιθανότητα τα βιβλία να τα κερδίσουν τα δύο παιδιά του συγκεκριμένου θρανίου ;

Λύση. Και σε αυτό το παράδειγμα χρειάζεται κάποια προσοχή στον υπολογισμό του δειγματικού χώρου. Κερδίζουν δύο μαθητές. Άρα πρέπει να υπολογίσουμε πόσα διαφορετικά ζεύγη μπορούν να σχηματισθούν από τους 32 μαθητές. Ο πρώτος μαθητής του ζεύγους μπορεί να επιλεγεί κατά 31 τρόπους. Ο δεύτερος θα επιλεγεί από 30 μαθητές άρα μπορεί να επιλεγεί κατά 30 τρόπους. Συνολικά έχουμε $31 \cdot 30 = 930$ επιλογές. Όμως αυτές δεν είναι διαφορετικές αφού έχουμε λογαριάσει και την περίπτωση να επιλεγεί ο μαθητής A και μετά ο B αλλά και την περίπτωση να επιλεγεί ο B και μετά ο A. Με άλλα λόγια τα ζεύγη έχουν υπολογισθεί όλα δύο φορές άρα τα πραγματικά ζεύγη είναι τα μισά: $\frac{930}{2} = 465$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{465}$.

Άσκηση 126. Από ένα βιβλίο 120 σελίδων επιλέγουμε τυχαία δύο διαφορετικές σελίδες. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι οι δύο τελευταίες;

2.2.4 Πράξεις και σχέσεις μεταξύ ενδεχομένων.

Τα ενδεχόμενα δεν είναι τίποτε άλλο από σύνολα και όπως είναι φυσικό έχουμε *σχέσεις και πράξεις ενδεχομένων.* Η γλώσσα των συνόλων μας προσφέρει ένα τρόπο να μεταφέρουμε στην μαθηματική γλώσσα τρόπους που συνδέουμε ενδεχόμενα στην καθομιλουμένη γλώσσα.

2.2.5 Η σχέση που περιέχεσθαι: Αν A τότε B

Αν για τα ενδεχόμενα A, B ισχύει $A \subseteq B$ τότε όλα τα αποτελέσματα που ανήκουν στο A ανήκουν και στο B πράγμα που σημαίνει πως όταν πραγματοποιείται το A πραγματοποιείται το B. Φυσικά σε μία τέτοια περίπτωση θα ισχύει και $N(A) \leq N(B)$ οπότε διαιρώντας και τα δύο μέλη με $N(\Omega)$ βρίσκουμε ότι $\frac{N(A)}{N(\Omega)} \leq \frac{N(B)}{N(\Omega)}$ δηλαδή $P(A) \leq P(B)$. Άρα:

$$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)} \tag{2.21}$$

Στο παράδειγμα της κλήρωσης για το ένα βιβλίο (σελίδα 71) το ενδεχόμενο A περιέχεται στο ενδεχόμενο B

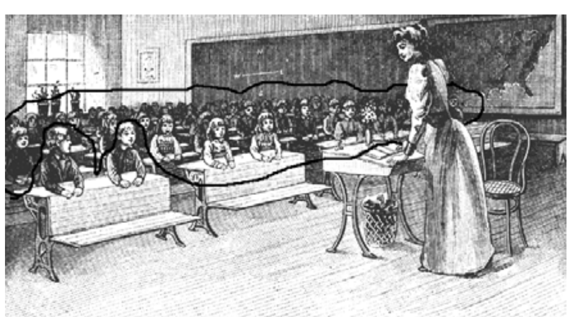
που σημαίνει ότι αν κληρωθεί κάποιος μαθητής από το πρώτο από αριστερά θρανίο θα έχει κληρωθεί ένας μαθητής από τα τρία πρώτα από αριστερά θρανία.

Άσκηση 127. Να αποδείξετε ότι

1. $P(A \cap B) \leq P(A)$ και $P(A \cap B) \leq P(B)$
2. $P(A \cap B) \geq P(A)$ και $P(A \cap B) \geq P(B)$

2.2.6 Το συμπλήρωμα: όχι A

Στο παράδειγμα της σελίδας 71 ας ονομάσουμε A το ενδεχόμενο να κερδίσει το βιβλίο κάποιο από τα δύο παιδιά του πρώτου από τα αριστερά θρανίου. Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί το A περιλαμβάνει όλα τα παιδιά εκτός του θρανίου αυτού και είναι το συμπλήρωμα A' του A.



Είναι $P\left(A'\right) = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{N(\Omega)-N(A)}{N(\Omega)} = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} - \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ και επομένως Επομένως

$$\boxed{P\left(A'\right) = 1 - P\left(A\right)} \tag{2.22}$$

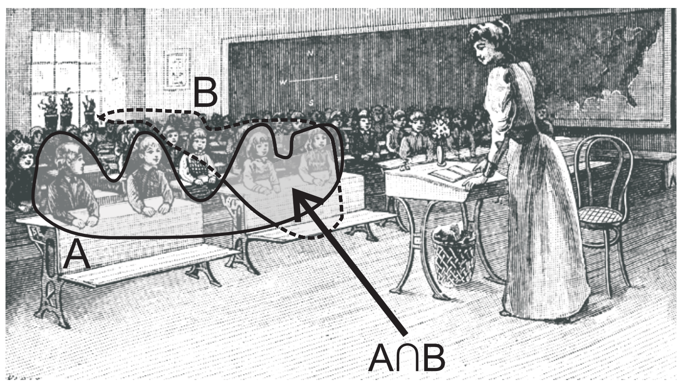
Τα ενδεχόμενα A και A' λέγονται και αντίθετα.

Άσκηση 128. Ποιο ενδεχόμενο είναι το $\left(A'\right)'$;

Άσκηση 129. Αν η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{2}{11}$ ποια είναι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί;

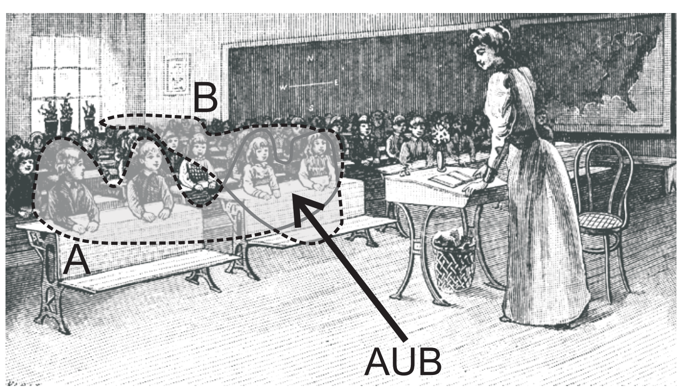
2.2.7 Η τομή: A και B

Στο παράδειγμα της σελίδας 71 ας ονομάσουμε A το ενδεχόμενο το βιβλίο να το κερδίσει κάποιο από τα παιδιά των δύο πρώτων από τα αριστερά θρανίων και B το ενδεχόμενο να το κερδίσει κάποιο παιδί από την δεύτερη σειρά. Το ενδεχόμενο να πραγματοποιηθούν και τα δύο από τα A και B αντιστοιχεί στην τομή τους $A \cap B$.



2.2.8 Η ένωση: A ή B

Για τα ενδεχόμενα που είδαμε στην τομή μπορούμε να ορίσουμε και το σύνθετο ενδεχόμενο «πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B» που αντιστοιχεί στην ένωση τους.



Οι πιθανότητες πραγματοποίησης των A, B, $A \cap B$ και $A \cup B$ συνδέονται μεταξύ τους κατά τρόπο ώστε αν ξέρουμε 3 από αυτές μπορούμε να μάθουμε και την 4η. Από την σχέση (2.24) διαιρώντας δια $N(\Omega)$ βρίσκουμε

$$\frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} - \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)}$$

και επομένως:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{2.23}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *προσθετικός νόμος* και μπορεί να γραφεί και ώς:

$$\boxed{P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{2.24}$$

Αν τα ενδεχόμενα A, B έχουν κενή τομή δηλαδή είναι ξένα ή όπως αλλιώς λέμε *ασυμβίβαστα* τότε ισχύει ο *απλός προσθετικός νόμος* δηλαδή $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ με άλλα λόγια

$$\boxed{A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)} \tag{2.25}$$

Άσκηση 130. Αν $P(A) = 0,7$, $P(B) = 0,6$ και $P(A \cap B) = 0,4$ βρείτε το $P(A \cup B)$.

Άσκηση 131. Αν $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,6$ και $P(A \cup B) = 0,4$ βρείτε το $P(A \cap B)$.

Άσκηση 132. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύει $P(A) + P(B) = 1,4$. Να αποδείξετε ότι δεν είναι ασυμβίβαστα.

2.2.9 Η διαφορα: A καί όχι B

Η διαφορά $A - B$ εκφράζει το σύνθετο ενδεχόμενο «πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B» Από την σχέση διαιρώντας με $N(\Omega)$ βρίσκουμε:

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)} \tag{2.26}$$

Τέλος το ενδεχόμενο $(A - B) \cup (B - A)$ πραγματοποιείται μόνο όταν πραγματοποιείται ακριβώς ένα (δηλαδή μόνο ένα) από τα ενδεχόμενα A και B. Επειδή τα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα ισχύει: $P((A - B) \cup (B - A)) = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν προσέξουμε ότι $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Άσκηση 133. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{1}{4}$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το B είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν και τα δύο είναι $\frac{1}{6}$. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί:

1. Μόνο το A.
2. Μόνο το B.
3. Ακριβώς ένα από τα A και B.
4. Κανένα από τα A και B.

2.2.10 Ένα βασικό παράδειγμα με πολλές λύσεις

Παράδειγμα 16. Για μία τάξη είναι γνωστό ότι η πιθανότητα ένας μαθητής να γνωρίζει Αγγλικά είναι $0,8$, η πιθανότητα να γνωρίζει Γαλλικά είναι $0,6$ και η πιθανότητα να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι $0,5$. Να βρεθεί η πιθανότητα:

1. Να γνωρίζει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες.
2. Να γνωρίζει μόνο Αγγλικά.
3. Να γνωρίζει μόνο Γαλλικά.
4. Να γνωρίζει ακριβώς μία από τις δύο γλώσσες.
5. Να μην γνωρίζει καμία από τις δύο γλώσσες.

Ας ονομάσουμε με A το ενδεχόμενο ο τυχών μαθητής να γνωρίζει Αγγλικά και με Γ το ενδεχόμενο να γνωρίζει Γαλλικά.

Α΄ Τρόπος Από τα δεδομένα μας είναι $P(A) = 0,8$, $P(\Gamma) = 0,6$ και $P(A \cap \Gamma) = 0,5$.

1. Το ενδεχόμενο να γνωρίζει τουλάχιστον μία από τις δύο γλώσσες είναι το $A \cup \Gamma$ και

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = 0,8 + 0,6 - 0,5 = 0,9$$

2. Το ενδεχόμενο να γνωρίζει μόνο Αγγλικά είναι το $A - \Gamma$ και

$$P(A - \Gamma) = P(A) - P(A \cap \Gamma) = 0,8 - 0,5 = 0,3$$

3. Το ενδεχόμενο να γνωρίζει μόνο Γαλλικά είναι το $\Gamma - A$ και

$$P(\Gamma - A) = P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = 0,6 - 0,5 = 0,1$$

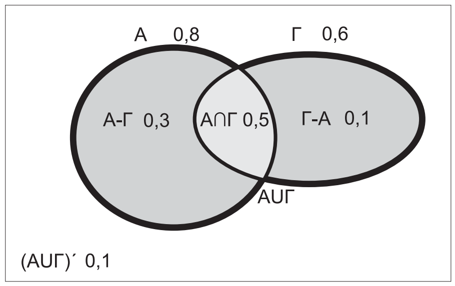
4. Το ενδεχόμενο να γνωρίζει ακριβώς μία από τις δύο γλώσσες είναι το $(A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)$ και επειδή τα ενδεχόμενα $A - \Gamma, \Gamma - A$ είναι ασυμβίβαστα είναι:

$$P((A - \Gamma) \cup (\Gamma - A)) = P(A - \Gamma) + P(\Gamma - A) = 0,3 + 0,2 = 0,5$$

5. Το ενδεχόμενο να γνωρίζει καμία από τις δύο γλώσσες είναι το $(A \cup \Gamma)'$ και

$$P\left((A \cup \Gamma)'\right) = 1 - P(A \cup \Gamma) = 1 - 0,9 - 0,1$$

Β΄ Τρόπος Κάνουμε ένα διάγραμμα Venn και τοποθετούμε τα δεδομένα. Η κλίμακα δεν έχει σημασία. Τα υπόλοιπα στοιχεία βρίσκονται με απλές πράξεις. Η σειρά των πράξεων είναι η ακόλουθη: Από τις πιθανότητες των A και Γ αφαιρούμε τις πιθανότητες της τομής. Βρίσκουμε $0,3$ και $0,1$ και έται απαντάμε στα ερωτήματα 2 και 3. Προσθέτουμε τις πιθανότητες της τομής και των δύο διαφορών και βρίσκουμε την πιθανότητα της ένωσης. Είναι $0,9$ και έτσι απαντάμε στο ερώτημα 1. Προσθέτουμε μόνο τις πιθανότητες των δύο διαφορών και βρίσκουμε ότι η απάντηση στο ερώτημα 4 είναι $0,4$. Τέλος αφαιρούμε από το 1 την πιθανότητα της ένωσης και βρίσκοντας $0,1$ έχουμε απαντήσει στο ερώτημα 5.



Γ΄ Τρόπος Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων:

		Γαλλικά		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Αγγλικά	Ναι	0,5		0,8
	Όχι			
	Σύνολο	0,6		1

Έχουμε τοποθετήσει μόνο τα δεδομένα και το στοιχείο ότι ο δειγματικός χώρος έχει πιθανότητα 1. Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται εύκολα με προσθαφαιρέσεις:

Τουλάχιστον μία γλώσσα

Ακριβώς μία γλώσσα

		Γαλλικά		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Αγγλικά	Ναι	0,5	**0,3**	0,8
	Όχι	**0,1**	**0,1**	**0,2**
	Σύνολο	0,6	**0,4**	1

3

Ταυτότητες, Ανισότητες, Εξισώσεις, Ανισώσεις

3.1 Ταυτότητες

Με τις *ταυτότητες* έχετε ασχοληθεί και στο Γυμνάσιο. Πρόκειται για ισότητες που ισχύουν για όλες τις τιμές των «γραμμάτων» (: μεταβλητών) που περιέχουν και έχουν νόημα. Υπάρχουν και ταυτότητες που δεν ισχύουν για όλες τις τιμές αλλά για εκείνες που ικανοποιούν κάποια συνθήκη. Ονομάζονται *ταυτότητες υπό συνθήκη*.

3.1.1 Οι ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$

Είναι γνωστές οι ταυτότητες

$$\boxed{(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} \tag{3.1}$$

$$\boxed{(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2} \tag{3.2}$$

Η συνηθισμένη απόδειξη γίνεται αν γράψουμε $(\alpha \pm \beta)^2 = (\alpha \pm \beta)(\alpha \pm \beta)$ και κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς.

Άσκηση 134. Να αποδείξετε τις ταυτότητες (3.1), (3.2) κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς

Άσκηση 135. Η ταυτότητα (3.1) παραστατικά γράφεται

$$(\square + \bigcirc)^2 = \square^2 + 2\,\square\,\bigcirc + \bigcirc^2$$

που σημαίνει ότι η ισότητα ισχύει αν στην θέση του $\square$ γράψουμε τον ίδιο αριθμό ή παράσταση και στην θέση του $\bigcirc$ γράψουμε ένα άλλο αριθμό ή παράσταση.

1. Να θέσετε στη θέση του $\square$ το α και στην θέση του $\bigcirc$ το β και να δώσετε μία άλλη απόδειξη της (3.2)
2. Να θέσετε στη θέση του $\square$ το α και στην θέση του $\bigcirc$ το $\beta + \gamma$ και να αποδείξετε ότι

$$\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha} \tag{3.3}$$

Άσκηση 136. Να αναπτύξετε το $(\alpha-\beta-\gamma)^2$.

Άσκηση 137. Αν $a+\frac{1}{\alpha}=3$ βρείτε το $a^2+\frac{1}{\alpha^2}$

Άσκηση 138. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right)} \tag{3.4}$$

Άσκηση 139.

1. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2\left(\alpha^2+\beta^2\right)$.
2. Αν $\alpha^2=7$ και $\beta^2=4$ να βρείτε το

$$(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2$$

Αν βρήκατε μία λύση βρείτε άλλη μία.

Άσκηση 140. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\gamma+\alpha-\beta)^2=3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)-2\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)$$

Άσκηση 141. *Να αποδείξετε ότι*

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)} \tag{3.5}$$

Άσκηση 142. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2=1$$

Άσκηση 143. Να γράψετε ως τετράγωνα τις παραστάσεις

1. $\alpha^2+6\alpha\beta+9\beta^2$
2. $4x^2-4xy+y^2$

Άσκηση 144. Να γράψετε ως άθροισμα τετραγώνων την παράσταση

$$x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2$$

Άσκηση 145. *Η ταυτότητα του Ευκλείδη.* Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2+\beta^2=2\left(\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right)$$

Άσκηση 146. *Η ταυτότητα του Lagrange.* Να αποδείξετε ότι

$$\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

Άσκηση 147. Κάποιοι φυσικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα τετραγώνων δύο άλλων φυσικών και κάποιοι όχι. Για παράδειγμα οι 13 και 25 μπορούν αφού $13 = 2^2 + 3^2$ και $25 = 3^2 + 4^2$ ενώ οι 7 και 11 δε μπορούν (δοκιμάστε τιμές). Να αποδείξετε ότι αν δύο φυσικοί αριθμοί μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα τετραγώνων δύο φυσικών αριθμών τότε και το γινόμενο τους μπορεί.

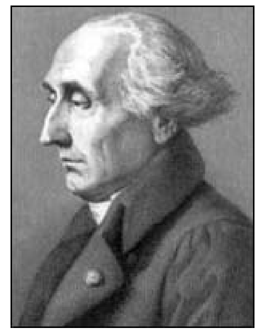
Άσκηση 148. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 10$ και $\alpha\beta = 2$ βρείτε τα $(\alpha + \beta)^2$ και $\alpha + \beta$.

Άσκηση 149. Αν $S = \alpha + \beta$ και $P = \alpha\beta$ να εκφράσετε το $\alpha^2 + \beta^2$ συναρτήσει των S και P δηλαδή ως παράσταση των S και P.

Άσκηση 150. Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2$

Άσκηση 151.

1. Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι ρητοί με $\beta \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha + \beta\sqrt{2}$ είναι άρρητος.
2. Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι ρητοί. Να αποδείξετε ότι
$$\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma + \delta\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \gamma \textbf{ και } \beta = \delta$$
3. Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι ρητοί. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\alpha + \beta\sqrt{2}\right)^2 + \left(\alpha - \beta\sqrt{2}\right)^2$ είναι ρητός.



Joseph Louis Lagrange

1736 - 1813

3.1.2 Οι ταυτότητες $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$

Είναι γνωστές από το Γυμνάσιο οι ταυτότητες

$$\boxed{(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3} \tag{3.6}$$

$$\boxed{(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3} \tag{3.7}$$

Μπορούν να αποδειχθούν με διάφορους τρόπους. Ο πιο «πρωτόγονος» είναι να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)(\alpha + \beta)$ και $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$. Ένα πιο «οικονομικός» τρόπος είναι να γράψουμε $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2$ και $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2$.

Άσκηση 152. Να αποδείξετε αναλυτικά τις ταυτότητες (3.6), (3.7). Ακόμη να αποδείξετε την (3.7) στηριζόμενοι απευθείας στην (3.6).

Άσκηση 153. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^3 + (\alpha - \beta)^3 = 2\alpha\left(\alpha^2 + 3\beta^2\right)$

Άσκηση 154. Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$. Με βάση αυτό το αποτέλεσμα να εκφράσετε το $\alpha^3 + \beta^3$ συναρτήσει των $S = \alpha + \beta$ και $P = \alpha\beta$.

Άσκηση 155. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + 3\gamma^2\alpha + 3\gamma\alpha^2 + 6\alpha\beta\gamma$$

Άσκηση 156. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

Κατόπιν δείξτε ότι αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε ισχύει $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Άσκηση 157. *Η ταυτότητα του Euler.* Να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\right)} \tag{3.8}$$

Επίσης να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right)} \tag{3.9}$$

Τέλος να αποδείξετε ότι αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$ τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

3.1.3 $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\beta+\alpha)$ και φίλοι.

Η ταυτότητα

$$\boxed{\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\beta+\alpha)} \tag{3.10}$$

είναι γνωστή και αποτελεί μια από τις απλές περιπτώσεις παραγοντοποίησης που δεν είναι προφανής όπως λ.χ. εκείνες όπου ο κοινός παράγοντας είναι ευδιάκριτος. Η απόδειξη της γίνεται εύκολα αν κάνουμε τις πράξεις στο β′ μέλος. Ας δούμε τώρα μία διαφορετική απόδειξη στην οποία ξεκινάμε από το α′ μέλος: Θέλουμε να «βρούμε» με τι άλλο είναι ίσο το $\alpha^2-\beta^2$. Το α μπορεί πάντα να γραφεί ως β + κάτι. Αυτό το «κάτι» μπορεί να είναι ένας θετικός αριθμός, ένας αρνητικός ή ακόμη και το μηδέν. Αν το ονομάσουμε h θα είναι $\alpha=\beta+h$ και το h δεν θα είναι άλλο από τον αριθμό $h=\alpha-\beta$. Έχουμε και λέμε λοιπόν:

$$\alpha^2-\beta^2 \underset{\alpha=\beta+h}{=} (\beta+h)^2-\beta^2=\beta^2+2\beta h+h^2-\beta^2=2\beta h+h^2=$$

$$=h(2\beta+h) \underset{h=\alpha-\beta}{=} (\alpha-\beta)(2\beta+\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(\beta+\alpha)$$

Η παραπάνω προσέγγιση δεν είναι τόσο σύντομη όσο εκείνη όπου κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς στο β′ μέλος αλλά έχει το πλεονέκτημα πως δεν χρειάζεται να γνωρίζει κάποιος ποιο είναι το β′ μέλος. Προσέξτε ότι το h λειτούργησε σαν ένα είδος καταλύτη. Μπήκε και βγήκε και απλώς διευκόλυνε τον μετασχηματισμό του πρώτου μέλους στο δεύτερο.

Άσκηση 158. Να γράψετε ως γινόμενο τις παραστάσεις

1. $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2$
2. $(x+y+z)^2-(x+y-z)^2$

Άσκηση 159. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

1. $\frac{x^2-y^2}{x-y}$
2. $\frac{a^4-b^4}{a^2-b^2}$

Άσκηση 160. Να αποδείξετε ότι $\frac{a^2-b^2}{a+b}+\frac{b^2-c^2}{b+c}+\frac{c^2-a^2}{c+a}=0$

Άσκηση 161. Ο παρονομαστής του κλάσματος $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$ είναι άρρητος αριθμός. Δώστε μία απόδειξη. Κατόπιν να πολλαπλασιάσετε αριθμητή και παρονομαστή με κατάλληλο αριθμό ώστε να βρείτε ένα ίσο κλάσμα του οποίου όμως ο παρονομαστής να είναι ρητός αριθμός. Να κάνετε το ίδιο με τα κλάσματα $\frac{14}{\sqrt{7}-2}$ και $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προηγούμενη τεχνική για να βρούμε ταυτότητα ανάλογη της $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\beta + \alpha)$ για κύβους. Πριν δείτε την ανάπτυξη που ακολουθεί καλό θα ήταν να δοκιμάζατε μόνοι σας.

$$\alpha^3 - \beta^3 \underset{\alpha=\beta+h}{=} (\beta + h)^3 - \beta^3 = \beta^3 + 3\beta^2 h + 3\beta h^2 + h^3 - \beta^3 =$$

$$= 3\beta^2 h + 3\beta h^2 + h^3 = h\left(3\beta^2 + 3\beta h + h^2\right) \underset{h=\alpha-\beta}{=} (\alpha - \beta)\left(3\beta^2 + 3\beta(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2\right) =$$

$$= (\alpha - \beta)\left(3\beta^2 + 3\alpha\beta - 3\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2\right) = (\alpha - \beta)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right)$$

Επομένως έχουμε

$$\boxed{\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right)} \tag{3.11}$$

Φυσικά και αυτή η ταυτότητα μπορεί να αποδειχθεί αν εκτελέσουμε τις πράξεις στο β′ μέλος. Αν τώρα θέσουμε στην (3.11) όπου β το $-\beta$ θα βρούμε την

$$\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\left(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2\right)} \tag{3.12}$$

Άσκηση 162. Να γράψετε ως γινόμενο παραγόντων το $x^3 - 1$.

Άσκηση 163. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}$.

Ας πάμε τώρα στην διαφορά $\alpha^4 - \beta^4$. Μπορούμε να βρούμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο με την (3.11) με δύο τρόπους: Ο ένας είναι να ακολουθήσουμε την τεχνική με την αντικατάσταση $\alpha = \beta + h$ και ο δεύτερος να χρησιμοποιήσουμε την (3.10).

$$\alpha^4 - \beta^4 = \left(\alpha^2\right)^2 - \left(\beta^2\right)^2 = \left(\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$$

Η παράσταση $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2\right)$ είναι η καλλίτερη παραγοντοποιημένη μορφή που μπορούμε να πετύχουμε για την $\alpha^4 - \beta^4$ ωστόσο θα την «χαλάσουμε» για να δούμε τι ακριβώς ακολουθεί το $(\alpha - \beta)$. Ακολουθεί το

$$(\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = \alpha^3 + +\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

και επομένως

$$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)\left(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3\right)$$

Αν είχαμε την παραπάνω σχέση ως δεδομένη προκειμένου να την αποδείξουμε θα μπορούσαμε να κάνουμε τις πράξεις στο β′ μέλος:

$$(\alpha - \beta)\left(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3\right) =$$

$$\begin{array}{lllll} \alpha^4 & +\alpha^3\beta & +\alpha^2\beta^2 & +\alpha\beta^3 & \\ & -\alpha^3\beta & -\alpha^2\beta^2 & -\alpha\beta^3 & -\beta^4 \end{array}$$

και βλέπουμε ότι μετά τις διαγραφές αυτό που απομένει είναι το α′ μέλος. Ας δούμε τις ταυτότητες με την διαφορά τετραγώνων, κύβων και τετάρτων δυνάμεων με μία άλλη ματιά (υποθέτουμε προσωρινά ότι τα α και β είναι διαφορετικά από το 0):

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)\left(\alpha^1\beta^0 + \alpha^0\beta^1\right)$$
$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\left(\alpha^2\beta^0 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^0\beta^2\right)$$
$$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)\left(\alpha^3\beta^0 + \alpha^2\beta^1 + \alpha^1\beta^2 + \alpha^0\beta^3\right)$$

Βλέπουμε ότι εμφανίζεται ο παράγοντας $\alpha - \beta$ και μετά ένα άθροισμα γινομένων των α, β όπου ο εκθέτης του α ελαττώνεται ο εκθέτης του β ξεκινάει από 0 και αυξάνει ενώ το άθροισμα των εκθετών σε κάθε γινόμενο είναι πάντα το ίδιο: ο εκθέτης που έχουμε στην διαφορά των δυνάμεων μείον ένα. Μπορούμε να μαντέψουμε ποια *μπορεί* να είναι η γενική μορφή όταν αντί για εκθέτη 2, 3, 4 έχουμε ν:

$$\boxed{\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)\left(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}\right)} \tag{3.13}$$

Φυσικά η παραπάνω σχέση χρειάζεται απόδειξη:

Άσκηση 164. Να αποδείξετε την ταυτότητα (3.13).

Άσκηση 165. Ας υποθέσουμε ότι ο ν είναι περιττός. Χρησιμοποιείστε έτοιμη την (3.13) για να αποδείξετε ότι

$$\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha + \beta)\left(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots - \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}\right)$$

Άσκηση 166. Να αποδείξετε ότι

1. $x^\nu - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{\nu-1}\right)$
2. $x^{\mu+1} - 1 = (x-1)\left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{\mu}\right)$

3.1.4 Δύο ιστορίες για αθροίσματα

3.1.4.1 Πρώτη ιστορία

Η προέλευση του σκακιού δεν είναι γνωστή και χάνεται στα μυθικά χρόνια. Η επινόηση του έχει αποδοθεί σε διάφορα μυθικά πρόσωπα (ανάμεσα τους ο Αγαμέμνων και ο Οδυσσέας). Κατά μία επικρατούσα εκδοχή η δημιουργία του παιγνιδιού τοποθετείται στην αρχαία Ινδία περίπου τον 6 αιώνα μ.Χ. Συνοδεύεται και με ένα θρύλο. Θρυλείται λοιπόν ότι ο Ινδός ηγεμόνας Μπαλχάιτ ζήτησε από τον Βραχμάνο σοφό Σίσσα να σχεδιάσει κάποιο ενδιαφέρον παιγνίδι όπου η σκέψη θα ήταν εκείνη που θα έπαιζε τον κύριο και όχι η τύχη. Όταν ο Σίσσα παρουσίασε το παιγνίδι ο Μπαλχάιτ ενθουσιάστηκε και ρώτησε τον Σίσσα πόσο χρυσάφι ήθελε για αμοιβή. Ο σοφός Σίσσα αρνήθηκε να αμειφθεί σε χρυσάφι αλλά ζήτησε η αμοιβή να του καταβληθεί σε σιτάρι. Ως εξής: Ένας κόκκος για το πρώτο τετραγωνάκι της σκακιέρας, 2 κόκκοι για το δεύτερο, 4 κόκκοι για το τρίτο 8 κόκκοι για το τέταρτο κ.ο.κ. Ο Μπαλχάιτ το θεώρησε σαν μία παραξενιά του σοφού την οποία όμως σεβάστηκε.

Μερικές μέρες αργότερα έμεινε κατάπληκτος όταν πληροφορήθηκε από τους αποθηκάριους του πως δεν υπήρχε αρκετό σιτάρι για να πληρωθεί ο σοφός Σίσσα.

Τι ζήτησε ο Σίσσα; Ζήτησε:

$$\underbrace{1}_{\text{1ο τετράγωνο}} + \underbrace{2}_{\text{2ο τετράγωνο}} + \underbrace{2^2}_{\text{3ο τετράγωνο}} + \underbrace{2^3}_{\text{4ο τετράγωνο}} + \ldots + \underbrace{2^{63}}_{\text{64ο τετράγωνο}}$$

κόκκους σιτάρι. Μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (3.13) θέτοντας $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\nu = 64$. Θα έχουμε

$$\left(2^{64} - 1\right) = (2-1)\left(2^{63} + 2^{62} + \ldots + 2^3 + 2^2 + 2 + 1\right)$$

οπότε έχουμε:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

Την εποχή που τοποθετείται ο θρύλος ήταν μάλλον δύσκολο να υπολογισθεί χωρίς λάθος ο αριθμός $2^{64} - 1$. Η εξάντληση των αποθεμάτων σταριού πριν συμπληρωθεί ο αριθμός ήταν σίγουρη αφού:

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Έχει υπολογισθεί[1] ότι για να βρεθεί τόσο σιτάρι θα έπρεπε όλη η καλλιεργήσιμη επιφάνεια της Γης να σπαρθεί με μία καλή ποικιλία σταριού, να μην υπάρξουν απώλειες και να συγκεντρωθούν οι εσοδείες περίπου 1012 ετών!

Η ταυτότητα (3.13) μπορεί να μας χρησιμεύσει για να υπολογίσουμε το άθροισμα $1 + x + x^2 + \ldots + x^\nu$. Αρκεί στην ταυτότητα να θέσουμε $\alpha = x$, $\beta = 1$ και όπου ν το $\nu + 1$ (μην ξεχνάτε ότι ο εκθέτης ν στην ταυτότητα υποδηλώνει τον οποιοδήποτε θετικό ακέραιο). Θα έχουμε

$$\left(x^{\nu+1} - 1\right) = (x-1)\left(x^\nu + x^{\nu-1} + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1\right)$$

[1] Τραϊανός Τσαρτσαράκης: *Ένας μύθος και μια σύγχρονη απάντηση του. Σκάκι και σιτάρι.* Περιοδικό «Διάσταση», τεύχος 1, Θεσσαλονίκη. 1987

Αν υποθέσουμε ότι $x \neq 1$ θα έχουμε ότι το άθροισμα που ζητάμε είναι

$$\boxed{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\nu-1} + x^{\nu} = \frac{x^{\nu+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1} \tag{3.14}$$

Στην περίπτωση που είναι $x = 1$ το άθροισμα είναι ίσο με

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\nu+1} = \nu + 1$$

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος για να βρούμε το ζητούμενο άθροισμα. Το ονομάζουμε S. Είναι

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\nu-1} + x^{\nu} = S$$

Φυσικά με το να δώσουμε ένα όνομα σε ένα μαθηματικό αντικείμενο, εδώ στο άθροισμα μας, δε σημαίνει ότι το βρήκαμε. Όμως ειδικά αν το όνομα είναι ένα σύμβολο βοηθάει στο να το χειριστούμε. Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της προηγούμενης σχέσης επί x θα βρούμε

$$x\left(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\nu-1} + x^{\nu}\right) = xS$$

δηλαδή:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{\nu} + x^{\nu+1} = xS$$

Αν προσέξουμε το S έμμεσα εμφανίζεται και στο α΄ μέλος:

$$\underbrace{x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{\nu}}_{S-1} + x^{\nu+1} = xS$$

δηλαδή έχουμε:

$$S - 1 + x^{\nu+1} = xS$$

και επομένως $x^{\nu+1} - 1 = xS - S$ δηλαδή $(x-1)\,S = x^{\nu+1} - 1$ που για $x \neq 1$ αν διαιρέσουμε με $x - 1$ μας δίνει την σχέση (3.14)

Άσκηση 167. Να υπολογίσετε το άθροισμα

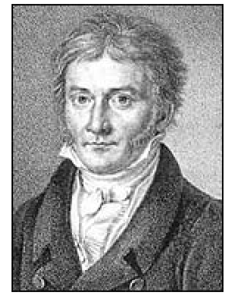
$$1 + (-2) + (-2)^2 + \ldots + (-2)^9$$

3.1.4.2 Δεύτερη ιστορία

Στην προηγούμενη ιστορία συναντήσαμε το άθροισμα $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\nu-1} + x^{\nu}$. Όταν $x = 0$ το άθροισμα αυτό δεν παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \neq 0$ οπότε το άθροισμα μας γράφεται:

$$x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots + x^{\nu-1} + x^{\nu}$$

Υπάρχει κάποιος τρόπος να περιγράψουμε απλά αυτό το άθροισμα: Είναι το άθροισμα των δυνάμεων του x από x^0 έως x^ν. Τι θα συνέβαινε αν οι εκθέτες «κατέβαιναν» κάτω και γίνονταν συντελεστές; Θα είχαμε το άθροισμα:



Carl Friedrich Gauss

1777 • 1855

$$0x + 1x + 2x + 3x + \ldots + (\nu - 1)\, x + \nu x$$

που μπορεί να περιγραφεί ως το άθροισμα των πολλαπλασίων του x από $0x$ έως νx. Το άθροισμα αυτό γράφεται:

$$x\,(1 + 2 + 3 + \ldots + \nu)$$

Το παραπάνω άθροισμα θα έχει υπολογισθεί αν μπορέσουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $1+2+3+\ldots+\nu$. Για την ειδική περίπτωση αυτού του αθροίσματος όταν $\nu = 100$ υπάρχει μία πολύ γνωστή ιστορία που αναφέρεται στον μεγάλο μαθηματικό Carl Friedrich Gauss. Την αντιγράφω όπως την διάβασα όταν ήμουν μαθητής στο Γυμνάσιο από το θαυμάσιο βιβλίο του Bergamini[2]:

> «Σε ηλικία 10 ετών όταν ο καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές να αθροίσουν όλους τους αριθμούς από 1 ως το 100, ο Γκάους έγραψε αμέσως 5050 πάνω στην πλάκα του και την παρουσίασε φωνάζοντας περήφανα «Να το!». Οι συμμαθητές του παρουσίασαν ύστερα από πολλή ώρα τις μουτζουρωμένες πλάκες τους, αλλά μόνο αυτός είχε βρει την σωστή απάντηση. Ασφαλώς ο Γκάους είχε παρατηρήσει ότι, αν ενώσει τους αριθμούς ανά ζεύγη, 100 και 1, ύστερα 99 και 2, μετά 98 και 3 και συνέχεια ως το 50 και 51, είχε κάθε φορά ένα άθροισμα 101. Τα ζεύγη που σχηματίζονται με τον τόπο αυτόν είναι 50 και επομένως το άθροισμα τους έπρεπε να είναι 101×50, δηλαδή 5050.»

Ήδη η προηγούμενη περιγραφή μας δίνει μία ιδέα για να βρούμε το άθροισμα. Αν το ονομάσουμε S είναι

$$\begin{array}{lllllllll} S & = & 1+ & 2+ & 3+ & \ldots+ & (\nu-2)+ & (\nu-1)+ & \nu \\ S & = & \nu+ & (\nu-1)+ & (\nu-2)+ & \ldots+ & 3+ & 2+ & 1 \end{array}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$2S = (1+\nu) + (2+\nu-1) + (3+\nu-2) + \ldots + (\nu-2+3) + (\nu-1+2) + (\nu+1)$$

Κάθε μία από τις ν παρενθέσεις του β′ μέλους είναι ίση με $1+\nu$ άρα το β′ μέλος είναι ίσο με $\nu\,(1+\nu)$. Άρα $2S = \nu\,(\nu+1)$ και $S = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$. Έχουμε λοιπόν:

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = \frac{\nu\,(\nu+1)}{2}} \tag{3.15}$$

και επομένως:

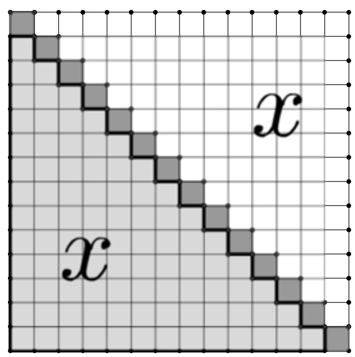
$$1x + 2x + 3x + \ldots + (\nu - 1)\, x + \nu x = \frac{\nu\,(\nu+1)\, x}{2}$$

[2]David Bergamini, *Μαθηματικά*, Επιστημονική Βιβλιοθήκη του Λαϊφ, ΛΥΚΕΙΟΣ ΑΠΟΛΛΩΝ-ΧΡΥΣΟΣ ΤΥΠΟΣ 1965

Άσκηση 168. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:

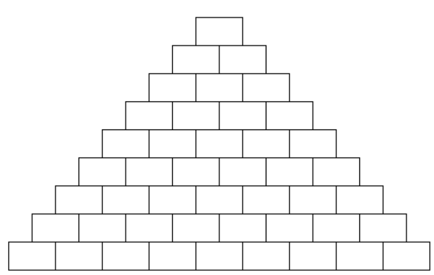
1. $1+2+3+...+1821$
2. $1+2+3+...+2012$
3. $1822+...+2012$

Ένας άλλος τρόπος, πιο γεωμετρικός, για να υπολογίσουμε το άθροισμα (3.15) είναι ο ακόλουθος: Θεωρούμε ένα τετράγωνο και χωρίζουμε κάθε πλευρά σε ν ίσα μέρη. Με αυτό τον τρόπο το τετράγωνο μας χωρίστηκε σε ν^2 μικρότερα τετράγωνα. Κάτι σαν μια μεγάλη σκακιέρα, για να θυμηθούμε την πρώτη ιστορία!



Παίρνουμε από την 1η γραμμή 1 τετραγωνάκι, από την 2η γραμμή 2 τετραγωνάκια, από την 3η γραμμή 3 τετραγωνάκια κ.ο.κ έως ότου φθάσουμε στην τελευταία ν-οστή γραμμή από την οποία παίρνουμε ν τετραγωνάκια. Πρόκειται γαι τα γραμμοσκιασμένα τετραγωνάκια του σχήματος (όπου εδώ εντελώς ενδεικτικά το τετράγωνο έχει σχεδιασθεί 14×14). Τα «διαγώνια» τετραγωνάκια είναι προφανώς ν (ένα σε κάθε γραμμή). Ας ονομάσουμε x το πλήθος όσων είναι κάτω από τα διαγώνια. Φυσικά x είναι και όσα βρίσκονται πάνω από τα διαγώνια. Ζητάμε το $x+\nu$. Αλλά $x+\nu+x$ μας κάνουν όλα τα τετραγωνάκια. Δηλαδή $x+\nu+x=\nu^2$. Επομένως $2x=\nu^2-\nu$ και επομένως $x=\frac{\nu^2-\nu}{2}$. Άρα αυτό που ψάχνουμε δηλαδή το $x+\nu$ είναι ίσο με $x+\nu=\frac{\nu^2-\nu}{2}+\nu=\frac{\nu^2-\nu+2\nu}{2}=\frac{\nu^2+\nu}{2}=\frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Άσκηση 169. Η «πυραμίδα» του παρακάτω σχήματος έχει 9 σειρές τούβλα. Πόσα τούβλα έχει συνολικά;



Αν μετρήσατε τα τούβλα να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν οι σειρές γίνουν 90!

Ας δούμε και ένα τρίτο τρόπο που στηρίζεται στην ταυτότητα $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Στην ταυτότητα αυτή μπορούμε στην θέση του x να αντικαταστήσουμε όποιο αριθμό θέλουμε. Αντικαθιστούμε διαδοχικά τους αριθμούς $1, 2, 3, ..., \nu$ και έχουμε:

$$\begin{array}{ccccc}
(1+1)^2 & = & 1^2+ & 2\cdot 1+ & 1 \\
(2+1)^2 & = & 2^2+ & 2\cdot 2+ & 1 \\
(3+1)^2 & = & 3^2+ & 2\cdot 3+ & 1 \\
.. & .. & .. & .. & .. \\
(\nu-1+1)^2 & = & (\nu-1)^2+ & 2\cdot(\nu-1)+ & 1 \\
(\nu+1)^2 & = & \nu^2+ & 2\cdot\nu+ & 1
\end{array}$$

ή αλλιώς:

$$\begin{array}{ccccc}
2^2 & = & 1^2+ & 2\cdot 1+ & 1 \\
3^2 & = & 2^2+ & 2\cdot 2+ & 1 \\
4^2 & = & 3^2+ & 2\cdot 3+ & 1 \\
.. & .. & .. & .. & .. \\
\nu^2 & = & (\nu-1)^2+ & 2\cdot(\nu-1)+ & 1 \\
(\nu+1)^2 & = & \nu^2+ & 2\cdot\nu+ & 1
\end{array}$$

προσθέτουμε κατά μέλη και βλέπουμε ότι κατά την πρόσθεση κάποιοι προσθετέοι θα διαγραφούν διότι θα εμφανισθούν και στα δύο μέλη:

$$\begin{array}{ccccc}
\cancel{2^2} & = & 1^2+ & 2\cdot 1+ & 1 \\
\cancel{3^2} & = & \cancel{2^2}+ & 2\cdot 2+ & 1 \\
\cancel{4^2} & = & \cancel{3^2}+ & 2\cdot 3+ & 1 \\
.. & .. & .. & .. & .. \\
\cancel{\nu^2} & = & \cancel{(\nu-1)^2}+ & 2\cdot(\nu-1)+ & 1 \\
(\nu+1)^2 & = & \cancel{\nu^2}+ & 2\cdot\nu+ & 1
\end{array}$$

και θα έχουμε:

$$(\nu+1)^2 = 1^2 + \underbrace{2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + 2\cdot(\nu-1) + 2\cdot\nu}_{\text{από τα διπλάσια γινόμενα}} + \underbrace{1+1+1+1+...+1+1}_{\text{μία μονάδα από κάθε ισότητα}}$$

δηλαδή αν ονομάσουμε S το ζητούμενο άθροισμα θα είναι

$$(\nu+1)^2 = 1 + 2\left(\underbrace{1+2+3+...+(\nu-1)+\nu}_{S}\right) + \nu$$

δηλαδή

$$(\nu+1)^2 = (\nu+1) + 2S$$

από την οποία βρίσκουμε $2S = (\nu+1)^2 - (\nu+1)$ και $2S = (\nu+1)\left((\nu+1)-1\right)$ δηλαδή πάλι $S = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Άσκηση 170. Με την βοήθεια της ταυτότητας

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

να αποδείξετε ότι:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (\nu-1)^2 + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

3.1.5 Αναλογίες

Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με τους β και δ να είναι διάφοροι του μηδενός ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

τότε λέμε ότι οι αριθμοί α, γ είναι *ανάλογοι* των β, δ. Επίσης λέμε ότι οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αποτελούν μία *αναλογία*. Οι αριθμοί α, δ λέγονται *άκροι* της αναλογίας ενώ οι αριθμοί β, γ λέγονται *μέσοι*. Είναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\cancel{\beta}}(\cancel{\beta}\delta) = \frac{\gamma}{\cancel{\delta}}(\beta\cancel{\delta}) \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$$

και επομένως έχουμε ότι για $\beta\delta \neq 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma} \tag{3.16}$$

Αν έχουμε μία αναλογία μπορούμε να κάνουμε κάποιες ενέργειες και να προκύψει πάλι αναλογία. Έτσι (πάντα υπό την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε μηδενικούς παρονομαστές) ισχύουν τα επόμενα:

1. Αν σε μία αναλογία εναλλάξουμε τους μέσους προκύπτει αναλογία.
2. Αν σε μία αναλογία εναλλάξουμε τους άκρους προκύπτει αναλογία.
3. Αν σε μία αναλογία εναλλάξουμε αριθμητές με παρονομαστές προκύπτει αναλογία.
4. Αν σε μία αναλογία προσθέσουμε στους παρονομαστές τους αριθμητές προκύπτει αναλογία.
5. Αν σε μία αναλογία προσθέσουμε στους αριθμητές τους παρονομαστές προκύπτει αναλογία.
6. Αν σε μία αναλογία αφαιρέσουμε από τους παρονομαστές τους αριθμητές προκύπτει αναλογία.
7. Αν σε μία αναλογία αφαιρέσουμε από τους αριθμητές τους παρονομαστές προκύπτει αναλογία.

Τα παραπάνω σχηματικά αποδίδονται με τις ισοδυναμίες που όλες αποδεικνύονται εύκολα καταφεύγοντας στο γινόμενο «χιαστί»:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc}
\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta} & \Leftrightarrow & \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} & \Leftrightarrow & \frac{\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{\gamma}{\delta+\gamma} \\
\Updownarrow & \searrow & \Updownarrow & \nearrow & \Updownarrow \\
\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} & \Leftrightarrow & \alpha\delta=\gamma\beta & \Leftrightarrow & \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha} \\
\Updownarrow & \nearrow & \Updownarrow & d & \Updownarrow \\
\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta} & \Leftrightarrow & \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma} & \Leftrightarrow & \frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\gamma}{\delta-\gamma}
\end{array}} \tag{3.17}$$

Άσκηση 171. Στο διάγραμμα της (3.17) να αποδείξετε ότι όλες οι ισότητες είναι ισοδύναμες με την ισότητα $\alpha\delta=\gamma\beta$ που βρίσκεται στο κέντρο.

Επίσης μια αναλογία μπορεί να επεκταθεί με διάφορους χειρισμούς όπως με το να σχηματίσουμε ένα νέο κλάσμα όπου ως αριθμητή θέτουμε το άθροισμα των δύο προηγουμένων αριθμητών και ως παρονομαστή το άθροισμα των προηγουμένων παρονομαστών. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε χρησιμοποιώντας αντί για άθροισμα την διαφορά.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\overbrace{\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}}^{(i)} \tag{3.18}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=\overbrace{\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}}^{(ii)} \tag{3.19}$$

Άσκηση 172. Να αποδείξετε τις παραπάνω ισότητες (i), (ii) στηριζόμενοι στην ισότητα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

Ο συνηθισμένος τρόπος απόδειξης των ιδιοτήτων των αναλογιών είναι να παίρνουμε ότι το γινόμενο των μέσων είναι ίσο με το γινόμενο των άκρων δηλαδή το γνωστό «χιαστί». Ας δούμε ένα ακόμη τρόπο με τον οποίο θα αποδείξουμε τις (3.18), (3.19):

Αφού $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ μπορούμε να ονομάσουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=k$. Αυτό σημαίνει ότι $\frac{\alpha}{\beta}=k$ και $\frac{\gamma}{\delta}=k$ και επομένως $\alpha=k\beta$ και $\gamma=k\delta$. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\frac{k\beta+k\delta}{\beta+\delta}=\frac{k\left(\beta+\delta\right)}{\beta+\delta}=k$$

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}=\frac{k\beta-k\delta}{\beta-\delta}=\frac{k\left(\beta-\delta\right)}{\beta-\delta}=k$$

άρα

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=k=\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}$$

και έτσι έχουμε αποδείξει τις (3.18), (3.19).

Άσκηση 173. Να αποδείξετε ότι αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{p\alpha+q\gamma}{p\beta+q\delta}$ όποιοι και αν είναι οι p, q, αρκεί να μη μηδενίζονται οι παρονομαστές.

Άσκηση 174. Προφανώς με $\beta\delta \neq 0$ ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Ο αριθμός $\alpha\delta - \beta\gamma$ συμβολίζεται με

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

και ονομάζεται *ορίζουσα* της τετράδας $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Γενικά για οποιαδήποτε τετράδα αριθμών $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ορίζουμε την ορίζουσα της να είναι

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma} \tag{3.20}$$

1. Βρείτε τις $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ και $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$
2. Να αποδείξετε ότι $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$
3. Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma + x \\ \beta & \delta + y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & x \\ \beta & y \end{vmatrix}$$

Μπορούμε να έχουμε αναλογίες με περισσότερους από 4 άριθμούς. Θα λέμε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι *ανάλογοι* των μη μηδενικών αριθμών $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ αν ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = ... = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$$

Η παραπάνω αναλογία μπορεί να επεκταθεί με διάφορους τρόπους. Γενικά ισχύει:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = ... = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = ... = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + ... + \lambda_\nu\alpha_\nu}{\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + ... + \lambda_\nu\beta_\nu} \tag{3.21}$$

Άσκηση 175. Να αποδείξετε την (3.21)
Υπόδειξη: Να θέσετε $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = ... = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = k$

Άσκηση 176. Να χωρίσετε το αριθμό 474 σε μέρη ανάλογα των αριθμών $2, 3, 4, 5$

Άσκηση 177. Να αποδείξετε ότι αν $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ τότε

$$\frac{x^2 + a^2}{x + a} + \frac{y^2 + b^2}{y + b} + \frac{z^2 + c^2}{z + c} = \frac{(x + y + z)^2 + (a + b + c)^2}{x + y + z + a + b + c}$$

Άσκηση 178. Έστω ότι $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$. Βρείτε το $\frac{7x-4y}{3x+y}$

3.1.6 Η έννοια της γεωμετρικής προόδου

Ας υποθέσουμε ότι για τους μη μηδενικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, ...$ ισχύει η αναλογία:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{\alpha_4} = \dots \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \dots$$

Τότε θα ισχύει και η αντίστοιχη αναλογία που προκύπτει αν οι παρονομαστές γίνουν αριθμητές και οι αριθμητές γίνουν παρονομαστές:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \dots \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \dots$$

Αν ονομάσουμε όλα τα παραπάνω ίσα κλάσματα με λ (ονομάζεται *λόγος*) θα έχουμε ότι

$$\tfrac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda, \quad \tfrac{\alpha_3}{\alpha_2} = \lambda, \quad \tfrac{\alpha_4}{\alpha_3} = \lambda, \quad \dots \quad \tfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \lambda \quad \tfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda, \quad \dots$$

Και επομένως:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 \lambda \\ \alpha_3 &= \alpha_2 \lambda \\ \alpha_4 &= \alpha_3 \lambda \\ &\dots \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} \lambda \\ \alpha_{\nu+1} &= \alpha_\nu \lambda \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.22}$$

Με άλλα λόγια κάθε αριθμός από τους $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, ...$ προκύπτει από τον προηγούμενο του αν τον πολλαπλασιάσουμε με ένα, πάντα τον ίδιο, ή όπως αλλιώς λέμε σταθερό αριθμό λ. Αυτό συμβολικά περιγράφεται με την σχέση

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda, \;\; \nu = 1, 2, 3, ...} \tag{3.23}$$

Μία διαδοχή αριθμών (λέγεται και *ακολουθία*) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ που ικανοποιεί μία σχέση της μορφής (3.23) ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος και ο αριθμός λ λέγεται *λόγος* της προόδου. Οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ λέγονται *όροι* της γεωμετρικής προόδου. Η σχέση (3.23) είναι μία *αναδρομική* σχέση όπου ο όρος $\alpha_{\nu+1}$ εκφράζεται από τον προηγούμενο του α_ν. Αν ξέρουμε τον α_1 που είναι *πρώτος όρος* της προόδου μπορούμε να βρίσκουμε τους επόμενους όρους απλώς πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά επί λ. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται μερικά παραδείγματα τέτοιων υπολογισμών:

α_1	λ	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	2	4	8	16	32	64
2	1	2	2	2	2	2
1	-2	-2	4	-8	16	-32
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$
2	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{16}$

Άσκηση 179. Σε μία γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $\frac{3}{4}$ και ο λόγος είναι $\frac{4}{3}$. να βρείτε τους 5 πρώτους όρους της προόδου.

Άσκηση 180. Σε μία γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $\sqrt{2}$ και ο λόγος είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$. να βρείτε τους 5 πρώτους όρους της προόδου.

3.1.7 Συνθήκη ώστε ακολουθία να είναι γεωμετρική πρόοδος

Είδαμε ότι για να είναι μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ μη μηδενικών αριθμών γεωμετρική πρόοδος πρέπει το πηλίκο κάθε όρου δια του προηγουμένου του να είναι σταθερός αριθμός δηλαδή να ισχύει

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \dots \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \dots$$

Με άλλα λόγια αν α, β, γ είναι τρεις *οποιοιδήποτε* διαδοχικοί όροι της (που σημαίνει ότι μπορεί να είναι οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, οι $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, οι $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ κ.ο.κ.) θα πρέπει να εμφανίζεται η αναλογία:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$$

που γράφεται ισοδύναμα και

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma} \tag{3.24}$$

Έχει επικρατήσει να λέμε ότι ο β είναι *μέση ανάλογος* των α, γ. Αν έχουμε τρις αριθμούς αυτοί μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι περισσοτέρων της μίας γεωμετρικών προόδων. Για παράδειγμα οι αριθμοί $2, 4, 8$ είναι διαδοσχικοί όροι (2ος, 3ος, 4ος) της γεωμετρικής προόδου $1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots$ αλλά είναι επίσης διαδοχικοί (4ος, 5ος, 6ος) όροι της γεωμετρικής προόδου $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \dots$. Σε κάθε περίπτωση όμως ισχύει $4^2 = 2 \cdot 8$. Όταν λέμε ότι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου εννοούμε ότι υπάρχει μία γεωμετρική πρόοδος (στην πραγματικότητα υπάρχουν άπειρες) της οποίας οι αριθμοί αυτοί είναι διαδοχικοί όροι. Αυτό θα συμβαίνει αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη (3.24).

Άσκηση 181. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $2,\ 2 - \sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2}$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Άσκηση 182. Να αποδειχθεί με $xyz \neq 0$ οι αριθμοί $x^2y,\ xyz,\ yz^2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

3.1.8 Υπολογισμός του ν-οστού όρου γεωμετρικής προόδου

Η αναδρομική σχέση $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda$ μιας γεωμετρικής προόδου μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίζουμε ένα όρο της προόδου αν γνωρίζουμε τον προηγούμενο του. Για να μάθουμε τον προηγούμενο όρο χρειάζεται να μάθουμε τον προ-προηγούμενο κ.ο.κ. Δεν είναι όμως δύσκολο να βρούμε ένα τύπο που μας δίνει ένα οποιοδήποτε όρο χωρίς να χρειάζεται να μάθουμε τους προηγουμένους του. Ας ξαναγράψουμε από τις σχέσεις (3.22) εκείνες που έχουν στο πρώτο μέλος τους όρους $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_\nu$. Είναι $\nu - 1$ το πλήθος (προσέξτε ότι ξεκινούν από 2 και καταλήγουν σε ν):

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 \lambda \\ \alpha_3 &= \alpha_2 \lambda \\ \alpha_4 &= \alpha_3 \lambda \\ &... \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} \lambda \end{aligned}$$

Τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 ... \alpha_\nu = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_{\nu-1} \alpha_\nu \underbrace{\lambda\lambda ... \lambda}_{\nu-1}$$

Θα εμφανισθούν τόσα λ όσες και οι ισότητες που πολλαπλασιάσαμε γιαυτό έχουμε βάλει την ένδειξη $\nu - 1$. Βλέπουμε τώρα ότι κάποιοι όροι υπάρχουν και στα δύο μέλη και επομένως μπορούν να απλοποιηθούν: Πρόκειται για τους $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_{\nu-1}$. Μετά την απλοποίηση θα έχουμε την ισότητα $\alpha_{\nu+1} = \alpha_1 \underbrace{\lambda\lambda ... \lambda}_{\nu-1}$ που μας δίνει την

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}} \tag{3.25}$$

Άσκηση 183. Μία γεωμετρική πρόοδος έχει $\alpha_1 = \frac{1}{16}$ και $\lambda = 2$. Βρείτε το α_{12}

Άσκηση 184. Να αποδείξετε ότι σε μία γεωμετρική πρόοδο $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ με λόγο λ ισχύει $\frac{\alpha_m}{\alpha_n} = \lambda^{m-n}$

3.1.9 Η έννοια της αριθμητικής προόδου

Είδαμε ότι (σελίδα 99)μια ακολουθία α_1, α_2.. μη μηδενικών αριθμών θα είναι γεωμετρική πρόοδος

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = ... \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} ...$$

Στην παραπάνω ισότητα απαιτείται κάποια πηλίκα αριθμών δηλαδή αποτελέσματα διαιρέσεων να είναι ίσα. Έχουμε δει ότι η διαίρεση είναι για τον πολλαπλασιασμό ότι είναι η αφαίρεση για την πρόσθεση. Αν απαιτήσουμε *όχι τα πηλίκα* των αριθμών α_2, α_1, α_3, α_2,α_4, α_3,...,$\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu+1}, \alpha_\nu$ να είναι ίσα *αλλά οι διαφορές* τους θα έχουμε την σχέση:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = ... = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = ...$$

Μία ακολουθία αριθμών α_1, α_2.. (δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι είναι μη μηδενικοί αφού τώρα δεν έχουμε παρονομαστές) που έχει την παραπάνω ιδιότητα λέγεται *αριθμητική πρόοδος*. Αν ονομάσουμε ω τις ίσες διαφορές τότε ο αριθμός ω λέγεται διαφορά της προόδου. Από τις ισότητες

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \omega, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = \omega, \quad \alpha_4 - \alpha_3 = \omega, \quad \ldots \quad \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \omega, \quad \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega, \quad \ldots$$

στην περίπτωση μας θα έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \alpha_1 + \omega \\ \alpha_3 &= \alpha_2 + \omega \\ \alpha_4 &= \alpha_3 + \omega \\ &\ldots \\ \alpha_\nu &= \alpha_{\nu-1} + \omega \\ \alpha_{\nu+1} &= \alpha_\nu + \omega \\ &\ldots \end{aligned}$$

Στην περίπτωση της αριθμητικής προόδου κάθε όρος προκύπτει από τον προηγούμενο του με την πρόσθεση της διαφοράς της προόδου. Συμβολικά:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega, \quad \nu = 1, 2, \ldots} \tag{3.26}$$

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται μερικά παραδείγματα αριθμητικών προόδων όπου οι όροι υπολογίζονται με την βοήθεια του πρώτου όρου και της διαφοράς:

α_1	ω	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	2	3	5	7	9	11
2	1	3	4	5	6	7
1	-2	-1	-3	-5	-7	-9
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

Άσκηση 185. Σε μία αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι -3 και η διαφορά 2. Βρείτε τους 5 πρώτους όρους της προόδου.

Άσκηση 186. Σε μία αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι $\frac{1}{3}$ και η διαφορά $\frac{1}{2}$. Βρείτε τους 5 πρώτους όρους της προόδου.

3.1.10 Συνθήκη ώστε ακολουθία να είναι αριθμητική πρόοδος

Αν μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2..$ είναι αριθμητική πρόοδος και α, β, γ είναι τρεις οποιοιδήποτε διαδοχικοί όροι της τότε θα ισχύει $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ και επομένως

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma} \tag{3.27}$$

Η σχέση αυτή είναι και η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τρεις αριθμοί να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Ο αριθμός β ονομάζεται αριθμητικός μέσος των αριθμών α, γ.

Άσκηση 187. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{1}{2}, \frac{5}{7}, \frac{13}{14}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 188. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha, \frac{\beta+\gamma}{2}, -\alpha + \beta + \gamma$ είναι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

3.1.11 Υπολογισμός του ν-οστού όρου αριθμητικής προόδου

Μπορούμε να βρούμε ένα τύπο που να μας δίνει απ' ευθείας τον ν-οστό όρο μίας αριθμητικής προόδου. Από τις ισότητες

$$\begin{gathered}\alpha_2 = \alpha_1 + \omega\\ \alpha_3 = \alpha_2 + \omega\\ \alpha_4 = \alpha_3 + \omega\\ \dots\\ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega\end{gathered}$$

προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{\nu-1} + (\nu - 1)\,\omega$$

που μετά τις διαγραφές όσων προσθετέων υπάρχουν και στα δύο μέλη μας δίνει:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega} \tag{3.28}$$

Άσκηση 189. Μία αριθμητική πρόοδος έχει $\alpha_1 = -3$ και $\omega = 2$. Βρείτε το α_{12}.

Άσκηση 190. Να αποδείξετε ότι σε μία αριθμητική πρόοδο $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ με διαφορά ω ισχύει $\alpha_m - \alpha_n = (m - n)\omega$.

3.1.12 Άθροισμα ν πρώτων όρων προόδου

Θα υπολογίσουμε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων μίας γεωμετρικής ή αριθμητικής προόδου.

Η πρόοδος είναι γεωμετρική. Τότε το άθροισμα μας σύμφωνα με την (3.25) γράφεται:

$$S = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$$

δηλαδή

$$S = \alpha_1\left(\underbrace{1 + \lambda + \dots + \lambda^{\nu-1}}_{\nu}\right)$$

Τώρα το άθροισμα $1 + \lambda + \dots + \lambda^{\nu-1}$ σύμφωνα με την (3.14) της σελίδας 92 (στη θέση του x έχουμε λ και στην θέση του ν έχουμε τώρα $\nu - 1$) είναι

$$1 + \lambda + \dots + \lambda^{\nu-1} = \frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}, \quad \text{αν} \quad \lambda \neq 1$$

ενώ στην ειδική περίπτωση όπου είναι $\lambda = 1$ το άθροισμα είναι τόσο όσοι οι προσθετέοι του δηλαδή ν. Επομένως για το άθροισμα S των ν πρώτων όρων μίας γεωμετρικής προόδου ισχύει

$$\boxed{S = \begin{cases} \alpha_1\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} & \text{αν} \quad \lambda \neq 1\\ \nu\alpha_1 & \text{αν} \quad \lambda = 1\end{cases}} \tag{3.29}$$

Η πρόοδος είναι αριθμητική. Το άθροισμα S σύμφωνα με την (3.28) γράφεται:

$$S = \alpha_1 + (\alpha_1 + \omega) + (\alpha_1 + 2\omega) + \ldots + (\alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega)$$

οπότε

$$S = \underbrace{\alpha_1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1}_{\nu} + (\omega + 2\omega + \ldots + (\nu - 1)\,\omega) = \nu\alpha_1 + (1 + 2 + \ldots + (\nu - 1))\,\omega$$

Το άθροισμα $1 + 2 + \ldots + (\nu - 1)$ στην παραπάνω σχέση μπορούμε να το βρούμε από την σχέση (3.15) της σελίδας 93 αν στη θέση του ν θέσουμε το $\nu - 1$. Είναι $1 + 2 + \ldots + (\nu - 1) = \frac{(\nu-1)(\nu-1+1)}{2} = \frac{(\nu-1)\nu}{2}$ επομένως

$$S = \nu\alpha_1 + \frac{(\nu - 1)\,\nu}{2}\omega = \frac{(2\nu\alpha_1 + \nu\,(\nu - 1)\,\omega)}{2} = \frac{(2\alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega)\,\nu}{2}$$

Άρα για το άθροισμα S των ν πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου ισχύει:

$$\boxed{S = \frac{(2\alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega)\,\nu}{2}} \qquad (3.30)$$

Άσκηση 191. Μια γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο -1 και λόγο 2. Βρείτε το άθροισμα των 9 πρώτων όρων της.

Άσκηση 192. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου που έχει πρώτο όρο 2 και διαφορά 4.

Άσκηση 193. Να βρείτε το άθροισμα $2 + 4 + 6 + \ldots + 80$

Άσκηση 194. Να βρείτε το άθροισμα $3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2)^3 + \ldots + 3 \cdot (-2)^{10}$.

Άσκηση 195. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου είναι

$$\boxed{S = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\,\nu}{2}} \qquad (3.31)$$

Υπόδειξη: Μπορείτε να στηριχθείτε στην (3.30) συνδυάζοντας την με την (3.28). Επίσης μπορείτε να μιμηθείτε την πρώτη απόδειξη της (3.15) στην σελίδα 93 αφού προηγουμένως αποδείξετε ότι για κάθε k ισχύει $\alpha_k + \alpha_{\nu-\kappa+1} = \alpha_1 + \alpha_\nu$

Άσκηση 196. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου είναι

$$\boxed{S = \frac{\alpha_\nu\lambda - \alpha_1}{\lambda - 1}} \qquad (3.32)$$

Υπόδειξη: Συνδυάστε τις (3.29), (3.25)

3.2 Ανισότητες

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ανισότητες. Όπως και στις ταυτότητες υπάρχουν ανισότητες που ισχύουν για όλες τις τιμές των γραμμάτων (=μεταβλητών) που περιέχουν και για τις οποίες έχουν νόημα και ανισότητες που υπό προϋποθέσεις (ανισότητες υπό συνθήκες). Έχουμε μάθει ότι αν έχουμε μία ανισότητα $\alpha < \beta$ τότε μπορούμε:

- Να προσθέτουμε και στα δύο μέλη της τον ίδιο αριθμό και να παίρνουμε ανισότητα που ισχύει αλλά και να διαγράφουμε από τα μέλη της τον ίδιο προσθετέο δηλαδή:

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma} \tag{3.33}$$

Να πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της με τον ίδιο θετικό αριθμό και να παίρνουμε ανισότητα που ισχύει αλλά και να διαγράφουμε από τα μέλη μίας ανισότητας τον ίδιο θετικό παράγοντα:

$$\boxed{\text{Αν } \gamma > 0 \text{ τότε ισχύει } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma} \tag{3.34}$$

Οι δύο αυτές ιδιότητες μας επιτρέπουν να κάνουμε ένα είδος πράξεων με ανισότητες.

3.2.1 Πρόσθεση Ανισοτήτων

Μπορούμε να προσθέτουμε κατά μέλη ανισότητες και να είμαστε βέβαιοι ότι η ανισότητα που θα προκύψει θα είναι αληθής: Πράγματι υποθέτουμε ότι

$$\alpha < \beta \ \ (*)$$

και

$$\gamma < \delta \ \ (**)$$

Τότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη της $(*)$ τον αριθμό γ έχουμε

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma$$

ενώ προσθέτοντας και στα δύο μέλη της $(**)$ τον αριθμό β έχουμε:

$$\gamma + \beta < \delta + \beta$$

Τώρα αφού $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ και $\beta + \gamma < \delta + \beta$ η μεταβατική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι $\alpha + \gamma < \beta + \delta$. Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta} \tag{3.35}$$

Άσκηση 197. Να αποδείξετε ότι αν $p < q + 1$, $r < s - 1$ τότε $p + r < q + s$.

Άσκηση 198. Να αποδείξετε ότι αν $x > y$ τότε $x + 7 > y + 3$.

Άσκηση 199. Να αποδείξετε ότι αν $x > y$ και $z \neq 0$ τότε $x + z^2 > y$.

Η (3.35) μπορεί να γενικευθεί και για περισσότερες από δύο ανισότητες:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_1 < \beta_1\\ \alpha_2 < \beta_2\\ \dots\\ \alpha_\nu < \beta_\nu\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu < \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu} \tag{3.36}$$

Άσκηση 200. Να γράψετε μία απόδειξη για την (3.36).

Επίσης μπορούμε να προσθέτουμε κατά μελή και ανισότητες που μπορεί να μην είναι *γνήσιες* ανισότητες δηλαδή αντί της σχέσης «>» να ισχύει η «≥» (λέγονται και *ταυτοανισότητες* ή *ανισοταυτότητες*). Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η ανισότητα $\alpha^2 \geq 0$. Ισχύει για κάθε α αλλά για $\alpha \neq 0$ ισχύει σαν γνήσια ανισότητα $\alpha^2 > 0$ ενώ για $\alpha = 0$ ισχύει σαν ισότητα.

Πράγματι υποθέτουμε αυτή τη φορά ότι

$$\alpha \leq \beta \ (\#)$$

και

$$\gamma \leq \delta \ (\#\#)$$

Η $(\#)$ σημαίνει ότι $\alpha \leq \beta$ ή ότι $\alpha = \beta$. Τότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη τον γ έχουμε θα έχουμε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ ή $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι:

$$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$$

Όμοια ενώ προσθέτοντας και στα δύο μέλη της $(\#\#)$ τον αριθμό β έχουμε:

$$\gamma + \beta \leq \delta + \beta$$

Άρα $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ και $\beta + \gamma \leq \delta + \beta$ και επομένως από την μεταβατική ιδιότητα έχουμε ότι $\alpha + \gamma \leq \beta + \delta$. Δηλαδή αποδείξαμε ότι:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha \leq \beta\\ \gamma \leq \delta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \delta} \tag{3.37}$$

Σημειώστε πως αν έστω και μία από τις ανισότητες (i), (ii), είναι γνήσια τότε η μεταβατική ιδιότητα μας οδηγεί σε γνήσια ανισότητα με άλλα λόγια αν μία από τις υποθέσεις της 3.37 είναι γνήσια ανισότητα τότε και το συμπέρασμα είναι γνήσια ανισότητα. Αντίστοιχα με την (3.36) έχουμε την

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_1 \leq \beta_1\\ \alpha_2 \leq \beta_2\\ \dots\\ \alpha_\nu \leq \beta_\nu\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu \leq \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu} \tag{3.38}$$

όπου και εδώ ισχύει η ίδια παρατήρηση για την περίπτωση που κάποια από τις προστιθέμενες ανισότητες είναι γνήσια: Θα είναι και η ανισότητα του συμπεράσματος γνήσια.

Άσκηση 201. Να αποδείξετε ότι αν $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{3}$, $z < \frac{1}{6}$ τότε $x + y + z < 1$.

Άσκηση 202. Να αποδείξετε ότι αν τα x, y, z ανήκουν στο (α, β) τότε το $\frac{x+y+z}{3}$ επίσης ανήκει στο (α, β).

Άσκηση 203. Να αποδείξετε ότι αν $x \in (\alpha, \beta)$ και $y \in (\alpha, \beta)$ τότε $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y \in (\alpha, \beta)$.

Άσκηση 204. Δοκιμάστε να αποδείξετε την ακόλουθη γενίκευση της προηγούμενης άσκησης:

Αν $x \in (\alpha, \beta)$, $y \in (\alpha, \beta)$ και $k \in (0, 1)$ τότε $kx + (1 - k)\, y \in (\alpha, \beta)$.

3.2.2 Αθροίσματα μη αρνητικών αριθμών

Αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ είναι μη αρνητικοί δηλαδή ισχύουν οι $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, ..., $\alpha_\nu \geq 0$ τότε προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες έχουμε ότι και

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu \geq 0$$

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει και από την (3.38) αν πάρουμε τα $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ να είναι όλα μηδέν.

Μπορούμε να αποδείξουμε το προηγούμενο συμπέρασμα αν στηριχθούμε στην εξής παρατήρηση: Αν έχουμε ένα οποιοδήποτε αριθμό και του προσθέσουμε ένα μη αρνητικό αριθμό θα πάρουμε ένα αριθμό που θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αρχικό. Σε συμβολική γλώσσα: Αν είναι $m \geq 0$ και ο t είναι οποιοσδήποτε αριθμός τότε $t \leq t + m$. Εφαρμόζουμε αυτή την ιδιότητα διαδοχικά:

1. Είναι $0 \leq \alpha_1$.
2. Προσθέτουμε στον α_1 τον μη αρνητικό αριθμό α_2. Θα είναι $\alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2$
3. Προσθέτουμε στον $\alpha_1 + \alpha_2$ τον μη αρνητικό αριθμό α_3. Θα είναι $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$
4. Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο έως ότου εξαντληθούν οι αριθμοί μας.

Από την μεταβατική ιδιότητα έχουμε ότι:

$$0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq ... \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_\nu \tag{3.39}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε πάλι ότι $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu \geq 0$. Φυσικά θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από ένα άλλο αριθμό αντί του α_1 λ.χ. τον α_2.

Τι θα συνέβαινε αν στην (3.39) είχαμε $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_\nu = 0$; Θα ίσχυε $0 \le \alpha_1 \le 0$. Που σημαίνει ότι $\alpha_1 = 0$. Παρόμοια βρίσκουμε ότι $\alpha_2 = 0$ κ.ο.κ. Τελικά όλα οι αριθμοί είναι μηδέν. Έτσι έχουμε:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 \ge 0,\ \alpha_2 \ge 0,\ ..., \alpha_\nu \ge 0 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_\nu \ge_{(*)} 0 \\ \text{και η (*) ισχύει σαν ισότητα μόνο αν } \alpha_1 = \alpha_2 = \ ..., = \alpha_\nu = 0 \end{array}} \tag{3.40}$$

Παράδειγμα 17. Να αποδειχθεί ότι αν

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_\nu^2 \ge 0$$

Απόδειξη: Πράγματι αφού κάθε τετράγωνο πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός τότε το άθροισμα οσωνδήποτε τετραγώνων πραγματικών αριθμών είναι μη αρνητικός αριθμός.

Παράδειγμα 18. Να αποδειχθεί ότι αν $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_\nu^2 = 0$ τότε όλοι οι αριθμοί α_1, α_2, ..., α_ν είναι μηδέν.

Απόδειξη: Προκύπτει από την (3.40. Αφού ένα άθροισμα μη αρνητικών αριθμών (δηλαδή των τετραγώνων) είναι μηδέν όλα τα τετράγωνα είναι μηδέν και επομένως και οι αριθμοί είναι μηδέν.

Άσκηση 205. Να βρείτε τους αριθμούς x, y αν είναι γνωστό ότι $(x-4)^2 + (2-y)^2 = 0$.

Άσκηση 206. Για τους αριθμούς x, y είναι γνωστό ότι $x^2 - 8x + y^2 - 4y + 20 = 0$. Να βρείτε το $x + y$

Άσκηση 207. Στις εξετάσεις Μαθηματικών Τεχνολογικής Κατεύθυνση Γ' Λυκείου του 2000 οι μαθητές έπρεπε να βρουν δύο αριθμούς α, β από την ισότητα $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1 = 0$. Βρείτε τους.

Άσκηση 208. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ τότε θα είναι $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$.

Παράδειγμα 19. Να αποδειχθεί ότι

1. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \ge 0$
2. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \ge 0$

Απόδειξη: *Για την πρώτη ανισότητα:* Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ είναι μη αρνητικός. Έχουμε βέβαια δύο προσθετέους (τους α^2 και β^2)που είναι τετράγωνα και επομένως το άθροισμα τους είναι μη αρνητικός αλλά υπάρχει και ο προσθετέος $\alpha\beta$ του οποίου δεν ξέρουμε το πρόσημο αφού δεν ξέρουμε τα $\alpha\beta$. Μπορούμε όμως να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- *Η εύκολη περίπτωση* είναι όταν έχουμε $\alpha\beta \ge 0$. Τότε ο αριθμός μας είναι άθροισμα τριών μη αρνητικών προσθετέων και επομένως μη αρνητικός.

- *Η κάπως πιο δύσκολη περίπτωση* είναι όταν $\alpha\beta < 0$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε πρόσημα των μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 =$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \underbrace{\alpha\beta - \alpha\beta}_{\text{προσθαφαιρούμε}} = \left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\right) + \left(-\alpha\beta\right) =$$

$$\underbrace{\left(\alpha - \beta\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(-\alpha\beta\right)}_{+}$$

  οπότε πάλι πετυχαίνουμε να γράψουμε τον αριθμό μας σαν άθροισμα μη αρνητικών προσθετέων.

Αφού έχουμε εξαντλήσει τις περιπτώσεις η πρώτη ανισότητα έχει αποδειχθεί. Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε την πρώτη ανισότητα είναι να γράψουμε:

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 =$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2}_{\substack{\text{πολλαπλα-}\\ \text{σιάζουμε και}\\ \text{διαιρούμε με 2}}} \left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\alpha + \beta\right)^2 + \alpha^2 + \beta^2\right)$$

Η τελευταία παράσταση είναι ένα άθροισμα μη αρνητικών αριθμών το $\left(\alpha + \beta\right)^2 + \alpha^2 + \beta^2$ πολλαπλασιασμένο με τον θετικό αριθμό $\frac{1}{2}$. Επομένως είναι μη αρνητική. *Για την δεύτερη ανισότητα:* Μπορούμε να έχουμε δύο αποδείξεις παρόμοιες με της πρώτης. Επίσης μπορούμε να έχουμε μία τρίτη απόδειξη που στηρίζεται στην πρώτη ανισότητα.

Άσκηση 209. Να αποδείξετε την δεύτερη ανισότητα του παραδείγματος (19)

3.2.3 Πολλαπλασιασμός ανισοτήτων

Είδαμε ότι μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη μίας ανισότητας με ένα θετικό αριθμό και να διατηρείται η φορά της ανισότητας. Θα αξιοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα για να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες. Μόνο που σε αντίθεση με την πρόσθεση ανισοτήτων, όπου μπορούσαμε να προσθέτουμε ελεύθερα ανισότητες τώρα έχουμε ένα περιορισμό: Τα μέλη των ανισοτήτων πρέπει να είναι θετικοί αριθμοί. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε τις ανισότητες:

$$\alpha < \beta \ \ (*)$$

και

$$\gamma < \delta \ \ (**)$$

όπου οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι όλοι τους θετικοί αριθμοί. Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της $(*)$ τον θετικό αριθμό γ έχουμε

$$\alpha\gamma < \beta\gamma$$

πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της $(**)$ τον θετικό αριθμό β έχουμε:

$$\gamma\beta < \delta\beta$$

Τώρα αφού $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\beta\gamma < \delta\beta$ με την βοήθεια της μεταβατικής ιδιότητας συμπεραίνουμε ότι $\alpha\gamma < \beta\delta$. Έτσι αποδείξαμε ότι:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha < \beta \\ 0 < \gamma < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha\gamma < \beta\delta} \tag{3.41}$$

Άσκηση 210. Να αποδείξετε ότι αν για τους θετικούς αριθμούς x, y ισχύει $x < \frac{26}{11}$ και $y < \frac{11}{13}$ τότε $xy < 2$.

Άσκηση 211. Να αποδείξετε ότι το *γινόμενο* δύο οποιωνδήποτε αριθμών του διαστήματος $(0, 1)$ είναι ένας αριθμός που επίσης ανήκει στο $(0, 1)$.
Μπορούμε να ισχυρισθούμε το ίδιο για το *άθροισμα*;

Άσκηση 212. Για τους αριθμούς α, β ισχύει $0 < \alpha < 4 - \sqrt{3}$ και $0 < \beta < 4 + \sqrt{3}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta < 13$.

Ασφαλώς η ιδιότητα (3.41) μπορεί να γενικευθεί και για περισσότερους από δύο αριθμούς:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha_1 < \beta_1 \\ 0 < \alpha_2 < \beta_2 \\ \ldots \\ 0 < \alpha_\nu < \beta_\nu \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_\nu < \beta_1\beta_2 \ldots \beta_\nu} \tag{3.42}$$

Άσκηση 213. Για τους θετικούς αριθμούς $x, y, x, \alpha, \beta, \gamma$ ισχύει $x < \frac{\alpha}{\beta}$, $y < \frac{\beta}{\gamma}$, $z < \frac{\gamma}{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι $xyz < 1$.

Άσκηση 214. Τρεις θετικοί αριθμοί είναι διάφοροι του 1 αλλά το γινόμενο τους είναι 1. Αφού βρείτε μερικές τριάδες τέτοιων αριθμών να αποδείξετε γενικά ότι ένας τουλάχιστον θα είναι μεγαλύτερος του 1 και ένας τουλάχιστον θα είναι μικρότερος του 1.

Αν τώρα όλοι οι αριθμοί α_1, α_2, ...,α_ν είναι μεταξύ τους όσοι ας πούμε ίσοι $\alpha > 0$ και οι β_1, β_2, ...,β_ν ίσοι με $\beta > 0$ τότε η (3.42) έχει ως συνέπεια την:

$$\boxed{\text{Αν } 0 < \alpha < \beta \text{ και } \nu \text{ είναι θετικός ακέραιος τότε } 0 < \alpha^\nu < \beta^\nu} \qquad (3.43)$$

Άσκηση 215. Υπάρχει κάποιος λόγος που στην (3.43) δεν «επιτρέπουμε» στον ν να είναι αρνητικός ακέραιος ή μηδέν;

Άσκηση 216. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2011} < \frac{5^{2011}}{2^{2011}}$.

Άσκηση 217. Να αποδείξετε ότι αν είναι $0 < p < q$ τότε $1+p+p^2+p^3 < 1+q+q^2+q^3$.

Η ιδιότητα (3.43) προϋποθέτει ότι οι αριθμοί που μετέχουν στην ανισότητα είναι θετικοί. Ωστόσο στην περίπτωση όπου ο εκθέτης είναι *περιττός* φυσικός η ιδιότητα ισχύει πάλι. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha < \beta$ και ότι ο ν είναι περιττός. Θα δείξουμε ότι $\alpha^\nu < \beta^\nu$. Ας καταγράψουμε τις περιπτώσεις που έχουμε να αντιμετωπίσουμε. Ξέρουμε ότι στον άξονα των πραγματικών το α είναι αριστερά του β:

Ας δούμε τώρα τις δυνατές θέσεις των α, β σε σχέση με το μηδέν.

1. $\boxed{0 < \alpha < \beta}$

Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα μας ισχύει από την (3.43).

2. $\boxed{\alpha = 0 < \beta}$

Στην περίπτωση αυτή ο α^ν είναι μηδέν και ο α^ν είναι θετικός.

3. $\boxed{\alpha < 0 < \beta}$

Στην περίπτωση αυτή ο α^ν είναι αρνητικός (θυμηθείτε ότι ο ν είναι περιττός) και ο β^ν είναι θετικός άρα πάλι το συμπέρασμα ισχύει.

4. $\boxed{\alpha < \beta = 0}$

Εδώ το συμπέρασμα ισχύει διότι ο α^ν είναι αρνητικός ενώ ο β^ν είναι μηδέν.

5. $\boxed{\alpha < \beta < 0}$

Εδώ και οι δύο αριθμοί είναι αρνητικοί. Μπορούσαμε να εμφανίσουμε μία ανισότητα και με τα δύο μέλη θετικά αν πολλαπλασιάσουμε επί -1. Αφού είναι $\alpha < \beta < 0$ θα είναι και $0 < -\beta < -\alpha$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την (3.43) και να έχουμε $(-\beta)^\nu < (-\alpha)^\nu$. Μένει ακόμη λίγη δουλειά: Έχουμε τότε ότι $(-1)^\nu \beta^\nu < (-1)\,\alpha^\nu$ δηλαδή (ξαναθυμηθείτε ότι ο ν είναι περιττός) $-\beta^\nu < -\alpha^\nu$. Πολλαπλασιάζοντας πάλι επί -1 έχουμε ότι $\alpha^\nu < \beta^\nu$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\boxed{\text{Αν } \alpha < \beta \text{ και } \nu \text{ είναι θετικός περιττός τότε } \ 0 < \alpha^\nu < \beta^\nu} \tag{3.44}$$

Άσκηση 218. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\left(1-\sqrt{5}\right)^3$, $\left(2-\sqrt{5}\right)^3$.

Άσκηση 219. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$x^3 + x^5 + x^7 < x + 1 + (x+1)^3 + (x+1)^7$$

Όπως και με την πρόσθεση έτσι και με τον πολλαπλασιασμό μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη ανισότητες θετικών αριθμών που συνδέονται με το $\le$. Το ανάλογο της (3.41) είναι

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha \le \beta \\ 0 < \gamma \le \delta \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha\gamma \le \beta\delta} \tag{3.45}$$

Αν μία τουλάχιστον από τις ανισότητες είναι γνήσια τότε η ανισότητα που προκύπτει είναι γνήσια. Ανάλογα προσαρμόζονται και οι (3.42), (3.43), (3.44).

Άσκηση 220. Να αποδείξετε ότι αν $x \in [2,5]$ και $y \in [3,4]$ τότε $xy \in [6,20]$.

Άσκηση 221. Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει διαστάσεις $20m \times 15m$. Κάποιος μετράει τις διαστάσεις με μετροταινία και το σφάλμα στην μέτρηση του κυμαίνεται στο $\pm 5cm$. Μεταξύ ποιων ορίων μπορεί να βρίσκεται το εμβαδόν που θα μετρήσει;

3.2.4 Μία χρήσιμη ισοδυναμία

Ας υποθέσουμε ότι $0 < \alpha < \beta$. Τότε ξέρουμε πως για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\alpha^\nu < \beta^\nu$. Αν τώρα ξέρουμε απλώς ότι οι α, β είναι θετικοί αριθμοί και -πως για τον θετικό ακέραιο ν ισχύει $\alpha^\nu < \beta^\nu$ μπορούμε να συγκρίνουμε τους α, β; Αν βγαίνει κάποιο συμπέρασμα λογικά θα πρέπει να είναι πως $\alpha < \beta$ όμως αυτό είναι κάτι που θέλει απόδειξη. Ας γράψουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις γράφοντας αυτή που θέλουμε να αποδείξουμε τελευταία. Οι δυνατές περιπτώσεις είναι

- $\alpha = \beta$
- $\alpha > \beta$
- $\alpha < \beta$

Στην περίπτωση όπου $\alpha = \beta$ τότε θα έχουμε και $\alpha^\nu = \beta^\nu$ που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι $\alpha^\nu < \beta^\nu$. Άρα η περίπτωση αυτή πρέπει να απορριφθεί.
Στην περίπτωση όπου $\alpha > \beta$ αφού οι α, β είναι θετικοί αριθμοί και ο ν είναι θετικό ακέραιος θα έχουμε ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ πράγμα που και αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση μας. Άρα και η δεύτερη περίπτωση πρέπει να απορριφθεί.

Απομένει μόνο η τρίτη περίπτωση η οποία ελλείψει «αντιπάλων» ισχύει. Επομένως αποδείξαμε ότι η (3.43) μπορεί να ενισχυθεί και να γίνει ισοδυναμία

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } \alpha,\beta \text{ και ο } \nu \text{ είναι θετικός ακέραιος τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu\end{array}} \quad (3.46)$$

Άσκηση 222. Η απόδειξη που προηγήθηκε της (3.46) είναι συγκαλυμμένη απαγωγή στο άτοπο. Να διατυπώσετε πάλι την απόδειξη ώστε η εφαρμογή της μεθόδου της απαγωγής στο άτοπο να γίνει φανερή.

Άσκηση 223. Να μιμηθείτε την απόδειξη της (3.46) για να αποδείξετε την επόμενη ισοσδυναμια (δεν αναφέρεται κατ' ανάγκην σε θετικούς α, β):

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν ο } \nu \text{ είναι θετικός περιττός τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu\end{array}} \quad (3.47)$$

Άσκηση 224. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος θετικών αριθμών α,β ισχύει

$$\alpha<\beta \Rightarrow 1+\alpha+\alpha^2<1+\beta+\beta^2$$

$$1+\alpha+\alpha^2<1+\beta+\beta^2 \Rightarrow \alpha<\beta$$

Άσκηση 225. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν ο } \nu \text{ είναι θετικός ακέραιος τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu\end{array}} \quad (3.48)$$

Άσκηση 226. Να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν ο } \nu \text{ είναι θετικός περιττός τότε ισχύει η ισοδυναμία:}\\ \alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu\end{array}} \quad (3.49)$$

3.2.5 Συγκρίσεις

Αν η σύγκριση δύο θετικών αριθμών μας φαίνεται δύσκολη ενδέχεται η σύγκριση κάποιων δυνάμεων τους να είναι ευκολότερη και από την σύγκριση των δυνάμεων να μπορέσουμε να πετύχουμε την αρχική σύγκριση. Ας δούμε πως μπορεί να γίνει αυτό με μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 20. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\sqrt{5}+\sqrt{8}$ και $\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

Λύση. Δεν ξέρουμε ποιος από τους δύο αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος ή αν είναι ίσοι. Ξεκινάμε με μία «υπόθεση εργασίας» λ.χ ότι είναι $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$ και συνεχίζουμε με ισοδύναμες προτάσεις. Είναι

$$\underbrace{\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}}_{p_1} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)^2<\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^2}_{p_2}$$

Αν η p_2 είναι αληθής θα είναι και η p_1. Αν είναι ψευδής και ισχύει η ανισότητα με αντίστροφη φορά τότε και η p_1 είναι ψευδής και ισχύει η ανισότητα με την αντίστροφη φορά. Αν τέλος η p_2 είναι ψευδής και ισχύει σαν ισότητα τότε και η p_1 είναι ψευδής και ισχύει σαν ισότητα. Αναπτύσσοντας βρίσκουμε:

$$\underbrace{\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)^2<\left(\sqrt{6}+\sqrt{7}\right)^2}_{p_2} \Leftrightarrow \underbrace{13+4\sqrt{5}\sqrt{2}<13+2\sqrt{6}\sqrt{7}}_{p_3}$$

Οι ίδιες παρατηρήσεις που κάναμε για τις p_1 και p_2 ισχύουν για τις p_2 και p_3. Μετά τις διαγραφές του 13 έχουμε:

$$\underbrace{13+4\sqrt{5}\sqrt{2}<13+2\sqrt{6}\sqrt{7}}_{p_3} \Leftrightarrow \underbrace{4\sqrt{5}\sqrt{2}<2\sqrt{6}\sqrt{7}}_{p_4}$$

απολοποιώντας το 2 (δηλαδή πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2}$ έχουμε

$$\underbrace{4\sqrt{5}\sqrt{2}<2\sqrt{6}\sqrt{7}}_{p_4} \Leftrightarrow \underbrace{2\sqrt{5}\sqrt{2}<\sqrt{6}\sqrt{7}}_{p_5}$$

Υψώνοντας πάλι στο τετράγωνο βρίσκουμε:

$$\underbrace{2\sqrt{5}\sqrt{2}<\sqrt{6}\sqrt{7}}_{p_5} \Leftrightarrow \underbrace{\left(2\sqrt{5}\sqrt{2}\right)^2<\left(\sqrt{6}\sqrt{7}\right)^2}_{p_6}$$

και κάνοντας τις πράξεις έχουμε:

$$\underbrace{\left(2\sqrt{5}\sqrt{2}\right)^2<\left(\sqrt{6}\sqrt{7}\right)^2}_{p_6} \Leftrightarrow \underbrace{40<42}_{p_7}$$

Βλέπουμε ότι η p_7 είναι αληθής επομένως η υπόδεση μας p_1 είναι αληθής. Συμπεραίνουμε ότι είναι $\sqrt{5}+\sqrt{8}<\sqrt{6}+\sqrt{7}$.

Παράδειγμα 21. Στις εξετάσεις Μαθηματικών Γενικής Παιδείας Γ' Λυκείου το 2003 οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν τους αριθμούς $\frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5}$ και $\frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8}$. Βρείτε ποιο είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης.

Λύση. Εργαζόμενοι όπως πριν έχουμε $\frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5}<\frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8}\right)^2 \Leftrightarrow$ $\frac{\frac{23}{3}}{5^2}<\frac{\frac{41}{3}}{8^2} \Leftrightarrow \frac{23}{3}\cdot 8^2<\frac{41}{3}5^2 \Leftrightarrow 23\cdot 8^2<41\cdot 5^2 \Leftrightarrow 1472<1025$. Βλέπουμε ότι η τελευταία σχέση είναι ψευδής ανισότητα. Ισχύει δε η ανισότητα $1472>1025$. Επομένως και η αρχική ανισότητα είναι ψευδής και ισχύει η ανισότητα με την αντίστροφη φορά δηλαδή: $\frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5}>\frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8}$

Παράδειγμα 22. Στις εξετάσεις Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου το 2010 σε κάποια λύση ενός θέματος οι μαθητές έπρεπε να αποδείξουν ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x ισχύει $x + \sqrt{x^2+9} > 0$. Να δοθεί μία απόδειξη.

Λύση. Είναι $x + \sqrt{x^2+9} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} > -x$. Η ιδέα είναι να υψώσουμε στο τετράγωνο αλλά η ιδέα αυτή δεν πορεί να εφαρμοσθεί γιατί δεν ξέρουμε αν και τα δύο μέλη είναι θετικά: Ξέρουμε μόνο για το πρώτο. Για το x υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

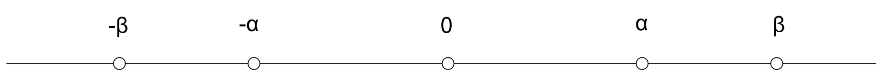
- $x = 0$. Τότε η $\sqrt{x^2+9} > -x$ γίνεται $\sqrt{0^2+9} > 0$ που ισχύει.
- $x > 0$. Τότε το β' μέλος της $\sqrt{x^2+9} > -x$ είναι αρνητικό και το α' μέλος είναι θετικό οπότε η ανισότητα αληθεύει.
- $x < 0$. Τότε και τα δύο μέλη της $\sqrt{x^2+9} > -x$ είναι θετικά και έτσι έχουμε $\sqrt{x^2+9} > -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}^2 > (-x)^2 \Leftrightarrow x^2+9 > x^2 \Leftrightarrow 9 > 0$ Η τελευταία ανισότητα είναι αληθής άρα και η πρώτη.

3.2.6 Η «αντίθετη» και η «αντίστροφη» ανισότητας

Αν έχουμε δύο άνισους αριθμούς $\alpha < \beta$ τότε πολλαπλασιάζοντας επί -1 θα έχουμε $-\alpha > -\beta$. Φυσικά από την ανισότητα $-\alpha > -\beta$ μπορούμε να «επανέλθουμε» στην $\alpha < \beta$ πολλαπλασιάζοντας επί -1. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow -\alpha > -\beta} \tag{3.50}$$

Η 3.50 επιδέχεται και μία απλή γεωμετρική εξήγηση: Παίρνοντας τους αντίθετους αριθμών παίρνουμε στην ουσία τα συμμετρικά τους ως προς το 0 και επομένως η «σειρά» αντιστρέφεται:



Ο αντίθετος σχετίζεται με την πρόσθεση. Το αντίστοιχο του αντιθέτου για τον πολλαπλασιασμό είναι το αντίστροφο. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Αν για δύο μη μηδενικούς αριθμούς γνωρίζουμε ότι $\alpha < \beta$ τότε τι μπορούμε να πούμε για την σύγκριση των $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$; Ας πάρουμε μερικά ζεύγη αριθμών:

- $2 < 3$. Εδώ για τος αντίστροφους ισχύει $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
- $-2 < 3$. Εδώ για τους αντίστροφους ισχύει $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$.
- $-3 < -2$. Εδώ ισχύει $\frac{1}{-3} > \frac{1}{-2}$

Στην δεύτερη περίπτωση όπου οι αριθμοί είναι ετερόσημοι το αποτέλεσμα είναι το περιμένουμε: Αφού ο ένας αριθμός είναι θετικός και ο άλλος είναι αρνητικός και ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι ομόσημος με τον αρχικό θα ισχύει ότι ο αντίστροφος του αρνητικού θα είναι μικρότερος από τον αντίστροφο του θετικού. Για την περίπτωση όπου οι αριθμοί είναι ομόσημοι φαίνεται οι αντίστροφοι να ικανοποιούν ανισότητα με αντίστροφη φορά αλλά φυσικά αυτό θέλει απόδειξη. Ας διατυπώσουμε αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε:

- Αν α, β ομόσημοι με $\alpha < \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

Ας δούμε μία απόδειξη που ξεκινάει από το αποδεικτέο δηλαδή αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε: $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} > 0$. Η τελευταία σχέση αληθεύει αφού $\beta - \alpha > 0, \alpha\beta > 0$ επομένως αληθεύει και η αρχική.
Μια άλλη, όχι πολύ διαφορετική απόδειξη ξεκινάει από την υπόθεση μας $\alpha < \beta$. Αφού $\alpha\beta > 0$ θα ισχύει και $\frac{\alpha}{\alpha\beta} < \frac{\beta}{\alpha\beta}$ οπότε $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}$ και επομένως $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.
Άρα ισχύει:

$$\boxed{\text{Αν } \alpha,\ \beta \text{ ομόσημοι τότε ισχύει } \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}} \tag{3.51}$$

Άσκηση 227. Στην (3.51) αποδείξαμε μόνο την κατεύθυνση $\Rightarrow$. Η κατεύθυνση $\Leftarrow$ γιατί ισχύε;

Άσκηση 228. Να αποδείξετε ότι αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha < \beta$ τότε ισχύει $\frac{1}{\alpha} > \frac{2}{\alpha+\beta} > \frac{1}{\beta}$.

Άσκηση 229. Θεωρούμε τα ανοικτά διαστήματα $A = (-\infty, -1)$, $B = (-1, 0)$, $C = (0, 1)$ και $D = (1, +\infty)$. Αν ο αριθμός x ανήκει (4 περιπτώσεις) στα διαστήματα A, B, C, D σε ποιο διάστημα ανήκει ο αριθμός $\frac{1}{x}$;

Άσκηση 230. Υποθέτουμε ότι για τους θετικούς αριθμούς p, q, r ισχύει $p < \frac{q}{r} < \frac{1}{p}$.

1. Να αποδείξετε ότι $p < 1$.
2. Να αποδείξετε ότι $p < \frac{r}{q} < \frac{1}{p}$.

3.2.7 Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πως συνδέεται η τετραγωνική ρίζα με τις πράξεις. Ας εξετάσουμε την πράξη της πρόσθεσης. Ας δούμε τον ακόλουθο πίνακα

α	β	$\alpha+\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
4	9	13	2	3	$\sqrt{13}$	5
16	9	25	4	3	5	7
0	16	16	0	4	4	4
144	25	169	12	5	13	17

Βλέπουμε ότι οι αριθμοί $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha + \beta}$ είναι ίσοι μόνο σε μία ειδική περίπτωση εκείνη όπου ο ένας από τους δύο αριθμούς α, β είναι μηδέν. Επομένως **δεν ισχύει** κανόνας που να λέει ότι $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Μάλιστα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η μοναδική περίπτωση όπου ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ είναι όταν κάποιος από τους α, β είναι μηδέν:

Άσκηση 231. Να αποδείξετε ότι για τους μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ή} \quad \beta = 0$$

Άσκηση 232. Για ποια ζεύγη αριθμών α, β ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha-\beta} = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$;

Θα εξετάσουμε τώρα την πράξη του πολλαπλασιασμού. Ας δούμε τον πίνακα:

α	β	$\alpha\beta$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$
4	9	36	2	3	6	6
16	9	144	4	3	12	12
0	16	0	0	4	0	0
4	25	100	2	5	10	10

Βλέπουμε ότι υπάρχει μία συμφωνία στους αριθμούς των δύο τελευταίων στηλών πράγμα που αποτελεί ένδειξη ότι ενδέχεται να ισχύει η ισότητα $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$. Μπορούμε να ελέγξουμε την ισχύ της ισότητας αυτής με τον τρόπο που μάθαμε στην 3.2.5:

$$\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2\left(\sqrt{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\alpha\beta}^2 = \sqrt{\alpha}^2\sqrt{\beta}^2 \Leftrightarrow$$
$$\alpha\beta = \alpha\beta$$

Αφού η τελευταία ισότητα αληθεύει αληθεύει και η ισοδύναμη της αρχική ισότητα. Αποδείξαμε λοιπόν ότι για κάθε ζεύγος μη αρνητικών αριθμών α, β ισχύει:

$$\boxed{\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \tag{3.52}$$

Η ιδιότητα (3.52) μπορεί να επεκταθεί και για γινόμενα περισσοτέρων των δύο αριθμών. Λ.χ.:

$$\sqrt{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\alpha\left(\beta\gamma\right)} \underset{\text{από (3.52)}}{=} \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta\gamma} \underset{\text{από (3.52)}}{=} \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\sqrt{\gamma}$$

Ας δούμε τώρα την συμπεριφορά των τετραγωνικών ριζών στα πηλίκα:

α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$
4	9	$\frac{4}{9}$	2	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
16	9	$\frac{16}{9}$	4	3	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	16	0	0	4	0	0
4	25	$\frac{4}{25}$	2	5	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$

Από την σύμπτωση των δύο τελευταίων στηλών φαίνεται ότι ενδέχεται να ισχύει $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. Μπορούμε να επικυρώσουμε την παρατήρηση αυτή με μία απόδειξη παρόμοια με εκείνη της (3.52):

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}^2 = \frac{\sqrt{\alpha}^2}{\sqrt{\beta}^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Από την ισχύ της τελευταίας ισότητας συνάγουμε την ισχύ της αρχικής και επομένως έχουμε αποδείξει ότι για κάθε ζεύγος αριθμών α, β με $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ ισχύει

$$\boxed{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}} \tag{3.53}$$

Η απόδειξη που δώσαμε στην (3.53) μπορεί να συντομευθεί αν στηριχθούμε στην (3.52):

$$\frac{\alpha}{\beta}\beta = \alpha \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\beta} = \sqrt{\alpha} \underset{\text{από (3.52)}}{\Rightarrow}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\alpha}$ ενός μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμός που υψούμενος στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό α. Αυτό σημαίνει φυσικά ότι $\sqrt{\alpha}^2 = \alpha$. Πρόκειται για μία ιδιότητα που την έχουμε χρησιμοποιήσει πολλές φορές. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α^2 δηλαδή να βρούμε τον $\sqrt{\alpha^2}$. Αναζητούμε ένα μη αρνητικό αριθμό που υψούμενος στο τετράγωνο θα μας δώσει τον α^2. Αυτός θα είναι ο α αν είναι

$\alpha \geq 0$. Αν όμως $\alpha < 0$ τότε ο αριθμός που ζητάμε είναι ο θετικός αριθμός $-\alpha$ (που εξ' ίσου καλά δίνει $(-\alpha)^2 = \alpha^2$) και όχι ο α. Συνοψίζοντας έχουμε:

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha}^2 = \alpha \\ \sqrt{\alpha^2} = \begin{cases} \alpha & \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \alpha < 0 \end{cases} \end{array}} \tag{3.54}$$

Άσκηση 233.

Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $\sqrt{2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^8} = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$
2. $\sqrt{3^{11} \cdot 5^{19} \cdot 11^4} = 3^5 \cdot 5^9 \cdot 11^2 \sqrt{15}$
3. $\sqrt{3^5 \cdot 7^3 \cdot 11^7} = 3^2 \cdot 7 \cdot 11^3 \sqrt{231}$

Άσκηση 234.

Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $A = \sqrt{\alpha^2\beta^4}$
2. $B = \sqrt{\alpha^8\beta^2\gamma^4}$
3. $\Gamma = \sqrt{\alpha^2\sqrt{\beta^4\sqrt{\gamma^8}}}$
4. $\Delta = \sqrt{\alpha^5\beta^7\gamma^7}$

Άσκηση 235. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $A = \sqrt{\frac{\alpha^4}{\beta^4\gamma^6}}$
2. $B = \sqrt{\frac{\alpha^3\beta^2}{\gamma^8}}$
3. $\Gamma = \sqrt{\frac{\alpha^6\sqrt{\beta^4}}{\sqrt{\beta^8\gamma^4}}}$
4. $\Delta = \sqrt{\frac{4\alpha^4}{49\beta^2\gamma^{-6}}}$

Άσκηση 236. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Άσκηση 237. Να αποδείξετε ότι αν $t_1 = \alpha + \sqrt{\beta}$, $t_2 = \alpha - \sqrt{\beta}$ τότε :

1. $t_1 + t_2 = 2\alpha$
2. $t_1 t_2 = \alpha^2 - \beta$
3. $t_1^2 + t_9^2 = 2\alpha^2 + 2\beta$
4. $t_1^3 + t_2^3 = 2\alpha^3 + 6\alpha\beta$

Άσκηση 238. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $\sqrt{3^2}$
2. $\sqrt{(-3)^2}$
3. $-\sqrt{3^2}$
4. $-\sqrt{(-3)^2}$
5. $\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}$
6. $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$

3.3 Εξισώσεις

Συχνά σε μία ισότητα αναζητούμε για ποιες τιμές κάποιων «γραμμάτων» (μεταβλητών) αληθεύει. Λέμε τότε ότι έχουμε μία *εξίσωση*. Οι τιμές που την επαληθεύουν λέγονται και *λύσεις* της ή *ρίζες* της. Η διαφορά μιας ταυτότητας από μία εξίσωση είναι δυσδιάκριτη. Μία εξίσωση μπορεί να είναι ταυτότητα αλλά και μία ταυτότητα μπορεί να θεωρηθεί σαν εξίσωση. Ας πάρουμε την ισότητα

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Αυτή είναι αληθής για κάθε τιμή του x και επομένως είναι μία ταυτότητα. Από την άλλη μεριά η ίδια ισότητα μπορεί να θεωρηθεί ως εξίσωση όπου ενδιαφερόμαστε να μάθουμε για ποιες τιμές του x αληθεύει. Τελικά αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x και επομένως κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να θεωρηθεί ως λύση της. Αν «πειράξουμε» λίγο την προηγούμενη σχέση κάνοντας το 2 του δευτέρου μέλους 3 έχουμε την ισότητα

$$(x+1)^2 = x^2 + 3x + 1$$

βλέπουμε εύκολα ότι έχουμε μια ισότητα που είναι αληθής μόνο για $x = 0$. Αν δούμε την σχέση αυτή σαν εξίσωση τότε αυτή έχει λύση το 0. Αν «πειράξουμε» την αρχική σχέση αλλιώς αλλάζοντας το 1 του δευτέρου μέλους σε 2 θα είχαμε την

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 2$$

η οποία προφανώς δεν επαληθεύεται για κανένα x. Λέμε ότι είναι *αδύνατη*.

Μία εξίσωση μπορεί να έχει ένα άγνωστο όπως η $x - 3 = 0$ δύο αγνώστους όπως η $x - y = 4$ ή και περισσότερους αγνώστους. Στην $x - 3 = 0$ λύση είναι ο $x = 3$ και κανένας άλλος. Στην $x - y = 4$ έχουμε πολλές λύσεις: $x = 4$, $y = 0$ την $x = 5$, $y = 1$ κ.ο.κ. Μπορούμε να πούμε ότι οι αριθμοί 4 και 0 είναι λύσεις της εννοώντας ότι αν αντικαταστήσουμε το x με 4 και το y με 0 τότε η εξίσωση επαληθεύεται. Δεν επαληθεύεται όμως αν αντικαταστήσουμε το y με 4 και το x με 0 διότι οδηγούμεθα στην ψευδή σχέση $0 - 4 = 4$. Το τι αντικαθίσταται με τι έχει σημασία. Για τον λόγο αυτό συμφωνούμε να δίνουμε μία σειρά στους αγνώστους της εξίσωσης:

1ος άγνωστος, 2ος άγνωστος, κ.οκ.

και συμφωνούμε οι αριθμοί που αναφέρουμε ότι επαληθεύουν την εξίσωση να αντιστοιχούν στους αγνώστους με αυτή την σειρά. Συμβολικά αυτό το πετυχαίνουμε γράφοντας τους αγνώστους σαν διατεταγμένα ζεύγη τριάδες, κ.ο.κ και τους αριθμούς που επαληθεύουν με παρόμοιο τρόπο.

Έτσι στην εξίσωση $x - y = 4$ έχουμε αγνώστους (x, y) και λύσεις τα διατεταγμένα ζεύγη (x, y), $(5, 1)$, $(11, 7)$, $(-11, -15)$ κ.τ.λ.

Στην εξίσωση $x - 2y + 4z = 7$ φανταζόμαστε τους αγνώστους σαν διατεταγμένες τριάδες $(x,\ y,\ z)$. Οι τριάδα $(1, 1, 8)$ είναι λύση της εξίσωσης γιατί για $x = 1, y = 1, z = 8$ η εξίσωση επαληθεύεται ενώ η τριάδα $(1, 8, 1)$ δεν είναι λύση της γιατί για $x = 1, y = 8, z = 1$ η εξίσωση δεν επαληθεύεται.

Άσκηση 239. Είναι ο αριθμός $x = 3$ λύση της εξίσωσης $3x = 9$; Της $\frac{x}{3} = 9$; Της $\frac{27}{x} = 9$; Της $x^3 = 27$; Της $x^x = 27$;

Άσκηση 240. Η τριάδα $(2, 3, 6)$ είναι λύση της εξίσωσης $x + y + z = 11$. Βρείτε μερικές ακόμη τριάδες που να είναι λύσεις.

3.3.1 Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$

Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ ονομάζεται και *εξίσωση πρώτου βαθμού (ή πρωτοβάθμια) με ένα άγνωστο.* Το γιατί με ένα άγνωστο είναι φανερό. Πρωτοβάθμια διότι το α′ μέλος είναι ένα πολυώνυμο το πολύ έως πρώτου βαθμού. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής είναι γνωστή από το Γυμνάσιο και αν έχουμε συγκεκριμένους αριθμούς είναι πολύ απλή:

Παράδειγμα 23. Να λυθεί η εξίσωση: $2x + 8 = 0$.

Λύση: $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = -8 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow x = -4$

Παράδειγμα 24. Να λυθεί η εξίσωση: $0x + 8 = 0$.

Λύση: $0x + 8 = 0 \Leftrightarrow 0x = -8$. Βλέπουμε πως όποιο αριθμό και αν αντικαταστήσουμε στην θέση του x θα πάρουμε $0 = -8$. Επομένως η εξίσωση δεν έχει λύση και είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 25. Να λυθεί η εξίσωση: $4(x + 5) = 2$.

Λύση: Εδώ χρειάζονται μερικοί επιπλέον χειρισμοί: $4(x+5) = 2 \Leftrightarrow 4x + 20 = 2 \Leftrightarrow 4x = 2 - 20 \Leftrightarrow 4x = -18 \Leftrightarrow x = \frac{-18}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$

Παράδειγμα 26. Να λυθεί η εξίσωση: $4(x + 5) = 4x + 20$.

Λύση: $4(x + 5) = 4x+20 \Leftrightarrow 4x+20 = 4x+20 \Leftrightarrow 4x-4x = 20-20 \Leftrightarrow 0x = 0$. Βλέπουμε ότι η τελευταία εξίσωση $0x = 0$ (επομένως και η αρχική) έχει λύση οποιονδήποτε αριθμό αφού κάθε αριθμός στην θέση του x την επαληθεύει. Λέμε ότι η εξίσωση είναι *ταυτότητα*. Συχνά χρησιμοποιείται και ένας παλαιότερος αλλά όχι ακριβής όρος: Η εξίσωση είναι *αόριστη*.

Γενικά η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ γράφεται $\alpha x = -\beta$ και

- Έχει μία μοναδική λύση $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ αν είναι $\alpha \neq 0$.
- Δεν έχει καμμία λύση δηλαδή είναι αδύνατη αν $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$.
- Έχει κάθε αριθμό σαν λύση δηλαδή είναι ταυτότητα αν $\alpha = \beta = 0$.

Άσκηση 241. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις (άγνωστος είναι ο x):

1. $2x + 8 = 0$
2. $3x - 8 = 13$
3. $\alpha x + t = 0$, $(\alpha \neq 0)$
4. $\frac{1}{\alpha}x + t = 0$, $(\alpha \neq 0)$
5. $(\alpha + 1)\, x - \alpha = 0$, $(\alpha \neq -1)$
6. $-\alpha x + 4 = 1$, $(\alpha \neq 0)$

Άσκηση 242. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $6\,(x + 3) - 5x = 26$
2. $6\,(x + 3) - 5x = 26 + x$
3. $4\,(4 + 2x) = 60 - 3x$
4. $60x + 1 = 3\,(3 + 4x)$
5. $(6 - x)\,(x + 4) = 8 - x^2$
6. $(x - 3)^2 - 5\,(10 + x) = x^2 - 8$

Άσκηση 243. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $3x + 100 = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4$
2. $\frac{5x-11}{4} - \frac{x-1}{10} = \frac{11x-1}{12}$
3. $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{27}{(x+2)(x+3)}$
4. $\frac{30}{x+5} - \frac{15}{3} - \frac{5+4x}{x+5} = 0$
5. $3\,(x - 1)\,(x - 2) - (x - 3)\,(x - 4) = (2x + 7)\,(x + 4)$
6. $2x - \frac{2x}{9} = \frac{1}{9}\left(16x - \frac{3}{2}\right)$

3.3.2 Εξισώσεις που ανάγονται στην εξισωση $\alpha x + \beta = 0$

Στην άσκηση 243 συναντήσατε κάποιες εξισώσεις που με λίγες πράξεις κατέληγαν σε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ και επομένως μπορούσαν εύκολα να λυθούν. Ας δούμε μερικές ακόμη περιπτώσεις:

Παράδειγμα 27. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x}{3} + \frac{x+1}{4} = 8$$

Λύση. Ακολουθούμε μια τεχνική που είναι γνωστή από το Γυμνάσιο: Πολλαπλασιάζουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών και έτσι πετυχαίνουμε να γίνει απαλοιφή των παρονομαστών. $\frac{x}{3} + \frac{x+1}{4} = 8 \Leftrightarrow 12\left(\frac{x}{3} + \frac{x+1}{4}\right) = 12 \cdot 8 \Leftrightarrow 4x + 3\,(x + 1) = 96 \Leftrightarrow 4x + 3x + 3 = 96 \Leftrightarrow x = \frac{93}{7}$

Παράδειγμα 28. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2}{x+1} = \frac{3}{4}$$

Λύση. Εδώ έχουμε ένα παρονομαστή που δεν ξέρουμε τι είναι: τον $x + 1$. Επειδή δε μπορεί να είναι ένας παρονομαστής μηδέν αφού διαίρεση δια του μηδενός δε μπορεί να γίνει θα πρέπει να υποθέσουμε από την αρχή ότι $x + 1 \neq 0$ δηλαδή ότι $x \neq -1$. Προχωρούμε την επίλυση με αυτή την προϋπόθεση ή όπως αλλιώς λέμε με αυτό τον *περιορισμό*. Για να έχουν νόημα αυτά που θα γράψουμε στην συνέχεια πρέπει $x \neq -1$. Έχουμε: $\frac{2}{x+1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2 \cdot 4 = 3(x+1) \Leftrightarrow 8 = 3x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ και η λύση που βρήκαμε είναι δεκτή αφού είναι διάφορη του -1.

Παράδειγμα 29. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{6+x}{(x+2)(x+1)} = \frac{5}{x+1}$$

Λύση. Εδώ πρέπει να υποθέσουμε ότι οι παρονομαστές μας $x+2, x+1$ είναι διαφορετικοί από το μηδέν δηλαδή ότι $x \neq 2, -1$. Από κει και πέρα μπορούμε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με και τα δύο μέλη της εξίσωσης μας με το $(x+2)(x+1)$. Έχουμε:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{6+x}{(x+2)(x+1)} = \frac{5}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$(x+2)(x+1)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{6+x}{(x+2)(x+1)}\right) = (x+2)(x+1)\frac{5}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$3(x+1) + 6 + x = 5(x+2) \Leftrightarrow$$

$$3(x+1) + 6 + x = 5(x+2) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -1$$

Η τιμή που βρήκαμε δε μπορεί να γίνει δεκτή δηλαδή πρέπει να απορριφθεί διότι αντιβαίνει στον αρχικό περιορισμό που θέσαμε. Βρήκαμε μία τιμή την οποία δε μπορούμε να δεχθούμε και επομένως η εξίσωση μας είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 30. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(4 - 3(x-2))\left(\sqrt{2}x - 1\right)(x-1) = 0$$

Λύση. Εδώ έχουμε ένα γινόμενο ίσο με το μηδέν και επομένως πρέπει να εξετάσουμε πότε οι παράγοντες του είναι μηδέν:

$$(4 - 3(x-2))\left(\sqrt{2}x - 1\right)(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4 - 3(x-2) = 0 \\ \text{ή} \\ \sqrt{2}x - 1 = 0 \\ \text{ή} \\ x - 1 = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{λύνουμε τις επιμέρους εξισώσεις}}{\Leftrightarrow}$$

$$x = \frac{10}{3} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Μπορούμε να απαλλαγούμε από τον άρρητο παρονομαστή και να παρουσιάσουμε τις λύσεις ως $x = \frac{10}{3}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 1$.

Άσκηση 244. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $(2x-6)(x+3)(5x-6)=0$
2. $(3-2x)(4x-20)(x+2)(4+2x)=0$

Άσκηση 245. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις αφού αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων το πρώτο μέλος τους:

1. $x^2-4=0$
2. $4x^2-9=0$
3. $x^2-2x+x-2=0$

3.3.3 Περι παραμέτρων

Παράδειγμα 31. Ας υποθέσουμε ότι ένα κινητό κινείται σε ένα άξονα με αρχική ταχύτητα $v_0=\frac{3m}{\text{sec}}$ και επιτάχυνση $a=\frac{2m}{\text{sec}^2}$. Μετά από πόσο χρόνο η ταχύτητα του θα γίνει $v=\frac{6m}{\text{sec}}$; Ποια θα είναι η απάντηση αν η επιτάχυνση είναι $a=\frac{1m}{\text{sec}^2}$; Αν είναι $a=\frac{5m}{\text{sec}^2}$;

Λύση. Έχουμε να απαντήσουμε σε τρία ερωτήματα. Μία λογική είναι να απαντήσουμε σε κάθε ερώτημα χωριστά:

Όταν $a=\frac{2m}{\text{sec}^2}$**.** Αντικαθιστούμε στην γνωστή εξίσωση $v=v_0+at$ και έχουμε στο κατάλληλο σύστημα μονάδων $6=3+2t\Leftrightarrow 2t=3\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ δηλαδή $t=\frac{3}{2}\,\text{sec}$

Όταν $a=\frac{1m}{\text{sec}^2}$**.** Αντικαθιστούμε στον ίδιο τύπο και έχουμε $6=3+1\cdot t\Leftrightarrow t=3$ δηλαδή $t=3\,\text{sec}$

Όταν $a=\frac{5m}{\text{sec}^2}$**.** Αντικαθιστούμε στον ίδιο τύπο και έχουμε $6=3+5t\Leftrightarrow 5t=3\Leftrightarrow t=\frac{3}{5}$ δηλαδή $t=\frac{3}{5}\,\text{sec}$

Μία άλλη λογική είναι να προσέξουμε ότι όλα τα δεδομένα μας είναι κάθε φορά σταθερά εκτός από ένα που αλλάζει: Την επιτάχυνση. Ας κρατήσουμε λοιπόν το γράμμα a για να δηλώσει την επιτάχυνση και αντικαθιστούμε στον τύπο όλα τα υπόλοιπα γνωστά. Θα έχουμε:

$$6=3+at\Leftrightarrow at=3\Leftrightarrow t=\frac{3}{a}$$

Εδώ ο απαιτούμενος χρόνος είναι εκπεφρασμένος συναρτήσει του μεταβαλλόμενου δεδομένου a. Μπορούμε τώρα εύκολα να αντικαταστήσουμε στην σχέση $t=\frac{3}{a}$ τις τρεις διαφορετικές τιμές του a και να έχουμε τις τιμές του χρόνου που μας ενδιαφέρουν.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε να λύσουμε την εξίσωση $6=3+at$ με άγνωστο το t και το a να είναι ένα μεταβλητό δεδομένο. Ονομάζεται και *παράμετρος*. Η λέξη παράμετρος εμφανίζεται με διαφορετική σημασία στα Μαθηματικά. Σε γενικές γραμμές έχει την σημασία ενός μεταβλητού δεδομένου που επηρεάζει κάποιες άγνωστες τιμές.

Παράδειγμα 32. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση $\lambda^2 x + 2 = \lambda + 4x$.

Λύση. Και εδώ έχουμε μία παράμετρο το λ που επηρεάζει τις λύσεις. Ακολουθώντας την συνηθισμένη ρουτίνα βρίσκουμε:

$$\lambda^2 x + 2 = \lambda + 4x \Leftrightarrow \lambda^2 x - 4x = \lambda - 2 \Leftrightarrow \left(\lambda^2 - 4\right) x = \lambda - 2$$

Ετοιμαζόμαστε να διαιρέσουμε με το $\lambda^2 - 4$ και πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι είναι διάφορο του μηδενός. Ας δούμε πότε είναι μηδέν. Είναι

$$\lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2$$

Αυτές τις «ενοχλητικές» τιμές ας τις δούμε χωριστά:

- Όταν $\lambda = 2$ η εξίσωση μας γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.
- Όταν $\lambda = -2$ η εξίσωση μας γίνεται $0x = -4$ και είναι αδύνατη.

Απομένουν τώρα οι τιμές που δεν μηδενίζεται ο συντελεστής $\lambda^2 - 4$

- Όταν $\lambda \neq \pm 2$ η εξίσωση λύνεται ως προς x και έχουμε

$$x = \frac{\lambda - 2}{\lambda^2 - 4} \Leftrightarrow x = \frac{\lambda - 2}{(\lambda - 2)(\lambda + 2)} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda + 2}$$

Άσκηση 246. Για τις διάφορες τιμές του λ να λυθεί η εξίσωση:

$$\lambda x + 3 = 5(x + \lambda) - 1$$

Άσκηση 247. Για ποιές τιμές του λ η εξίσωση

$$(\lambda - 1)x - \lambda^2 + 1 = 0$$

με άγνωστο το x έχει περισσότερες από μία λύσεις;

Άσκηση 248. Για ποιές τιμές του t η εξίσωση

$$t(x + 1) - 3t = x - t$$

έχει λύση το $x = 5$;

Άσκηση 249. Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει μήκος α και το χωρίζουμε σε δύο τμήματα που έχουν λόγο λ δηλαδή αν είναι x, y τα μήκη τους τότε $\frac{x}{y} = \lambda$. Να βρεθούν τα μήκη των τμημάτων.

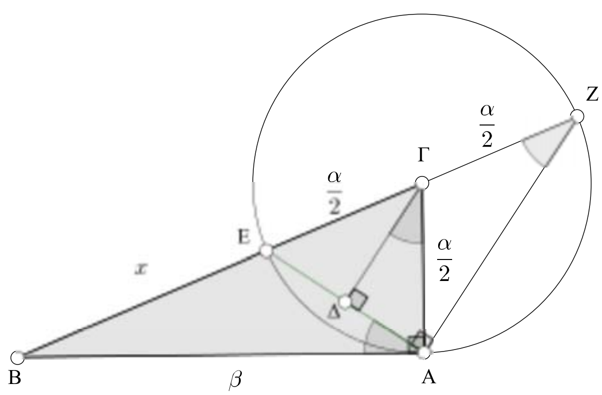
3.3.4 Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Σε αυτή την παράγραφο θα επιλύσουμε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Αν συμβαίνει $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $\beta x + \gamma = 0$ δηλαδή πρόκειται για μία εξίσωση που ήδη μελετήσαμε στην παράγραφο **;;**. Επομένως στα επόμενα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \leq 0$ οπότε στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ το x^2 πραγματικά υπάρχει (στην $0x^2 + \beta x + \gamma = 0$ υπάρχει φαινομενικά). Για τον λόγο αυτό η εξίσωση λέγεται *δευτεροβάθμια*. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής έχει μακρά ιστορία. Κάποια στοιχεία μπορείτε να βρείτε στο σχετικό ιστορικό σημείωμα του βιβλίου σας.

Πριν προχωρήσουμε στην επίλυση της ας δούμε ένα τρόπο που χρησιμοποιούσαν για να λύσουν μία ειδική περίπτωση οι Αρχαίοι Έλληνες. Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$x^2 + \alpha x - \beta^2 = 0$$

Οι Αρχαίοι Έλληνες που είχαν εξαιρετικά ανεπτυγμένη την Γεωμετρία αλλά όχι και αυτό που σήμερα ονομάζουμε Άλγεβρα, ήσαν σε θέση να βρουν μία λύση με γεωμετρική μέθοδο: Αφού οι αριθμοί α, β είναι θετικοί μπορούν να αποτελέσουν μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Ας κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ (A η κορυφή της ορθής γωνίας) με κάθετες πλευρές $\beta, \frac{\alpha}{2}$.



Με κέντρο την κορυφή της γωνίας Γ του τριγώνου γράφουμε κύκλο με ακτίνα την κάθετη πλευρά $\mathrm{A\Gamma} = \frac{\alpha}{2}$. Σημειώνουμε με E, Z τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία $\mathrm{B\Gamma}$. Φέρνουμε και το απόστημα της $\Gamma\Delta$ χορδής AE. Η γωνία $\widehat{\mathrm{ZAE}}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως οι $\Gamma\Delta, \mathrm{ZA}$ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ίδια ευθεία. Έχουμε

$$\widehat{\mathrm{BAE}} = 90^\circ - \widehat{\Gamma\mathrm{A}\Delta} = \widehat{\Delta\Gamma\mathrm{A}} = \widehat{\Gamma\mathrm{ZA}}$$

Τα τρίγωνα AEB, ABZ έχουν κοινή την γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ και επίσης $\widehat{\mathrm{AEB}} = \widehat{\mathrm{BZA}}$. Η αναλογία της ομοιότητας είναι

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BZ}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AZ}}$$

Από την ισότητα των δύο πρώτων κλασμάτων έχουμε

$$\frac{\beta}{x+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}}=\frac{x}{\beta}$$

δηλαδή

$$\beta^2=x\left(x+\alpha\right)$$

Επομένως το x επαληθεύει την εξίσωση $x^2+\alpha x-\beta^2=0$.

Θα δούμε τώρα την γενική λύση της εξίσωσης με μία τεχνική που είναι κατά πολύ μεταγενέστερη και στηρίζεται σε μία ταυτότητα που υπάρχει στην άσκηση 19. Εκεί είδαμε ότι

$$\boxed{\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)}$$

Η ταυτότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα αν ξεκινήσουμε από το δεύτερο μέλος της:

$$\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=$$

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=$$

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=$$

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=$$

$$\alpha x^2+x\beta+\gamma$$

Λόγω της ταυτότητας αυτής και της συνθήκης $\alpha\neq 0$ έχουμε

$$\alpha x^2+x\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha\left(\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0$$

Η παράσταση $\beta^2-4\alpha\gamma$ ονομάζεται *διακρίνουσα* της εξίσωσης και συμβολίζεται με Δ. Θα έχουμε λύσει την αρχική εξίσωση αν λύσουμε την εξίσωση $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0$ που γράφεται και

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}=0$$

Παρατηρούμε ότι αν η $\Delta<0$ τότε ο προσθετέος $-\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ είναι θετικός. Δεδομένου ότι ο προσθετέος $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ είναι μη αρνητικός το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι θετικό και επομένως δεν υπάρχει ελπίδα να είναι μηδέν. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $\Delta \geq 0$ τότε μπορούμε να γράψουμε $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ και η εξίσωση μας γίνεται

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\
\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) = 0 &\Leftrightarrow \qquad (3.55)\\
x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = 0 &\Leftrightarrow \\
x = -\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι στην ειδική περίπτωση όπου $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες που συμπίπτουν με τον αριθμό $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Συνοψίζοντας έχουμε ότι:

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και διακρίνουσα $\Delta = \beta^2-4\alpha\gamma$:

- Δεν έχει καμία λύση δηλαδή είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$
- Έχει λύση αν $\Delta \geq 0$. Συγκεκριμένα αν $\Delta > 0$ έχει δύο διαφορετικές λύσεις (ρίζες) τους αριθμούς $x_{1,2} = \frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Αν $\Delta = 0$ οι δύο αυτές ρίζες συμπίπτουν και η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα τον αριθμό $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

Άσκηση 250. Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $4x^2+92x+333 = 0$
2. $x^2+23x+76 = 0$
3. $x^2+23x+102 = 0$
4. $-2x^2+3x+20 = 0$
5. $-2x^2+3x+77 = 0$
6. $64x^2-64x-273 = 0$

Άσκηση 251. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις έχοντας ως δεδομένο ότι η διακρίνουσα τους είναι μεγαλύτερη του μηδενός:

1. $x^2+\alpha x-\beta = 0$
2. $2x^2+4\alpha x-\beta = 0$
3. $x^2+(\beta-2\alpha)x-2\alpha\beta = 0$
4. $2x^2+5\alpha x-12\alpha^2 = 0$
5. $x^2+\mu x+\nu = 0$
6. $\gamma x^2+\beta x+\alpha = 0$

Άσκηση 252. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2+2xy-y^2 = 0 \quad (*)$$

Να λύσετε την εξίσωση ($(*)$):

1. Ως προς x (δηλαδή θεωρώντας ότι άγνωστος της είναι το x).

2. Ως προς y.

Άσκηση 253. Να βρείτε ποιος πρέπει να είναι ο λ ώστε:

1. Η εξίσωση $\lambda x^2 + 3\lambda x + 2 = 0$ να έχει λύση τον αριθμό $x = -1$
2. Η εξίσωση $\lambda^2 x^2 - 3x + \lambda = 0$ να έχει λύση τον αριθμό $x = 1$

3.3.5 Εξισώσεις που ανάγονται στην εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Συχνά μπορεί μία εξίσωση μετά από κατάλληλους χειρισμούς να μας οδηγήσει σε μία εξίσωση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ που αν την λύσουμε έχουμε με τον ένα ή άλλο τρόπο επιλύσει την αρχική. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 33. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x - x^2}$$

Λύση. Στην εξίσωση μας έχουμε δυο παρονομαστές τους $2 - x$ και $2x - x^2 = x(2-x)$ που πρέπει να φροντίσουμε να είναι διάφοροι του μηδενός. Αυτό εξασφαλίζεται αν φροντίσουμε να είναι $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε:

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x - x^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2-x)} \underset{\text{πολλαπλασιάζουμε επί } 2x(2-x)}{\Leftrightarrow}$$

$$2x(2-x)\left(\frac{2}{2-x} + \frac{1}{2}\right) = 2x(2-x)\frac{4}{x(2-x)} \Leftrightarrow$$

$$4x + x(2-x) = 8 \Leftrightarrow$$

$$6x - x^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Θα έχουμε λύσει την αρχική μας εξίσωση αν λύσουμε την τελευταία. Η εξίσωση $x^2 - 6x + 8 = 0$ αποκομμένη από το αρχικό ερώτημα έχει ρίζες τις $x = 2$ και $x = 4$. Ωστόσο καταλήξαμε σε αυτήν με τους περιορισμούς $x \neq 0$ και $x \neq 2$ επομένως θα απορρίψουμε την ρίζα 2 και θα δεχθούμε μόνο την 4.

Παράδειγμα 34. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(2x-1)^2 - 3(2x-1) + 2 = 0$$

Λύση. Μία ίσως πρώτη ιδέα θα ήταν να κάνουμε τα αναπτύγματα στο πρώτο μέλος και να λύσουμε την εξίσωση που προκύπτει. Όμως μπορούμε να δουλέψουμε και διαφορετικά αν προσέξουμε πως ο άγνωστος μας x εμφανίζεται δύο φορές και τις δύο μέσω της ίδιας παράστασης της $2x - 1$. Αν ονομάσουμε $2x - 1 = u$ δηλαδή αν χρησιμοποιήσουμε ένα βοηθητικό άγνωστο μπορούμε να μοιράσουμε την δουλειά

- Βρίσκοντας πρώτα το u.
- Βρίσκοντας μετά το x.

Θέτοντας λοιπόν όπου συναντάμε $2x-1$ το u η εξίσωση μας γίνεται $u^2-3u+2 = 0$ η οποία λύνεται εύκολα και μας δίνει $u_1 = 1$ και $u_2 = 2$. Επιστρέφουμε τώρα στην $2x - 1 = u$ έχουμε τις εξισώσεις $2x - 1 = 1$ και $2x - 1 = 2$ που η επίλυση τους μας δίνει $x_1 = 1$ και $x_2 = \frac{3}{2}$.

Παράδειγμα 35. Να λυθεί η εξίσωση:

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

Λύση. Επειδή $x^4 = \left(x^2\right)^2$ η εξίσωση γράφεται

$$\left(x^2\right)^2 - 5x^2 - 36 = 0$$

Λόγω του διπλού τετραγώνου $\left(x^2\right)^2$ λέγεται *διτετράγωνη*. Ονομάζουμε $x^2 = u$ και θα βρούμε πρώτα το u και μετά το x. Η εξίσωση μας γίνεται

$$u^2 - 5u - 36 = 0$$

η οποία εύκολα βρίσκουμε ότι έχει λύσεις $u_1 = -4$ και $u_2 = 9$. Αντικαθιστώντας τις δύο τιμές του u στην $x^2 = u$ καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$x^2 = -4 \qquad \text{και} \qquad x^2 = 9$$

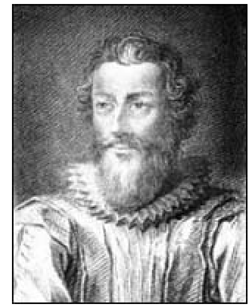
Η πρώτη είναι αδύνατη και η δεύτερη μας δίνει λύσεις τις $x_1 = -3$ και $x_2 = 3$.

Άσκηση 254. Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $2x + \frac{21}{x+4} = 9$
2. $\frac{23}{x-1} + 3 + \frac{70}{x^2-4x+3} = 0$
3. $\frac{3}{x} + \frac{5}{x-2} = 2$
4. $\frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{x+3}$
5. $\frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2} = 7$
6. $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = \frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

Άσκηση 255. Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
2. $(2x+1)^2 - 3(2x+1) - 1 = 0$
3. $\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 - 3\left(\frac{2x+3}{x-1}\right) + 2 = 0$
4. $\frac{4}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+5} = 2$
5. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right) - 12 = 0$
6. $7\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 9$



Francois Viete
(Franciscus Vieta)

1540 - 1603

3.3.6 Οι σχέσεις του Vieta

Στην παράγραφο αυτή θα εκφράσουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ συναρτήσει των συντελεστών της. Ο υπολογισμός είναι απλός. Αν η διακρίνουσα Δ είναι μη αρνητική η εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Τότε το άθροισμα τους είναι:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\left(-\beta-\sqrt{\Delta}\right)+\left(-\beta+\sqrt{\Delta}\right)}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Και το γινόμενο τους είναι

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\left(-\beta-\sqrt{\Delta}\right)\left(-\beta+\sqrt{\Delta}\right)}{4\alpha^2} =$$

$$\frac{(-\beta)^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \left(\beta^2 - 4\alpha\gamma\right)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Το άθροισμα και το γινόμενο συμβολίζονται[3] με S και P. Είναι λοιπόν

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}} \qquad \boxed{P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}} \qquad \text{Σχέσεις του Vieta} \quad (3.56)$$

Παράδειγμα 36. Να βρεθεί το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $2x^2 - 4x - 1 = 0$ χωρίς να λυθεί.

Λύση. Η εξίσωση προφανώς έχει ρίζες (γιατί;). Είναι $S = -\frac{-4}{2} = 2$ και $P = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$. Μάλιστα κοιτώντας το γινόμενο των ριζών καταλαβαίνουμε ότι η εξίσωση έχει δύο ετερόσημες ρίζες.

Παράδειγμα 37. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ έχει ρίζες x_1 και x_2. Να εκφράσετε συναρτήσει των συντελεστών της την παράσταση $x_1^2 + x_2^2$

Λύση. Η παράσταση $x_1^2 + x_2^2$ έχει ένα χαρακτηριστικό: Είναι *συμμετρική* ως προς x_1 και x_2 δηλαδή αν εναλλάξουμε τα x_1 και x_2 θα προκύψει η ίδια παράσταση. Με άλλα λόγια αν στην θέση του x_1 βάλουμε το x_2 και στην θέση του x_2 βάλουμε το x_1 θα προκύψει η ίδια παράσταση:

$$\begin{array}{ccc} x_1^2 & + & x_2^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_2^2 & + & x_1^2 \end{array}$$

[3] Από τα λατινικά summa, productum.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ρητές συμμετρικές παραστάσεις των x_1, x_2 (δηλαδή παραστάσεις που δημιουργούνται μόνο με τις 4 πράξεις) μπορούν, άλλοτε εύκολα άλλοτε δύσκολα, να εκφρασθούν με την βοήθεια των $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$. Εδώ η έκφραση επιτυγχάνεται πολύ εύκολα:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$$

Για να έκφράσουμε τέλος την παράσταση μας με την βοήθεια των α, β, γ γραφουμε:

$$S^2 - 2P = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

Δηλαδή

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

Οι σχέσεις του Vieta μας επιτρέπουν να κατασκευάζουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις που οι ρίζες τους έχουν δοθέν άθροισμα S και γινόμενο P. Πράγματι αφού θα είναι $-\frac{\beta}{\alpha} = S$ και $\frac{\gamma}{\alpha} = P$ θα είναι $\beta = -\alpha S$ και $\gamma = \alpha P$ επομένως μία τέτοια εξίσωση μπορεί να είναι η $\alpha x^2 - \alpha S x + \alpha P = 0$ δηλαδή η εξίσωση $\alpha\left(x^2 - Sx + P\right) = 0$ ή πιο απλά η $x^2 - Sx + P = 0$. Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Μία εξίσωση με άθροισμα ριζών } S \text{ και γινόμενο ριζών } P \\ \text{είναι η } \; x^2 - Sx + P = 0\end{array}} \qquad (3.57)$$

Παράδειγμα 38. Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 4 και γινόμενο 2.

Λύση. Το άθροισμα των αριθμών αυτών θα είναι $S = 4$ και το γινόμενο 2. Η εξίσωση $x^2 - 4x + 2 = 0$ θα έχει ρίζες αυτούς τους αριθμούς. Λύνοντας την εξίσωση αυτή μπορούμε να τους βρούμε. Πράγματι λύνοντας βρίσκουμε: $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Άσκηση 256. Με δεδομένο ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών τους χωρίς να τις λύσετε.

1. $2x^2 - 58x + 12 = 0$
2. $t^2 + 1500t - 2 = 0$
3. $2x^2 - 2\alpha x + 6 = 0$
4. $tx^2 - 2tx + t^2 = 0$

Άσκηση 257. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει λύσεις ρ_1, ρ_2. Να εκφράσετε συναρτήσει των α, β, γ τις παραστάσεις:

1. $\rho_1(\rho_2 + 1) + \rho_2(\rho_1 + 1)$
2. $\frac{1}{\rho_1+1} + \frac{1}{\rho_2+1}$

Άσκηση 258. Να βρείτε δευτεροβάθμια εξίσωση που να εχει κατα περίπτωση ρίζες τους αριθμούς

1. -1 και -4
2. $-\frac{5}{8}$ και $\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{13}$ και $\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{13}$
4. $\sqrt{3}$ και $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Άσκηση 259. Κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις έχει ρίζα τον αριθμό 1. Βρείτε την άλλη ρίζα της.

1. $2x^2+928x-930=0$
2. $x^2-8193x+8192=0$

Άσκηση 260. Στις παρακάτω περιπτώσεις δίνεται το άθροισμα S και το γινόμενο P δύο αριθμών. Να βρείτε τους αριθμούς.

1. $S=15,\ P=14$
2. $S=-19,\ P=84$
3. $S=12,\ P=3$
4. $S=2\alpha,\ P=\alpha^2-\beta^2$

Άσκηση 261. Με δεδομένο ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ρίζες να βρείτε το πρόσημο των ριζών χωρίς να λύσετε τις εξισώσεις.

1. $7x^2+14x-1=0$
2. $-3x^2-9x+2=0$
3. $6x^2-14x+1=0$
4. $3x^2+5x+1=0$

3.4 Ανισώσεις

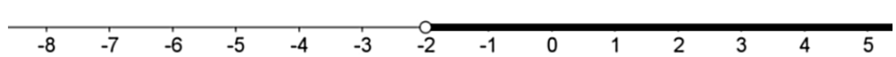
Αν έχουμε μία ανισότητα που ενδιαφερόμαστε να μάθουμε για ποιες τιμές κάποιων γραμμάτων (μεταβλητών) της η ανισότητα αληθεύει τότε έχουμε μία ανίσωση. Όπως συμβαίνει και με τις ταυτότητες - εξισώσεις η διαφορά μεταξύ ανίσωσης και ανισότητας δεν ευκρινής (βλ. 3.3.1). Ακόμη όπως και στις εξισώσεις οι ανισότητες έχουν λύσεις τις οποίες θεωρούμε ότι αποτελούν στοιχεία ενός συνόλου του *συνόλου λύσεων* της ανίσωσης. Η ανίσωση $x-2>0$ έχει λύση κάθε αριθμό που είναι μεγαλύτερος του 2 και το σύνολο λύσεων της είναι το $[2,+\infty)$. Η ανίσωση $(x+1)\left(y^2+1\right)>0$ με αγνώστους x,y έχει λύση ζεύγη (x,y) με $x>-1,\ y\in\mathbb{R}$.

3.4.1 Η ανίσωση $\alpha x+\beta>0$

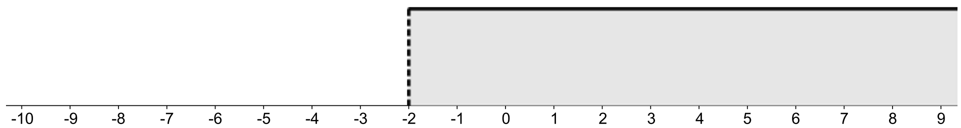
Για να λύσουμε την ανίσωση $2x+4>0$ κάνουμε μερικούς απλούς χειρισμούς:

$$2x+4>0 \Leftrightarrow 2x>-4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}>\frac{-4}{2} \Leftrightarrow x>-2$$

Επομένως το σύνολο λύσεων της ανίσωσης απαρτίζεται από τους αριθμούς x με $x>-2$ με άλλα λόγια είναι το διάστημα $(-2,+\infty)$. Μπορούμε κατά τα γνωστά να παραστήσουμε το σύνολο λύσεων έτσι:



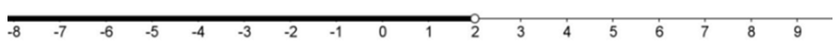
ή έτσι:



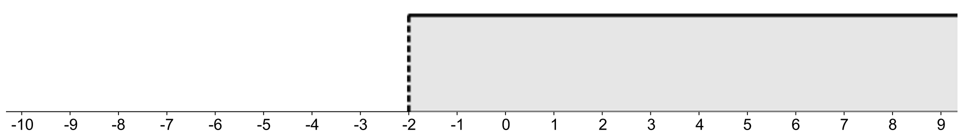
Για να λύσουμε την ανίσωση $-2x + 4 > 0$ ακολουθούμε την ίδια πορεία:

$$-2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} < \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow x < 2$$

όπου προσέξαμε στο σημείο που διαιρούμε δια του -2 να αλλάξουμε την φορά της ανίσωσης. Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης μας μπορεί να παρασταθεί με το διάγραμμα:



ή με το διάγραμμα:



Μπορούμε όπως εργασθήκαμε προηγουμένως να εργασθούμε με τυχόντες αριθ-μούς δηλαδή να επιλύσουμε την $\alpha x + \beta > 0$

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x > \frac{-\beta}{\alpha} & \text{αν} & \alpha > 0 \\ \text{ή} & & \\ x < \frac{-\beta}{\alpha} & \text{αν} & \alpha < 0 \\ \text{ή} & & \\ 0 > -\beta & \text{αν} & \alpha = 0 \end{array} \right\}$$

Οι δύο πρώτες περιπτώσεις όπου $\alpha > 0$ ή $\alpha < 0$ είναι ξεκάθαρες: Το σύνολο λύσεων της ανίσωσης στην πρώτη περίπτωση είναι το $\left(\frac{-\beta}{\alpha}, +\infty\right)$ ενώ στην δεύτερη το $\left(-\infty, \frac{-\beta}{\alpha}\right)$. Η τρίτη περίπτωση όπου $\alpha = 0$ θέλει λίγο μεγαλύτερη προσοχή. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε ότι $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow 0 > -\beta$. Που σημαίνει ότι η $\alpha x + \beta > 0$ θα αληθεύει για κάποιο x αν αληθεύει ότι $0 > -\beta$ δηλαδή $\beta > 0$. Αν λοιπόν συμβαίνει πράγματι $\beta > 0$ τότε η $\alpha x + \beta > 0$ θα αληθεύει για κάθε x και σύνολο λύσεων της θα είναι το $\mathbb{R}$. Αν όμως δεν συμβαίνει $\beta > 0$ δηλαδή είναι $\beta \leq 0$ τότε η $\alpha x + \beta > 0$ δεν θα αληθεύει για κανένα x και σύνολο λύσεων της θα είναι το $\varnothing$. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα συμπεράσματα μας στον παρακάτω πίνακα που δεν είναι απαραίτητο να θυμάστε:

Η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$:

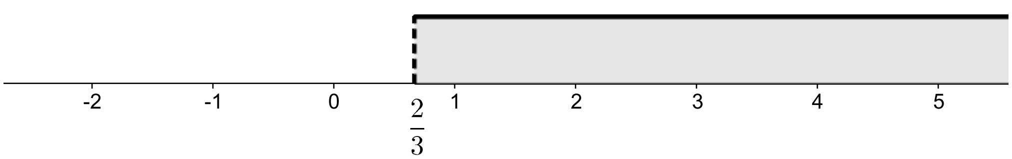
- Έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $\left(\frac{-\beta}{\alpha}, +\infty\right)$ αν $\alpha > 0$.
- Έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $\left(-\infty, \frac{-\beta}{\alpha}\right)$ αν $\alpha < 0$.
- Έχει σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$ αν $\alpha = 0$ και $\beta > 0$.
- Έχει σύνολο λύσεων το $\varnothing$ δηλαδή είναι αδύνατη αν $\alpha = 0$ και $\beta \leq 0$.

Σημείωση 4. *Οι ανισώσεις της μορφής $\alpha x + \beta \geq 0$, $\alpha x + \beta < 0$, $\alpha x + \beta \leq 0$ αντιμετωπίζονται παρόμοια με την $\alpha x + \beta > 0$.*

Παράδειγμα 39. Να λυθεί η ανίσωση $-3x + 2 \leq 0$.

Λύση. Είναι

$$-3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -2 \Leftrightarrow \frac{\cancel{-3}x}{\cancel{-3}} \geq \frac{-2}{-3} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$



Παράδειγμα 40. Να λυθεί η ανίσωση $\lambda x + 1 \geq x$.

Λύση. Έχουμε: $\lambda x + 1 \geq x \Leftrightarrow \lambda x - x \geq -1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)\, x \geq -1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\lambda - 1 > 0$ δηλαδή $\lambda > 1$. Τότε η ανίσωση έχει λύσεις τα x με $x \geq \frac{-1}{\lambda-1}$.
- $\lambda - 1 > 0$ δηλαδή $\lambda < 1$. Τότε η ανίσωση έχει λύσεις τα x με $x \leq \frac{-1}{\lambda-1}$.
- $\lambda - 1 = 0$ δηλαδή $\lambda = 1$. Τότε η ανίσωση γράφεται $0 \geq -1$ και έχει κάθε πραγματικό αριθμό x ως λύση.

Άσκηση 262. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $2x > 3$	4. $-2x < -3$
2. $2x > -3$	5. $-4x + 2 < 1$
3. $-2x < 3$	6. $8\,(x + 2) > 4$

Άσκηση 263. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

1. $\alpha x > 4$ όταν $\alpha > 0$.
2. $(\alpha - 2)\,x + 2 \le 0$ όταν $\alpha > 2$
3. $(2\alpha - 1)\,x < \alpha + 1$ όταν $\alpha > \frac{1}{2}$
4. $\left(\alpha^2 + \beta^2 + 1\right) x < 3 + 2\alpha$

Άσκηση 264. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

1. $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} > 1$
2. $2\,(x-1) + \frac{2x-1}{4} < 3$

Άσκηση 265. Δίνεται η ανίσωση

$$3x + 4 < 5$$

Για ποιές τιμές του t ο αριθμός $2t - 1$ είναι λύση της ανίσωσης;

Άσκηση 266. Να λύσετε την ανίσωση $2x - 3y > 1$.

1. Ως προς x.
2. Ως προς y.

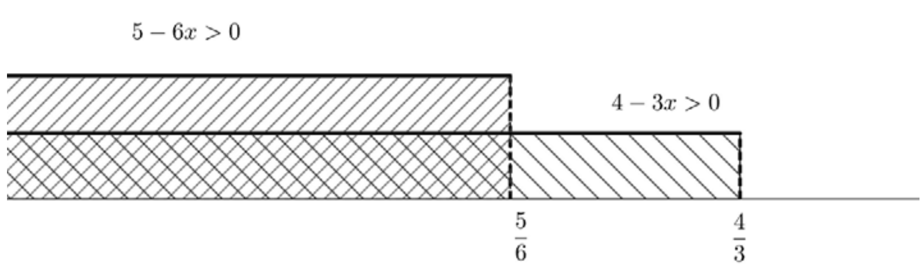
Άσκηση 267. Για ποιές τιμές του m η εξίσωση $2x^2 - 3x + m + 1 = 0$ με άγνωστο τον x έχει λύση;

3.4.2 Κοινές λύσεις ανισοτήτων (συναλήθευση)

Συχνά μας ενδιαφέρει να βρούμε τις τιμές που επαληθεύουν δύο ή περισσότερες ανισώσεις. Κάθε τιμή που επαληθεύει μία ανίσωση ανήκει στο σύνολο λύσεων τους. Αφού ζητάμε τις τιμές που επαληθεύουν όλες τις ανισώσεις ζητάμε τιμές που ανήκουν σε όλα τα σύνολα λύσεων δηλαδή στην τομή των συνόλων λύσεων τους.

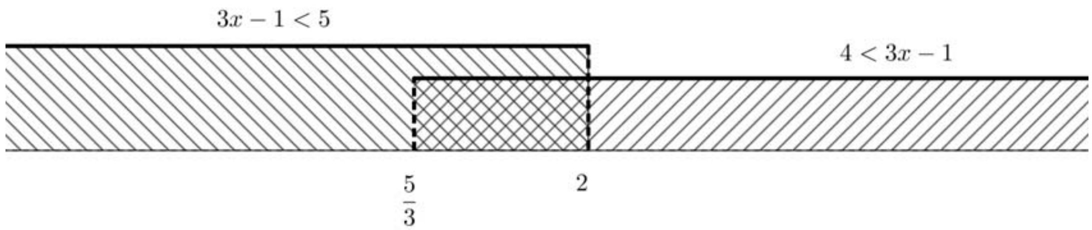
Παράδειγμα 41. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων $4 - 3x > 0$ και $5 - 6x > 0$

Λύση. Λύνουμε τις δυό ανισώσεις και βρίσκουμε ότι η πρώτη έχει σύνολο λύσεων $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$ και η δεύτερη $\left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$. Το σύνολο των κοινών λύσεων είναι η τομή των επιμέρους συνόλων λύσεων: $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cap \left(-\infty, \frac{5}{6}\right) = \left(-\infty, \frac{5}{6}\right)$.



Παράδειγμα 42. Να λυθεί η ανίσωση $4 < 3x - 1 < 5$.

Λύση. Η διπλή αυτή ανίσωση επαληθεύεται για εκείνα τα x που επαληθεύουν τις επιμέρους ανισώσεις: $4 < 3x - 1$ και $3x - 1 < 5$. Λύνουμε τις δύο αυτές ανισώσεις και βρίσκουμε ότι έχουν σύνολα λύσεων αντιστοίχως τα $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ και $(-\infty, 2)$. Θέλουμε να αληθεύουν και οι δύο ανισότητες επομένως ως λυση της διπλής ανίσωσης θα πάρουμε την τομή των δύο συνόλων: $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, 2) = \left(\frac{5}{3}, 2\right)$.



Παράδειγμα 43. Να βρεθούν οι ακέραιοι αριθμοί m για τους οποίους ο αριθμός $m\sqrt{2} - 5$ ανήκει στο διάστημα $(-6, 6)$.

Λύση. Ζητάμε εκείνες τις λύσεις της διπλής ανίσωσης $-6 < m\sqrt{2} - 5 < 6$ που είναι ακέραιοι αριθμοί. Μπορούμε να βρούμε πρώτα όλες τις λύσεις και μετά να δούμε ποιες είναι ακέραιοι αριθμοί. Λύνουμε χωριστά τις επιμέρους ανισώσεις $-6 < m\sqrt{2} - 5$, $m\sqrt{2} - 5 < 6$ και βρίσκουμε ότι πρέπει $-\frac{1}{2}\sqrt{2} < m < \frac{11}{2}\sqrt{2}$. Επομένως το m πρέπει να ανήκει στο διάστημα $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{11}{2}\sqrt{2}\right)$. Απομένει να βρούμε ποιά από αυτά τα m είναι ακέραιοι αριθμοί. Έχουμε ότι είναι περίπου $-\frac{1}{2}\sqrt{2} = -0,7$ και $\frac{11}{2}\sqrt{2} = 7,8$. Άρα οι ακέραιες τιμές που μπορεί να πάρει το m είναι $m = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Άσκηση 268. Να συναληθεύσετε τις ανισώσεις

1. $-4x + 3 \leq 0$ και $12 - 2x \leq 0$.
2. $4 - \frac{2}{3}x < 1$ και $31 - 4x > 0$

Άσκηση 269. Να λύσετε την ανίσωση $-3 \leq 5 - 6x < \frac{5}{8}$.

Άσκηση 270. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 - 4x + 5\lambda - 1 = 0$ έχει δύο θετικές ρίζες.

3.4.3 Πρόσημο του $\alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα αν έχουν δοθεί οι αριθμοί α, β με $\alpha \neq 0$ μπορούμε να βρούμε για ποια x είναι $\alpha x + \beta = 0$ (επιλύοντας την εξίσωση) και για ποια x είναι $\alpha x + \beta > 0$ ή $\alpha x + \beta < 0$ (επιλύοντας την αντίστοιχη ανίσωση). Με άλλα λόγια μπορούμε να βρίσκουμε το πρόσημο της παράστασης[4] $\alpha x + \beta$

[4]Αν θέλαμε να δώσουμε ένα όνομα σε αυτή την παράσταση αυτή θα μπορούσε να είναι «πρωτοβάθμιο διώνυμο»

για τις διάφορες τιμές του x. Αφού είναι $\alpha \neq 0$ η μελέτη μας περιορίζεται στις περιπτώσεις:

$\alpha > 0$ Είναι

- $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow x > \frac{-\beta}{\alpha}$
- $\alpha x + \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha x < -\beta \Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{\alpha}$
- $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = \frac{-\beta}{\alpha}$

Τα παραπάνω μπορούν να παρασταθούν με τον πίνακα:

x	$-\infty$		$\frac{-\beta}{\alpha}$		$+\infty$
$\alpha x + \beta$		$-$	0	$+$	

$\alpha < 0$ Είναι

- $\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta \Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{\alpha}$
- $\alpha x + \beta < 0 \Leftrightarrow \alpha x < -\beta \Leftrightarrow x > \frac{-\beta}{\alpha}$
- $\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = \frac{-\beta}{\alpha}$

Ο αντίστοιχος πίνακας είναι τώρα:

x	$-\infty$		$\frac{-\beta}{\alpha}$		$+\infty$
$\alpha x + \beta$		$+$	0	$-$	

Αν δούμε προσεκτικά αυτές τις διάσπαρτες πληροφορίες μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα απλό συμπέρασμα:

> Η παράσταση $\alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ μηδενίζεται μόνο για την τιμή $x = \frac{-\beta}{\alpha}$ που είναι η ρίζα της και έχει το ίδιο πρόσημο με το α αν και μόνο αν το x είναι μεγαλύτερο της ρίζας της.

Παράδειγμα 44. Για τις διάφορες τιμές του x να βρεθεί το πρόσημο του $-3x + 4$.

Λύση. Η $-3x + 4$ μηδενίζεται για $x = \frac{4}{3}$. Επειδή ο συντελεστής του x εδώ είναι $-3 < 0$ το $-3x + 4$ είναι ομόσημο του -3 δηλαδή αρνητικό για τα x που είναι μεγαλύτερα της ρίζας ενώ είναι θετικό για τα x που είναι μικρότερα της ρίζας.

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{4}{3}$ $\qquad$ $+\infty$
$-3x+4$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

Παράδειγμα 45. Για τις διάφορες τιμές του x να βρεθεί το πρόσημο του $\left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Λύση. Εδώ είναι $\alpha=\sqrt{3}-1>0$ και η ρίζα της $\left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}+1\right)$ είναι ο αριθμός $x=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=-\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}$. Για τιμές του x πάνω από την ρίζα αυτή η παράσταση μας είναι θετική ενώ για τιμές του x κάτω από την ρίζα η παράσταση μας θα είναι αρνητική.

x	$-\infty$ $\qquad$ $-2-\sqrt{3}$ $\qquad$ $+\infty$
$\left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}+1\right)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

3.4.4 Πρόσημο γινομένων -πηλίκων.

Μπορούμε να βρίσκουμε εύκολα το πρόσημο μίας παράστασης που είναι γινόμενο παραγόντων της μορφής $\alpha x+\beta$, $\alpha\neq 0$ ακολουθώντας απλώς τους κανόνες των προσήμων.

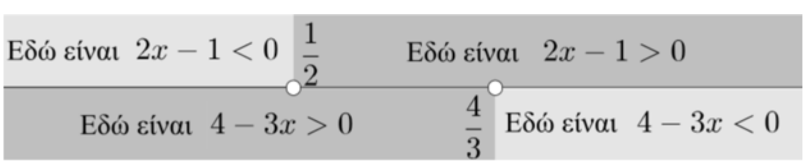
Παράδειγμα 46. Για τις διάφορες τιμές του x να βρεθεί το πρόσημο του $(2x-1)(4-3x)$.

Λύση. Δεν έχουμε παρά να «παρακολουθήσουμε» τις μεταβολές προσήμου των παραγόντων του. Για κάθε παράγοντα μεμονωμένα είναι εύκολο να κάνουμε ένα πίνακα για το πρόσημο του:

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
$2x-1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{4}{3}$ $\qquad$ $+\infty$
$4-3x$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

Για να δούμε πως συμπεριφέρεται το πρόσημο του γινομένου αρκεί να παρατηρήσουμε πως οι δύο ρίζες χωρίζουν τους *υπόλοιπους* πραγματικούς αριθμούς πραγματικούς αριθμούς σε τρία μέρη-διαστήματα. Τα $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right),\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$. Αν διαλέξουμε μία τιμή του x σε κάποιο από αυτά ο κάθε παράγοντας έχει κάποιο πρόσημο:



και το πρόσημο του γινομένου προκύπτει απλά από το γινόμενο των προσήμων. Φυσικά αν το x γίνει ίσο με μία από τις ρίζες το γινόμενο θα γίνει μηδέν. Έτσι:

- Όταν $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ο παράγοντας $2x - 1$ είναι αρνητικός, ο παράγοντας $4 - 3x$ είναι θετικός και το γινόμενο είναι αρνητικό.

- Όταν $x = \frac{1}{2}$ ο παράγοντας $2x-1$ γίνεται μηδέν επομένως και το γινόμενο γίνεται μηδέν.

- $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$ τότε και οι δύο παράγοντες $2x - 1$, $4 - 3x$ γίνονται θετικοί επομένως και το γινόμενο γίνεται θετικό.

- Όταν $x = \frac{4}{3}$ ο παράγοντας $4-3x$ γίνεται μηδέν επομένως και το γινόμενο γίνεται μηδέν.

- $x \in \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ ο παράγοντας $2x - 1$ γίνεται θετικός, ο παράγοντας $4 - 3x$ αρνητικός και το γινόμενο γίνεται αρνητικό.

Όλα αυτά μπορούν να φανούν πολύ σύντομα και καθαρά αν «ενώσουμε» τους δύο προηγούμενους πίνακες σε ένα:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4 - 3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)(4-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Παράδειγμα 47. Για τις διάφορες τιμές του x να βρεθεί το πρόσημο του $\frac{\sqrt{2}x-1}{5x+10}$.

Λύση. Μπορούμε να εργασθούμε όπως με το γινόμενο αφού οι κανόνες των προσήμων για τα πηλίκα είνα ίδιοι με τους κανόνες για τα γινόμενα. Το μόνο που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι δεν πρέπει να «επιτρέψουμε» στον παρονομαστή μας να μηδενισθεί δηλαδή να πάρει την τιμή της ρίζας του που είναι ο αριθμός -2. Αυτόν τον αριθμό τον εξαιρούμε από τον πίνακα μας και το γεγονός αυτό δηλώνεται με μία διπλή γραμμή.

x	$-\infty$		-2		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$\sqrt{2}x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x + 10$		$-$		$+$		$+$	
$\frac{\sqrt{2}x-1}{5x+10}$		$+$		$-$	0	$+$	

Άσκηση 271. Στο παράδειγμα 46 να βρείτε το πρόσημο του γινομένου για $x = 2012$ χωρίς να κάνετε την αντικατάσταση.

Άσκηση 272. Στο παράδειγμα 47 να βρείτε το πρόσημο του πηλίκου για $\frac{1}{2012}$ χωρίς να κάνετε την αντικατάσταση.

Άσκηση 273. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα για να βρείτε τις μεταβολές του προσήμου του γινομένου $(3 - x)(5 + 4x)(3x - 1)$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3 - x$							0		
$5 + 4x$			0						
$3x - 1$					0				
$(3-x)(5+4x)(3x-1)$			0		0		0		

Άσκηση 274. Να βρείτε για ποιες τιμές του x τα παρακάτω γινόμενα είναι θετικά και για ποιες αρνητικά:

1. $(2 - 4x)(x + 5)$
2. $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x - 1)$
3. $(1 - x)(2 - x)(3 - x)$

Άσκηση 275. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το κλάσμα:

$$\frac{(2x-1)(x+3)}{5x+7}$$

είναι θετικό και για ποιές είναι αρνητικό.

3.4.5 Η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \quad \alpha \neq 0$

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με την ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \quad \alpha \neq 0$ και τις παρεμφερείς ανισώσεις που προκύπτουν από αυτήν αν αντικαταστήσουμε το $<$ με κάποιο από τα $>, \leq, \geq$. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι μια πιο σύνθετη παράσταση από την $\alpha x + \beta$ που μελετήσαμε προηγουμένως και θα προσπαθήσουμε εφ' όσον είναι δυνατόν να γράψουμε την $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με την βοήθεια απλούστερων παραστάσεων που στην περίπτωση μας σημαίνει να την γράψουμε ως γινόμενο παραγόντων. Ήδη λύνοντας την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχουμε αποκτήσει την σχετική «τεχνογνωσία».

3.4.6 Μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \quad \alpha \neq 0$

Είχαμε δει ότι όταν $\neq 0$ ισχύει:

$$\boxed{\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)} \tag{3.58}$$

από το οποίο προέκυψε ότι όταν είναι $\Delta \geq 0$ μπορούμε να γράψουμε (βλ. σελίδα 128, σχέση (3.55))

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

Όμως οι αριθμοί $\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ δε είναι άλλοι από τους *αντίθετους* των αριθμών $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ που είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ή αλλιώς οι αριθμοί (ρίζες) που μηδενίζουν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Επομένως

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Αν για την διακρίνουσα του } \ \alpha x^2 + \beta x + \gamma \ \text{ ισχύει } \ \Delta \geq 0 \ \text{ τότε} \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\,(x - x_1)\,(x - x_2) \ \text{ όπου } \ x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\end{array}} \tag{3.59}$$

Η παραπάνω σχέση είναι χρήσιμη για να μετατρέπουμε σε γινόμενο παραγόντων τριώνυμα με μη αρνητική διακρίνουσα. Αξίζει να σημειωθεί ότι αν η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική τότε δε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων της μορφής $px + q$ (δείτε άσκηση 278).

Στην ειδική περίπτωση όπου $\Delta = 0$ μπορούμε να δούμε πως γίνεται το τριώνυμο κοιτώντας την σχέση (3.58). Θα βρούμε ότι

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Ωστόσο μπορούσαμε να εργασθούμε και με την σχέση (3.55)): Αφού η διακρίνουσα είναι μηδέν θα έχουμε δύο ίσες ρίζες δηλαδή $x_1 = x_2$ και το τριώνυμο θα έπαιρνε την μορφή

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\,(x - x_1)\,(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

όπου x_1 είναι η διπλή ρίζα του τριωνύμου. Αλλά η διπλή ρίζα είναι ίση με $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και επομένως βρίσκουμε πάλι $\alpha x^2+\beta x+\gamma = a\left(x-\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)^2 = a\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

Παράδειγμα 48. Να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων το τριώνυμο $3x^2 + 2x - 1$.

Λύση. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $x_1 = -1$ και $x_2 = \frac{1}{3}$ επομένως $3x^2+2x-1 = 3\left(x-(-1)\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ δηλαδή

$$3x^2+2x-1 = 3\left(x+1\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

Μπορούμε βέβαια τον συντελεστή 3 να τον «χρεώσουμε» στον παράγοντα $\left(x-\frac{1}{3}\right)$ οπότε θα έχουμε $3x^2+2x-1 = (x+1)(3x-1)$.

Παράδειγμα 49. Να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων το τριώνυμο $-3x^2 + x + 1$.

Λύση. Εδώ οι ρίζες είναι $x_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ και $x_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$. Επομένως

$$-3x^2+x+1 = -3\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)$$

Παράδειγμα 50. Να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων το τριώνυμο $9x^2 - 12x + 4$.

Λύση. Εδώ έχουμε διακρίνουσα ίση με το μηδέν και δύο ρίζες ίσες με $\frac{2}{3}$ επομένως

$$9x^2-12x+4 = 9\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right) = 9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2$$

Φυσικά μπορούσαμε να προσέξουμε από την αρχή ότι έχουμε το ανάπτυγμα $9x^2-12x+4 = (3x-2)^2$. Οι δύο αυτές μορφές εκφράζουν το ίδιο πράγμα αφού $9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 = 3^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)^2 = (3x-2)^2$.

Παράδειγμα 51. Να μετατραπεί σε γινόμενο παραγόντων η παράσταση $2\alpha^2 + 11\alpha\beta + 15\beta^2$.

Λύση. Μπορούμε να θεωρήσουμε την παράσταση αυτή σαν τριώνυμο ως προς α. Μόνο που πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο θέμα των συντελεστών «α», «β», «γ»:

$$\underbrace{2}_{«\alpha»}\alpha^2 + \underbrace{11\beta}_{«\beta»}\alpha + \underbrace{15\beta^2}_{«\gamma»}$$

οπότε διακρίνουσα είναι $(11\beta)^2 - 4\cdot 2\cdot 15\beta^2 = \beta^2$ και οι ρίζες είναι $\frac{-11\beta\pm\beta}{2\cdot 2}$ δηλαδή οι αριθμοί $-\frac{5}{2}\beta$ και -3β. Επομένως

$$2\alpha^2+11\alpha\beta+15\beta^2 = 2\left(\alpha-\left(-\frac{5}{2}\beta\right)\right)\left(\alpha-(-3\beta)\right) = 2\left(\alpha+\frac{5}{2}\beta\right)(\alpha+3\beta)$$

Πολλαπλασιάζοντας το 2 με το $\alpha + \frac{5}{2}\beta$ βρίσκουμε

$$2\alpha^2 + 11\alpha\beta + 15\beta^2 = (2\alpha + 5\beta)(\alpha + 3\beta)$$

Άσκηση 276. Να γράψετε ως γινόμενο τα τριώνυμα:

1. $2x^2 - 5x + 2$
2. $4x^2 + 4x + 1$
3. $x^2 - 8x - 33$

Άσκηση 277. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα

1. $\frac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$
2. $\frac{2a^2+8a-90}{3a^2-36a+105}$
3. $\frac{b^2-9bx+14x^2}{b^2-bx-2x^2}$

Άσκηση 278. Να αποδείξετε ότι αν το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει αρνητική διακρίνουσα τότε δε μπορεί να πάρει την μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = (px + q)(p'x + q')$ όπου p, q, p', q' είναι σταθεροί αριθμοί.

3.4.7 Πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha \neq 0$

Μπορούμε τώρα να αξιοποιήσουμε όσα μάθαμε στην προηγούμενη παράγραφο για να βρούμε το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Παρατηρούμε ότι λόγω της ισότητας:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right)$$

το πρόσημο του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι το ίδιο με το πρόσημο της παράστασης

$$\alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right)$$

και επειδή το πρόσημο του α είναι δεδομένο και δεν αλλάζει όταν μεταβάλλεται το x τελικά το πρόσημο εξαρτάται αποκλειστικά από το πρόσημο της παράστασης

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

Για εκείνα τα x που η παράσταση αυτή γίνεται θετική το τριώνυμο είναι ομόσημο του α, για εκείνα που γίνεται αρνητική ετερόσημο και για εκείνα που γίνεται μηδέν και το τριώνυμο γίνεται μηδέν.

- Αν είναι $\Delta < 0$ τότε το πρόσημο της $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}$ βρίσκεται εύκολα:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = \underbrace{\underbrace{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4\alpha^2}}_{>0}}_{>0} > 0$$

  που σημαίνει ότι κάθε φορά το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει πάντα το ίδιο πρόσημο με το α όποιος και να είναι ο x.

- Αν είναι $\Delta = 0$ τότε $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$. Η παράσταση αυτή είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Για την ακρίβεια είναι θετική όταν $x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$ και είναι μηδέν όταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Επομένως το τριώνυμο θα έχει το ίδιο πρόσημο με το α για κάθε τιμή του x εκτός από την τιμή της διπλής ρίζας του $-\frac{\beta}{2\alpha}$ που θα είναι ίσο με το μηδέν.

- Αν είναι $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει δύο ρίζες $x_1 < x_2$ και $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = (x-x_1)(x-x_2)$. Το πρόσημο του γινομένου αυτού βρίσκεται εύκολα:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

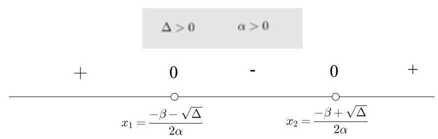
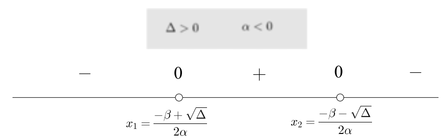
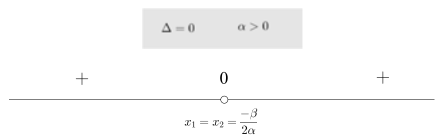
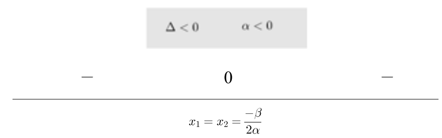
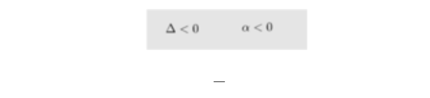
  Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο γίνεται μηδέν όταν το x γίνει ίσο με της ρίζες, ομόσημο του α για τιμές του x εκτός των ριζών (μικρότερες από την μικρότερη ρίζα ή μεγαλύτερες από την μεγαλύτερη) και ετερόσημο μεταξύ των ριζών.

Συνοψίζοντας έχουμε:

Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ομόσημο του α:
- Για όλα τα x αν $\Delta < 0$.
- Για όλα τα x εκτός της διπλής ρίζας αν $\Delta = 0$.
- Μόνο για όλα τα x εκτός των ριζών αν $\Delta > 0$.

(3.60)

Τα προηγούμενα κάπως πιο αναλυτικά απεικονίζονται στον πίνακα:

		α	
		$+$	$-$
Δ	$+$		
	0		
	$-$		

Παράδειγμα 52. Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου $-2x^2 + 4x + 1$

Λύση. Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα θετική και ρίζες τους αριθμούς $1 - \frac{1}{2}\sqrt{6}$ και $1 + \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Μεταξύ των ριζών είναι ετερόσημο του $\alpha = -2$ δηλαδή θετικό και εκτός των ριζών ομόσημο δηλαδή αρνητικό. Όταν το x γίνει ίσο με κάποια από τις ρίζες τότε ασφαλώς το τριώνυμο θα γίνει μηδέν.

Παράδειγμα 53. Να βρεθεί το πρόσημο του τριωνύμου $\left(\sqrt{7} - 3\right)(x - 2)(x + 3)$.

Λύση. *Αν* κάναμε τις πράξεις (δεν τις κάνουμε γιατί η ζωή είναι μικρή) θα θα παίρναμε ένα τριώνυμο με συντελεστή του x^2 τον αρνητικό αριθμό $\sqrt{7} - 3$ και ρίζες τους αριθμούς -3 και 2. Επομένως το τριώνυμο μεταξύ των -3 και 2 είναι θετικό και εκτός αρνητικό.

Άσκηση 279. Να βρείτε τα πρόσημα των παρακάτω τριωνύμων:

1. $3x^2 + 18x - 21$
2. $9x^2 + 3x - 2$
3. $-5x^2 - 35x + 40$
4. $x^2 + x + 1$
5. $3x - 1 - 4x^2$
6. $1 - 6x + 9x^2$

Άσκηση 280. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος αριθμών α, β ισχύει

1. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$
2. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

Άσκηση 281. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος αριθμών x, y ισχύει:

$$x^2 - 2x + 6 + y^2 - 4y > 0$$

Άσκηση 282. Ένα τριώνυμο είναι θετικό για $x = 1$ αρνητικό για $x = 2$ και θετικό για $x = 3$. Τι πρόσημο έχει για $x = 4$;

3.4.8 Επίλυση της ανίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0, \quad \alpha \neq 0$

Για να λύσουμε την ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ οι παρόμοιες ανισώσεις δεν έχουμε παρά να βρούμε κοιτώντας το πρόσημο του τριωνύμου για ποια x το τριώνυμο είναι θετικό ή ότι άλλο χρειάζεται να είναι.

Παράδειγμα 54. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 2x - 24 > 0$.

Λύση. Το τριώνυμο $2x^2 - 2x - 24$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και ρίζες -3 και 4. Επομένως η ανίσωση έχει λύσεις τα $x < -3$ και τα $4 < x$. Δηλαδή το σύνολο λύσεων της είναι το $(-\infty, -3) \cup (4, +\infty)$.

Παράδειγμα 55. Να λυθεί η ανίσωση $3x^2 - 2x - 1 < 0$.

Λύση. Το τριώνυμο $3x^2 - 2x - 1$ έχει $\alpha = 3 > 0$ και ρίζες $-\frac{1}{3}$ και 1. Θέλουμε να είναι αρνητικό δηλαδή ετερόσημο του α. Άρα θα επιλέξουμε τα x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών $-\frac{1}{3}$ και 1. Δηλαδή τα x με $-\frac{1}{3} < x < 1$. Το σύνολο λύσεων της είναι το $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$.

Παράδειγμα 56. Να λυθεί η ανίσωση $3x^2 - 11x - 4 \geq 0$.

Λύση. Εδώ το τριώνυμο του πρώτου μέλους γίνεται θετικό εκτός των ριζών του που είναι $-\frac{1}{3}$ και 4. Αφού μας ενδιαφέρει και η περίπτωση όπου γίνεται μηδέν πρέπει να συμπεριλάβουμε στις λύσεις της ανίσωσης και τις ρίζες του τριωνύμου. Συνεπώς το σύνολο λύσεων είναι το $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup [4, +\infty)$.

Παράδειγμα 57. Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - x + 1$.

Λύση. Το τριώνυμο του α΄ μέλους έχει αρνητική διακρίνουσα και επομένως είναι πάντα ομόσημο του $\alpha = 2$ δηλαδή θετικό. Άρα δεν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες το τριώνυμο να γίνεται αρνητικό. Συνεπώς η ανίσωση μας είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 58. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda - 3 = 0$ έχει δύο διαφορετικές ρίζες.

Λύση. Πρέπει η διακρίνουσα $(-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda - 3)$ της εξίσωσης να είναι θετική δηλαδή πρέπει $4\lambda^2 - 16\lambda + 12 > 0$. Λύνοντας την τελευταία ανίσωση βρίσκουμε ότι πρέπει $\lambda \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα πίνακα για να βρούμε το πρόσημο του γινομένου του πρώτου μέλους τοποθετώντας τις ρίζες των τριωνύμων, εφ΄ όσον υπάρχουν κατά αύξουσα σειρά:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		4		5		$+\infty$
$2x^2 - 7x - 4$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2 - 16x + 5$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\left(2x^2 - 7x - 4\right)\left(3x^2 - 16x + 5\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από το πίνακα προκύπτει πως το γινόμενο $\left(2x^2 - 7x - 4\right)\left(3x^2 - 16x + 5\right)$ γίνεται μικρότερο ή ίσο του 0 όταν $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$ ή $4 \leq x \leq 5$. Τελικά σύνολο λύσεων είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup [4, 5]$.

Παράδειγμα 59. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$

Λύση. Φυσικά $x \neq -2, \frac{1}{4}$. Μολονότι έχουμε παρονομαστές η απαλοιφή παρονομαστών δεν προσφέρεται γιατί έχουμε ανίσωση και δεν ξέρουμε τι πρόσημο μπορεί να έχει ο κάθε παρονομαστής. Η βασική ιδέα είναι να μεταφέρουμε τα πάντα σε ένα μέλος και να καταλήξουμε σε ένα κλάσμα και αργότερα σε ένα γινόμενο. Για $x \neq -2, \frac{1}{4}$ έχουμε:

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-2}{x+2} - \frac{2x-3}{4x-1} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-2)(4x-1) - (x+2)(2x-3)}{(x+2)(4x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2 - 10x + 8}{(x+2)(4x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(2x^2 - 10x + 8\right)(x+2)(4x-1) \geq 0$$

Για την τελευταία ανίσωση κατασκευάζουμε τον κατάλληλο πίνακα:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		1		4		$+\infty$
$2x^2 - 10x + 8$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	‖	$+$	‖	$+$		$+$	0	$+$	
$4x - 1$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	0	$+$	0	$+$	
$\left(2x^2 - 10x + 8\right)(x+2)(4x-1)$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Βλέπουμε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $(-\infty,-2) \cup \left(\frac{1}{4},1\right] \cup (4,+\infty)$

Άσκηση 283. Να λύσετε, χωρίς χαρτί και μολύβι, τις ανισώσεις

1. $(x+2)(x-2) < 0$
2. $(x+3)(x+7) \geq 0$
3. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right) < 0$
4. $(2x+3)(3x-4) \leq 0$
5. $(x+5)(2x+5) > 0$
6. $(3-2x)(3x+2) > 0$

Άσκηση 284. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις έχοντας ως δεδομένο ότι $0 < \alpha < \beta < \gamma < \delta$

1. $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$
2. $(x+\alpha)(x+\beta) > 0$
3. $(x+\alpha)(x-\delta) \leq 0$
4. $(x+\gamma)(x+\delta) \geq 0$
5. $(2x-\alpha)(x-\alpha) < 0$
6. $(\alpha-x)(x+\gamma) > 0$

Άσκηση 285. Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $x^2 - x - 12 > 0$
2. $-3x^2 + 2x + 1 > 0$
3. $4x^2 - 4x + 1 > 0$
4. $3x^2 - 4x + 1 < 0$
5. $4x^2 + x - 1 > 0$
6. $x^2 + 4x + 6 < 0$
7. $-4x^2 + 4x - 1 \geq 0$
8. $4x^2 + 4x + 9 > 0$

Άσκηση 286. Να λύσετε τις ανισώσεις

1. $1 < x^2 - x < 2$
2. $-1 < \frac{x}{x^2+1} \leq 2$
3. $\frac{1}{x} < \frac{x}{x+1} < 4$

Άσκηση 287. Να βρείτε για ποιες τιμές του y η εξίσωση

$$\frac{x^2+4x+1}{x^2+x+1}=y$$

έχει λύση ως προς x.

Άσκηση 288. Να βρείτε για ποιες τιμές του y υπάρχει x ώστε

$$\frac{2x+1}{x^2-3x+2}=y$$

Άσκηση 289. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύουν τα επόμενα:

1. Η εξίσωση $3x^2-4\lambda x+\lambda+1=0$ έχει δύο διαφορες λύσεις.
2. $\lambda x^2+4\lambda x+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
3. Το κλάσμα $\frac{x}{x^2+x+\lambda}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$
4. Η παράσταση $\sqrt{2x^2+\lambda x+1}$ ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άσκηση 290. Προσπαθήστε χρησιμοποιώντας ότι έχετε μάθει να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις. Σε όσες περιπτώσεις έχετε παρονομαστές να μην κάνετε απαλοιφή αλλά να μεταφέρετε τα πάντα σε ένα μέλος και να κάνετε ομώνυμα τα κλάσματα.

1. $\left(x^2-3x+2\right)\left(x^2-7x+12\right)>0$
2. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}>0$
3. $\frac{x^2+x-1}{x^2+x-2}\leq 0$
4. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}>\frac{1}{x(x+3)}$
5. $x^4-5x^2+4>0$
6. $\frac{x^4-2x^2-2}{x^4-x^2-6}<\frac{1}{2}$
7. $-1<\frac{x^2+1}{x+1}<1$
8. $\left(x^4-3x^2+1\right)\left(2x^2-4x+1\right)<0$

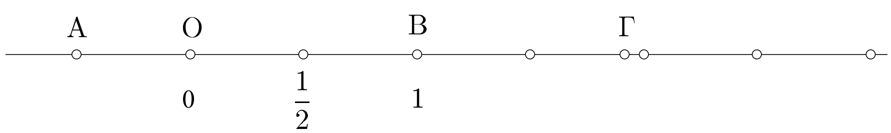
4

Συντεταγμένες και Συναρτήσεις

4.1 Συντεταγμένες

4.1.1 Απόλυτη Τιμή Πραγματικού αριθμού.

Είχαμε δει ότι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν με ένα συγκεκριμένο τρόπο να παρασταθούν σε ένα άξονα δηλαδή σε μία «βαθμολογημένη» ευθεία ώστε να μπορούν να την «καλύψουν». Σε κάθε αριθμό αντιστοιχεί ένα μόνο (χρησιμοποιούμε και την λέξη «ακριβώς») σημείο της ευθείας και σε κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί ακριβώς ένας αριθμός που λέγεται *τετμημένη* του σημείου.



Στο προηγούμενο σχήμα τα σημεία O και B έχουν τετμημένες 0 και 1 αντιστοίχως ενώ το σημείο με τετμημένη $-\frac{1}{2}$ είναι το A ενώ το σημείο με τετμημένη $\sqrt{2}$ είναι το Γ.

Το σημείο που αντιστοιχεί στο μηδέν δηλαδή η *αρχή του άξονα*[1]. Αν τώρα θεωρήσουμε ένα σημείο που έχει τετμημένη x τότε η απόσταση αυτού του σημείου από την αρχή των αξόνων λέγεται *απόλυτη τιμή* του x. Επειδή σε κάθε αριθμό μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα σημείο του άξονα και μετά να βρούμε την απόσταση του από την αρχή του, μπορούμε με αυτό τον τρόπο να αποδώσουμε απόλυτη τιμή σε κάθε αριθμό. Τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς 1, 2, 3, απέχουν από την αρχή των αξόνων αποστάσεις 1, 2, 3 και επομένως έχουν απόλυτη τιμή αντιστοίχως 1, 2, 3. Τα σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς -1, -2, -3 απέχουν και αυτά από την αρχή

[1] Εδώ η λέξη «αρχή» χρησιμοποιείται κάπως διαφορετικά απ' ότι συνήθως την αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινή ζωή

των αξόνων αποστάσεις 1, 2, 3. Επομένως και των αριθμών -1, -2, -3 οι απόλυτες τιμές είναι 1, 2, 3. Λέγοντας «η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν» εννοούμε την απόσταση του αντίστοιχου σημείου από το μηδέν που δεν είναι άλλη από την απόλυτη τιμή του αριθμού αυτού.

Υπάρχει λοιπόν ένας απλός κανόνας για να βρίσκουμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού: Αν μεν είναι θετικός η απόλυτη τιμή είναι ο ίδιος αριθμός ενώ αν είναι αρνητικός η απόλυτη τιμή είναι ο αντίθετος του. Φυσικά η απόλυτη τιμή του μηδενός είναι ο μηδέν. Επομένως:

• Η απόλυτη τιμή ενός μη αρνητικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.
• Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετος του (4.1)

Έτσι έχουμε:

Αριθμός	Απόλυτη τιμή του
-2	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1-\sqrt{3}$	$-1+\sqrt{3}$ ή αλλιώς $\sqrt{3}-1$
$1+x^2$	$1+x^2$

Για να δηλώσουμε την απόλυτη τιμή ενός αριθμού x χρησιμοποιούμε τον σύμβολο $|...|$ και στον κενό χώρο που υπάρχουν τα αποσιωπητικά γράφουμε τον αριθμό που μας ενδιαφέρει. Έτσι

$$|-2|=2,\ \left|-\tfrac{1}{2}\right|=\tfrac{1}{2},\ \left|1-\sqrt{3}\right|=-1+\sqrt{3},\ \left|1+x^2\right|=1+x^2$$

Μπορούμε να γράψουμε τον ορισμό της απόλυτης τιμής συμβολικά ως εξής:

$$\boxed{|x|=\begin{cases} x & \text{αν } x\geq 0\\ -x & \text{αν } x<0\end{cases}} \tag{4.2}$$

Φυσικά

$$\boxed{|x|=\pm x\ \text{(το + ισχύει για μη αρνητικό αριθμό, το - για αρνητικό)}} \tag{4.3}$$

Και επειδή τα τετράγωνα αντιθέτων αριθμών είναι πάντα ίσα έχουμε:

$$\boxed{\text{Για κάθε } x \text{ ισχύει } |x|^2=x^2} \tag{4.4}$$

Επίσης αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια του προσήμου (βλέπε (1.44» μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{x=(\text{πρόσημο του } x)\cdot|x|} \tag{4.5}$$

Ένα σημείο που χρειάζεται προσοχή είναι πως το σύμβολο $|...|$ της απόλυτης τιμής *δεν συμπεριφέρεται* με τις πράξεις όπως τα τα σύμβολα των παρενθέσεων $(...)$ ή των αγκυλών $[...]$. Έτσι ενώ μπορούμε να γράψουμε $-(2-3)=-2+3$ είναι λάθος να γράψουμε $-|2-3|=-2+3$.

Επίσης πρέπει να θυμόμαστε ότι ο αριθμός που παίρνουμε την απόλυτη τιμή του μπορεί να είναι θετικός, μηδέν η αρνητικός. Η απόλυτη τιμή όμως θα είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός.

$$\boxed{\text{Ισχύει } |x| \geq 0 \text{ για κάθε } x \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο αν } x=0.} \tag{4.6}$$

Δύο αντίθετοι αριθμοί απέχουν την ίδια απόσταση από το μηδέν και επομένως (μπορεί να επαληθευθεί και διακρίνοντας περιπτώσεις):

$$\boxed{\text{Ισχύει } |-x| = |x| \text{ για κάθε } x.} \tag{4.7}$$

Αν ξέρουμε τον x τότε η απόλυτη τιμή του θα είναι κάποιος από τους $\pm x$. Επίσης θα είναι και $x=\pm|x|$. Φυσικά $-|x|\leq|x|$ και αφού x θα είναι κάποιος από τους δύο αριθμούς έχουμε:

$$\boxed{\text{Ισχύει } -|x| \leq x \leq |x| \text{ για κάθε } x.} \tag{4.8}$$

Άσκηση 291. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $|-7|=$
2. $\left|\frac{1}{3}\right|=$
3. $\left|3^2-11\right|=$
4. $\left|5-3^{2000}\right|=$
5. $\left|\frac{1}{4111}-\frac{1}{8111}\right|=$
6. $\left|x^2+3\right|=$

Άσκηση 292. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1. $A=|1-|2-3||$
2. $B=\left|\left|\frac{1}{3}-4\right|-\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right|\right|$
3. $\Gamma=\left|\left(5-\frac{25}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-1\right)\right|$
4. $\Delta=\left|\frac{|3|-5}{6-|-7|}\right|$
5. $E=||4-8|-||7-9|-11||$
6. $Z=\left|1-3^{34}\right|-\left|7-3^{34}\right|$

Άσκηση 293. Με δεδομένο ότι $\alpha>\beta$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις:

1. $A=|\alpha-\beta|+1$
2. $B=\frac{|\alpha^3-\beta^3|}{\alpha-\beta}$
3. $\Gamma=|3\alpha-3\beta|+|\beta-\alpha|$
4. $\Delta=\left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}\right|+\beta$

Άσκηση 294. Να αποδείξετε ότι

$$|\alpha-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-\alpha|=|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|+|\beta-\alpha|$$

Άσκηση 295. Έστω ότι $x>1$. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{|x^3-1|}{x^2+x+1}$

Άσκηση 296. Έστω ότι $x > 5$. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$|x-2| - 3\,|x-5|$$

Άσκηση 297. Έστω ότι $1 < x < 2$. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$|2x+1| + 3\left(|x-5| + x\right)$$

Άσκηση 298. Έστω ότι $x > 3$. Να αποδείξετε ότι:

$$|(x-1)\,(x+1)\,(x-2)| - x^3 + 2x^2 + x = 2$$

4.1.2 Απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές

Συχνά υπάρχει η ανάγκη να εκφράσουμε μία παράσταση που περιέχει απόλυτες τιμές με μία άλλη παράσταση που δεν περιέχει απόλυτες τιμές. Δηλαδή όπως συνηθίζεται να λέγεται «να βγάλουμε τα απόλυτα». Μερικές τέτοιες περιπτώσεις είδαμε στις ασκήσεις της προηγουμένης παραγράφου. Επειδή η απόλυτη τιμή ενός αριθμού εξαρτάται από το πρόσημο του φροντίζουμε να δούμε τις μεταβολές του προσήμου κάθε παράστασης της οποίας εμφανίζεται η απόλυτη τιμή δηλαδή «που είναι μέσα σε απόλυτο».

Παράδειγμα 60. Για τις διάφορες τιμές του x να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση $|2x-1|$.

Λύση. Εξετάζουμε την μεταβολή προσήμου του $2x-1$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

- Αν το x το επιλέξουμε στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ τότε $2x-1 < 0$ και επομένως $|2x-1| = 1-2x$.
- Αν το x το επιλέξουμε να είναι $\frac{1}{2}$ τότε $2x-1 = 0$ και επομένως $|2x-1| = 0$.
- Αν το x το επιλέξουμε στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}), +\infty\right)$ τότε $2x-1 > 0$ και επομένως $|2x-1| = 2x-1$.

Μπορούμε αυτές τις παρατηρήσεις να τις ενσωματώσουμε στον πίνακα μας:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	
$\|2x-1\|$		$1-2x$	0	$2x-1$	

Μπορούμε να γράψουμε και

$$|2x-1| = \begin{cases} 1-2x & \text{αν} \quad x < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{αν} \quad x = \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{αν} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Η παραπάνω γραφή μπορεί να συντομευθεί αν «μαζέψουμε» τις περιπτώσεις. Η περίπτωση $x = \frac{1}{2}$ μπορεί να ενσωματωθεί στην προηγούμενη ή την επόμενη περίπτωση. Συνήθως ενσωματώνεται στην επόμενη δηλαδή προτιμάμε το $\geq$ από το $\leq$. Έτσι έχουμε:

$$|2x-1| = \begin{cases} 1-2x & \text{αν} \quad x < \frac{1}{2} \\ 2x-1 & \text{αν} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Αν θέλουμε να μάθουμε με τι είναι ίση η παράσταση μας όταν $x = \frac{1}{2}$ καταφεύγουμε φυσικά στην δεύτερη περίπτωση: Θα είναι η τιμή της $2x-1$ για $x = \frac{1}{2}$ δηλαδή 0 όπως βρήκαμε και πριν.

Παράδειγμα 61. Για τις διάφορες τιμές του x να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση $|2x-1| + |x-1|$.

Λύση. Εδώ έχουμε δύο παραστάσεις των οποίων εμφανίζεται η απόλυτη τιμή. Θα μελετήσουμε το πρόσημο και των δύο όπως κάναμε όταν μελετούσαμε το πρόσημο γινομένου. Μετά θα συνοψίσουμε τα αποτελέσματα μας ανά περίπτωση:

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\lvert 2x-1\rvert$	$1-2x$		$1-2x$		$2x-1$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$		$x+1$		$x+1$
$\lvert 2x-1\rvert + \lvert x-1\rvert$	$-3x$		$2-x$		$3x$

Στις απόλυτες τιμές παραλείψαμε να σημειώσουμε πότε γίνονται μηδέν αφού δεν θα πάρουμε αυτές τις περιπτώσεις χωριστά αλλά θα τις καλύψουμε με τα $\leq$. Συνοψίζοντας έχουμε:

$$|2x-1| + |x+1| = \begin{cases} -3x & \text{αν} \quad x < -1 \\ 2-x & \text{αν} \quad -1 \leq x < \frac{1}{2} \\ 3x & \text{αν} \quad x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Παράδειγμα 62. Για τις διάφορες τιμές του x να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση $|(2x-1)(x+1)|-x$.

Λύση. Εδώ πρέπει να βρούμε το πρόσημο της παράστασης $(2x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\|(2x-1)(x+1)\|$		$(2x-1)(x+1)$		$-(2x-1)(x+1)$		$(2x-1)(x+1)$	
$\|(2x-1)(x+1)\|-x$		$2x^2-1$		$-2x^2-2x+1$		$2x^2-1$	

Επομένως:

$$|(2x-1)(x+1)|-x=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{αν} \quad x<-1 \\ -2x^2-2x+1 & \text{αν} \quad -1\le x<\frac{1}{2} \\ 2x^2-1 & \text{αν} \quad x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$$

Άσκηση 299. Για τις διάφορες τιμές του x να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση $|2-x|+|4+x|$.

Άσκηση 300. Για τις διάφορες τιμές του x να γραφεί χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής η παράσταση $(x-2)|x+2|-|x|$.

4.1.3 Εξισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές

Υπάρχει μία μεγάλη ποικιλία εξισώσεων που περιέχουν απόλυτες τιμές. Η μορφή τους διαφέρει ανάλογα με το που και πως τοποθετείται το σύμβολο της απόλυτης τιμής.
Η πιο απλή εξίσωση που περιέχει απόλυτες τιμές είναι η εξίσωση $|x|=\alpha$. Αν ο α είναι αρνητικός η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση αφού το $|x|$ είναι πάντα μη αρνητικό και επομένως δε μπορεί να είναι ίσο με ένα αρνητικό αριθμό. Αν ο α είναι μηδέν η εξίσωση έχει μοναδική λύση το 0 ενώ αν ο α είναι θετικός η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $\pm\alpha$. Συνοψίζοντας έχουμε

Η εξίσωση $|x|=\alpha$:
- Είναι αδύνατη αν $\alpha<0$.
- Έχει μοναδική λύση το 0 αν $\alpha=0$.
- Έχει δύο λύσεις τους $\pm\alpha$ αν $\alpha>0$.

(4.9)

Παράδειγμα 63. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2| = 1$.

Λύση. Θα είναι $x-2 = \pm 1$ και επομένως $x = 2 \pm 1$. Άρα $x = 3$ ή $x = 1$.
Στα τρία επόμενα παραδείγματα όλες οι εξισώσεις προκύπτουν από την εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$ τοποθετώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής σε με άλλο κάθε φορά τρόπο.

Παράδειγμα 64. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - |x| - 2 = 0$.

Λύση. Επειδή δεν ξέρουμε ποιος είναι ο x ξεκινάμε με δεδομένο ότι απλώς είναι ένας πραγματικός αριθμός. Επειδή το ποια είναι η απόλυτη τιμή του εξαρτάται από το πρόσημο του μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν ο αριθμός μας είναι μη αρνητικός ή αν είναι αρνητικός. Με άλλα λόγια μοιράζουμε την δουλειά ψάχνοντας να βρούμε μη αρνητικές λύσεις και αρνητικές λύσεις. Έχουμε λοιπόν:

Περίπτωση 1. $x \geq 0$**.** Αφού θα είναι $x \geq 0$ θα είναι $|x| = x$ και η εξίσωση μας γίνεται $x^2 - x - 2 = 0$. Λύνοντας βρίσκουμε $x = -1$ και $x = 2$. Αλλά αναζητούμε μόνο μη αρνητικούς αριθμούς και βρίκαμε ένα τον $x = 2$. Η άλλη τιμή $x = -1$ δεν εμπίπτει στην περίπτωση που εξετάζουμε και δεν μας ενδιαφέρει δηλαδή απορρίπτεται.

Περίπτωση 2. $x < 0$**.** Στην περίπτωση αυτή θα είναι $|x| = -x$ και η εξίσωση μας γίνει $x^2 + x - 2 = 0$. Λύνοντας βρίσκουμε τις τιμές $x = -2$ και $x = 1$. Επειδή αυτή τη φορά εργαζόμαστε με αρνητικούς αριθμούς θα κρατήσουμε την αρνητική τιμή $x = -2$ και θα απορρίψουμε την θετική.

Συνοψίζοντας η εξίσωση μας έχει δύο ρίζες τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.
Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής: Αφού είναι $|x|^2 = x^2$ μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση μας και ως $|x|^2 - |x| - 2 = 0$. Θα βρούμε το x βρίσκοντας πρώτα το $|x|$. Ονομάζουμε $|x| = u$ οπότε η εξίσωση μας γίνεται $u^2 - u - 2 = 0$ και φυσικά θα δεχθούμε μόνο μη αρνητικές τιμές του u. Λύνοντας βρίσκουμε $u = -1$ που απορρίπτεται και $u = 2$ που είναι δεκτή. Επομένως $|x| = 2$ από την οποία βρίσκουμε ότι $x = \pm 2$.

Παράδειγμα 65. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - |x-2| = 0$.

Λύση. Εδώ υπάρχει η απόλυτη τιμή του αριθμού $x-2$ οπότε θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις όχι για το αν ο x είναι αρνητικό ή μη αρνητικός όπως κάναμε πριν αλλά για το αν ο $x-2$ είναι αρνητικός ή μη αρνητικός με άλλα λόγια αν $x \geq 2$ ή $x < 2$.

Περίπτωση 1. $x \geq 2$**.** Θα είναι $x - 2 \geq 0$ και η εξίσωση μας γίνεται $x^2 - (x-2) = 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση μας είναι αδύνατη πράγμα που σημαίνει πως η αρχική μας εξίσωση δεν έχει λύσεις $x \geq 2$.

Περίπτωση 2. $x < 2$**.** Θα είναι $x - 2 < 0$ και έχουμε να λύσουμε την $x^2 - (-(x-2)) = 0$ απο την οποία προκύπτει $x = -2$ και $x = 1$. Και οι δύο είναι μικρότερες του 2 άρα είναι δεκτές.

Συνοψίζοντας η εξίσωση μας έχει ρίζες τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.

Παράδειγμα 66. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - |x-2| = 0$.

Λύση. Εδώ υπάρχει η απόλυτη τιμή του αριθμού $x-2$ οπότε θα διακρίνουμε τις περιπτώσεις όχι για το αν ο x είναι αρνητικό ή μη αρνητικός όπως κάναμε πριν αλλά για το αν ο $x-2$ είναι αρνητικός ή μη αρνητικός με άλλα λόγια αν $x \geq 2$ ή $x < 2$.

Περίπτωση 1. $x \geq 2$**.** Θα είναι $x - 2 \geq 0$ και η εξίσωση μας γίνεται $x^2 - (x-2) = 0$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση μας είναι αδύνατη πράγμα που σημαίνει πως η αρχική μας εξίσωση δεν έχει λύσεις $x \geq 2$.

Περίπτωση 2. $x < 2$**.** Θα είναι $x - 2 < 0$ και έχουμε να λύσουμε την $x^2 - (-(x-2)) = 0$ απο την οποία προκύπτει $x = -2$ και $x = 1$. Και οι δύο είναι μικρότερες του 2 άρα είναι δεκτές.

Συνοψίζοντας η εξίσωση μας έχει ρίζες τις $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.

Παράδειγμα 67. Να λυθεί η εξίσωση $\left|x^2 - x\right| - 2 = 0$.

Λύση. Εδώ ενδιαφερόμαστε για το πρόσημο του $x^2 - x$. Πρόκειται για δευτεροβάθμιο τριώνυμο που έχει ρίζες το 0 και το 2. Μπορούμε να εργασθούμε όπως πριν παίρνοντας τρεις περιπτώσεις. Θα εργασθούμε κάπως διαφορετικά χρησιμοποιώντας ένα πίνακα παρόμοιο με εκείνους που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αν οι περιπτώσεις είναι λίγες οι πίνακες δεν προσφέρουν κάτι αλλά σε περισσότερες από δύο περιπτώσεις οι πίνακες μας δίνουν την δυνατότητα να εργαζόμαστε με τάξη και να παρουσιάζουμε εύκολα την δουλειά μας.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\left\|x^2 - x\right\|$		$x^2 - x$		$-x^2 + x$		$x^2 - x$	
Η εξίσωση που θα λύσουμε		$x^2 - x - 2 = 0$		$-x^2 + x - 2 = 0$		$x^2 - x - 2 = 0$	
ρίζες που βρίσκουμε		$x = -1$ και $x = 2$		καμία		$x = -1$ και $x = 2$	
ρίζες που κρατάμε		$x = -1$		καμία		$x = 2$	

Άσκηση 301. Να λύσετε τις εξισώσεις

1. $|x| = 3$
2. $|3x-1| = 8,\ x = 3, x = -\frac{7}{3}$
3. $5|x| - 2 = 9$
4. $7|x+2| - 3 = -11$
5. $3|x|^2 - 7|x| + 2 = 0$
6. $2|x|^2 - 3|x| - 1 = 0$
7. $x^2 - 3|x| + 1 = 0$

Άσκηση 302. Να λυθεί η εξίσωση $2x^2 - |2x-4| = 0$.

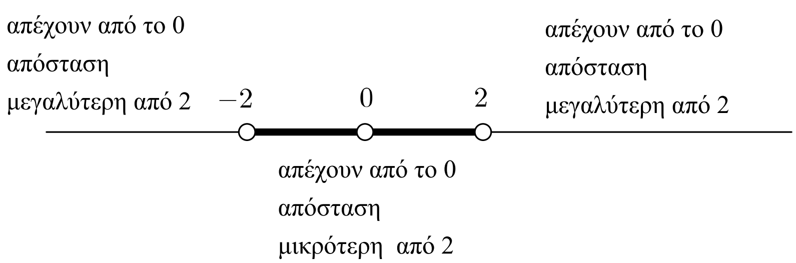
Άσκηση 303. Να λυθεί η εξίσωση $2|x-1| + |x+1| = 2$.

Άσκηση 304. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $|2x-1| + |3-x| = 7$
2. $|2+4x| = -2x-1$
3. $|x-3| - \left|x^2-1\right| = x$
4. $x + \frac{1}{|x|} = 8$
5. $(x-|x|)(|x|-1)(1-|2x-1|) = 0$
6. $\left|x^2-3x+3\right| = 1$
7. $\frac{1}{x-1} - \left|\frac{x}{x-2}\right| = 1$

4.1.4 Ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές

Η πιο απλή εξίσωση που περιέχει απόλυτη τιμή είναι η $|x| = \alpha$. Αν αντικαταστήσουμε το σύμβολο = με ένα από τα $<, \leq, >, \geq$ θα έχουμε τις απλούστερες ανισώσεις που περιέχουν απόλυτη τιμή. Ας ασχοληθούμε με την $|x| < \alpha$. Η ανίσωση αυτή προφανώς είναι αδύνατη αν $\alpha = 0$ ή ακόμη χειρότερα αν $\alpha < 0$. Όταν $\alpha > 0$ τότε ουσιαστικά ζητάμε να μάθουμε ποιοι αριθμοί απέχουν από το μηδέν απόσταση μικρότερη από α. Αν για παράδειγμα $\alpha = 2$ η ανίσωση $|x| < 2$ περιλαμβάνει τους αριθμούς που απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη από 2.



Καταλαβαίνουμε ότι οι αριθμοί x που απέχουν από το 0 απόσταση μικρότερη από 2 είναι εκείνοι για τους οποίους ισχύει $-2 < x < 2$ δηλαδή οι αριθμοί του διαστήματος $(-2, 2)$.
Σκεπτόμενοι ανάλογα βρίσκουμε ότι όταν $\alpha > 0$ η σχέση $|x| < \alpha$ επαληθεύεται από τα x με $-\alpha < x < \alpha$. Έχουμε λοιπόν προς απόδειξη την:

Πρόταση 4.1.1. *Αν $\alpha > 0$ τότε $|x| < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$.*

Απόδειξη. *Α΄ Τρόπος* Με διάκριση περιπτώσεων:

$$|x| < \alpha \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x < \alpha & \text{και} & x \geq 0 \\ & \text{ή} & \\ -x < \alpha & \text{και} & x < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x < \alpha & \text{και} & x \geq 0 \\ & \text{ή} & \\ -\alpha < x & \text{και} & x < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$$

Β΄ Τρόπος Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (4.4)

$$|x| < \alpha \Leftrightarrow |x|^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow x^2 - \alpha^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{το } x \text{ βρίσκεται μεταξύ των ριζών του τριωνύμου } x^2 - \alpha^2) \Leftrightarrow -\alpha < x < \alpha$$

□

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα προηγούμενα:

Η ανίσωση $\lvert x\rvert < \alpha$:	
• Είναι αδύνατη αν $\alpha \leq 0$.	(4.10)
• Έχει σύνολο λύσεων το διάστημα $(-\alpha, \alpha)$ αν $\alpha > 0$.	

Παράδειγμα 68. Να λυθεί η ανίσωση $|x - 3| < 2$.

Λύση. Είναι άμεση εφαρμογή της (4.10): $|x - 3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$.

Παράδειγμα 69. Να λυθεί η ανίσωση $\left|x^2 - x\right| < 2$.

Λύση. $\left|x^2 - x\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < x^2 - x < 2 \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} -2 < x^2 - x \\ \text{και} \\ x^2 - x < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 - x + 2 > 0 \\ \text{και} \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x \in \mathbb{R} \\ \text{και} \\ -1 < x < 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow -1 < x < 2$$

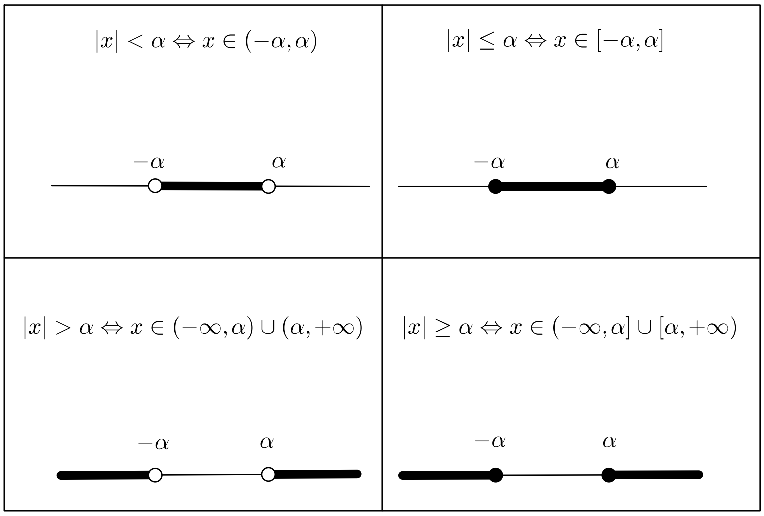
Ξέροντας ποιες είναι οι λύσεις της ανίσωσης $|x| < \alpha$, $\alpha > 0$ μπορούμε να βρούμε και τις λύσεις των παρακάτω ανισώσεων (πάντα με $\alpha > 0$) :

- $|x| \leq \alpha$. Το σύνολο λύσεων της θα περιλαμβάνει εκείνα τα x για τα οποία $|x| < \alpha$ μαζί με τα x για τα οποία $|x| = \alpha$. Επομένως θα περιλαμβάνει τα x με $-\alpha < x < \alpha$ μαζί με τα x με $x = \pm\alpha$. Τελικά περιλαμβάνει τα x με $-\alpha \leq x \leq \alpha$. Δηλαδή το σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

- $|x| > \alpha$. Μπορούμε να βρούμε τις λύσεις της ανίσωσης αυτής αν βρούμε ποιοι αριθμοί *δεν είναι λύσεις*. Δεν είναι λύσεις οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $|x| \leq \alpha$ δηλαδή τα στοιχεία το διαστήματος $[-\alpha, \alpha]$. Άρα *είναι* λύσεις οι αριθμοί που βρίσκονται έξω από το διάστημα με άλλα λόγια οι αριθμοί x με $x < -\alpha$ ή $x > \alpha$. Το σύνολο λύσεων μπορεί να γραφεί και $(-\infty, -\alpha) \cup (\alpha, +\infty)$.

- $|x| \geq \alpha$. Οι λύσεις της ανίσωσης αυτής είναι οι αριθμοί που επαληθεύουν την $|x| < \alpha$ μαζί με τους δύο αριθμούς που επαληθεύουν την $|x| = \alpha$ δηλαδή τους $\pm\alpha$. Τελικά λύσεις είναι τα $x \leq -\alpha$ μαζί με τα $x \geq \alpha$. Το σύνολο λύσεων είναι το $(-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)$.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω σε ένα διάγραμμα:



Παράδειγμα 70. Να λυθεί η ανίσωση $|5 - 4x| \geq 3$.

Λύση. Είναι:

$$|5-4x| \geq 3 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 5-4x \leq -3 \\ \text{ή} \\ 5-4x \geq 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -4x \leq -8 \\ \text{ή} \\ -4x \geq -2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} x \geq 2 \\ \text{ή} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty)$$

Άσκηση 305. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

1. $|x-3| < 2 \Leftrightarrow \ldots < x < \ldots$
2. $|x+3| < 2 \Leftrightarrow \ldots < x < \ldots$
3. $|x-8| \leq 4 \Leftrightarrow \ldots \leq x \leq \ldots$
4. $|x+7| > 2 \Leftrightarrow x < ..$ ή $\ldots < x$

Άσκηση 306. Να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

1. $|x| < 7 \Leftrightarrow \ldots < x < \ldots$
2. $|x| \leq 12 \Leftrightarrow \ldots \leq x \leq \ldots$
3. $|x| > 11 \Leftrightarrow x < \ldots$ ή $x > \ldots$
4. $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq \ldots$ ή $x \geq \ldots$
5. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < \ldots$
6. $x < -8$ ή $x > 8 \Leftrightarrow \ldots > \ldots$

Άσκηση 307. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $|x+3|<11$
2. $|5x-1|>4$
3. $|5x-1|<1$
4. $|x+2|<|x+3|$

Άσκηση 308. Να λύσετε τις ανισώσεις:

1. $|2x-1|+|x-2|>7$
2. $|x-1|+|x-2|+|x-3|>3$
3. $|1-|x||>x$
4. $\frac{1-|x|}{|2x-1|-3}>1$
5. $\left|x^2-3x+2\right|>x-|x|$
6. $\left|x-\frac{1}{x}\right|<x+|x-2|$

4.1.5 Απόλυτη Τιμή και Πράξεις.

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως συνδέεται η απόλυτη τιμή με τις πράξεις. Δηλαδή θα δούμε ποια σχέση υπάρχει μεταξύ των $|x\star y|$ και $|x|\star|y|$ όπου $\star$ είναι κάποια από τις τέσσερις πράξεις $\cdot, :, +, -$ του πολλαπλασιασμού, της διαίρεσης, της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Αυτό δηλαδή που θα εξετάσουμε είναι αν είναι το ίδιο

- Πρώτα να εκτελέσουμε την πράξη και μετά να πάρουμε την απόλυτη τιμή ή
- Πρώτα να πάρουμε απόλυτες τιμές και μετά να εκτελέσουμε την πράξη

Ας δούμε πρώτα την πράξη του πολλαπλασιασμού δοκιμάζοντας μερικούς αριθμούς

x	y	$x\cdot y$	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x\cdot y\|$	$\|x\|\cdot\|y\|$
2	3	6	2	3	6	6
−2	3	−6	2	3	6	6
2	−3	−6	2	3	6	6
−2	−3	6	2	3	6	6
0	2	0	0	2	0	0
0	3	0	0	3	0	0

Ο παραπάνω πίνακας μας παρέχει την ένδειξη ότι $|xy|=|x||y|$. Ας δώσουμε και μία απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

Πρόταση 4.1.2. Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β ισχύει

$$\boxed{|\alpha\beta|=|\alpha|\,|\beta|} \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Α΄ Τρόπος: Ο προηγούμενος πίνακας μπορεί να μας δώσει μία ιδέα για την απόδειξη: Αυτό που στην πραγματικότητα χρειασθήκαμε ήταν *τα πρόσημα των αριθμών* και *όχι οι τιμές των αριθμών*. Επομένως μπορούμε να διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το πρόσημο των αριθμών.

α	β	$\alpha\cdot\beta$	$\lvert\alpha\rvert$	$\lvert\beta\rvert$	$\lvert\alpha\cdot\beta\rvert$	$\lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert$
≥ 0	≥ 0	≥ 0	α	β	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$
≥ 0	< 0	≤ 0	α	$-\beta$	$-\alpha\beta$	$-\alpha\beta$
< 0	≥ 0	≤ 0	$-\alpha$	β	$-\alpha\beta$	$-\alpha\beta$
< 0	< 0	> 0	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta$

Βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις είναι $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$ και επομένως η ιδιότητα αληθεύει
Β΄ Τρόπος: Μπορούμε να εργασθούμε αξιοποιώντας την ιδιότητα (4.4):

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta| \Leftrightarrow$$

$$\left(|\alpha\beta|\right)^2 = \left(|\alpha|\,|\beta|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2\,|\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha\beta)^2 = \alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2 \text{ (Ισχύει)}$$

□

Αν πειραματιστούμε μα διάφορες τιμές θα δούμε ότι ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και με το πηλίκο δηλαδή ισχύει:

Πρόταση 4.1.3. Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β με $\beta \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}} \tag{4.12}$$

Απόδειξη. Α΄ Τρόπος: Μπορούμε να εργασθούμε με διάκριση περιπτώσεων όπως ακριβώς κάναμε στο γινόμενο:

α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\lvert\alpha\rvert$	$\lvert\beta\rvert$	$\lvert\frac{\alpha}{\beta}\rvert$	$\frac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}$
≥ 0	> 0	≥ 0	α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta}$
≥ 0	< 0	≤ 0	α	$-\beta$	$-\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{\alpha}{\beta}$
< 0	> 0	< 0	$-\alpha$	β	$-\frac{\alpha}{\beta}$	$-\frac{\alpha}{\beta}$
< 0	< 0	> 0	$-\alpha$	$-\beta$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta}$

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει το αποδεικτέο: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.
Β΄ Τρόπος: Με την ιδιότητα (4.4):

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow$$

$$\left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \text{ (Ισχύει)}$$

Γ΄ Τρόπος: Ας δούμε και μία τρίτη απόδειξη που αξιοποιεί περισσότερο όσα έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής. Χρησιμοποιούμε την πρόταση 4.1.2. Έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta = \alpha \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\right| = |\alpha| \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\cdot|\beta| = |\alpha| \Rightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

□

Παράδειγμα 71. Αν $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 5$ τότε

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta| = 3\cdot 5 = 15$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{3}{5}$$

Συνέπεια της 4.1.2 είναι και η ακόλουθη:

Πρόταση 4.1.4. Για $\nu \geq 3$ ισχύει

$$\boxed{|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_{\nu-1}|\cdot|\alpha_\nu|} \tag{4.13}$$

Απόδειξη.

$$|\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu| = |\alpha_1\cdot(\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu)| =$$

$$|\alpha_1|\cdot|\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu| = |\alpha_1|\cdot|\alpha_2\cdot(\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu)| =$$

$$= |\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot|\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\cdot\alpha_\nu| = \ldots$$

$$\text{(κάθε φορά εμφανίζουμε την απόλυτη τιμή ενός όρου)} =$$

$$|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_{\nu-1}|\cdot|\alpha_\nu|$$

□

Απο την οποία έχουμε την

Πρόταση 4.1.5. Για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει

$$\boxed{|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu} \tag{4.14}$$

Απόδειξη.

$$|\alpha^{\nu}| = \underbrace{|\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha|}_{\nu \text{ φορές}} = \underbrace{|\alpha|\cdot|\alpha|\cdot\ldots\cdot|\alpha|}_{\nu \text{ φορές}} = |\alpha|^{\nu}$$

□

Οι προηγούμενες ιδιότητες μας επιτρέπουν να «περνάμε» την απόλυτη τιμή μέσα σε γινόμενα, πηλίκα, δυνάμεις:

Παράδειγμα 72.

$$\left|\frac{xy}{z^3}\right| = \frac{|xy|}{|z^3|} = \frac{|x|\,|y|}{|z|^3}$$

Άσκηση 309. Για τους αριθμούς α,β,γ είναι γνωστό ότι $|\alpha| = 2, |\beta| = 4, |\gamma| = \frac{1}{2}$. Να υπολογίσετε τα:

1. $|\alpha\beta|$
2. $\left|\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right|$
3. $|\alpha^2\beta\gamma|$
4. $\alpha^2\,|\beta\gamma|$
5. $\left|\frac{\alpha}{|\alpha|}\right| + \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right|$
6. $|\alpha^3| + |\beta^3| - \gamma^2$

Άσκηση 310. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$ έχει απόλυτη τιμή ίση με 1.

Άσκηση 311. Στο βιβλίο Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου υπάρχει ως υποερώτημα μιας άσκησης το παρακάτω:

- Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να δώσετε μία απόδειξη.

Ας δούμε τώρα πως συμπεριφέρεται η απόλυτη τιμή με τα αθροίσματα. Ας δοκιμάσουμε πρώτα μερικές συγκεκριμένες τιμές όπως κάναμε με το γινόμενο:

x	y	$x+y$	$\|x\|$	$\|y\|$	$\|x+y\|$	$\|x\|+\|y\|$
2	3	5	2	3	5	5
2	−3	−1	2	3	1	5
−2	3	1	2	3	1	5
−2	−3	−5	2	3	5	5
2	0	2	2	0	2	2
0	3	3	0	3	3	3
−2	0	−2	2	0	2	2
0	−3	−3	0	3	3	3

Βλέπουμε ότι η απόλυτη τιμή αθροίσματος $|x+y|$ άλλοτε είναι ίση και άλλοτε είναι μικρότερη από το άθροισμα των απολύτων τιμών $|x|+|y|$. Κάτι που είναι λογικό γιατί αν οι αριθμοί x, y παίρνοντας πρώτα το άθροισμα και μετά την απόλυτη τιμή κάποιες μονάδες θα χαθούν. Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε κάποιες ενδείξεις για το ότι ισχύει $|x+y| \le |x|+|y|$.

Πρόταση 4.1.6. Για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β ισχύει

$$\boxed{|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|} \tag{4.15}$$

Απόδειξη. Α΄ Τρόπος: Είναι από την (4.8)

$$-|\alpha| \le \alpha \le |\alpha|$$

$$-|\beta| \le \beta \le |\beta|$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε:

$$-\left(|\alpha|+|\beta|\right) \le \alpha+\beta \le |\alpha|+|\beta|$$

Ας ονομάσουμε $A = |\alpha|+|\beta|$ και $X = \alpha+\beta$. Είναι βέβαια $A \ge 0$. Είναι

$$-A \le X \le A$$

- Αν συμβαίνει να είναι $A > 0$ τότε $|X| \le A$.
- Αν συμβαίνει να είναι $A = 0$ τότε και $X = 0$ οπότε πάλι ισχύει $|X| \le A$.

Έχουμε λοιπόν σε κάθε περίπτωση ότι

$$|X| \le A$$

Ξαναβάζουμε στην θέση των X, A αυτά που είχαμε ονομάσει X, A και έχουμε:

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$$

Β΄ Τρόπος: Είναι

$$|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow$$

$$\left(|\alpha+\beta|\right)^2 \le \left(|\alpha|+|\beta|\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$|\alpha+\beta|^2 \le |\alpha|^2 + 2\,|\alpha|\,|\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha+\beta)^2 \le \alpha^2 + 2\,|\alpha|\,|\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \le \alpha^2 + 2\,|\alpha\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha\beta \le 2\,|\alpha\beta| \Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta \le |\alpha\beta| \text{ Ισχύει από (4.8)}$$

□

Τίθεται το λογικό ερώτημα: Πότε στην ανισότητα $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$ ισχύει το το «ίσον»; Τα αριθμητικά δεδομένα μας δείχνουν ότι θα ισχύει όταν $\alpha\beta \ge 0$. Πράγματι αν παρακολουθήσουμε την δεύτερη από τις δύο αποδείξεις της προηγούμενης πρότασης θα δούμε ότι αν γράψουμε τα $\le$ με $=$ τότε θα είναι

$$|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta = |\alpha\beta|$$

Αλλά ένας αριθμός είναι ίσος με την απόλυτη τιμή του αν είναι μη αρνητικός και επομένως θα είναι $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ μόνο αν $\alpha\beta \ge 0$. Επομένως ισχύει:

$$\boxed{|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow \alpha\beta \ge 0} \tag{4.16}$$

Μία ανάλογη ιδιότητα με του αθροίσματος μπορούμε να έχουμε και για την διαφορά:

$$|\alpha-\beta| = |a+(-\beta)| \le |a|+|-\beta| = |\alpha|+|\beta|$$

δηλαδή:

$$\boxed{|\alpha-\beta| \le |\alpha|+|\beta|} \tag{4.17}$$

Παράδειγμα 73. Να αποδειθεί ότι αν $|x| \le 1$ και $|y| \le 9$ τότε ισχύει

$$|x+y| \le 10$$

Λύση. Είναι $|x+y| \le |x|+|y| \le 1+9 = 10$.

Παράδειγμα 74. Να αποδειθεί ότι

$$|\alpha-\beta-\gamma| \le |\alpha|+|\beta|+|\gamma|$$

Λύση. $|\alpha-\beta-\gamma| = |(\alpha-\beta)+(-\gamma)| \le |\alpha-\beta|+|-\gamma| = |\alpha-\beta|+|\gamma| \le |\alpha|+|\beta|+|\gamma|$.

Παράδειγμα 75. Να αποδειθεί ότι αν $|x| = |y| = 2$ τότε ισχύει

$$|2x-3y| \le 10$$

Λύση. $|2x-3y| \le |2x|+|3y| = 2|x|+3|y| = 2\cdot 2+3\cdot 2 = 10$.

Άσκηση 312. Ισχύει γενικά $|\alpha-\beta| \le |\alpha|-|\beta|$;

Άσκηση 313. Για τους αριθμούς x, y είναι γνωστό ότι $|x| < 2, |y| < 3$. Να αποδείξετε ότι:

1. $|x+y| < 5$
2. $|x+2y| < 8$
3. $\left|x^2+2y+1\right| < 11$
4. $\left|x^3-2y+4\right| < 18$

Άσκηση 314. Έστω αριθμός α με $|a| < 1$.

- Να λύσετε ως προς x την εξίσωση $2(x+3) = \alpha$

- Να αποδείξετε ότι για την λύση που βρήκατε ισχύει $|x| < \frac{7}{2}$

Άσκηση 315. Για τους αριθμούς A, B είναι γνωστό ότι $|A-3| < 4$ και $|B-4| < 3$. Να αποδείξετε ότι $|A+B-7| < 7$.

Άσκηση 316. Να αποδείξετε ότι αν $|x| < 3, |y| > 2$ τότε $\left|\frac{2x+1}{y^2+1}\right| < \frac{7}{5}$.

Άσκηση 317. Έστω ότι $|x| < 4, |y| < 5$. Να αποδείξετε ότι $-69 < x^3 + y < 69$.

Άσκηση 318.

1. Για ποιές τιμές του x ισχύει $|x+2| = 4$;
2. Για ποιές τιμές του x ισχύει $|x+\alpha| = \alpha^2$;
3. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|x+\alpha| = \alpha^2$ τότε θα ισχύει και $|x| \leq |\alpha|\left(|\alpha|+1\right)$

Άσκηση 319. Για ποια m ισχύει $|1+m| = 1+|m|$;

Άσκηση 320. Να αποδείξετε ότι

1. $|(\alpha-\beta)+\beta| \leq |\alpha-\beta| + |\beta|$
2. $|(\beta-\alpha)+\alpha| \leq |\beta-\alpha| + |\alpha|$
3. $|\alpha-\beta| \geq \pm\left(|\alpha|-|\beta|\right)$

Κατόπιν να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{|\alpha-\beta| \geq \big||\alpha|-|\beta|\big|} \tag{4.18}$$

Άσκηση 321. Να αποδείξετε την σχέση (4.18) της άσκησης 320 υψώνοντας και τα δύο μέλη στο τετράγωνο.

Άσκηση 322. Να χρησιμοποιήσετε ιδέες από την απόδειξη της πρότασης 4.1.4 για να αποδείξετε ότι για $\nu \geq 3$ ισχύει

$$\boxed{|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu| \leq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_{\nu-1}|+|\alpha_\nu|} \tag{4.19}$$

4.1.6 Απόλυτες τιμές και τετραγωνικές ρίζες.

Έχουμε δεί ότι η $\sqrt{\alpha^2}$ είναι ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμός που το τετράγωνο του μας δίνει α^2 και ότι

$$\sqrt{\alpha^2} = \begin{cases} \alpha & \text{αν} \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha & \text{αν} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Επομένως

$$\boxed{\sqrt{\alpha^2} = \alpha} \tag{4.20}$$

Άσκηση 323. Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της ρίζας τις παραστάσεις:

1. $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2}$
2. $\sqrt{x}^2 + \sqrt{(x-1)^2}$
3. $\sqrt{(x^2-3x+2)^2} + \sqrt{x^4}^2$
4. $\sqrt{x^2\sqrt{x^8}}$

Άσκηση 324. Σε μερικά βιβλία η απόλυτη τιμή *ορίζεται* ως εξής:

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

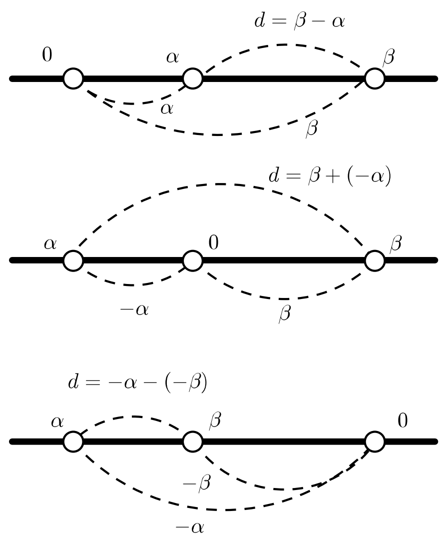
Ξεκινώντας από αυτό τον ορισμό χρησιμοποιείστε τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών για να αποδείξετε ότι:

1. $|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|$
2. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

4.1.7 Απόσταση δύο αριθμών

Η απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι η απόσταση του από το 0. Μπορούμε τώρα με την βοήθεια της απόλυτης τιμής να εκφράσουμε την απόσταση d δύο οποιωνδήποτε αριθμών α, β.

- Υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$ και παίρνουμε αρχικά τις περιπτώσεις (βλ. σχήμα) $0 < \alpha < \beta$, $\alpha < 0 < \beta$, $\alpha < \beta < 0$:



  Βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις η απόσταση τους είναι $d = \beta - \alpha$ ή αλλιώς (αφού $\beta > \alpha$ $d = |\beta - \alpha|$. Δεν έχουμε δει τι γίνεται αν κάποιος από τους αριθμούς μας είναι ο μηδέν. Στην περίπτωση που κάποιος από τους α, β ήταν μηδέν η απόσταση τους θα ήταν η απόσταση του άλλου αριθμού από το μηδέν δηλαδή η απόλυτη τιμή του. Αν στον τύπο $d = \beta - \alpha$ θέσουμε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ θα βρούμε πράγματι $|\beta|$ ή $|\alpha|$. Επομένως ο τύπος μας δίνει την απόσταση των β, α και σε αυτή την περίπτωση.

- Στην περίπτωση που είναι $\beta < \alpha$ θα έχουμε φυσικά απόσταση το $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.

- Τέλος αν είναι $\alpha = \beta$ η απόσταση των α, β είναι μηδέν, αποτέλεσμα που προκύπτει πάλι από τον τύπο $d = |\beta - \alpha|$.

Συνηθίζουμε να συμβολίζουμε την απόσταση των α, β με $d(\alpha, \beta)$. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\boxed{\text{Η απόσταση } d(\alpha,\beta) \text{ των αριθμών } \alpha,\beta \text{ είναι } d(\alpha,\beta) = |\beta - \alpha|} \tag{4.21}$$

Άσκηση 325. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

α	β	$d(\alpha,\beta)$
2	4	2
4	-2	
-3	-3	
0	-3	
$0,4$	$-0,7$	
1	-1	

Άσκηση 326. Να αποδείξετε ότι $d(-\alpha, -\beta) = d(\alpha, \beta)$.

Άσκηση 327. Να βρείτε όλους τους αριθμούς που ισαπέχουν από τους -1,5.

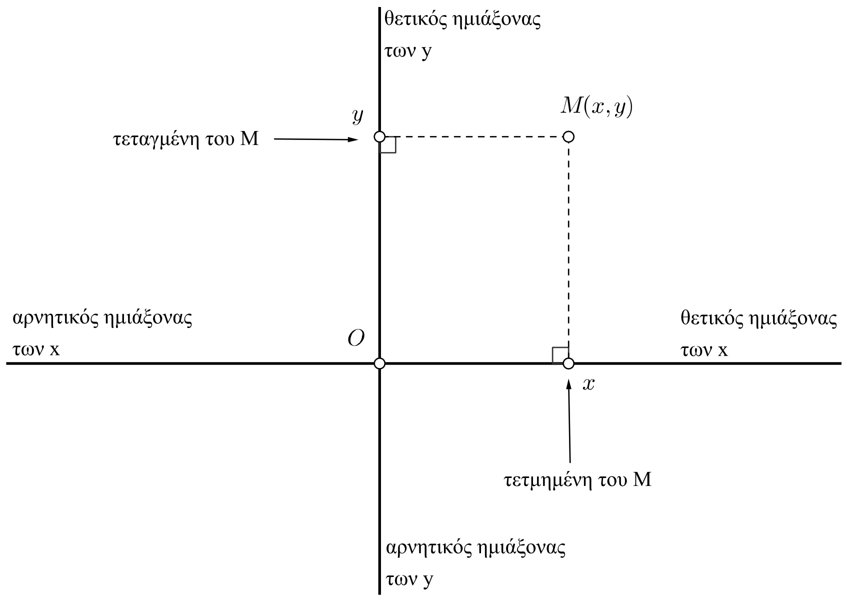
Άσκηση 328. Να βρείτε όλους τους αριθμούς που ο λόγος της απόστασης τους από τον -1, δια την απόσταση τους από τον 5 είναι ίσος με 2.

Άσκηση 329. Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha < \beta$. Να βρείτε όλους τους αριθμούς που το άθροισμα των αποστάσεων τους από τους α, β είναι ίσο με την απόσταση των α, β.

4.1.8 Συντεταγμένες σημείων του επιπέδου

Είναι γνωστό ότι όπως μπορούμε να περιγράψουμε τα σημεία μίας ευθείας με αριθμούς κάνοντας την ευθεία άξονα έτσι μπορούμε να περιγράψουμε και τα σημεία του επιπέδου με την βοήθεια ζευγών αριθμών. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε δύο κάθετους άξονες που τέμνονται στην αρχή τους δηλαδή στο O. Λέμε ότι έχουμε ένα *ορθοκανονικό*[2] σύστημα συντεταγμένων ή αλλιώς ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το γιατί «Καρτεσιανό» θα το συζητήσουμε σε λίγο. Αν M είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου φέρνουμε από το M κάθετες στους άξονες που τους τέμνουν σε σημεία που αντιστοιχούν στους αριθμούς x και y. Το x ονομάζεται *τετμημένη* του M και το y ονομάζεται *τεταγμένη*. Σε κάθε λοιπόν σημείο M αντιστοιχούμε τις το ζεύγος (x, y) της τετμημένης και της τεταγμένης (λέγονται *συντεταγμένες*).

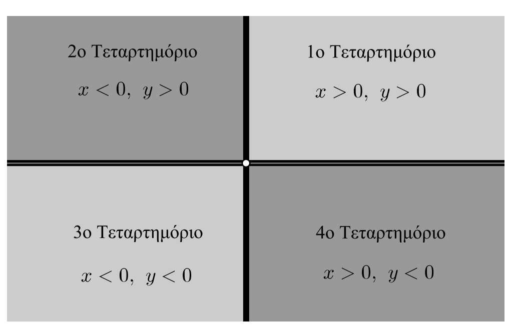
[2] ορθο από το **ορθο**γώνιο επειδή οι άξονες είναι κάθετοι, **κανονικό** διότι οι αποστάσεις μεταξύ των 0 και 1 στον ένα άξονα είναι ίσες με τις αποστάσεις των 0 και 1 στον άλλο. Ένα άλλο απαραίτητο στοιχείο είναι ο προσανατολισμός. Πρέπει οι άξονες να είναι έτσι τοποθετημένοι ώστε αν στραφούμε γύρω από την κοινή αρχή κατά την θετική φορά (αντίθετη προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού) ξεκινώντας από τον θετικό ημιάξονα $x'x$ να συναντάμε τον θετικό ημιάξονα $y'y$)



Αλλά και αντιστρόφως αν έχουμε ένα οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών (x, y) τότε σε αυτό το ζεύγος μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα σημείο ώστε το σημείο αυτό να έχει τετμημένη το x και τεταγμένη το y. Φυσικά ισχύει:

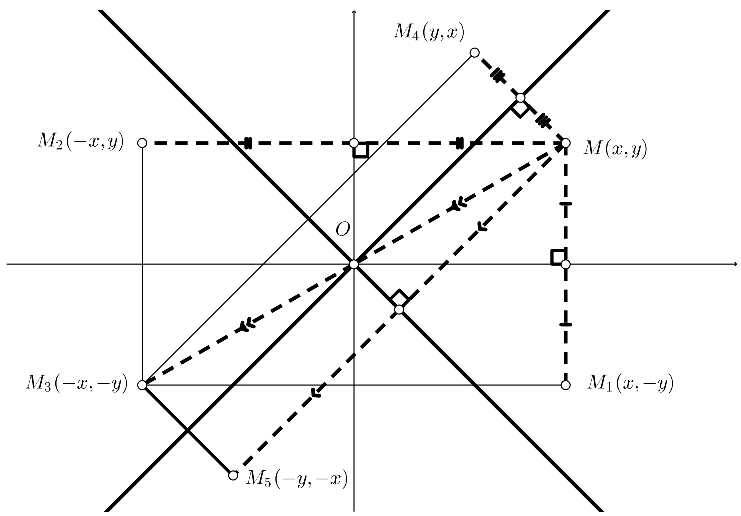
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Τα σημεία } A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2) \text{ ταυτίζονται} \\ \text{αν και μόνο αν } x_1 = x_2, \text{ και } y_1 = y_2\end{array}} \tag{4.22}$$

- Κάθε σημείο του άξονα των x έχει τεταγμένη 0. Αλλά και αντιστρόφως αν ένα σημείο έχει τεταγμένη 0 θα είναι σημείο του άξονα των x.
- Κάθε σημείο του άξονα των y έχει τετμημένη 0 και αν ένα σημείο έχει τεταγμένη 0 θα είναι σημείο του άξονα των y.
- Τα υπόλοιπα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στους άξονες έχουν και τις δύο συντεταγμένες τους διάφορες του μηδενός. Χωρίζονται από τους άξονες σε 4 περιοχές τα *τεταρτημόρια*.



Οι δύο άξονες σχηματίζουν 4 διαδοχικές ορθές γωνίες. Η ευθεία που είναι φορέας της διχοτόμου της γωνίας που αντιστοιχεί στο 1ο και της γωνίας που αντιστοιχεί στο 3ο τεταρτημόριο λέγεται *1η διχοτόμος της γωνίας των αξόνων* ενώ εκείνη που είναι φορέας των διχοτόμων των γωνιών 2ου και 4ου τεταρτημορίου λέγεται *2η διχοτόμος της γωνίας των αξόνων.* Αν έχουμε ένα σημείο $M\left(x,y\right)$ τότε μπορούμε εύκολα, ή χρησιμοποιώντας ιδιότητες της συμμετρίας είτε συγκρίνοντας κατάλληλα τρίγωνα να βρούμε ποια θα είναι τα συμμετρικά του M ως προς τους άξονες, τις διχοτόμους τους, και την αρχή τους. Έχουμε

Το συμμετρικό του σημείου	ως προς	είναι το σημείο
	τον άξονα $x'x$	$M_1\left(x,-y\right)$
	τον άξονα $y'y$	$M_2\left(-x,y\right)$
$M\left(x,y\right)$	την αρχή των αξόνων O	$M_3\left(-x,-y\right)$
	την πρώτη διχοτόμο των αξόνων	$M_4\left(y,x\right)$
	την δεύτερη διχοτόμο των αξόνων	$M_5\left(-y,-x\right)$



Άσκηση 330. Να παραστήσετε στο επίπεδο τα παρακάτω σημεία

1. $A\left(1,4\right)$
2. $B\left(4,1\right)$
3. $\Gamma\left(-1,4\right)$
4. $\Delta\left(-4,-1\right)$

Άσκηση 331. Βρείτε μία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ ώστε να είναι διαφορετικά σημεία.

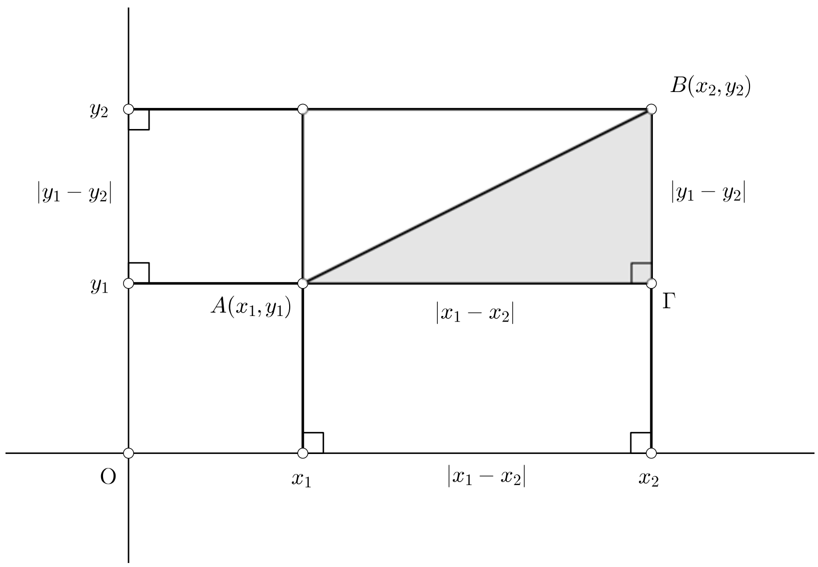
Άσκηση 332. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $A(-2,4)$:

1. Ως προς τους άξονες.
2. Ως προς την αρχή των αξόνων.
3. Ως προς τις διχοτόμους των αξόνων.

4.1.9 Απόσταση δύο σημείων του επιπέδου

Μπορούμε με την βοήθεια της απόστασης δύο αριθμών να υπολογίσουμε την απόσταση δύο σημείων του επιπέδου. Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

- Αν το τμήμα AB δεν είναι παράλληλο στους άξονες και φέρουμε από τα άκρα του κάθετες στους άξονες τότε σχηματίζεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΑΒΓ και κάθετες πλευρές με μήκη $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$.



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

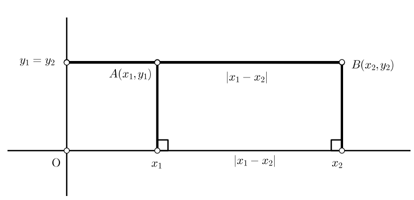
$$(AB)^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$$

και επομένως:

$$(AB) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

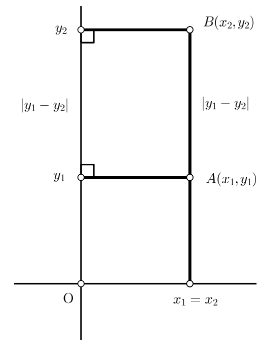
- Αν το τμήμα AB είναι παράλληλο στον $x'x$ τότε το μήκος του (AB) είναι ίσο με $|x_1 - x_2|$ και $y_1 = y_2$. Στην περίπτωση αυτή

$$(AB) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + \underbrace{|y_1 - y_2|^2}_{0}}$$



- Αν το τμήμα AB είναι παράλληλο στον $y'y$ τότε το μήκος του (AB) είναι ίσο με $|y_1 - y_2|$ και $x_1 = x_2$. Στην περίπτωση αυτή

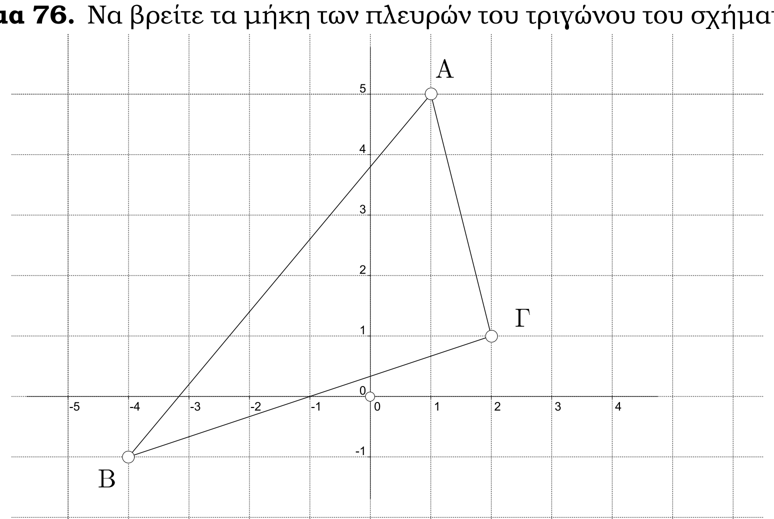
$$(AB) = \sqrt{\underbrace{|x_1 - x_2|}_{0}^2 + |y_1 - y_2|^2}$$



Βλέπουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις (φυσικά και όταν τα A, B ταυτίζονται) ισχύει:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Η απόσταση των σημείων } A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2) \text{ είναι} \\ (AB) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}\end{array}} \tag{4.23}$$

Παράδειγμα 76. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου του σχήματος:



Λύση. Είναι $A(1,5)$, $B(-4,-1)$, $\Gamma(2,1)$. Επομένως:

$$AB = \sqrt{(1-(-4))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{61}$$

$$B\Gamma = \sqrt{(-4-2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\Gamma A = \sqrt{(2-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{17}$$

Άσκηση 333. Να βρείτε για ποια τιμή του x τα σημεία $A(1,2), B(-1,x)$ έχουν απόσταση 4.

Άσκηση 334. Να βρείτε πως πρέπει να επιλεγεί το B ώστε τα σημεία $A(1,2)$, $B(x,y)$, $\Gamma(4,1)$, είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

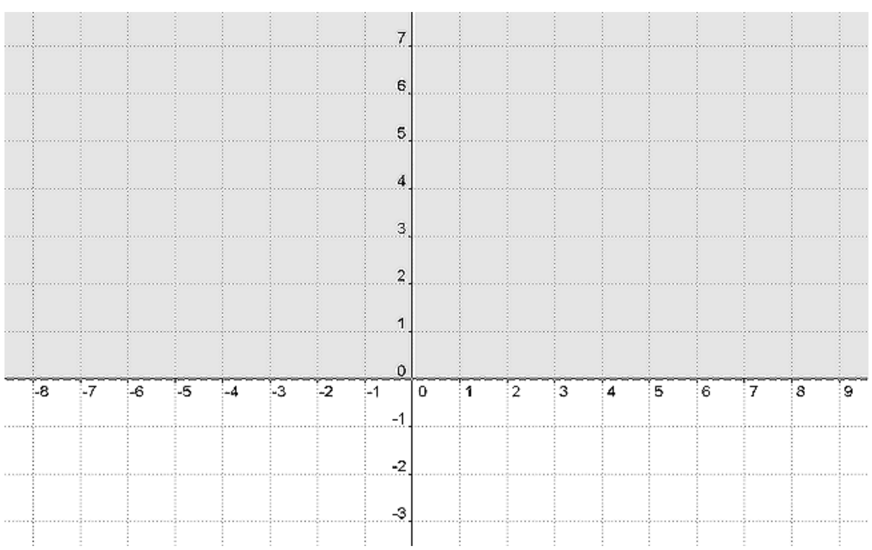
4.1.10 Από τις γραμμές στις εξισώσεις

Όταν έχουμε ένα σύστημα αξόνων στο επίπεδο τότε ένα οποιοδήποτε σχήμα μπορεί να περιγραφεί, άλλοτε εύκολα και άλλοτε δύσκολα, με τις συντεταγμένες των σημείων του.

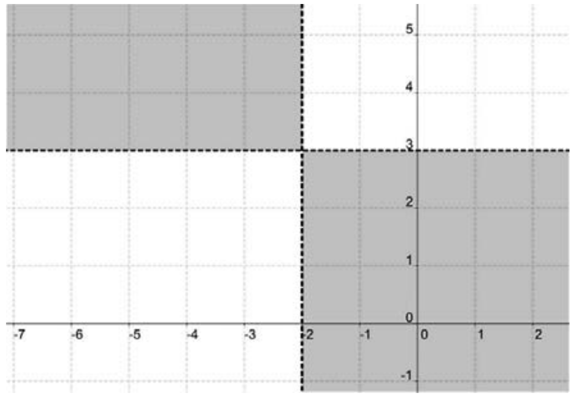
Παράδειγμα 77. Ο άξονας $x'x$ περιλαμβάνει τα σημεία $M(x,y)$ που έχουν τεταγμένη μηδέν. Επομένως περιλαμβάνει στα σημεία $M(x,0)$ όπου ο x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι τα σημεία του $x'x$ και μόνο αυτά επαληθεύουν την εξίσωση $y = 0$.

Παράδειγμα 78. Ο άξονας $y'y$ περιλαμβάνει τα σημεία $M(x,y)$ που έχουν τετμημένη μηδέν. Επομένως περιλαμβάνει στα σημεία $M(0,y)$ όπου ο y είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός. Άρα τα σημεία του $y'y$ και μόνο αυτά επαληθεύουν την εξίσωση $x = 0$.

Παράδειγμα 79. Το «άνω ημιεπίπεδο» που σχηματίζει ό άξονας $x'x$ απαρτίζεται από τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $y \geq 0$.



Παράδειγμα 80. Το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(x+2)(x-3) < 0$ είναι το παρακάτω γραμμοσκιασμένο σχήμα:



Παράδειγμα 81. Η παρακάτω, κάπως περίεργη, γραμμή περιλαμβάνει εκείνα τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $x^4 + 2y^3 - xy^2 - 3y = -1$

Rene Descartes

1596 - 1650

Η σύνδεση σχημάτων με αριθμούς έχει μακρά ιστορία στα Μαθηματικά. Ωστόσο η συστηματική χρήση των συντεταγμένων και η «μετάφραση» ενός σχήματος σε μία εξίσωση[3] που το περιγράφει τοποθετείται χρονικά στον 17ο αιώνα με τις εργασίες των Rene Descartes το εκλατινισμένο όνομα του οποίου ήταν Renatus Cartesius εξ' ου και οι Καρτεσιανές Συντεταγμένες και στον Pierre de Fermat.

4.1.11 Ο κύκλος

Pierre de Fermat

1601 - 1665

Ξέρουμε ότι ο κύκλος με κέντρο ένα σημείο K και ακτίνα ρ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου που απέχουν από το K απόσταση ρ. Ας πάρουμε το κέντρο να είναι το σημείο $K(2, 3)$ και η ακτίνα να είναι 2. Τότε ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο αν η απόσταση του από το $K(2, 3)$ είναι 2. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει σύμφωνα με την (4.21) να ισχύει

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 2$$

[3] ή ανίσωση, ή σύστημα εξισώσεων, ανισώσεων

Μπορούμε να απαλλαγούμε από το σύμβολο της ρίζας αν υψώσουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο. Θα καταλήξουμε στην ισοδύναμη σχέση

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4$$

Μπορούμε ακόμη να κάνουμε μερικές πράξεις (αναπτύγματα κτλ) και να καταλήξουμε στην επίσης ισοδύναμη σχέση:

$$x^2+y^2-4x-6y+9=0$$

Και οι τρεις αυτές σχέσεις ικανοποιούνται μόνο από τα σημεία $M(x,y)$ που ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το $K(2,3)$ και ακτίνα το ρ. Πρόκειται για εξισώσεις που έχουν λύσεις μόνο τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες των σημείων του κύκλου. Λέγονται *εξισώσεις του κύκλου* με κέντρο $K(2,3)$ και η ακτίνα 2.

Αν τώρα αναζητήσουμε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το $K\,(a,\beta)$ και ακτίνα ρ θα δούμε ότι ο κύκλος θα έχει ως σημεία τα $M\,(x,y)$ με

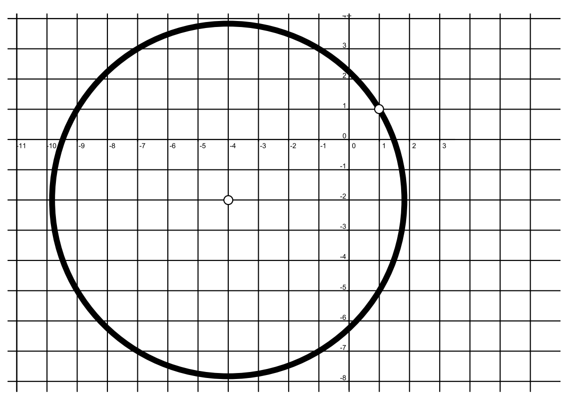
$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\rho$$

και επομένως:

Μια εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K(a,\beta)$, και ακτίνα ρ είναι η: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2$	(4.24)

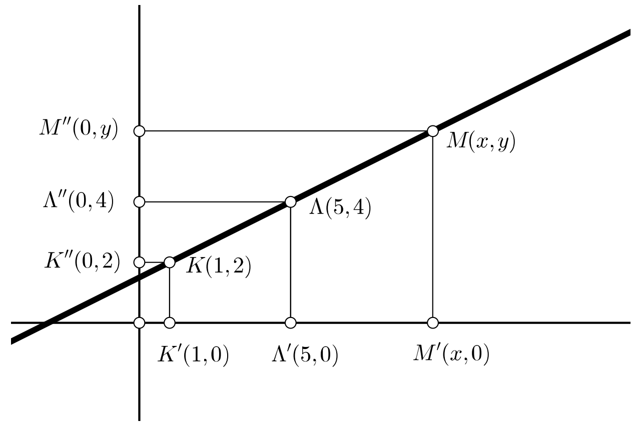
Άσκηση 335. Να γράψετε μία εξίσωση του κύκλου με κέντρο $K\,(-2,1)$ και ακτίνα 3.

Άσκηση 336. Να γράψετε μία εξίσωση για τον κύκλο του σχήματος:



4.1.12 Η ευθεία

Ο κύκλος μπορεί να προσδιορισθεί πλήρως αν γνωρίζουμε κέντρο και ακτίνα του. Μία ευθεία μπορεί να προσδιορισθεί αν γνωρίζουμε δύο διαφορετικά σημεία της. Ας θεωρήσουμε την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $K\,(1,2)$ και $\Lambda\,(5,4)$.



Ας θεωρήσουμε και τυχόν σημείο της $M(x,y)$ διαφορετικό από τα K, Λ. Οι ευθείες KK', $\Lambda\Lambda'$, MM' είναι μεταξύ τους παράλληλες. Το αυτό ισχύει και για τις KK'', $\Lambda\Lambda''$, MM'' Από το θεώρημα του Θαλή θα έχουμε:

$$\frac{K'\Lambda'}{K'M'} = \frac{K\Lambda}{KM}$$

και

$$\frac{K''\Lambda''}{K''M''} = \frac{K\Lambda}{KM}$$

και επομένως

$$\frac{K'\Lambda'}{K'M'} = \frac{K''\Lambda''}{K''M''}$$

Αν τώρα «μεταφράσουμε» τα μήκη σε αποστάσεις πραγματικών αριθμών έχουμε ότι:

$$\frac{|1-5|}{|1-x|} = \frac{|2-4|}{|2-y|}$$

και επομένως

$$\frac{4}{|1-x|} = \frac{2}{|2-y|}$$

από την οποία βρίσκουμε:

$$\left|\frac{1-x}{2-y}\right| = 2$$

ή και

$$\left|\frac{x-1}{y-2}\right| = 2$$

Το πρόσημο του κλάσματος $\frac{x-1}{y-2}$ εξαρτάται από την θέση του x σε σχέση με τον 1 και την θέση του y σε σχέση με τον 2. Στην περίπτωση μας βλέπουμε ότι

- Αν το M είναι εκτός του τμήματος $K\Lambda$ προς το μέρος του Λ ή είναι σημείο του τμήματος $K\Lambda$ τότε θα είναι $x > 1$, $y > 2$ οπότε $\frac{x-1}{y-2} > 0$

- Αν το M είναι εκτός του τμήματος $K\Lambda$ προς το μέρος του K τότε θα είναι $x < 1$, $y < 4$ οπότε πάλι $\frac{x-1}{y-2} > 0$

Σε κάθε περίπτωση είναι $\frac{x-1}{y-2} > 0$ και επομένως η $\left|\frac{x-1}{y-2}\right| = 2$ γίνεται $\frac{x-1}{y-2} = 2$ από την οποία έχουμε

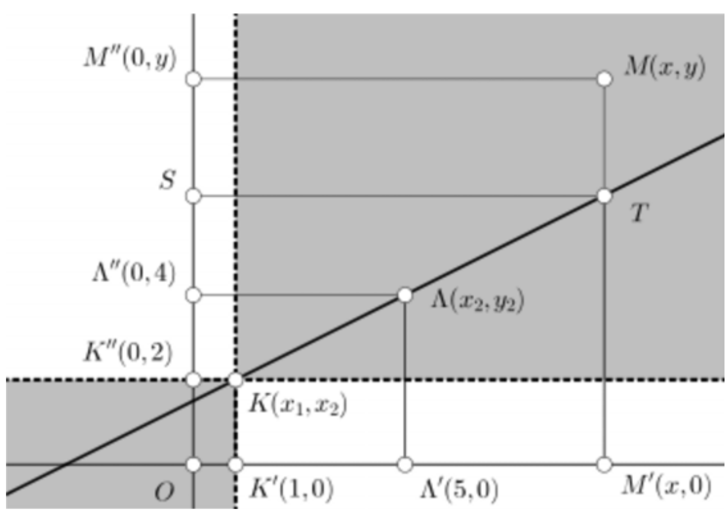
$$x - 2y + 3 = 0$$

Βλέπουμε ότι τα σημεία της ευθείας που είναι διαφορετικά από τα K, Λ επαληθεύουν την εξίσωση $x - 2y + 3 = 0$. Η εξίσωση αυτή ικανοποιείται σίγουρα από όλα τα σημεία της ευθείας εκτός ίσως των K, Λ. Αν δοκιμάσουμε και τα K, Λ έχουμε

- Για το K: $1 - 2 \cdot 2 + 3 = 0$, την επαληθεύει.
- Για το Λ: $5 - 2 \cdot 4 + 3 = 0$, την επαληθεύει

Επομένως όλα τα σημεία της ευθείας επαληθεύουν την εξίσωση $x - 2y + 3 = 0$.

Λογικό είναι το ερώτημα: Μήπως υπάρχουν και άλλα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την $x - 2y + 3 = 0$ αλλά δεν ανήκουν στην ευθεία $K\Lambda$; Ας υποθέσουμε πως ένα τέτοιο σημείο υπάρχει και είναι το $M(x, y)$. Παρατηρούμε ότι η τετμημένη του δε μπορεί να είναι 1 διότι τότε θέτοντας το $x = 1$ στην $x - 2y + 3 = 0$ βρίσκουμε $y = 2$ και το M συμπίπτει με το A πράγμα αδύνατον αφού δεν ανήκει στην ευθεία. Όμοια αποκλείεται να είναι $y = 2$. Το M θα ικανοποιεί την $\left|\frac{x-1}{y-2}\right| = 2$ και επομένως τα $x-1$, $y-2$ είναι ομόσημα. Επομένως το M μπορεί Θα ανήκει στο γραμμοσκιασμένο μέρος. Η ευθεία MM' θα τέμνει την $K\Lambda$ στο N. Σημειώνουμε με T την προβολή του M στον $x'x$.



Από την $\frac{x-1}{y-2} = 2$ έχουμε ότι $\frac{K'\Lambda'}{K'M'} = \frac{K''\Lambda''}{K''M''}$. Αλλά

$$\frac{K''\Lambda''}{K''M''} = \frac{K'\Lambda'}{K'M'} = \frac{K\Lambda}{KN} = \frac{K''\Lambda''}{K''T}$$

Κοιτώντας το πρώτο και το τελευταίο κλάσμα βλέπουμε ότι θα είναι $K''M'' = K''T$ που σημαίνει ότι πρέπει τα M'', T πρέπει να συμπίπτουν πράγμα αδύνατον. Άρα δεν υπάρχει σημείο M που να ικανοποιεί την $x - 2y + 3 = 0$ και να μην ανήκει στην ευθεία.

Εργαζόμενοι ανάλογα όπως πριν μπορούμε να βρούμε (δείτε και την άσκηση 340) αποτέλεσμα και για την γενική περίπτωση:

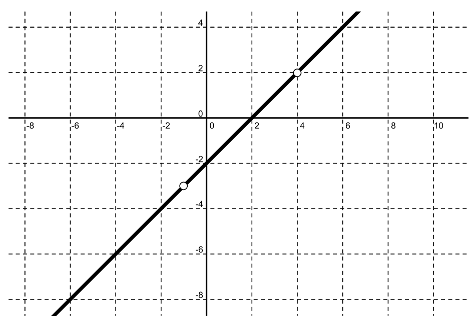
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Μια εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία}\\ K(x_1, y_1)\ \text{και}\ \Lambda(x_2, y_2)\ \text{είναι η:}\\ (x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)\end{array}} \tag{4.25}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι όταν η ευθεία (4.25) είναι παράλληλη στον $x'x$ δηλαδή $y_1 = y_2$ αφού τα σημεία είναι διαφορετικά θα είναι αναγκαστικά $x_1 \neq x_2$ και η (4.25) γράφεται $y = y_1$

Όμοια αν η ευθεία είναι παράλληλη στον $y'y$ δηλαδή $x_1 = x_2$ Θα είναι $y_1 \neq y_2$ και η και η (4.25) γράφεται $x = x_1$.

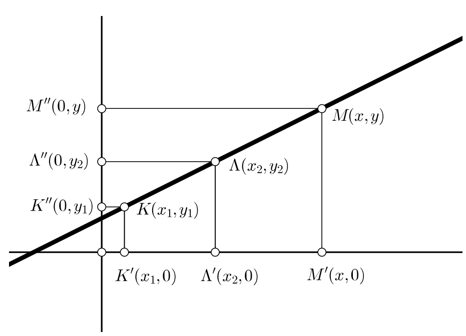
Άσκηση 337. Να βρείτε μία εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 4)$, $B(1, 3)$.

Άσκηση 338. Να βρείτε μία εξίσωση της ευθείας του σχήματος:

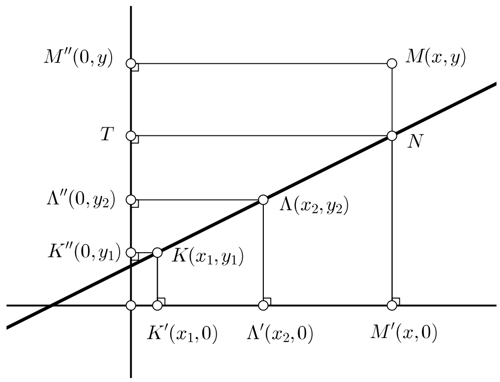


Άσκηση 339. Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών με εξισώσεις $2x - 3y = 1$, $x + y = 2$.

Άσκηση 340. (*) Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα διάφορα σημεία $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_2, y_2)$ ικανοποιεί την εξίσωση $(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$.



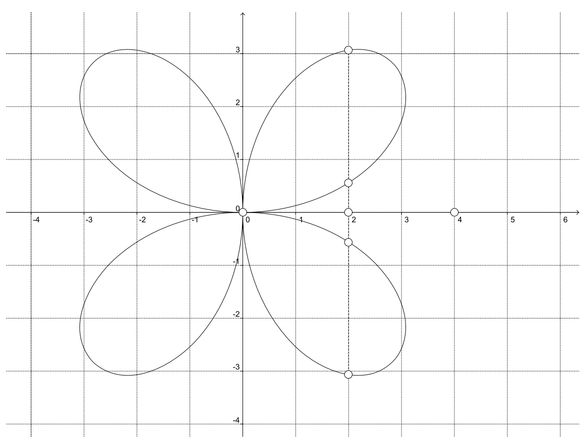
Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι κάθε σημείο του επιπέδου που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση ανήκει στην ευθεία.



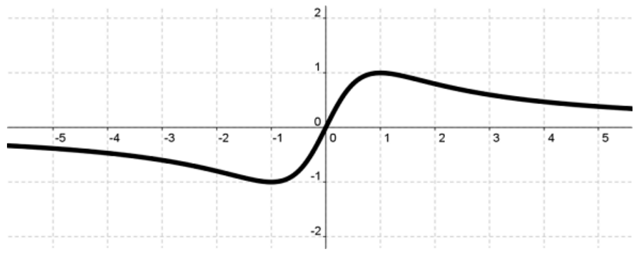
4.2 Συναρτήσεις

4.2.1 Η έννοια της συνάρτησης

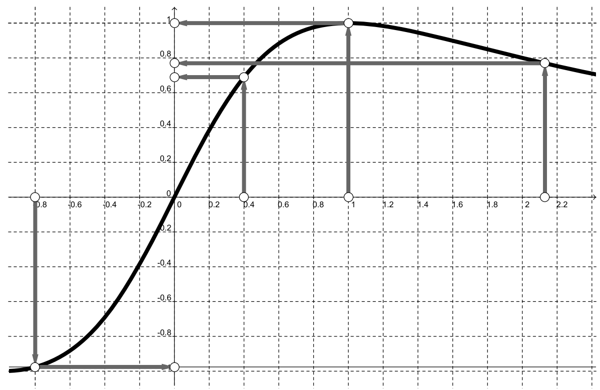
Στο παρακάτω σχήμα παριστάνει μία καμπύλη που ονομάζεται *ροδονέα* (από το *ρόδον*). Μία εξίσωση της είναι η $\left(x^2+y^2\right)^3=64x^2y^2$.



Στην καμπύλη μας μπορούμε να συναντήσουμε σημεία με ίδια τεταγμένη ή σημεία με ίδια τετμημένη. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχουν σημεία που έχουν τετμημένη 4, υπάρχουν τέσσερα σημεία που έχουν τετμημένη 2 και ένα μόνο σημείο με τετμημένη 0. Η περίπτωση όπου σε ένα αριθμό αντιστοιχεί το πολύ ένα σημείο με τετμημένη αυτό τον αριθμό (που σημαίνει ή μόνο ένα ή κανένα) παρουσιάζει χωριστό μαθηματικό ενδιαφέρον. Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται μία καμπύλη με εξίσωση $x^2y+y-2x=0$ που λέγεται *οφιοειδής*.



Σε αυτή την καμπύλη σε μία τετμημένη αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο της που έχει αυτήν ως τετμημένη και με την βοήθεια αυτού του σημείου μπορούμε να βρούμε και την τεταγμένη του. Έτσι μπορούμε να αντιστοιχούμε σε τετμημένες τεταγμένες δηλαδή σε αριθμούς του $x'x$ αριθμούς του $y'y$.



Αυτή η αντιστοίχιση ονομάζεται συνάρτηση[4]. Στα Μαθηματικά η συνάρτηση εμφανίζεται πιο γενικά. *Συνάρτηση* είναι μία διαδικασία όπου στα στοιχεία ενός συνόλου A (που λέγεται *πεδίο ορισμού* ή *σύνολο ορισμου* της συνάρτησης) αντιστοιχίζονται στοιχεία ενός άλλου συνόλου B (που λέγεται *σύνολο αφίξεως*) κατά τρόπο ώστε σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται ένα και μόνο ένα στοιχείο του B.

Παράδειγμα 82. Στον πίνακα φαίνονται διάφορα παραδείγματα συναρτήσεων:

Σύνολο A	Σύνολο B	Αντιστοίχιση
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	Στο ν αντιστοιχεί το $\nu+1$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	Στο ν αντιστοιχεί το 2ν
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	Στο ν αντιστοιχεί το $2\nu+1$
$\mathbb{N}$	$\mathbb{Q}$	Στο ν αντιστοιχεί το $\frac{\nu}{2}$
$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{Q}$	Στο ν αντιστοιχεί το $\frac{n+1}{n+2}$
Τα ενδεχόμενα του Ω	$[-1,1]$	Στο X αντιστοιχεί η πιθανότητα $P(X)$
Τα τρίγωνα του επιπέδου.	$(0,+\infty)$	Στο T αντιστοιχεί το εμβαδόν του
Το επίπεδο.	Το επίπεδο	Στο M αντιστοιχεί το συμμετρικό του ως προς K.

[4] Ο όρος στα Αγγλικά είναι function που σημαίνει λειτουργία και οφείλεται στον Leibniz ο οποίος χρησιμοποίησε τον λατινικό όρο functio. Η απόδοση στα Ελληνικά *συνάρτηση* δίνει έμφαση στο ότι η τιμή που «παίρνουμε» συναρτάται, εξαρτάται από την «τιμή» που δίνουμε.

Τις συναρτήσεις τις συμβολίζουμε με κάποια γράμματα f, g, h, φ, σ κ.α. Αν θέλουμε να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f αντιστοιχίζει στοιχεία του συνόλου A σε στοιχεία του συνόλου B γράφουμε $f : A \to B$ (διαβάζεται «f τέτοια ώστε το A να απεικονίζεται στο B»). Αν η f αντιστοιχίζει το $x \in A$ στο $y \in B$ γράφουμε $f : x \to y$ ή συνηθέστερα $y = f(x)$. Συνηθίζεται να λέμε ότι το $x \in A$ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης και το $y = f(x)$ η εξαρτημένη μεταβλητή που λέγεται και *τιμή* της f στο x. Φυσικά η χρήση των γραμμάτων x και y δεν είναι δεσμευτική και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα.

Επειδή για μία συνάρτηση αντιστοιχίζει σε ένα x ένα μόνο y σε ίσα x αντιστοιχίζει ίσα y. Με άλλα λόγια

$$\boxed{\text{Αν } x_1 = x_2 \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2)} \tag{4.26}$$

Έτσι αν μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς τότε $f(2) = f\left(\sqrt{4}\right)$ και $f\left(x^2 + 2x + 1\right) = f\left((x+1)^2\right)$ διότι $2 = \sqrt{4}$ και $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Το αντίστροφο δεν ισχύει δηλαδή αν συμβαίνει $f(x_1) = f(x_2)$ αυτό δεν σημαίνει ότι κατ•ανάγκην θα είναι και $x_1 = x_2$. Για παράδειγμα με $f(x) = x^2$ είναι $f(-2) = f(2)$ αλλά φυσικά δεν ισχύει $-2 = 2$!

Ειδική περίπτωση συνάρτησης είναι εκείνη όπου τόσο το A όσο και το B είναι μη κενά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Λέμε τότε ότι έχουμε *πραγματική συνάρτηση* μία *πραγματικής μεταβλητής*. Πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η αντιστοίχιση $x \to f(x)$ να γίνεται με την βοήθεια ενός ή περισσότερων παραστάσεων (τύπων).

Παράδειγμα 83. Με $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f : A \to B$ με $f(x) = (x+1)(x+2) + 1$. Τότε

$$f(\mathbf{1}) = (\mathbf{1} + 1)(\mathbf{1} + 2) + 1 = 7$$

$$f(-\mathbf{3}) = (-\mathbf{3} + 1)(-\mathbf{3} + 2) + 1 = 3$$

$$f\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right) = \left(\sqrt{\mathbf{2}} + 1\right)\left(\sqrt{\mathbf{2}} + 2\right) + 1 = 3\sqrt{2} + 5$$

Παράδειγμα 84. Με $A = [0, +\infty)$, $B = \mathbb{R}$ θεωρούμε την συνάρτηση $q : A \to B$ με $g(x) = \sqrt{x} + x^2$. Τότε

$$g(\mathbf{0}) = \sqrt{\mathbf{0}} + \mathbf{0}^2 = 0$$

$$g(\mathbf{4}) = \sqrt{\mathbf{4}} + \mathbf{4}^2 = 18$$

Παράδειγμα 85. Με $A = \mathbb{N}^*$ δηλαδή $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ και $B = \mathbb{R}$ ορίζουμε την συνάρτηση $\alpha : A \to \mathbb{R}$ με $\alpha(\nu) = 2 + 3\nu$. Είναι

$$\alpha(\mathbf{1}) = 2 + 3 \cdot \mathbf{1} = 5$$

$$\alpha(\mathbf{2}) = 2 + 3 \cdot \mathbf{2} = 8$$

$$\alpha(\mathbf{3}) = 2 + 3 \cdot \mathbf{3} = 11$$

Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών ή το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών[5] ονομάζεται *ακολουθία* και οι αριθμοί

$$\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(4), \ldots$$

ονομάζονται *όροι* της ακολουθίας. Για τις ακολουθίες χρησιμοποιούμε δείκτες για να δηλώσουμε τους όρους της γράφοντας α_ν αντί για $\alpha(\nu)$. Στην περίπτωση μας είναι:

$$\alpha_1 = 5 \quad \alpha_2 = 8 \quad \alpha_3 = 11$$

Παράδειγμα 86. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν} \quad x < 1 \\ 2x - 1 & \text{αν} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

τότε

$$h(\mathbf{2}) = 2 \cdot \mathbf{2} - 1 = 3$$

$$h(-\mathbf{3}) = (-\mathbf{3})^2 = 9$$

Άσκηση 341. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Να γράψετε τα:

1. $f(2)$
2. $f(-1)$
3. $f\left(\frac{1}{2}\right)$
4. $f\left(\sqrt{2}\right)$
5. $f(x+2)$
6. $f(x-2)$

Άσκηση 342. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Να γράψετε τα:

1. $f(2)$
2. $f(-5)$
3. $f(x+4)$
4. $f(4-x)$
5. $f(3x)$
6. $f\left(\frac{x}{3}\right)$

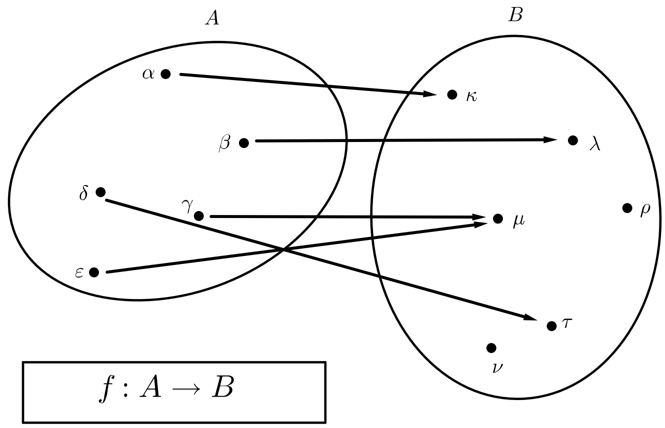
Άσκηση 343. Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 + x(x - \alpha)$. Να βρείτε τον α ώστε να ισχύει $g(5) = 5$.

Άσκηση 344. Έστω η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^3 + \lambda x$. Να επαληθεύσετε την ισότητα: $g(\lambda + 1) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda + 1$.

4.2.2 Μερικοί τρόποι για να «βλέπουμε» τις συναρτήσεις

Με διαγράμματα του Venn. Ένας σχηματικός τρόπος για να παριστούμε μία συνάρτηση είναι σχεδιάζοντας διαγράμματα για τα σύνολα που συνδέει και βελάκια που δείχνουν την αντιστοίχιση των στοιχείων:

[5] Σε μερικές περιπτώσεις και με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ της μορφής $\{1, 2, 3, 4, \ldots, \nu\}$

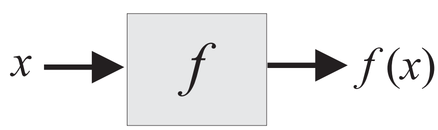


Σημειώστε ότι:

- Μια συνάρτηση δεν μπορεί να αντιστοιχίζει σε ένα στοιχείο δύο ή περισσότερα στοιχεία. Επομένως δε μπορεί από το ίδιο στοιχείο να ξεκινούν δύο ή περισσότερα βελάκια.

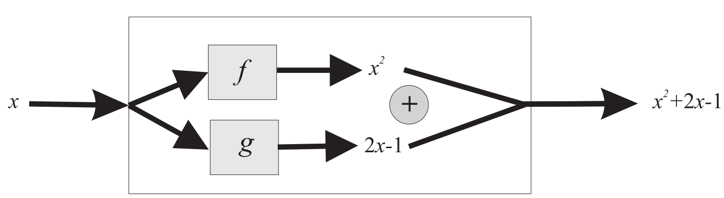
- Σε ένα στοιχείο του συνόλου αφίξεως μπορεί να μην καταλήγει κανένα βελάκι ή να καταλήγουν περισσότερα από ένα βελάκια

Ως μηχανισμούς. Επίσης είναι χρήσιμο να φανταζόμαστε μία συνάρτηση ως ένα μηχανισμό: εισάγουμε στοιχεία και παίρνουμε στοιχεία:

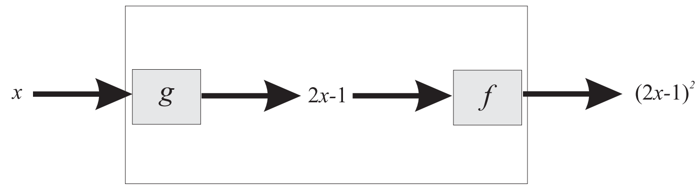


Μπορούμε να «συνδέουμε» τέτοιους μηχανισμούς και να φτιάχνουμε πιο σύνθετες συναρτήσεις.

Παράδειγμα 87. Αν έχουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 1$ τότε μπορούμε να έχουμε μία «παράλληλη» σύνδεση των μηχανισμών ως εξής:



Παράδειγμα 88. Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις του προηγουμένου παραδείγματος αλλά τις συνδέουμε σε σειρά:

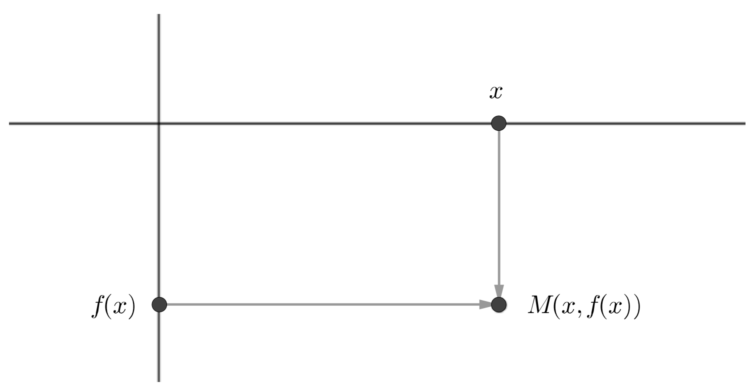


Το x εισάγεται στην g μας δίνει $2x-1$ το οποίο με την σειρά του εισάγεται στην f. Η f αντιστοιχίζει κάθε αριθμό στο τετράγωνο του. Στον $2x-1$ αντιστοιχίζει το $(2x-1)^2$.

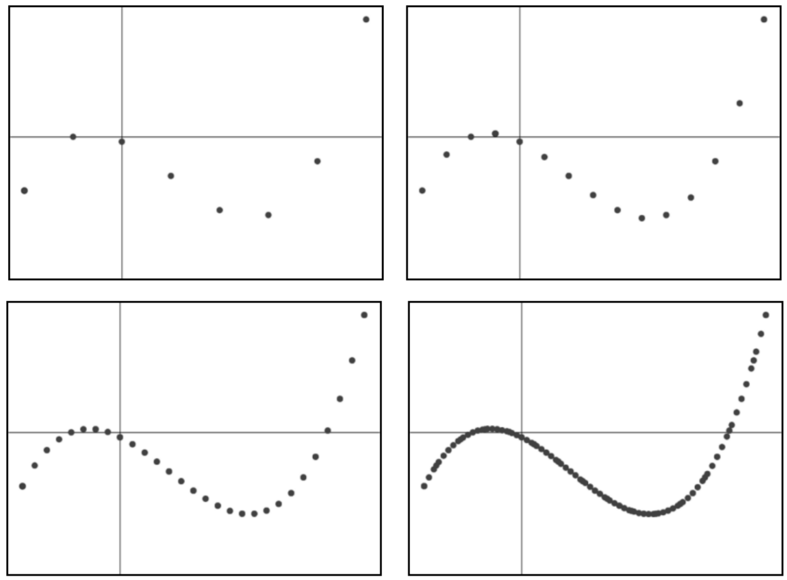
Με πίνακα τιμών. Μπορούμε να δώσουμε πληροφορίες για μία συνάρτηση ή να πάρουμε πληροφορίες για μια συνάρτηση με την βοήθεια ενός πίνακα τιμών όπου στην μία γραμμή του εμφανίζονται οι τιμές της ανεξάρτης μεταβλητής (συνήθως του x)και στην άλλη οι τιμές της εξαρτημένης (συνήθως του y). Αντί γραμμών μπορούμε να έχουμε στήλες. Στον πίνακα τιμών που ακολουθεί δίνονται κάποιες τιμές της $f(x)=x^3$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27	64	125

Ως γραφικές παραστάσεις. Με δυο λόγια σαν γραμμές όπως ακριβώς ξεκινήσαμε στην αρχή της ενότητας. Αν έχουμε μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ όπου το A είναι κάποιο (μη κενό) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A$ ένα μόνο $y = f(x)$ και κατά συνέπεια και το σημείο $M(x, f(x))$.



Όταν το x μεταβάλλεται όλα τα σημεία $M(x, f(x))$ απαρτίζουν ένα σύνολο σημείων που λέγεται γραφική παράσταση της συνάρτησης. Συνήθως το A είναι απειροσύνολο και φυσικά δε μπορούμε να σχεδιάσουμε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης. Όσο περισσότερα σημεία της γραφικής παράσταση θεωρήσουμε τόσο πιο καλή εικόνα έχουμε για την συνάρτηση μας:



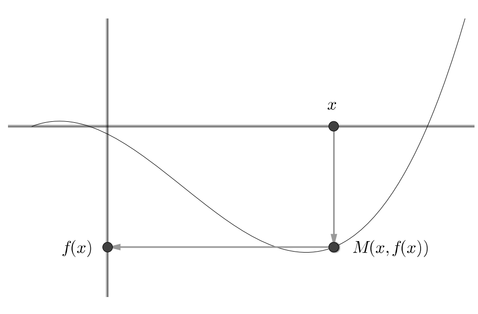
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης περιλαμβάνει μόνο τα σημεία της μορφής $M(x, f(x))$ επομένως:

Το σημείο $P(\alpha, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f αν
- Το α ανήκει στο πεδιο ορισμού της f
- $f(\alpha) = \beta$

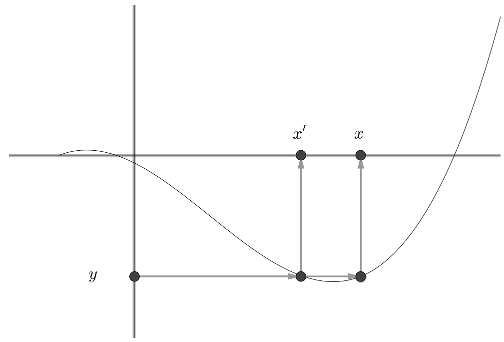
(4.27)

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μπορεί να μας δώσει αρκετές πληροφορίες για την συνάρτηση. Μεταξύ άλλων:

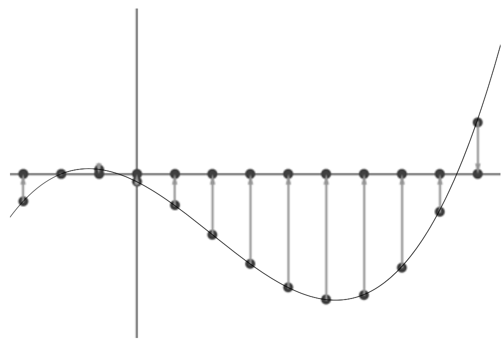
- Μπορούμε να βρούμε ποιο y αντιστοιχεί σε δοθέν x.



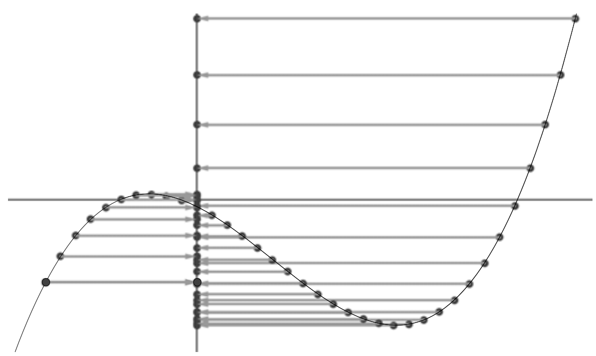
- Μπορούμε να βρούμε ποια x αντιστοιχούν σε δοθέν y.



- Μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της f.



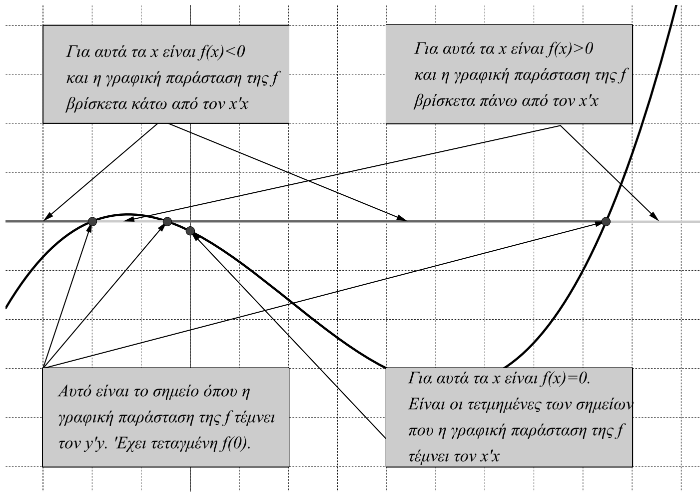
- Μπορούμε να βρούμε ποια y είναι τιμές της f.



- Μπορούμε να βρούμε

    1. Για ποια x είναι $f(x) > 0$: Είναι εκείνα για τα οποία τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται πάνω από τον $x'x$.
    2. Για ποια x είναι $f(x) < 0$: Είναι εκείνα για τα οποία τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται κάτω από τον $x'x$.
    3. Για ποια x είναι $f(x) = 0$ δηλαδή είναι ρίζες της f: Είναι εκείνα για τα οποία τα αντίστοιχα σημεία της γραφικής παράστασης βρίσκονται πάνω στον $x'x$. Πρόκειται για τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τον $x'x$.

4. Το σημείο που τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα $y'y$. Η τεταγμένη του είναι το $f(0)$.



Άσκηση 345. Με την βοήθεια της Geogebra να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $f(x) = 3x$
2. $f(x) = \frac{3}{x}$
3. $f(x) = x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = 3x + 4$
6. $f(x) = -3(x+4)$

Άσκηση 346. Με την βοήθεια της Geogebra να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

1. $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$
2. $f(x) = x^2 + 3x + 3$
3. $f(x) = x^3 - 2x$
4. $f(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$

Άσκηση 347. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

1. Βρείτε σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τετμημένη 2.
2. Βρείτε σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τετμημένη 1.
3. Βρείτε σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 3.
4. Βρείτε σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 1.

Άσκηση 348. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

1. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το σημείο $P(2, \lambda)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f.
2. Να βρείτε για ποια τιμή του μ το σημείο $T\left(\mu, -\frac{1}{2}\right)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f.

Άσκηση 349. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x(x-1)$.

1. Να βρείτε για ποια x η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

4.2.3 Για το πεδίο ορισμού

Είναι πολύ συνηθισμένο μία συνάρτηση να παρουσιάζεται με ένα τύπο χωρίς καμία αναφορά στο πεδίο ορισμού. Τότε εφ' όσον χρειάζεται φροντίζουμε να το προσδιορίσουμε εμείς ακολουθώντας τον εξής κανόνα:

Εξαιρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ο τύπος δεν έχει νόημα. Με άλλα λόγια κρατάμε εκείνους τους αριθμούς που μπορούν να αντικατασταθούν στον τύπο χωρίς να υπάρξει πρόβλημα στην εκτέλεση των πράξεων με άλλα λόγια χωρίς να «μπλοκάρει» ο τύπος. Η συνηθέστερες (σε άλλη τάξη θα συναντήσουμε και άλλες) προφυλάξεις που παίρνουμε είναι:

- Αν έχουμε παρονομαστές σε κλάσματα $\frac{A}{B}$ απαιτούμε $B\neq 0$.
- Αν έχουμε ρίζες $\sqrt{A}$ απαιτούμε $A\geq 0$.

Παράδειγμα 89. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$

Λύση. Εδώ δεν υπάρχει πρόβλημα όποιο αριθμό και αν αντικαταστήσουμε στην θέση του x και επομένως το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 90. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\frac{x}{x-1}$

Λύση. Εδώ έχουμε παρονομαστή και πρέπει να φροντίσουμε να είναι διάφορος του μηδενός. Πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$. Μπορούμε να παρουσιάσουμε το πεδίο ορισμού με τους ακόλουθους τρόπους που λένε όλοι το ίδιο πράγμα:

- Το πεδίο ορισμού της g αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς που είναι διάφοροι του 1.
- Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $\mathbb{R}-\{1\}$.
- Το πεδίο ορισμού της g είναι το σύνολο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Παράδειγμα 91. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=\sqrt{2x-4}$.

Λύση. Εδώ πρέπει το υπόρριζο να είναι μη αρνητικό δηλαδή $2x-4\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 4 \Leftrightarrow x\geq 2$. Το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[2,+\infty)$.

Παράδειγμα 92. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$.

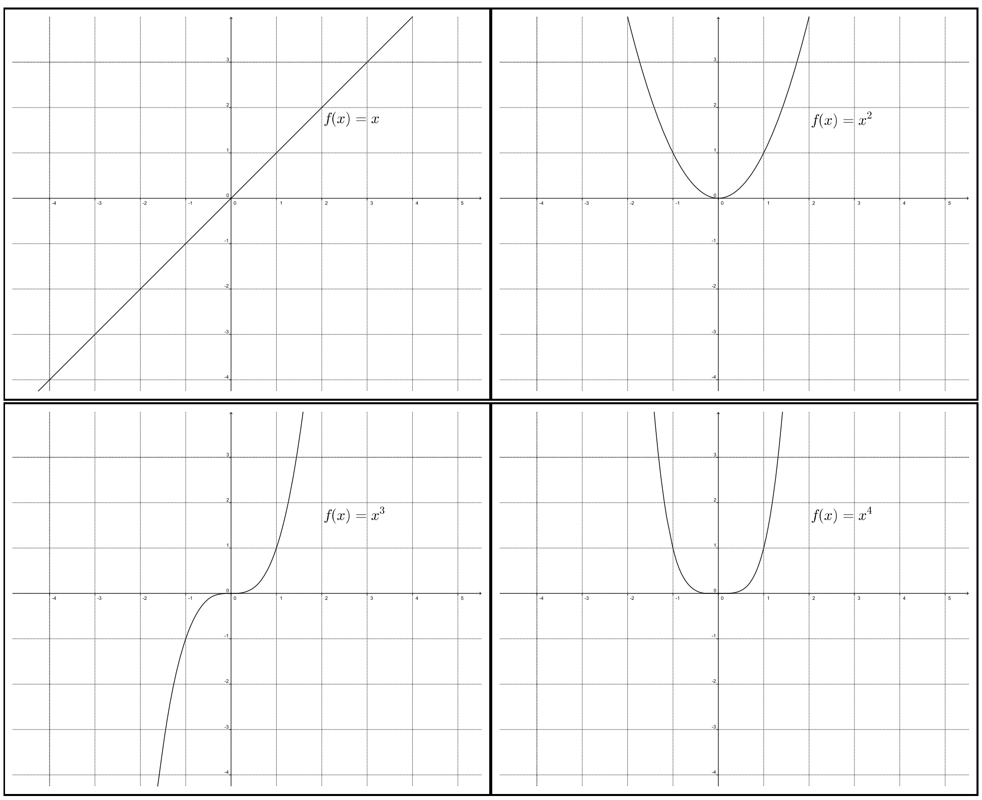
Λύση. Εδώ πρέπει και τα δύο υπόρριζα να είναι μη αρνητικά δηλαδή να συναληθεύουν οι ανισώσεις $x-1\geq 0$, $5-x\geq 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι πρέπει να ισχύει $1\leq x\leq 5$ και το πεδίο ορισμού είναι το διάστημα $[1,5]$.

Άσκηση 350. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

1. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$
2. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+3}$
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+3x+3}$
5. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$
6. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

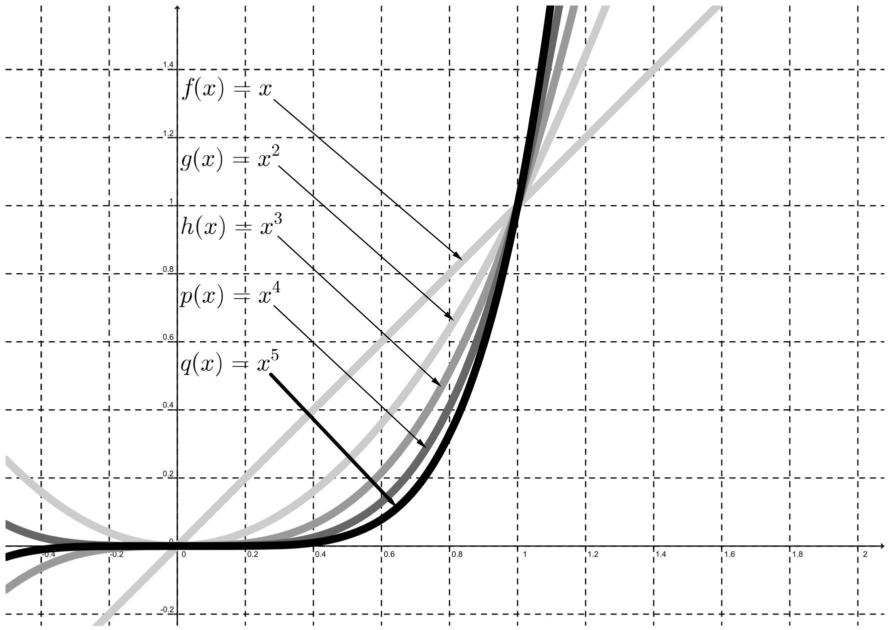
4.2.4 Η συνάρτηση x^ν

Μπορούμε με την βοήθεια ενός πίνακα τιμών και αρκετές πράξεις ή ποιο απλά στην Geogebra να κάνουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^\nu$ για τις τιμές $\nu = 1, 2, 3, ...$ Πίσω από τον τύπο $f(x) = x^\nu$ κρύβονται πολλές συναρτήσεις μία για κάθε τιμή του ν. Ας δούμε μερικές:



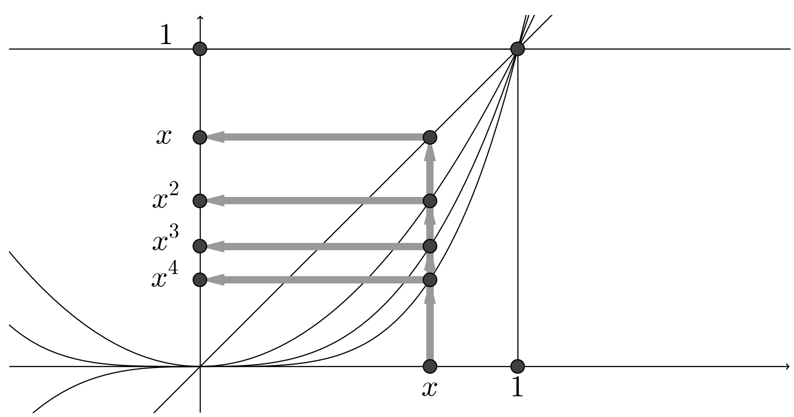
Βλέπουμε ότι για τις άρτιες τιμές του ν η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον $x'x$ εκτός από το σημείο O πράγμα αναμενόμενο αφού $x^{\text{θετικό άρτιο}} \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 0$. Όταν ο εκθέτης είναι περιττός τότε η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον $x'x$ μόνο για τα θετικά x.

Ας δούμε τώρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων x^ν συγκριτικά δηλαδή σχεδιασμένες στο ίδιο σύστημα αξόνων.



Παρατηρούμε ότι όλες οι γραφικές παραστάσεις διέρχονται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο με συντεταγμένες ίσες με 1. Τα σημεία όλων των γραφικών παραστάσεων που αντιστοιχούν σε θετικά x. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

- Στο διάστημα $(0, 1)$ η γραφική παράσταση της x βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της x^2 που με την σειρά της βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της x^3 κ.ο.κ. Όλες δε οι γραφικές παραστάσεις βρίσκονται κάτω από την γραφική παράσταση της $y = 1$. Αυτό σημαίνει ότι αν πάρουμε ένα x από το $(0, 1)$ και το υψώσουμε στις δυνάμεις 0, 1, 2, 3, ... τότε υψώνοντας σε μεγαλύτερο εκθέτη παίρνουμε μικρότερο αποτέλεσμα:



Αυτό σημαίνει ότι αν $x \in (0, 1)$ και για τους φυσικούς ακέραιους μ, ν ισχύει $\mu < \nu$ τότε $x^\mu > x^\nu$. Πράγματι: $x^\mu > x^\nu \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 > \frac{x^\nu}{x^\mu} \Leftrightarrow 1 > x^{\nu-\mu} \Leftrightarrow 1^{\nu-\mu} >$

$x^{\nu-\mu} \Leftrightarrow 1 > x$ και η τελευταία σχέση ισχύει. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } 0 < x < 1 \text{ και για τους φυσικούς αριθμούς} \\ \mu, \nu \text{ ισχύει } \mu < \nu \text{ τότε } x^\mu > x^\nu\end{array}} \tag{4.28}$$

Όταν ο x γίνει μεγαλύτερος από το 1 τα πράγματα αλλάζουν: Σε μεγαλύτερο εκθέτη αντιστοιχεί μεγαλύτερη δύναμη:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } x > 1 \text{ και για τους φυσικούς αριθμούς} \\ \mu, \nu \text{ ισχύει } \mu < \nu \text{ τότε } x^\mu < x^\nu\end{array}} \tag{4.29}$$

Η απόδειξη είναι ίδια με την προηγούμενη: $x^\mu < x^\nu \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{x^\nu}{x^\mu} \Leftrightarrow 1 < x^{\nu-\mu} \Leftrightarrow 1^{\nu-\mu} < x^{\nu-\mu} \Leftrightarrow 1 > x$ (ισχύει)

Άσκηση 351. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις με το κατάλληλο σύμβολο από τα <, > ώστε να προκύψει αληθής ανισότητα:

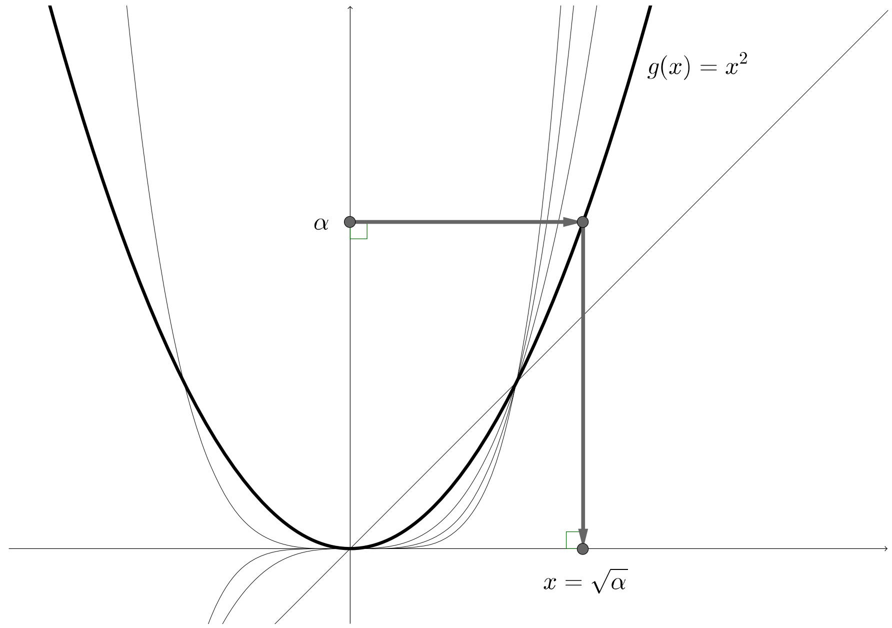
1. $2^3 ... 2^4$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 ... \left(\frac{2}{3}\right)^9$
3. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{33} ... \left(\sqrt{2}-1\right)^{44}$
4. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}\right)^4 ... \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}\right)^7$
5. $(1+|x|)^{2012} ... (1+|x|)^{2000}$ με $x \neq 0$
6. $1+\left(\frac{2}{3}\right)^{11} ... 1+\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$

Άσκηση 352. Έστω $0 < x < 1$.

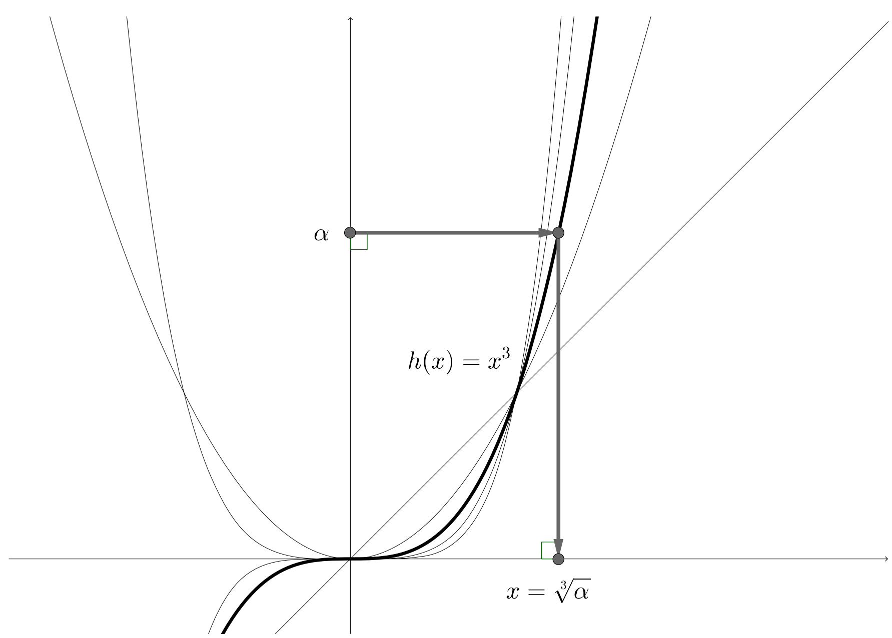
1. Πολλαπλασιάστε και όλα τα μέλη της $0 < x < 1$ με τον θετικό αριθμό x. Ποια ανισότητα προκύπτει;
2. Δώστε μία άλλη απόδειξη για την (4.28)

4.2.5 Η έννοια της ν-οστής ρίζας.

Ας δούμε ξανά την γραφική παράσταση των συναρτήσεων x^ν στρέφοντας την προσοχή μας στην $g(x) = x^2$. Αν πάρουμε ένα $\alpha \geq 0$ στον άξονα $y'y$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $g(x) = \alpha$. Γεωμετρικά μπορούμε να το βρούμε πολύ απλά: αρκεί να φέρουμε μία κάθετη στον $y'y$ στο σημείο α να κινηθούμε προς τα δεξιά, να συναντήσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης, να φέρουμε κάθετη στον $x'x$: Θα βρούμε ένα μη αρνητικό αριθμό x ώστε $g(x) = \alpha$ με άλλα λόγια $x^2 = \alpha$. Ασφαλώς ο αριθμός x δεν είναι άλλος από την τετραγωνική ρίζα ρου α δηλαδή ο $\sqrt{\alpha}$.



Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και με την $h(x) = x^3$. Τότε στον τυχόντα $\alpha \geq 0$ αντιστοιχούμε ένα $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $h(x) = \alpha$ δηλαδή $x^3 = \alpha$. Κατ αναλογία με την τετραγωνική ρίζα ο αριθμός x ονομάζεται *κυβική ρίζα* του α και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{\alpha}$. Δηλαδή η κυβική ρίζα του μη αρνητικού αριθμού α είναι ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμό x που αν υψωθεί στον κύβο (=στην τρίτη) μας δίνει το α.



Κατ' αναλογία με την τετραγωνική ρίζα έχουμε:

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\alpha} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^3 = \alpha \end{array}\right\}} \tag{4.30}$$

Παράδειγμα 93. Είναι $\sqrt[3]{0} = 0,\ \sqrt[3]{1} = 1,\ \sqrt[3]{8} = 3,\ \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$.

Παράδειγμα 94. Να αποδειχθεί ότι $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

Λύση. Για να είναι ο μη αρνητικός αριθμός $x = 1 + \sqrt{2}$ κυβική ρίζα του επίσης μη αρνητικού αριθμού $\alpha = 7 + 5\sqrt{2}$ θα πρέπει αν ο x υψωθεί στην τρίτη να μας δώσει τον α με άλλα λόγια θα πρέπει $\left(1 + \sqrt{2}\right)^3 = 7 + 5\sqrt{2}$. Άρα απομένει να δούμε αν η τελευταία ισότητα αληθεύει. Πράγματι:

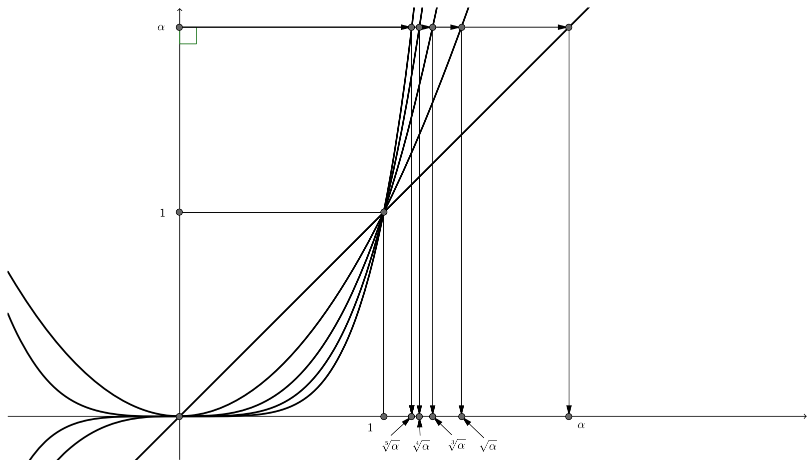
$$\left(1 + \sqrt{2}\right)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^3 =$$

$$= 1 + 3\sqrt{2} + 6 + \sqrt{2}^2\sqrt{2}^3 = 1 + 3\sqrt{2} + 6 + \sqrt{2}^2\sqrt{2} =$$

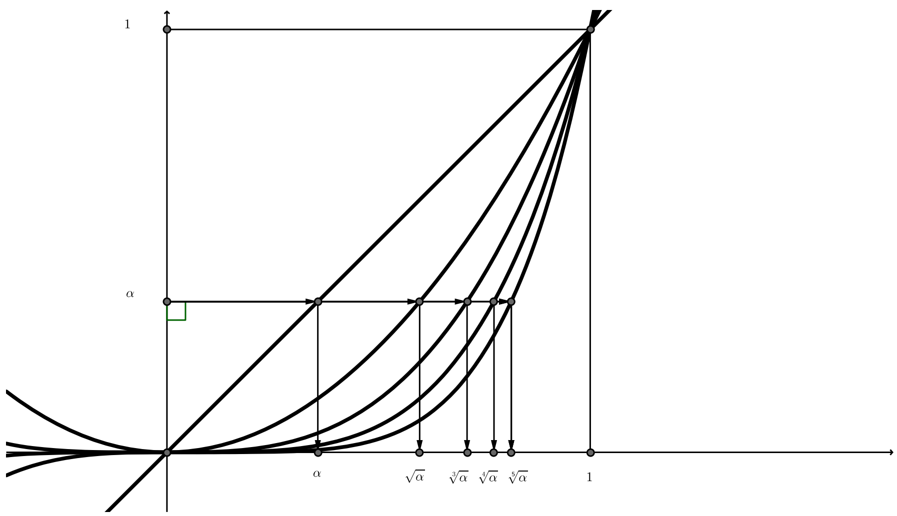
$$= 1 + 3\sqrt{2} + 6 + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

Δοθέντος ενός $\alpha \geq 0$ με την ίδια λογική που αναζητήσαμε μη αρνητικούς αριθμούς που αν υψωθούν στο τετράγωνο ή στην τρίτη να μας δίνουν το α μπορούμε να αναζητήσουμε και μη αρνητικούς αριθμούς που αν υψωθούν στην τετάρτη, στην πέμπτη, στην έκτη κ.ο.κ. να μας δίνουν τον α. Ονομάζονται αντιστοίχως τέταρτη, πέμπτη, έκτη ρίζα του α κ.ο.κ και συμβολίζονται με $\sqrt[4]{\alpha},\ \sqrt[5]{\alpha},\ \sqrt[6]{\alpha}$

Δοθέντος ενός $\alpha \geq 0$ με την ίδια λογική που αναζητήσαμε μη αρνητικούς αριθμούς που αν υψωθούν στο τετράγωνο ή στην τρίτη να μας δίνουν το α μπορούμε να αναζητήσουμε και μη αρνητικούς αριθμούς που αν υψωθούν στην τετάρτη, στην πέμπτη, στην έκτη κ.ο.κ. να μας δίνουν τον α. Ονομάζονται αντιστοίχως τέταρτη, πέμπτη, έκτη ρίζα του α κ.ο.κ και συμβολίζονται με κ.ο.κ. $\sqrt[4]{\alpha},\ \sqrt[5]{\alpha},\ \sqrt[6]{\alpha}$. Για την τετραγωνική ρίζα διατηρούμε τον «παλιο» συμβολισμό και προτιμάμε να γράφουμε $\sqrt{\alpha}$ αντί $\sqrt[2]{\alpha}$. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τις ρίζες αυτές όταν $\alpha > 1$



ενώ όταν $\alpha < 1$ η εικόνα είναι η ακόλουθη:



Γενικά για κάθε μη αρνητικό αριθμό α και κάθε θετικό ακέραιο ν ορίζεται η $\nu-$οστή του ρίζα ως ο μοναδικός μη αρνητικός αριθμός που αν υψωθεί στην ν μας δίνει το α. Συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Ισχύει φυσικά:

$$\boxed{x = \sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^{\nu} = \alpha \end{array} \right\}} \tag{4.31}$$

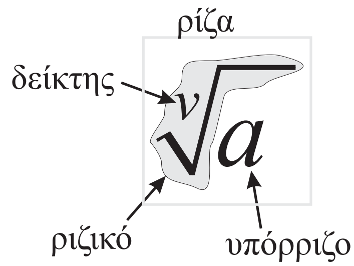
Φυσικά για κάθε μη αρνητικό αριθμό α ισχύει

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu} = \alpha} \tag{4.32}$$

και ακόμη:

$$\boxed{\sqrt[1]{\alpha} = \alpha, \quad \sqrt[\nu]{1} = 1, \quad \sqrt[\nu]{0} = 0} \tag{4.33}$$

Το $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ονομάζεται *ρίζα*, ο αριθμός α ονομάζεται *υπόρριζο*, και ο ν ονομάζεται *δείκτης της ρίζας* και συχνά το σύβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ ονομάζεται *ριζικό*:



Παράδειγμα 95. α) Είναι $\sqrt[4]{81} = 3$ διότι $3^4 = 81$. β) Για να βρούμε την $\sqrt[4]{625}$ χρειάζεται να βρούμε ένα θετικό αριθμό που αν υψωθεί στην 4η να μας δώσει το $\sqrt[4]{625}$. Δοκιμάζοντας διάφορους αριθμούς (αργότερα θα δούμε και άλλη τεχνική) βρίσκουμε ότι $\sqrt[4]{625} = 5$.

Παράδειγμα 96. Ας θεωρήσουμε ένα θετικό αριθμό m. Τότε $\sqrt[3]{m^3} = m$ διότι ο αριθμός τον οποίο πρέπει να υψώσουμε στην τρίτη για να βρούμε τον m^3 δεν είναι άλλος από τον m. Επίσης $\sqrt[3]{m^6} = m^2$ διότι πράγματι $m^6 = \left(m^2\right)^3$. Τέλος $\sqrt[5]{m^{15}} = m^3$ αφού $\left(m^3\right)^5 = m^{15}$.

Άσκηση 353. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\sqrt[4]{1296} =$
2. $\sqrt[5]{a^{10}} = \quad a > 0$
3. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$
4. $\sqrt[r]{a^{rt}} = \quad , \quad a > 0$
5. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{36}}} = \quad , \quad a > 0$
6. $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{8}} =$

Άσκηση 354. Αν $\sqrt[4]{\alpha} = 3$ και $\sqrt[4]{\beta} = 5$ βρείτε το $\alpha + \beta$.

Άσκηση 355. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $\left(1 + \sqrt[3]{2}\right)^3 = 3 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}^2$
2. $\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)^3 = 1 - 3\sqrt[3]{3}^2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}^2$
3. $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}^2}$

Άσκηση 356. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3 = x + 3\sqrt[3]{x}^2\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}^2 + y$
2. $\left(\sqrt[3]{x + \sqrt{y}}\right)^6 = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$

3. $\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}\right)^6 - \left(\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}\right)^6 = 4x\sqrt{y}$

Άσκηση 357. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

1. $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3 = x + 3\sqrt[3]{x}^2\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}^2 + y$
2. $\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}\right)^6 = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$
3. $\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{y}}\right)^6 - \left(\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}\right)^6 = 4x\sqrt{y}$

Άσκηση 358. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{5 + 6\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}^2} = 1 + \sqrt[3]{4}$

Άσκηση 359. Έστω ότι $\sqrt[3]{\alpha} = x$ και $\sqrt[3]{\beta} = y$. Να αποδείξετε ότι $(x+y)^3 - 3xy\,(x+y) = \alpha + \beta$

Άσκηση 360. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = x + 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x}$.

4.2.6 ν-οστές ρίζες και πράξεις.

Οι ιδιότητες (3.52), (3.53) που είδαμε για τις τετραγωνικές ρίζες μεταφέρονται και στις $\nu-$οστές ρίζες. Δηλαδή για τους μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}} \tag{4.34}$$

και

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}} \tag{4.35}$$

Οι αποδείξεις είναι παρόμοιες:

$$\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha\beta}^\nu = \sqrt[\nu]{\alpha}^\nu\sqrt[\nu]{\beta}^\nu \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta$$

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^\nu = \left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^\nu \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}^\nu = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}^\nu}{\sqrt[\nu]{\beta}^\nu} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

και οι αρχικές ισχύουν διότι ισχύουν οι τελικές δηλαδή οι $\alpha\beta = \alpha\beta$ και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$. Η (4.34) ισχύει και για περισσότερος από δύο αριθμούς. Έτσι αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\mu$ είναι μη αρνητικοί τότε ισχύει:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ ...\ \alpha_\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha_1}\sqrt[\nu]{\alpha_2}...\sqrt[\nu]{\alpha_\mu}} \tag{4.36}$$

Αν δε οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\mu$ είναι όλοι ίσοι με α τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha}^\mu} \tag{4.37}$$

Η προηγούμενη σχέση για $\mu = \nu$ γίνεται $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha}^\nu$ που αν την συνδυάσουμε με την (4.32) μας δίνει ότι για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha}^\nu = \alpha} \tag{4.38}$$

Η σχέση 4.38 μας πληροφορεί ότι η εξαγωγή ν-οστής ρίζας και η ύψωσή την ν είναι αντίστροφες διαδικασίες και η μία ακυρώνει την δράση της άλλης: Αν υψώσουμε ένα μη αρνητικό αριθμό σε μία δύναμη και μετά πάρουμε την ν-οστή ρίζα θα βρεθούμε εκεί που ξεκινήσαμε. Το ίδιο θα συμβεί αν πάρουμε πρώτα δύναμη και μετά ρίζα (εννοείται ότι δείκτης και εκθέτης θα είναι οι ίδιοι).

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν παίρνουμε διαδοχικά δύο ρίζες του ίδιου μη αρνητικού αριθμού όχι κατ' ανάγκην με τον ίδιο δείκτη. Ας πούμε ότι έχουμε τον αριθμό α. Παίρνουμε την $\nu-$οστή ρίζα του (δηλαδή τον αριθμό $\sqrt[\nu]{a}$). Θα είναι ένας αριθμός $x \geq 0$ που αν υψωθεί στην ν θα μας δώσει τον α. Παίρνουμε στην συνέχεια την $\mu-$οστή ρίζα του x (δηλαδή τον $\sqrt[\mu]{x}$ που δεν είναι άλλος από τον $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}}$). Θα είναι ένας αριθμός $y \geq 0$ που αν υψωθεί στην μ θα μας δώσει τον x. Έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[r, "\sqrt[\nu]{\ }"] & x \arrow[l, bend left, "(\,)^{\nu}"] \arrow[r, "\sqrt[\mu]{\ }"] & y \arrow[l, bend left, "(\,)^{\mu}"] \arrow[ll, bend left=60, "(\,)^{\mu\nu}"]
\end{tikzcd}$$

Βλέπουμε ότι για να ξαναγυρίσουμε στο α ξεκινώντας από το y πρέπει να υψώσουμε το y στην μ για να φθάσουμε στο x και μετά να υψώσουμε το x στην ν για να φθάσουμε στο α. Δηλαδή $\left(y^{\mu}\right)^{\nu} = \alpha$ που σημαίνει ότι $y^{\mu\nu} = \alpha$. Άρα για να πάρουμε το α πρέπει να υψώσουμε τον y στην $\mu\nu$. Δηλαδή $y^{\mu\nu} = \alpha$ που σημαίνει ότι $y = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$. Αλλά είναι και $y = \sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}}$. Επομένως:

$$\boxed{\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}} \tag{4.39}$$

Φυσικά η (4.39) μπορεί να αποδειχθεί και με τον συνηθισμένο τρόπο:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}}\right)^{\mu\nu} = \left(\sqrt[\mu\nu]{\alpha}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}}^{\mu}\right)^{\nu} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}^{\mu\nu} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{a}^{\nu} = \alpha$$

Το γεγονός ότι η διαδοχική ύψωση σε δύναμη και εξαγωγή ρίζας με ίδιο εκθέτη και δείκτη δεν αλλάζει τον αρχικό αριθμό μας δίνει την δυνατότητα να βρούμε ένα τύπο που μας επιτρέπει να απλοποιούμε ρίζες δυνάμεων. Ας πάρουμε τον αριθμό $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$. Ο αριθμός αυτό δεν αλλάζει αν παρεμβάλλουμε ανάμεσα στην ρίζα και την δύναμη μία άλλη ρίζα και μία άλλη δύναμη αρκεί να έχουν ίδιο εκθέτη-δείκτη: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}}$. Όμως οι δύο ρίζες μπορούν να γίνουν μία και οι δύο δυνάμεις επίσης μπορούν να γίνουν μία άρα έχουμε $\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$. Τελικά:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} \tag{4.40}$$

Η αξία της παραπάνω ισότητας είναι ότι μας επιτρέπει απολοποιήσεις:

$$\sqrt[\nu\cancel{\rho}]{\alpha^{\mu\cancel{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Παράδειγμα 97. Αν $\sqrt[4]{\alpha} = 3$, $\sqrt[4]{\beta} = 6$, $\sqrt[4]{\gamma} = 11$ τότε για να βρούμε το $\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (4.36) και θα έχουμε

$$\sqrt[4]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\beta}\sqrt[4]{\gamma} = 3\cdot 6\cdot 11 = 198$$

Παράδειγμα 98. Μπορούμε να βρίσκουμε ρίζες ακεραίων αν τους αναλύσουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων οπότε το μόνο που χρειάζεται είναι *να ξέρουμε τις ρίζες μόνο των πρώτων αριθμών.* Ας πούμε ότι έχουμε να βρούμε την $\sqrt[3]{765}$. Αναλύοντας τον 765 βρίσκουμε $3^2\cdot 5\cdot 17$ οπότε

$$\sqrt[3]{765} = \sqrt[3]{3^2\cdot 5\cdot 17} = \sqrt[3]{3^2}\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{17}$$

Με την βοήθεια της (4.37) έχουμε ότι $\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3}^2$ οπότε:

$$\sqrt[3]{765} = \sqrt[3]{3}^2\sqrt[3]{5}\sqrt{17}$$

Αν πάρουμε τις προσεγγιστικές τιμές $\sqrt[3]{3} = 1,4$, $\sqrt[3]{5} = 1,7$, $\sqrt[3]{17} = 2,6$ τότε βρίσκουμε $\sqrt[3]{765} = 1,4^2\cdot 1,7\cdot 2,6 = 8,7$.

Παράδειγμα 99. Όταν δουλεύουμε με τετραγωνικές ρίζες τις φανταζόμαστε ότι έχουν δείκτη 2 και με αυτό το δεδομένο κάνουμε τους διάφορους χειρισμούς. Έτσι $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\alpha}}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{\alpha}}} = \sqrt[2\cdot 2\cdot 2]{\alpha} = \sqrt[8]{\alpha}$.

Παράδειγμα 100. Οι ιδιότητες που προαναφέραμε μας επιτρέπουν αν όχι να απαλλαγούμε εντελώς από τα ριζικά τουλάχιστον να καταλήξουμε σε κάποια απλούστερα. Η λογική που ακολουθούμε είναι να βγάλουμε ότι περισσότερο μπορούμε έξω από το ριζικό. Έτσι

$$\sqrt[4]{\frac{\alpha^5\beta^6}{\gamma}} = \sqrt[4]{\frac{\alpha^4\alpha\beta^4\beta^2}{\gamma}} = \sqrt[4]{\alpha^4\beta^4\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}} =$$

$$\sqrt[4]{\alpha^4}\sqrt[4]{\beta^4}\sqrt[4]{\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}} = \sqrt[4]{\alpha}^4\sqrt[4]{\beta}^4\sqrt[4]{\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}} = \alpha\beta\sqrt[4]{\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}}$$

Παράδειγμα 101. Θεωρούμε την παράσταση $\sqrt[15]{x^{18}} + \sqrt[20]{y^{16}}$ όπου οι x, y είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Η παράσταση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί αν αξιοποιήσουμε την (4.40):

$$\sqrt[15]{x^{18}} + \sqrt[20]{y^{16}} = \sqrt[3\cdot 5]{x^{3\cdot 6}} + \sqrt[4\cdot 5]{y^{4\cdot 4}} = \sqrt[5]{x^6} + \sqrt[5]{y^4}$$

Παράδειγμα 102. Συχνά είναι χρήσιμο να μετατρέψουμε όλα τα ριζικά σε ριζικά με ένα δείκτη. Αυτό επιτυγχάνεται αν τα κάνουμε όπως λέμε ομώνυμα. Λ.χ. η παράσταση $\sqrt[3]{x^8y^4}\sqrt[5]{x^{12}y^{12}}$ $(x, y \geq 0)$ γράφεται και με ένα ριζικό ως εξής:

$$\sqrt[3]{x^8y^4}\sqrt[5]{x^{12}y^{12}} = \sqrt[3\cdot5]{\left(x^8y^4\right)^5}\sqrt[5\cdot3]{\left(x^{12}y^{12}\right)^3} =$$

$$\sqrt[15]{x^{40}y^{20}}\sqrt[15]{x^{36}y^{36}} = \sqrt[15]{\left(x^{40}y^{20}\right)\left(x^{36}y^{36}\right)} = \sqrt[15]{x^{76}y^{56}}$$

Άσκηση 361. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $A = \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{54}$
2. $B = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{128}$
3. $\Gamma = \sqrt[5]{64} + \sqrt[5]{128} + \sqrt[5]{256}$

Άσκηση 362. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \sqrt[6]{2} - 2\sqrt[24]{2}^5 + \sqrt[4]{2}$$

Άσκηση 363. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $A = \sqrt[3]{\alpha^6\beta^{12}\gamma^{33}}$
2. $B = \sqrt[5]{\alpha^{20}\beta^{15}\gamma^{25}}$
3. $\Gamma = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\alpha^{18}}\beta^9\sqrt{\gamma^{12}}}$
4. $\Delta = \sqrt[3]{\alpha^7\beta^{27}\gamma^{18}}$

Άσκηση 364. Να απλοποιήσετε τα ριζικά (όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί):

1. $\sqrt[4]{16p^4d^8}$
2. $\sqrt[3]{x^9y^{21}}$
3. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$
4. $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^4\sqrt[4]{\beta^2}}}$

Άσκηση 365. Αν $\sqrt{\alpha} = t$ να εκφράσετε συναρτήσει του t την παράσταση $\left(\sqrt[4]{\alpha\sqrt{\alpha}}\right)^2$.

Άσκηση 366. Με δεδομένο ότι $\sqrt[5]{\alpha} = 12$ και $\sqrt[5]{\beta} = 33$ να βρείτε τα:

1. $\sqrt[5]{\alpha\beta}$
2. $\frac{\sqrt[5]{\alpha}}{\sqrt[5]{\beta}}$
3. $\sqrt[5]{\alpha^2} - \sqrt[5]{\beta^2}$
4. $\frac{\sqrt[5]{t\alpha}}{\sqrt[5]{t\beta}}$

Άσκηση 367. Να μετατρέψετε τα παρακάτω ριζικά σε ριζικά με τον ίδιο δείκτη:

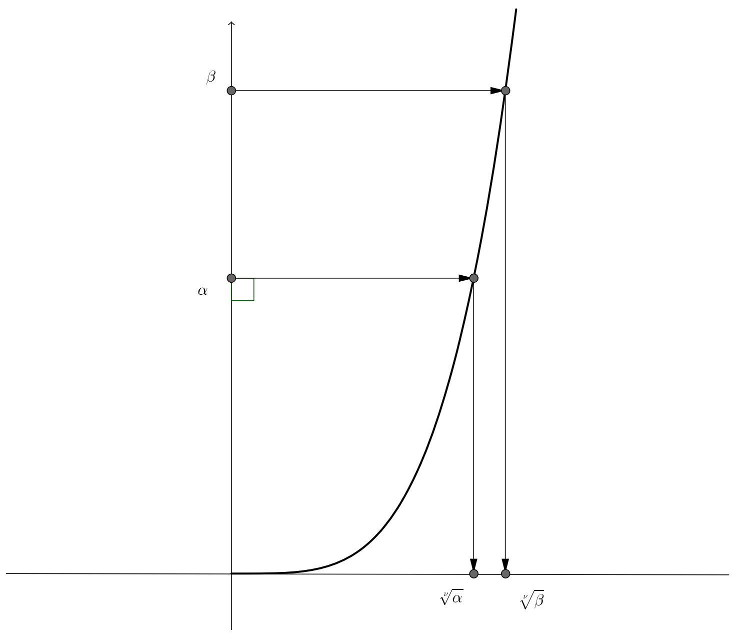
$$\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[4]{\beta}, \sqrt[6]{\gamma}$$

Άσκηση 368. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} - \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}\right)^2 = \sqrt[6]{2} - 2\sqrt[24]{2}^5 + \sqrt[4]{2}$$

4.2.7 ν-οστές ρίζες και διάταξη.

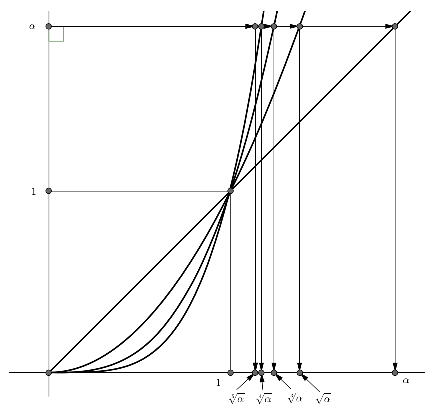
Στο επόμενο σχήμα βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης x^ν για κάποιο ν και για $x \geq 0$. Στον θετικό ημιάξονα των y έχουμε πάρει δύο αριθμούς $\alpha < \beta$.

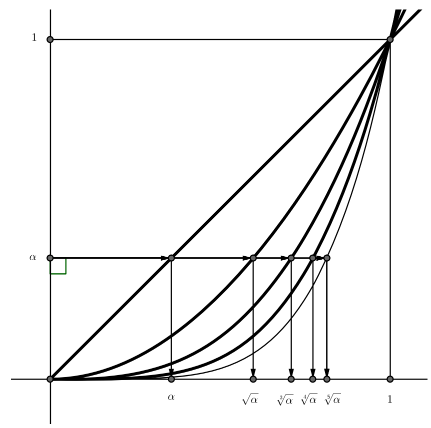


Βλέπουμε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$. Επειδή οι γραφικές παραστάσεις προσφέρουν ενδείξεις αλλά όχι αποδείξεις ας δώσουμε και μία απόδειξη του συμπεράσματος. Εμείς θέλουμε $\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$. Άρα αρκεί να αποκλείσουμε τα ενδεχόμενα $\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta}$ και $\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$. Αν συνέβαινε $\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\beta}$ υψώνοντας στην ν βρίσκουμε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}^\nu = \sqrt[\nu]{\beta}^\nu$ που σημαίνει ότι $\alpha = \beta$ (άτοπο αφού $\alpha < \beta$). Αν πάλι συνέβαινε $\sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$ τότε υψώνοντας στην ν βρίσκουμε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}^\nu > \sqrt[\nu]{\beta}^\nu$ που μας οδηγεί στο άτοπο συμπέρασμα ότι $\alpha > \beta$. Άρα αν οι αριθμοί είναι άνισοι τότε οι ν-οστές ρίζες τους είναι κατά τον ίδιο τρόπο άνισες. Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή αν οι ρίζες είναι άνισες και τα υπόρριζα είναι κατά τον ίδιο τρόπο άνισα. Αποδείξαμε ότι για μη αρνητικούς αριθμούς α, β και φυσικό αριθμό ν ισχύει

$$\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}} \tag{4.41}$$

Προηγουμένως συγκρίναμε ρίζες με ίδιο δείκτη και διαφορετικά υπόρριζα. Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει όταν το υπόρριζο είναι το ίδιο αλλά οι δείκτες άνισοι. Ας ξαναδούμε δύο σχήματα που τα συναντήσαμε και προηγουμένως (έχουν παραληφθεί τα σημεία των γραφικών παραστάσεων που αντιστοιχούν σε αρνητικά x).





Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

Αν ο αριθμός μας είναι μεγαλύτερος της μονάδας σε μεγαλύτερο δείκτη αντιστοιχεί μικρότερος αριθμός. Πράγματι με $\alpha > 1$ και $\mu < \nu$ είναι $\sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\alpha}$. Η επαλήθευση είναι απλή: $\sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \sqrt[\mu]{\alpha}^{\mu\nu} > \sqrt[\nu]{\alpha}^{\mu\nu} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\alpha}^{\mu}\right)^{\nu} > \left(\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu}\right)^{\mu} \Leftrightarrow \alpha^{\nu} > \alpha^{\mu} \Leftrightarrow \alpha^{\nu-\mu} > 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$. Δηλαδή αποδείξαμε οτι:

$$\boxed{\alpha > 1,\ \mu < \nu \Longrightarrow \sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\alpha}} \tag{4.42}$$

Αν ο αριθμός μας είναι μικρότερος της μονάδας τότε τα πράγματα αντιστρέφονται: Στον μεγαλύτερο δείκτη αντιστοιχεί μεγαλύτερος αριθμός. Αποδεικνύεται ακριβώς όπως πριν ότι:

$$\boxed{\alpha < 1,\ \mu < \nu \Longrightarrow \sqrt[\mu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\alpha}} \tag{4.43}$$

Άσκηση 369. Να συγκρίνετε τους αριθμούς

1. $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[3]{11}$
2. $\sqrt[5]{\frac{6}{11}}$, $\sqrt[5]{\frac{7}{13}}$
3. $\sqrt[13]{3}$, 1
4. $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[15]{8}$
5. $\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt[14]{\sqrt{2}-1}$
6. $\sqrt[5]{\sqrt[11]{7}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[13]{7}}$

Άσκηση 370. Να αποδείξετε την (4.43)

4.2.8 Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$.

Έχουμε δει ότι η εξίσωση $x^2 = 4$ έχει δύο ρίζες την $x = 2$ και την $x = -2$. Αν αντί αυτής είχαμε την εξίσωση $x^2 = 3$ για να βρούμε το x, όποιο τρόπο και αν ακολουθήσουμε είμαστε αναγκασμένοι να καταφύγουμε στην χρήση ριζικών: $x = \sqrt{3}$ ή $x = -\sqrt{3}$.

Ας πούμε ότι έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^4 = 16$. Εύκολα βλέπουμε ότι έχει δύο ρίζες του αριθμούς ± 2 που δεν είναι άλλοι από τους $\pm\sqrt[4]{16}$. Αν τώρα είχαμε την εξίσωση $x^4 = 17$ τότε θα μπορούσαμε να την γράψουμε $|x|^4 = 17$

και ο $|x|$ δεν είναι άλλος από τον μοναδικό μη αρνητικό αριθμό που αν υψωθεί στην 4η μας δίνει 17. Δηλαδή $|x| = \sqrt[4]{17}$ και φυσικά $x = \pm\sqrt[4]{17}$.

Η εξίσωση $x^3 = 17$ περιμένουμε να έχει λύση θετικό αριθμό αφού οι x και x^3 είναι ομόσημοι και ο x^3 θα είναι θετικός. Άρα θα είναι $x = \sqrt[3]{17}$. Αν όμως είχαμε την εξίσωση $x^3 = -17$ αναμένουμε ο x να είναι αρνητικός οπότε ο $-x$ θα είναι θετικός. Η εξίσωση μας γράφεται και $-x^3 = 17$ δηλαδή $(-x)^3 = 17$ που σημαίνει ότι $-x = \sqrt[3]{17}$ και $x = -\sqrt[3]{17}$. Αντίθετα αν είχαμε την εξίσωση $x^4 = -17$ δεν θα περιμέναμε να βρούμε λύση αφού το πρώτο μέλος της είναι ένας μη αρνητικός αριθμός ενώ το δεύτερο μέλος είναι αρνητικός. Η εξίσωση μας σε αυτή την περίπτωση είναι αδύνατη.

Οι εξισώσεις που είδαμε πιο πάνω είναι όλες της μορφής $x^\nu = \alpha$. Η εξίσωση αυτή στην περίπτωση που $\alpha = 0$ έχει προφανή λύση το μηδέν και καμία άλλη. Οπότε θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου $\alpha \neq 0$.

- *Αν ο ν είναι άρτιος* τότε η εξίσωση γράφεται $|x|^\nu = \alpha$ και αν μεν $\alpha < 0$ είναι αδύνατη ενώ στην περίπτωση όπου $\alpha > 0$ θα είναι $|x| = \sqrt[\nu]{\alpha}$ που σημαίνει ότι $x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$

- *Αν ο ν είναι περιττός* τότε ο x είναι ομόσημος του x^ν και επομένως του α. Με $\alpha > 0$ παίρνουμε απευθείας $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ενώ με $\alpha < 0$ έχουμε: $x^\nu = \alpha \Leftrightarrow -x^\nu = -\alpha \Leftrightarrow (-x)^\nu = -\alpha \Leftrightarrow -x = \sqrt[\nu]{-\alpha}$

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^\nu = \alpha$ με $\alpha \neq 0$ έχει λύσεις:

		ο α είναι	
		Θετικός	Αρνητικός
ο ν	Άρτιος	$x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$	Αδύνατη
είναι	Περιττός	$x = \sqrt[\nu]{\alpha}$	$x = -\sqrt[\nu]{-\alpha}$

Άσκηση 371. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $x^3 = 8$
2. $x^3 = -8$
3. $x^3 = 1 - \sqrt{2}$
4. $x^3 = -\frac{8}{27}$

Άσκηση 372. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $x^{12} = 2^{12}$
2. $x^{13} = -2^{13}$

4.2.9 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Οι ιδιότητες των δυνάμεων και οι ιδιότητες των ριζών παρουσιάζουν κάποιες ομοιότητες. Μερικές αποτυπώνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Τα μ, ν είναι θετικοί ακέραιοι και εννοείται ότι τα α, β σε κάθε τύπο παίρνουν μόνο τιμές που επιτρέπονται:

Δυνάμεις	Ρίζες
$\alpha^1 = \alpha$	$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha$
$1^\nu = 1$	$\sqrt[\nu]{1} = 1$
$0^\nu = 0$	$\sqrt[\nu]{0} = 0$
$(\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu$	$\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$
$(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu\mu}$	$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$
$\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$
$\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha} =;$
$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\alpha}} =;$

Εκεί όπου υπάρχουν ερωτηματικά δεν έχουμε κάποιο τύπο. Για την ακρίβεια δεν έχουμε μάθει μέχρι στιγμής κάποιο τύπο! Ας δούμε μήπως υπάρχει κάποιος τύπος που εμείς αγνοούμε. Είναι λογικό να αναζητήσουμε κάποιο ανάλογο του τύπου $\alpha^\mu \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ ο οποίος μετατρέπει το γινόμενο δύο δυνάμεων με την ίδια βάση σε μία δύναμη με αυτή την βάση. Το ανάλογο θα ήταν ένας τρόπος να μετατρέπουμε το γινόμενο δύο ριζών με το ίδιο υπόρριζο σε μία ρίζα με αυτό το υπόρριζο. Το πρόβλημα μετατίθεται στο να βρούμε τον δείκτη της νέας ρίζας. Δηλαδή να αναζητήσουμε κάποιο αριθμό κ ώστε $\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\kappa]{\alpha}$. Ας πούμε $\alpha > 0$ και ότι ότι τέτοιος κ υπάρχει. Ποιος θα είναι; Μπορούμε να απαλλαγούμε από τα ριζικά αν υψώσουμε την σχέση μας στην $\kappa\mu\nu$. Έχουμε

$$\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\kappa]{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa\mu\nu} = \left(\sqrt[\kappa]{\alpha}\right)^{\kappa\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\kappa\mu\nu} = \left(\sqrt[\kappa]{\alpha}\right)^{\kappa\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\kappa\mu\nu}}\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa\mu\nu}} = \sqrt[\kappa]{\alpha^{\kappa\mu\nu}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}\right)^{\kappa\nu}\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\right)^{\kappa\mu} = \left(\sqrt[\kappa]{\alpha^\kappa}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}\right)^{\kappa\nu}\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\right)^{\kappa\mu} = \left(\sqrt[\kappa]{\alpha^\kappa}\right)^{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{\kappa\nu}\alpha^{\kappa\mu} = \alpha^{\mu\nu} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^{\kappa\nu+\kappa\mu} = \alpha^{\mu\nu}$$

$$\alpha^{\kappa(\nu+\mu)} = \alpha^{\mu\nu}$$

Θα πρέπει $\kappa(\nu+\mu) = \mu\nu$ που αν λύσουμε ως προς κ μας δίνει $\kappa = \frac{\mu\nu}{\mu+\nu}$. Ο αριθμός κ γενικά δεν είναι ακέραιος (π.χ. για $\mu = 3$, $\nu = 3$ είναι $\kappa = \frac{12}{7}$). Επομένως δε μπορούμε να ελπίζουμε ότι θα βρούμε ακέραιο κ τέτοιο ώστε

$\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\kappa]{\alpha}$. Ας αγνοήσουμε προς στιγμή το γεγονός ότι ο κ δεν είναι φυσικός και ας πάμε τον συλλογισμό μας πιο πέρα: Η ισότητα

$$\alpha^{\kappa(\nu+\mu)} = \alpha^{\mu\nu}$$

γράφεται

$$(\alpha^{\kappa})^{(\nu+\mu)} = \alpha^{\mu\nu}$$

που μας δίνει

$$\alpha^{\kappa} = \sqrt[\nu+\mu]{\alpha^{\mu\nu}}$$

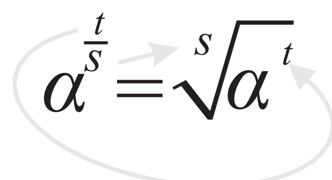
δηλαδή

$$\alpha^{\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}} = \sqrt[\nu+\mu]{\alpha^{\mu\nu}}$$

Δεν έχουμε ορίσει τι μπορεί να σημαίνει δύναμη με κλασματικό εκθέτη αλλά αν σημαίνει κάτι θα πρέπει αυτό θα περιγράφεται από την παραπάνω σχέση. Γενικά:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } \alpha > 0 \text{ και } t, s \text{ είναι θετικοί ακέραιοι ορίζουμε} \\ \alpha^{\frac{t}{s}} = \sqrt[s]{\alpha^t} = \sqrt[s]{\alpha}^{\,t}\end{array}} \tag{4.44}$$

Με άλλα λόγια για να υψώσουμε ένα αριθμό σε ένα κλάσμα υψώνουμε τον αριθμό στον αριθμητή του κλάσματος και μετά παίρνουμε την ρίζα με δείκτη τον παρονομαστή



Έτσι $7^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{7^5} = \sqrt[3]{16\,807} \approx 25,6$ και $3^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{243} = 6,2$. Αλλά και ανάποδα: $\sqrt[5]{x}^{6} = x^{\frac{5}{4}}$ και $\sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$. Φυσικά σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό θα είναι:

$$\boxed{\alpha^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{\alpha}} \tag{4.45}$$

Επομένως οι ρίζες δεν είναι παρά δυνάμεις με εκθέτη κλασματική μοναδα:

$$\sqrt{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{2}}, \qquad \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{3}}, \qquad \sqrt[4]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt[4]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}}, \qquad \ldots$$

Αν $\alpha > 0$ και t, s θετικοί μπορούμε να ορίσουμε και την δύναμη με τον *αρνητικό* κλασματικό εκθέτη $-\frac{t}{s}$ ως εξής

$$\boxed{\alpha^{-\frac{t}{s}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{t}{s}}} = \frac{1}{\sqrt[s]{\alpha^t}}} \tag{4.46}$$

Είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε δυνάμεις με *θετική βάση* α και εκθέτη οποιοδήποτε ρητό αριθμό. Αν ο ρητός είναι θετικός μέσω της (4.44) αν είναι αρνητικός μέσω της (4.46) και αν είναι μηδέν κατά τα γνωστά $\alpha^0 = 1$. Έτσι $x^{\frac{-5}{3}} = x^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ και $x^{\frac{5}{-4}} = x^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$. Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων που ξέραμε για ακεραίους εκθέτες ισχύουν και για ρητούς αρκεί οι βάσεις τους να είναι θετικοί αριθμοί:

$$\boxed{\alpha^p\alpha^q = \alpha^{p+q}} \tag{4.47}$$

$$\boxed{\frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q}} \tag{4.48}$$

$$\boxed{(\alpha^p)^q = \alpha^{pq}} \tag{4.49}$$

$$\boxed{(\alpha\beta)^p = \alpha^p\beta^p} \tag{4.50}$$

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^p = \frac{\alpha^p}{\beta^p}} \tag{4.51}$$

Οι αποδείξεις μπορούν να γίνουν ακολουθώντας τον ορισμό. Ενδεικτικά ας δούμε πως αποδεικνύεται η (4.47) στην περίπτωση που οι εκθέτες είναι οι θετικοί ρητοί $p = \frac{\kappa}{\lambda}$ και $q = \frac{\mu}{\nu}$:

$\alpha^p\alpha^q = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa}\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\nu\kappa}}\sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\lambda\mu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\nu\kappa}\alpha^{\lambda\mu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\nu\kappa+\lambda\mu}} = \alpha^{\frac{\nu\kappa+\lambda\mu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}+\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{p+q}$

Επίσης ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που συνδέουν τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη (και πάντα θετική βάση) με την διάταξη:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet \text{ Αν } \alpha > 1 \text{ τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:} \\ p < q \Leftrightarrow \alpha^p < \alpha^q \\ p = q \Leftrightarrow \alpha^p = \alpha^q \\ \bullet \text{ Αν } 0 < \alpha < 1 \text{ τότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:} \\ p < q \Leftrightarrow \alpha^p > \alpha^q \\ p = q \Leftrightarrow \alpha^p = \alpha^q \end{array}} \tag{4.52}$$

Έχοντας στην διάθεση μας την νέα έννοια της δύναμης σε ρητό εκθέτη είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στο αρχικό ερώτημα που μας απασχόλησε δηλαδή με τι είναι ίσο το γινόμενο $\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha}$. Αφού θέλουμε $\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\kappa]{\alpha}$ και είδαμε ότι $\kappa = \frac{\mu\nu}{\mu+\nu}$ θα πρέπει να ορίσουμε και ρίζες με κλασματικό δείκτη όπως κάναμε με τις δυνάμεις και τότε $\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}]{\alpha}$! Αν και *δεν συνηθίζεται* αν θέλαμε να ορίσουμε ρίζες με κλασματικό δείκτη θα γράφαμε $\sqrt[\frac{t}{s}]{\alpha} = \sqrt[t]{a^s}$.

Άσκηση 373. Να υπολογίσετε τα:

1. $16^{\frac{1}{2}}$
2. $8^{\frac{2}{3}}$
3. $16^{\frac{5}{4}}$
4. $64^{-\frac{1}{2}}$
5. $2^{-2} \cdot 16^{-\frac{1}{2}}$
6. $\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Άσκηση 374. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τα:

1. $\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}}$
2. $\alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{3}}$
3. $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}}$
4. $\left(\alpha^2\beta^4\right)^{\frac{3}{2}}$
5. $\left(\frac{8\alpha^{-3}}{125\beta^6}\right)^{-\frac{1}{3}}$
6. $\left(2\alpha^{-\frac{1}{2}}\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}\alpha\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^8$

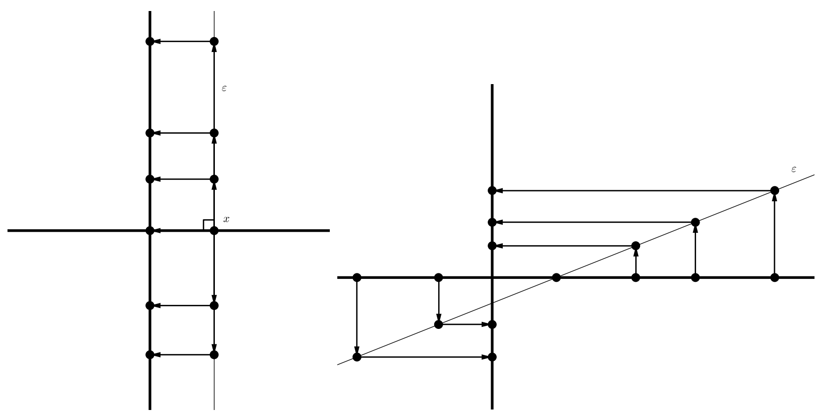
Άσκηση 375. Να αποδείξετε ότι $\left(2\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 4\alpha + \beta + 4\sqrt{\alpha\beta}$

Άσκηση 376. Βρείτε το $\left(\left(2^{\frac{1}{m-n}}\right)^{\frac{m^2-n^2}{m}}\right)^{\frac{m}{m+n}}$

Άσκηση 377. Να αποδείξετε την ιδιότητα (4.52)

4.2.10 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$.

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία (ε). Η (ε) μπορεί να είναι ή να μην είναι γραφική παράσταση κάποιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αυτό εξαρτάται από την θέση που έχει σε σχέση με τους άξονες.



Αν είναι κάθετη στον $x'x$ δηλαδή παράλληλη στον $y'y$ είναι ακατάλληλη για να παίξει τον ρόλο γραφικής παράστασης συνάρτησης: Στο ίδιο x θα αντιστοιχούσαν περισσότερα από ένα y (στην πραγματικότητα άπειρα). Σε οποιαδήποτε άλλη θέση μπορεί.

Είδαμε (βλ. (4.25) ότι μία εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα διάφορα σημεία $\mathrm{K}(x_1, y_1)$, $\Lambda(x_2, y_2)$ είναι η:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

Αν η ευθεία δεν είναι κάθετη στον $x'x$ θα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης. Για να βρούμε τον τύπο της λύνουμε την σχέση αυτή ως προς y. Έχουμε:

$$(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$$

$$(x_2 - x_1)\, y = (y_2 - y_1)\, x - (y_2 - y_1)\, x_1 + (x_2 - x_1)\, y_1$$
$$(x_2 - x_1)\, y = (y_2 - y_1)\, x + y_1 x_2 - y_2 x_1$$

Τώρα χρειάζεται να διαιρέσουμε δια $x_2 - x_1$. Επειδή η ευθεία δεν είναι κάθετη στον $x'x$ δεν θα περιέχει δύο σημεία με την ίδια τετμημένη και επομένως $x_1 \neq x_2$. Άρα το $x_2 - x_1$ είναι διάφορο του μηδενός και μπορούμε να διαιρέσουμε. Βρίσκουμε

$$y = \frac{(y_2 - y_1)\, x + y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

δηλαδή

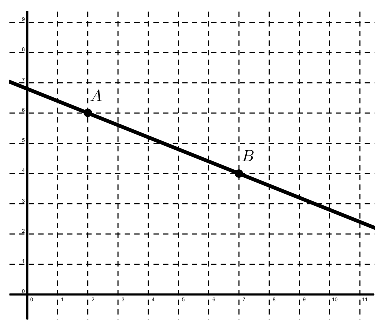
$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται και

$$y = \alpha x + \beta, \qquad \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \beta = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1}$$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ όπου α, β όπως πριν.

Παράδειγμα 103. Στο παρακάτω σχήμα παριστάνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης που είναι ευθεία. Να βρεθεί ο τύπος της.



Λύση Η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $A(2, 6)$ και $B(7, 4)$. Μπορούμε να βρούμε τα α, β με δύο τρόπους

Α΄ Τρόπος Εδώ $x_1 = 2$, $x_2 = 7$, $y_1 = 6$, $y_2 = 4$ οπότε χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους βρίσκουμε:

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 6}{7 - 2} = -\frac{2}{5}$$

και

$$\beta = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 \cdot 7 - 4 \cdot 2}{7 - 2} = \frac{34}{5}$$

Β΄ Τρόπος Η ευθεία μας έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ που πρέπει να επαληθεύεται για τις συντεταγμένες των A, B. Άρα πρέπει $6 = \alpha \cdot 2 + \beta$ και $4 = \alpha \cdot 7 + \beta$. Λύνουμε το σύστημα των δύο αυτών εξισώσεων και βρίσκουμε: $\alpha = -\frac{2}{5}$, $\beta = \frac{34}{5}$.

Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο καταλήγουμε στο ότι η εξίσωση της ευθείας είναι $y = -\frac{2}{5}x + \frac{34}{5}$.

Παράδειγμα 104. Για την συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ είναι γνωστό ότι $f(1) = 3$ και $f(3) = 7$. Βρείτε το $f(11)$.

Λύση Θα βρούμε πρώτα τα α, β. Είναι $f(1) = \alpha + \beta$ και $f(3) = 3\alpha + \beta$. Επομένως $\alpha + \beta = 3$ και $3\alpha + \beta = 7$. Λύνοντας το σύστημα των δύο αυτών σχέσεων βρίσκουμε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$. Επομένως $f(x) = 2x + 1$. Άρα $f(11) = 2 \cdot 11 + 1 = 23$.

Άσκηση 378. Για ποια τιμή του λ το σημείο $A(2, \lambda + 1)$ ανήκει στην ευθεία $y = 4x - 1$;

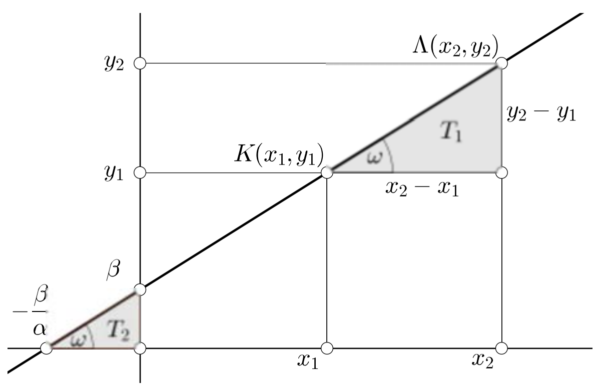
Άσκηση 379. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία $y = 3x + 2$ τέμνει τους άξονες.

Άσκηση 380. Να βρείτε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(4, -5)$

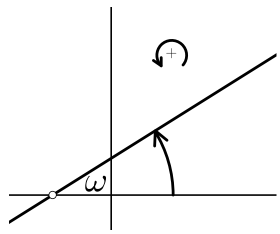
Άσκηση 381. Έστω $f(x) = \alpha x + \beta$. Να αποδείξετε ότι αν $f(p) = q$ και $f(p+1) = q+2$ τότε $f(q) = 3q - 2p$.

4.2.11 Η γεωμετρική σημασία των α, β.

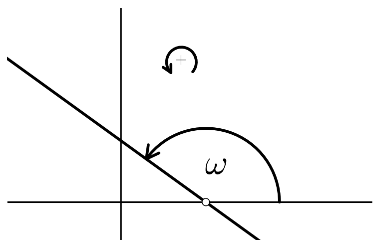
Στο παρακάτω σχήμα που σε παραλλαγή έχουμε δει και προηγουμένως απεικονίζεται μία ευθεία *που δεν είναι κάθετη στους άξονες* και διέρχεται από τα σημεία $K(x_1, y_1)$, $\Lambda(x_2, y_2)$.



Στο σχήμα μας είναι $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. Όπως πριν είναι $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Κοιτώντας στο τρίγωνο T_1 βλέπουμε ότι το α είναι ίσο με την απέναντι πλευρά της ω προς την προσκείμενη. Δηλαδή πρόκειται για την εφαπτομένη της ω: $\alpha = \varepsilon\varphi\omega$. Η ω λόγω παραλληλίας εμφανίζεται και στο τρίγωνο T_2. Είναι η *γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον $x'x$*. Ως γωνία που σχηματίζει μία ευθεία με τον $x'x$ εννοούμε την γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί ο $x'x$ κατά την θετική φορά δηλαδή αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού έως ότου να συναντήσει για πρώτη φορά την ευθεία.



Η γωνία αυτή μπορεί να είναι και αμβλεία:



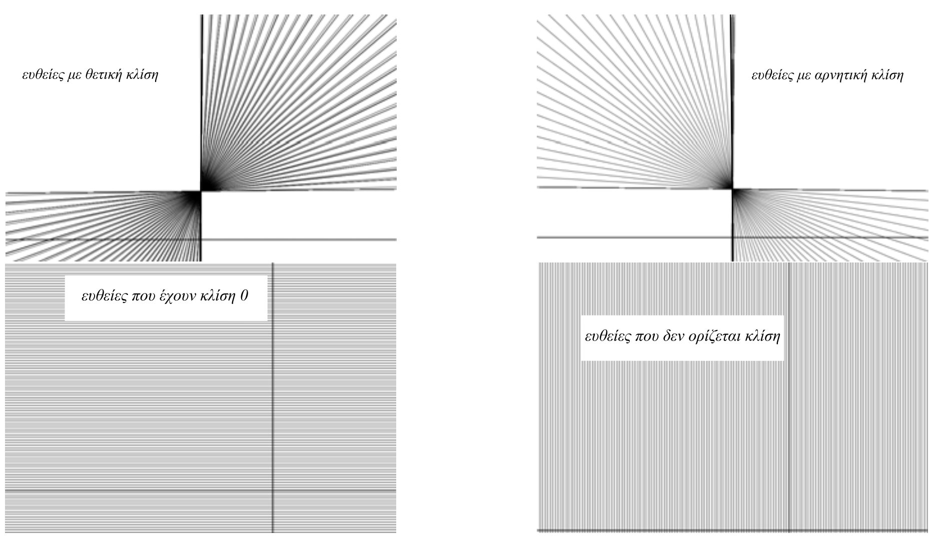
Διαπιστώνεται πάλι ότι και σε αυτή την περίπτωση είναι $\alpha = \varepsilon\varphi\omega$ μόνο που τώρα αφού η γωνία είναι αμβλεία η εφαπτομένη της είναι αρνητική και $\alpha < 0$.

Τέλος στην ειδική περίπτωση όπου η ευθεία είναι παράλληλη στον $x'x$ όλες οι τεταγμένες των σημείων της είναι ίσες και φυσικά $y_1 = y_2$. Ως γωνία της ευθείας με τον $x'x$ θεωρείται η μηδενική και φυσικά $\alpha = \varepsilon\varphi 0^\circ = 0$.

Από την αρχή της συζήτησης αποκλείσαμε την περίπτωση όπου η ευθεία είναι κάθετη στον $x'x$. Σε αυτή την περίπτωση το $\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ δεν ορίζεται, η γωνία της ευθείας μςε τον $x'x$ είναι ορθή αλλά η εφαπτομένη της ως γνωστόν δεν ορίζεται. Συνοψίζοντας

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Στην ευθεία } y = \alpha x + \beta \text{ είναι } \alpha = \varepsilon\varphi\omega \text{ όπου } \omega \text{ είναι} \\ \text{η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα } x'x\end{array}} \tag{4.53}$$

Επειδή ο α καθορίζει την διεύθυνση της ευθείας λέγεται *συντελεστής διευθύνσεως* ή και *κλίση* της ευθείας.



Μπορούμε να δώσουμε μία ακόμη ερμηνεία στο α: Ας υποθέσουμε ότι δίνουμε μία τιμή στο x έστω $x = x_0$ και μετά αυξήσουμε την τιμή κατά 1 δηλαδή πάρουμε το $x_0 + 1$. Αν αντικαταστήσουμε στην $f(x) = \alpha x + \beta$ θα πάρουμε:

$$f\left(x_0\right) = \alpha x_0 + \beta$$

$f\left(x_0 + 1\right) = \alpha\left(x_0 + 1\right) + \beta = \alpha x_0 + \alpha + \beta = f\left(x_0\right) + \alpha$ Είναι λοιπόν $f\left(x_0 + 1\right) = f\left(x_0\right) + \alpha$. *Αυτό σημαίνει ότι όταν μεταβάλλουμε την τιμή του x κατά 1 το $f(x)$ μεταβάλλεται κατά α (αυξάνεται αν $\alpha > 0$, ελαττώνεται αν $\alpha < 0$ και παραμένει το ίδιο αν $\alpha = 0$)*

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ τέμνει πάντοτε το $x'x$ στο σημείο που η τεταγμένη του δηλαδή το «y» του προκύπτει αν θέσουμε στην εξίσωση όπου x το 0. Προφανώς θα βρούμε $\beta = 0$. Αν είναι $\alpha \neq 0$ δηλαδή η ευθεία μας δεν είναι παράλληλη στον $x'x$ τότε η ευθεία θα τμήσει και το $x'x$. Η τεταγμένη του σημείου τομής δηλαδή το «x» του βρίσκεται αν θέσουμε στην εξίσωση όπου y το μηδέν. Θα βρούμε το $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ τέμνει τον άξονα:
• $y'y$ στο σημείο $(0, \beta)$
• $x'x$ εφ' όσον $\alpha \neq 0$ στο σημείο $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$

(4.54)

Παράδειγμα 105. Η ευθεία $y = x + 3$ έχει $\alpha = 1$. Επειδή το 1 είναι η εφαπτομένη των 45° η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ίση με 45°.

Παράδειγμα 106. Η ευθεία $y = -x - 2$ έχει $\alpha = -1$. Επειδή $-1 = \varepsilon\varphi 135^\circ$ η ευθεία σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία ίση με 135°.

Παράδειγμα 107. Έστω η ευθεία $y = 2x + 1$. Είναι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$. Είναι $-\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{2}$. Επομένως η ευθεία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και $(0, 3)$ αντιστοίχως.

Άσκηση 382. Να βρείτε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ αν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο και $A\left(1, 2\right)$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$. γωνία 60°

Άσκηση 383. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία $y = 3x + 2$ τέμνει τους άξονες.

Άσκηση 384. Μία ευθεία διέρχεται από το σημείο $P(-1, -2)$ και σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο. Ποια μπορεί να είναι η εξίσωση της;

4.2.12 Σχετικές θέσεις των ευθειών $y = \alpha_1 x + \beta_1$, $y = \alpha_2 x + \beta_2$.

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε πότε οι ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ ταυτίζονται είναι παράλληλες ή τέμνονται. Δηλαδή θα εξετάσουμε πόσα κοινά σημεία έχουν. Με άλλα λόγια όσα σημεία της πρώτης ευθείας ανήκουν στην δεύτερη. Για κάθε πραγματικό αριθμό m το σημείο

$$\left(m, \alpha_1 m + \beta_1\right) \quad (*)$$

είναι σημείο της πρώτης ευθείας. Μάλιστα όλα τα σημεία της πρώτης ευθείας είναι αυτής της μορφής. Ένα σημείο της μορφής $(*)$ θα ανήκει στην δεύτερη ευθεία αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της δηλαδή αν

$$\alpha_1 m + \beta_1 = \alpha_2 m + \beta_2$$

ή ισοδύναμα αν

$$(\alpha_1 - \alpha_2)\, m + (\beta_1 - \beta_2) = 0 \quad (**)$$

Η $(**)$ μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτοβάθμια εξίσωση ως προς m αφού είναι της μορφής

$$Am + B = 0 \quad (***)$$

όπου $A = \alpha_1 - \alpha_2$ και $B = \beta_1 - \beta_2$.

- *Οι ευθείες θα ταυτίζονται* αν όλα τα σημεία τους είναι κοινά που σημαίνει ότι πρέπει κάθε σημείο που επαληθεύει την εξίσωση της μίας επαληθεύει και την εξίσωση της άλλης. Άρα για κάθε $m \in \mathbb{R}$ πρέπει ο m να ειναι λύση της $(***)$. Τότε όμως η $(***)$ θα έχει άπειρες λύσεις και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $A = B = 0$ δηλαδή $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ και $\beta_1 - \beta_2 = 0$. Επομένως

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Οι ευθείες } y = \alpha_1 x + \beta_1 \;\; y = \alpha_2 x + \beta_2 \\ \text{συμπίπτουν αν και μόνο αν } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ και } \beta_1 = \beta_2\end{array}} \tag{4.55}$$

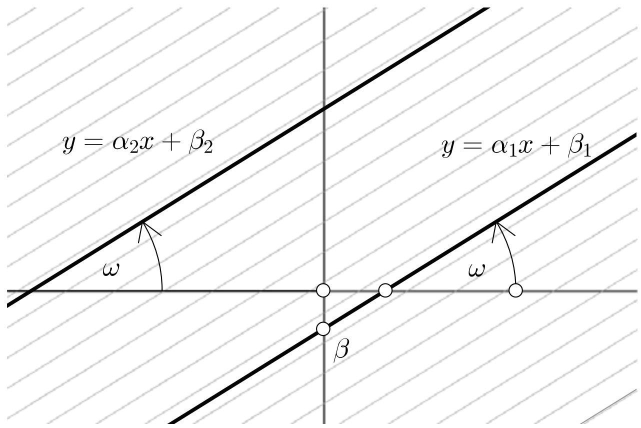
- *Οι ευθείες θα είναι παράλληλες* αν δεν έχουν κοινά σημεία. Αυτό σημαίνει ότι κανένα από από τα σημεία $(*)$ δεν επαληθεύει την εξίσωση της δεύτερης ευθείας. Δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(***)$ είναι αδύνατη. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν $A = 0$ και $B \neq 0$ δηλαδή $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ και $\beta_1 - \beta_2 \neq 0$. Άρα:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Οι ευθείες } y = \alpha_1 x + \beta_1 \;\; y = \alpha_2 x + \beta_2 \\ \text{είναι παράλληλες αν και μόνο αν } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ και } \beta_1 \neq \beta_2\end{array}} \tag{4.56}$$

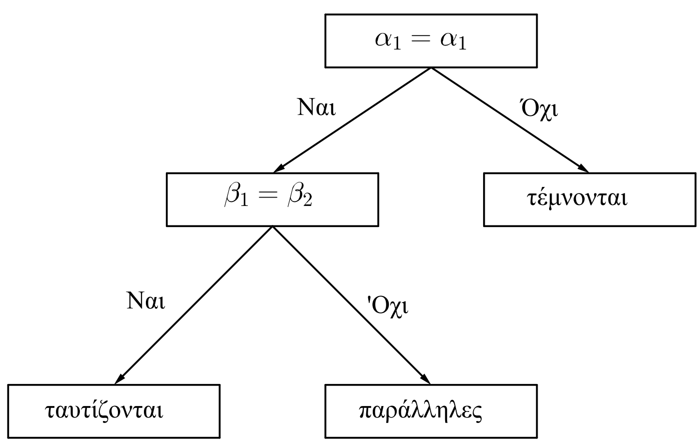
- *Οι ευθείες θα τέμνονται* μόνο αν έχουν ένα κοινό σημείο δηλαδή μόνο αν ένα από τα σημεία $(*)$ ανήκει στην δεύτερη ευθεία. Αυτό ισοδυναμεί με το ότι η $(***)$ έχει μία μόνο λύση και αυτό συμβαίνει όταν $A \neq 0$. Άρα:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Οι ευθείες } y = \alpha_1 x + \beta_1 \;\; y = \alpha_2 x + \beta_2 \\ \text{είναι τεμνόμενες αν και μόνο αν } \alpha_1 \neq \alpha_2\end{array}} \tag{4.57}$$

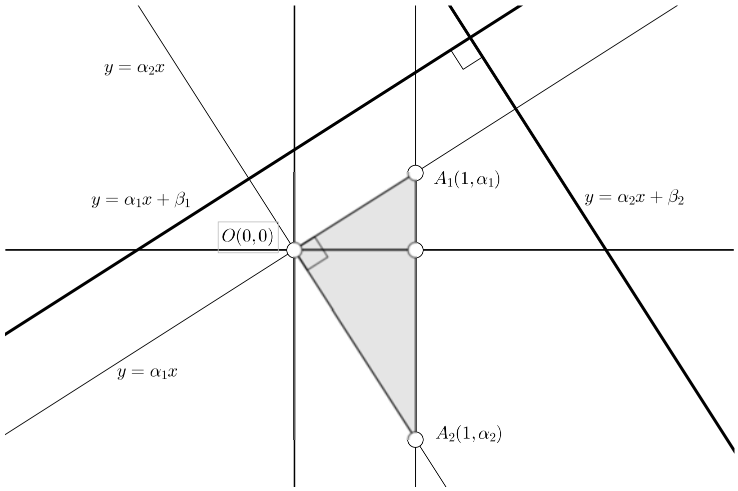
Στα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε και με μία επιχειρηματολογία περισσότερο «γεωμετρική» : Ας πάρουμε την $y = \alpha_1 x + \beta_1$. Κάθε $y = \alpha_2 x + \beta_2$ ευθεία παράλληλη προς αυτή πρέπει να σχηματίζει την ίδια γωνία με τον $x'x$:



Αφού οι δύο ευθείες σχηματίζουν τις ίδιες γωνίες με τον $x'x$ θα πρέπει και οι εφαπτομένες αυτών των δύο γωνιών να είναι ίσες δηλαδή $\alpha_1 = \alpha_1$. Η συνθήκη $\alpha_1 = \alpha_1$ καλύπτει και την περίπτωση όπου οι δύο ευθείες συμπίπτουν. Για ευθείες που είναι παράλληλες ή συμπίπτουν λέμε ότι έχουν *την ίδια διεύθυνση*. Αν τώρα δύο ευθείες έχουν την ίδια διεύθυνση για να συμπέσουν πρέπει να τμήσουν τον $y'y$ στο ίδιο σημείο δηλαδή να έχουν το ίδιο «β» συνεπώς πρέπει $\beta_1 = \beta_2$. Αν δεν έχουν την ίδια διεύθυνση δηλαδή $\alpha_1 \neq \alpha_2$ τότε τέμνονται:



Ειδική περίπτωση τεμνομένων ευθειών είναι εκείνες που τέμνονται κάθετα. Θεωρούμε δύο ευθείες $y = \alpha_1 x + \beta_1$, $y = \alpha_2 x + \beta_2$ και θα εξετάσουμε πότε είναι κάθετες. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι είναι κάθετες. Τότε και οι ευθείες $y = \alpha_1 x +$, $y = \alpha_2 x +$ που έχουν την ίδια διεύθυνση με τις αρχικές αλλά διέρχονται από την αρχή των αξόνων είναι επίσης κάθετες.



Αν αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις των $y = \alpha_1 x$, $y = \alpha_2 x$ τον αριθμό 1 θα βρούμε ότι τα σημεία $A_1(1,\alpha_1)$, $A_2(1,\alpha_2)$ ανήκουν στις $y = \alpha_1 x$, $y = \alpha_2 x$. Το τρίγωνο A_1A_2O είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα A_1A_2 και από το Πυθαγόρειο Θεώρημα διαδοχικά έχουμε:

$$\sqrt{(1-0)^2+(\alpha_1-0)^2}^2+\sqrt{(1-0)^2+(\alpha_2-0)^2}^2=\sqrt{(1-1)^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2}^2 \Leftrightarrow$$

$$(1-0)^2+(\alpha_1-0)^2+(1-0)^2+(\alpha_2-0)^2=(1-1)^2+(\alpha_1-\alpha_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+\alpha_1^2+1+\alpha_2^2=(\alpha_1-\alpha_2)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+\alpha_1^2+1+\alpha_2^2=\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2 \Leftrightarrow$$

$$2=-2\alpha_1\alpha_2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1\alpha_2=-1$$

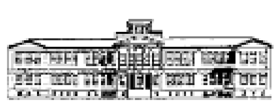
Αν ισχύει η σχέση $\alpha_1\alpha_2 = -1$ τότε οι ευθείες θα τέμνονται οπωσδήποτε (δείτε και άσκηση 389) και λόγω των παραπάνω ισοδυναμιών θα είναι και κάθετες. Έχουμε λοιπόν

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Οι ευθείες } y=\alpha_1 x+\beta_1 \;\; y=\alpha_2 x+\beta_2 \\ \text{είναι κάθετες αν και μόνο αν } \alpha_1\alpha_2=-1\end{array}} \qquad (4.58)$$

Παράδειγμα 108. Να βρεθεί για ποια τιμή του λ οι ευθείες $y = 2x + 3$ και $y = (2\lambda - 2)x + (\lambda + 2)$ είναι παράλληλες.

Λύση Πρέπει να ισχύει $2\lambda - 2 = 2$ και $\lambda + 2 \neq 3$. Η πρώτη σχέση δίνει $\lambda = 2$ και αυτή η τιμή επαληθεύει και την δεύτερη αφού $2 + 2 \neq 3$.

Παράδειγμα 109. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες $y = \left(-1-\sqrt{2}\right)x + 1$ και $y = \left(\sqrt{2}-1\right)x + 1$ είναι κάθετες.



Λύση Πρέπει το γινόμενο των συντελεστών διευθύνσεως να είναι ίσος με -1. Πράγματι $\left(-1-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=-\left(\sqrt{2}^2-1\right)=-1$.

Άσκηση 385. Να βρείτε για ποια τιμή του t η ευθεία $y=(4-2t)\,x+1$ είναι παράλληλη με την ευθεία $y=3x-2$.

Άσκηση 386. Να βρείτε για ποια τιμή του t οι ευθείες $y=(2t+4)\,x+4$, $y=3t-1$ είναι κάθετες.

Άσκηση 387. Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$ αν είναι γνωστό ότι:

- Διέρχεται από το σημείο $P\,(1-3)$, και
- Είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x+4$

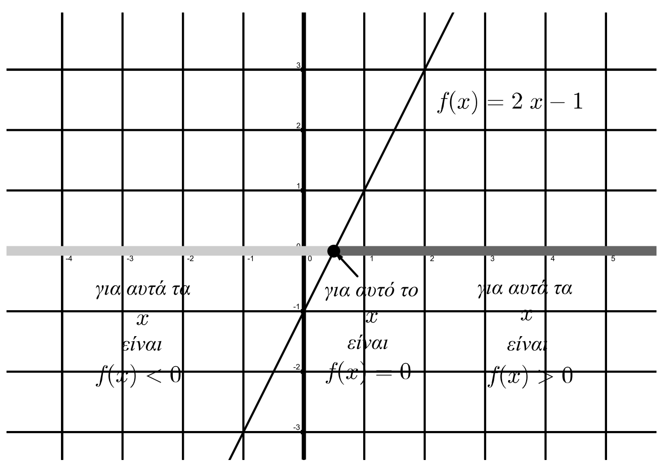
Άσκηση 388. Να βρείτε την ευθεία $y=\alpha x+\beta$ αν είναι γνωστό ότι:

- Διέρχεται από το σημείο $P\,(2,4)$, και
- Είναι κάθετη στην ευθεία $y=8x+3$

Άσκηση 389. Για τις ευθείες $y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $y=\alpha_2 x+\beta_2$ είναι γνωστό ότι $\alpha_1\alpha_2<0$. Να αποδείξετε ότι τέμνονται.

4.2.13 Επιστροφή στην $\alpha x+\beta=0$ και στην $\alpha x+\beta>0$

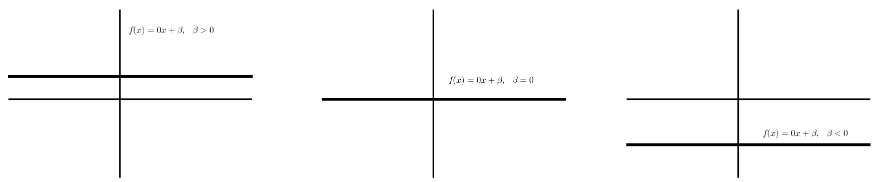
Τώρα που έχουμε συζητήσει για την γραφική παράσταση της $f\,(x)=\alpha x+\beta$ μπορούμε να ξαναδούμε τα ζητήματα της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ και ανίσωσης $\alpha x+\beta>0$ με μια άλλη ματιά. Ας πούμε ότι μας ενδιαφέρει να λύσουμε την εξίσωση $2x-1=0$. Στην ουσία μας ενδιαφέρει να μάθουμε για ποια x η συνάρτηση $f(x)=2x-1$ γίνεται ίση με μηδέν με άλλα λόγια ποιες είναι οι τετμημένες των σημείων όπου η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει το $x'x$. Ενώ λύνοντας την ανίσωση $2x-1>0$ ενδιαφερόμαστε να μάθουμε για ποια x η γραγική παράσταση της $f(x)=2x-1$ είνα πάνω από τον $x'x$.



Στην περίπτωση που εξετάζουμε λύση της εξίσωσης $2x-1=0$ είναι ο $\frac{1}{2}$ και λύση της ανίσωσης $2x-1=0>0$ είναι το $(0,+\infty)$.

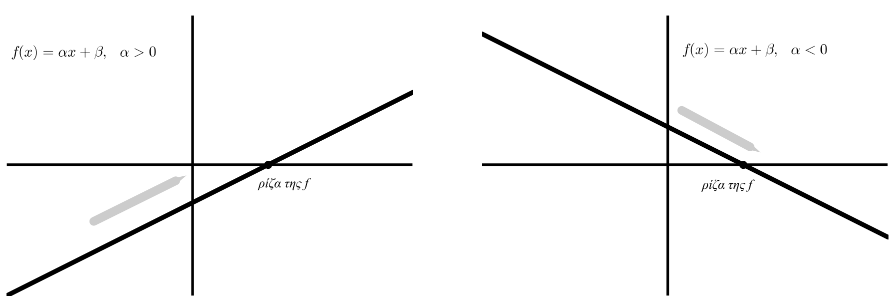
Ας πάμε στην γενική περίπτωση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ και ανίσωσης $\alpha x+\beta>0$. Είχαμε δει ότι τόσο η εξίσωση όσο και η ανίσωση είχαν πάντοτε λύσεις εκτός αν συνέβαινε $\alpha=0$.

- Όταν $\alpha=0$ η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι μία ευθεία που έχει την ίδια διεύθυνση με τον $x'x$.



  Για να έχει εξίσωση λύση πρέπει η ευθεία να συμπέσει με τον $x'x$ που σημαίνει ότι πρέπει $\alpha=\beta=0$ ενώ για να έχει η ανίσωση λύση πρέπει η ευθεία να είναι ολόκληρη πάνω από τον $x'x$ δηλαδή $\beta>0=\alpha$.

- Όταν $\alpha\neq 0$ τότε η $f(x)=\alpha x+\beta$ έχει θετικό ή αρνητικό συντελεστή διευθύνσεως. Στην πρώτη περίπτωση όσο κινούμεθα προς τα δεξιά δηλαδή σε μεγαλύτερους αριθμούς η γραφική παράσταση ανεβαίνει. Στην δεύτερη περίπτωση η γραφική παράσταση κατεβαίνει:



Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η f είναι *γνησίως αύξουσα* και στην δεύτερη ότι είναι *γνησίως φθίνουσα.*
Μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα αν όταν το x αυξάνει αυξάνει και το $f(x)$. Πράγμα που σημαίνει ότι αν πάρουμε ένα x_1 και ένα μεγαλύτερο του x_2 τότε $f(x_1)<f(x_2)$.
Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αν όταν το x αυξάνει το $f(x)$ ελαττούται. Δηλαδή αν $x_1<x_2$ τότε $f(x_1)>f(x_2)$. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε και αλγεβρικά ότι η $f(x)=\alpha x+\beta$ όταν $\alpha>0$ είναι γνησίως αύξουσα:

$$x_1<x_2 \underset{\alpha>0}{\Rightarrow} \alpha x_1<\alpha x_2 \Rightarrow \alpha x_1+\beta<\alpha x_2+\beta \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

και ότι η $f(x) = \alpha x + \beta$ όταν $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα:

$$x_1 < x_2 \underset{\alpha<0}{\Rightarrow} \alpha x_1 > \alpha x_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Με τις γνησίως αύξουσες - γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις θα ασχοληθούμε περισσότερο σε άλλες τάξεις.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση γίνει μηδέν ας πούμε για $x = \rho$ τότε για τα $x > \rho$ και μόνο για αυτά θα είναι $f(x) > 0$ και για τα $x < \rho$ και και μόνο για αυτά θα είναι $f(x) < 0$. Εξήγηση:

$$x > \varrho \Rightarrow f(x) > f(\varrho) \Rightarrow f(x) > 0$$

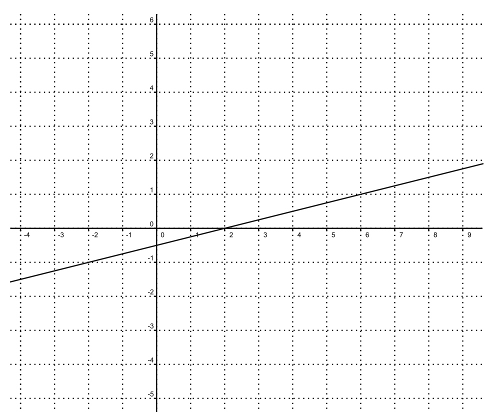
$$x < \varrho \Rightarrow f(x) < f(\varrho) \Rightarrow f(x) < 0$$

Αν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα τα πράγματα γίνονται ανάποδα: Αν $f(\varrho) = 0$ τότε

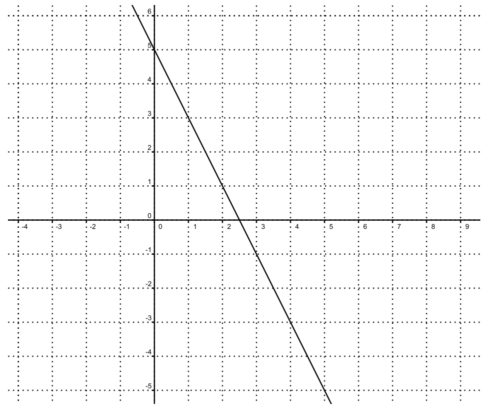
$$x > \varrho \Rightarrow f(x) < f(\varrho) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x < \varrho \Rightarrow f(x) > f(\varrho) \Rightarrow f(x) > 0$$

Παράδειγμα 110. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και έχει ρίζα το 2. Για $x > 2$ είναι $f(x) > 0$ και για $x < 2$ είναι $f(x) < 0$.

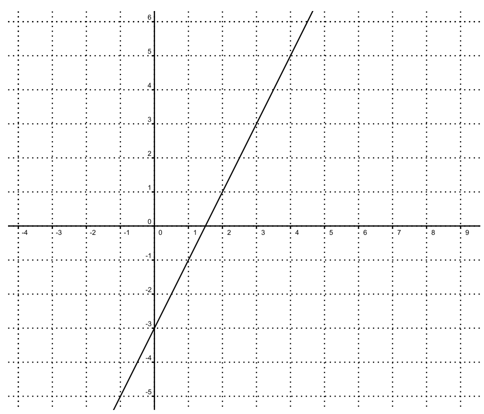


Παράδειγμα 111. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$ που είναι γνησίως αύξουσα. Να λυθούν οι ανισώσεις $f(x) < 0$ και $f(x) > -1$.



Λύση. Βλέπουμε ότι είναι $f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ και $f(3) = -1$. Επομένως θα είναι $f(x) < 0$ για $x > \frac{5}{2}$ και $f(x) > -1$ για $x < 3$.

Άσκηση 390. Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης της μορφής $f(x) = \alpha x + \beta$.



Να λύσετε τις

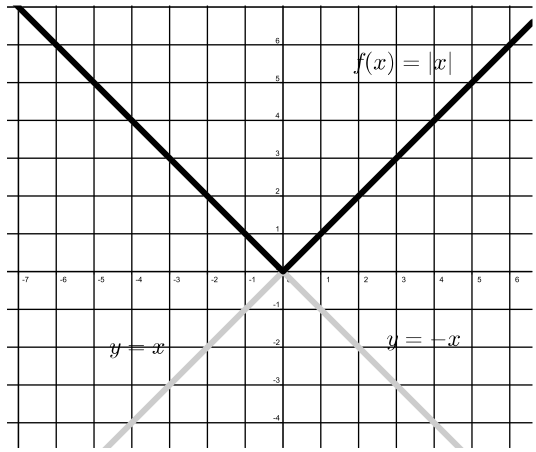
1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = -3$
3. $f(x) > -1$
4. $-5 < f(x) < 3$

4.2.14 Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ που αντιστοιχίζει σε κάθε x την απόλυτη τιμή του γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση μπορεί να γίνει εύκολα αν κάνουμε την γραφική παράσταση των ευθειών $y = -x$ και $y = x$. Κατόπιν από την πρώτη ευθεία σβήνουμε τα σημεία της που έχουν τετμημένη 0 ή θετική και από την δεύτερη σβήνουμε τα σημεία που έχουν αρνητική τετμημένη. Στην Geogebra τα πράγματα είναι πιο απλά: Δίνουμε **f(x)=abs(x)**.



Θα δούμε πως μπορούμε με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f(x) = |x|$ να λύσουμε την εξίσωση

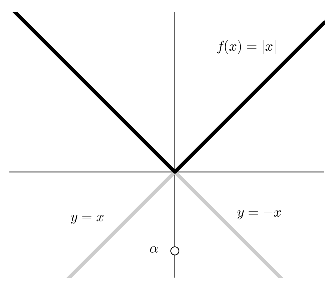
$$|x| = \alpha \quad (*)$$

και τις ανισώσεις

$$|x| < \alpha \quad (**)$$

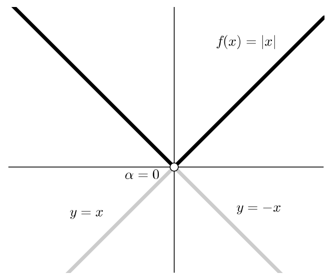
$$|x| > \alpha \quad (**)$$

- *Όταν* $\alpha < 0$ δεν υπάρχει τιμή του x ώστε $|x| = \alpha$ και η $(*)$ είναι αδύνατη.

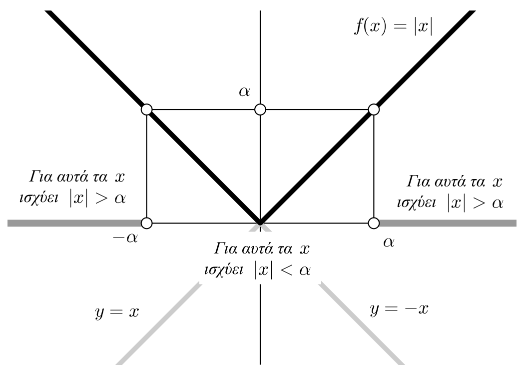


  Πολύ περισσότερο δεν υπάρχει x ώστε $|x| < \alpha$ οπότε και η $(**)$ είναι αδύνατη. Από την άλλη μεριά αφού ο α είναι αρνητικός αριθμός η απόλυτη τιμή κάθε αριθμού θα τον ξεπερνάει. Επομένως η $(***)$ δέχεται ως λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

- *Όταν* $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση $(*)$ έχει μόνη λύση το μηδέν, η ανίσωση $(**)$ είναι αδύνατη ενώ η $(***)$ έχει λύσεις όλα τα $x \neq 0$

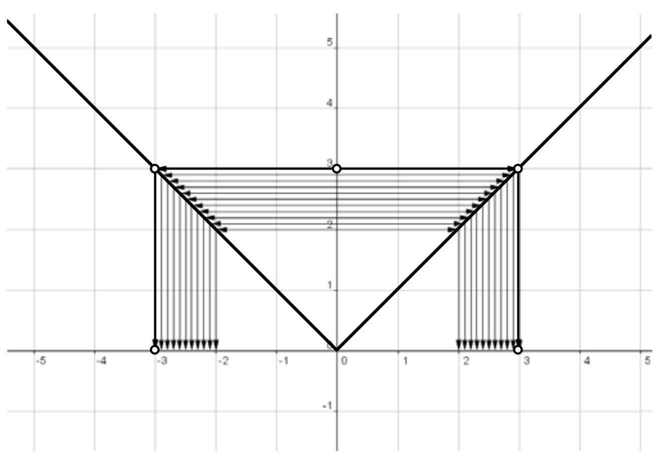


- Όταν $\alpha > 0$ τότε η εξίσωση $(*)$ έχει λύσεις τους $x = \pm\alpha$ ενώ τα σύνολα λύσεων των $(**)$, $(***)$ είναι αντιστοίχως τα $(-\alpha, \alpha)$, $(-\alpha, +\infty) \cup (\alpha, +\infty)$.



Παράδειγμα 112. Να λυθεί με την βοήθεια της γραφικής παράστασης της απόλυτης τιμής η ανίσωση $2 < |x| < 3$

Λύση. Στον $y'y$ παίρνουμε τους αριθμούς μεταξύ 2 και 3 και αναζητούμε στον άξονα $x'x$ τίνων αριθμών είναι απόλυτες τιμές. Βρίσκουμε τελικά ότι οι αριθμοί που η απόλυτη τιμή τους είναι μεταξύ 2 και 3 είναι εκείνοι μεταξύ -3 και -2 και εκείνοι μεταξύ 2 και 3. Δηλαδή η ανίσωση μας έχει σύνολο λύσεων το $(-3, -2) \cup (2, 3)$.

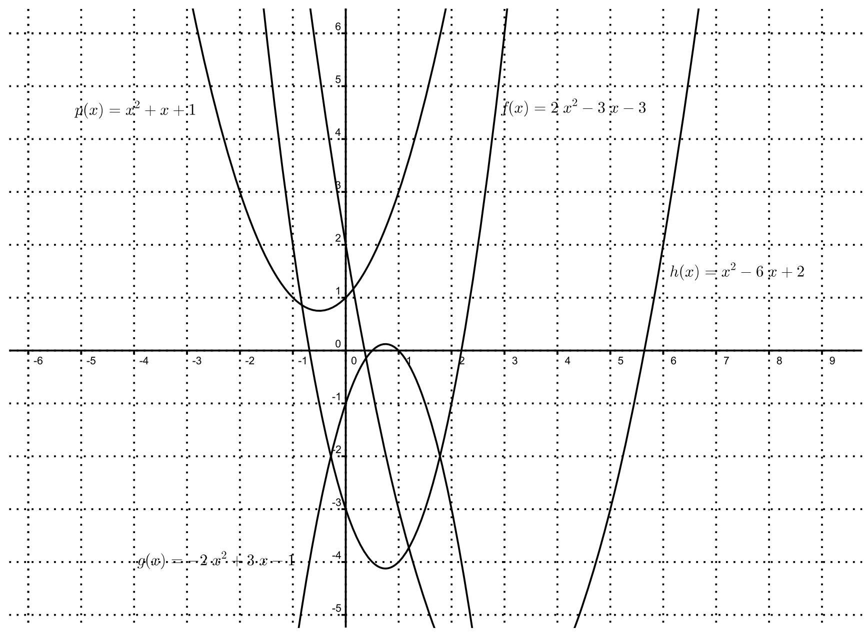


Άσκηση 391. Να κάνετε στην Geogebra την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = |x - 1|$ και με την βοήθεια της να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| < 3$.

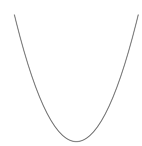
4.2.15 Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Αν στην συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι $\alpha = 0$ τότε $f(x) = \beta x + \gamma$ και γραφική παράσταση της f είναι ευθεία όπως είδαμε προηγουμένως. Μας ενδιαφέρει λοιπόν η περίπτωση όπου $\alpha \neq 0$. Υπάρχει πλήρης θεωρία για την γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης. Η αντίστοιχη καμπύλη ονομάζεται *παραβολή* και είχε μελετηθεί διεξοδικά από τους Αρχαίους Έλληνες. Περισσότερα θα μάθουμε στην επόμενη τάξη.

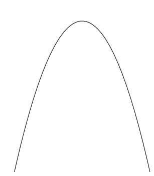
Μπορούμε να πάρουμε μία ιδέα για το πως θα είναι η γραφική παράσταση αν πειραματισθούμε στην Geogebra κάνοντας γραφικές παραστάσεις για διάφορες τιμές των α, β, γ:



Παρατηρούμε πως όταν είναι $\alpha > 0$ η γραφική παράσταση είναι κάπως έτσι:



ενώ αν $\alpha < 0$ η γραφική παράσταση είναι κάπως έτσι:



Παράδειγμα 113. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ να διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$, $B(-1,0)$, $\Gamma(1,2)$.

Λύση. Πρέπει:

$$f(0) = -1, \qquad f(-1) = 0, \qquad f(1) = 2$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \gamma &= -1 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 2 \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε την τιμή $\gamma = -1$ στις άλλες δύο σχέσεις και βρίσκουμε:

$$\alpha - \beta = 1, \qquad \alpha + \beta = 3$$

Τα α, β μπορούν τώρα να βρεθούν με διάφορους τρόπους. Ένας εύκολος είνα να προσθέσουμε και να αφαιρέσουμε τις δύο αυτές ισότητες. Βρίσκουμε:

$$2\alpha = 4, \qquad -2\beta = -2$$

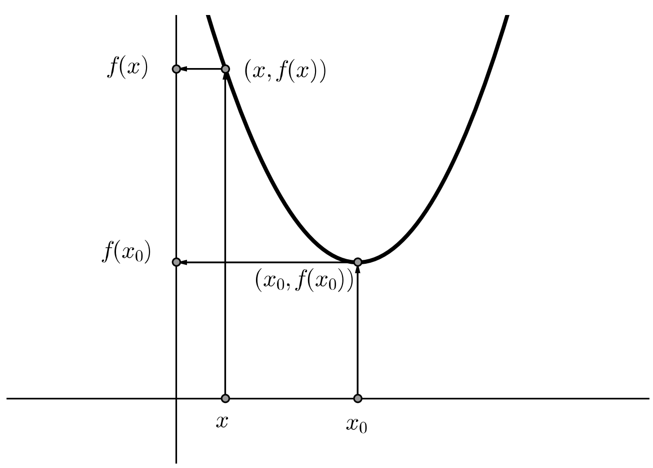
και τελικά $\alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1$ οπότε:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

Άσκηση 392. Να δώσετε στην Geogebra $a = 1, b = 1, c = 1$ και την συνάρτηση $a * x\hat{}2 + b * x + c$. Επίσης δώστε τα σημεία $(1,2), (-1,0), (1,2)$. Να ορίσετε δρομείς για τα a, b, c και βρείτε για ποιες τιμές των a, b, c η γραφική παράσταση της f θα περάσει από τα τρία σημεία. Στη συνέχεια λύστε το πρόβλημα αλγεβρικά.

4.2.16 Ελάχιστο της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν $\alpha > 0$.

Αν παρατηρήσουμε την γραφική παράσταση στην περίπτωση όπου $\alpha > 0$ βλέπουμε ότι (και αυτό ανεξάρτητα από την θέση που έχει η γραφική παράσταση σε σχέση με τους άξονες) υπάρχει ένα σημείο της που βρίσκεται πιο χαμηλά από όλα τα άλλα.



Το «χαμηλά-ψηλά» το καθορίζει η τεταγμένη: τα σημεία που έχουν μεγαλύτερη τεταγμένη βρίσκονται ψηλότερα. Αν ονομάσουμε το σημείο που είναι χαμηλότερα $(x_0, f(x_0))$ τότε οποιαδήποτε άλλα σημεία της γραφικής παράστασης που είναι διαφορετικά από αυτό θα έχουν μεγαλύτερη τεταγμένη: $f(x_0) < f(x)$. Η Άλγεβρα μας επιτρέπει να βρούμε ποιο είναι αυτό το x_0. Θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $f(x_0) \leq f(x)$ για όλα τα x. Βάλαμε τώρα $\leq$ αντί $<$ γιατί επιτρέπουμε στο x να γίνει και ίσο με το x_0. Αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση (19) που την αποδείξαμε στην σελίδα 141 έχουμε:

$$f(x) = \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right)$$

και επομένως

$$f(x_0) \leq f(x) \Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) \leq \alpha\left(\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \leq \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \leq \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \quad (*)$$

Στην τελευταία σχέση μπορούμε να προσθέσουμε και μία ακόμη προφανή ανισότητα:

$$0 \leq \left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \leq \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \quad (**)$$

Η σχέση αυτή πρέπει να ισχύει για κάθε x δηλαδή *όποια τιμή* και αν αν αντικαταστήσουμε στην θέση του x η σχέση πρέπει να αληθεύει. Αν αντικαταστήσουμε όπου x το $-\frac{\beta}{2\alpha}$ η $(**)$ γίνεται

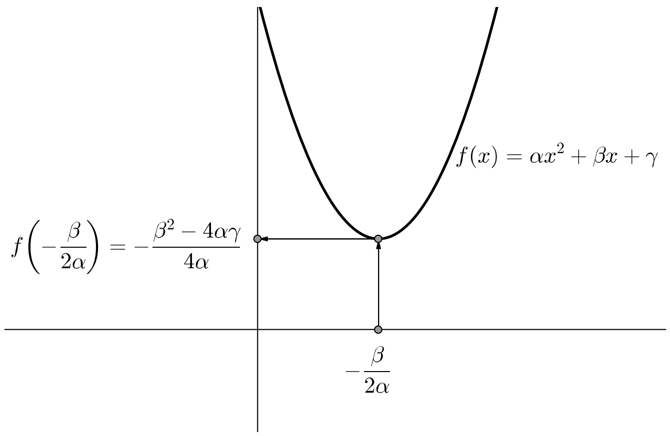
$$0 \leq \left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \leq \left(-\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

δηλαδή

$$0 \leq \left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \leq 0$$

από την οποία προκύπτει ότι $\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0$ και $x_0 + \frac{\beta}{2\alpha} = 0$ δηλαδή $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Προφανώς για την τιμή $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η $(*)$ αληθεύει αφού γίνεται $0 \leq \left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ και φυσικά αληθεύει και η ισοδύναμη της $f(x_0) \leq f(x)$. Για $x = x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η συνάρτηση $f(x)$ παίρνει την τιμή $f(x_0) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left(\left(-\frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) = \alpha\left(-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right) = -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ που είναι και η πιο μικρή τιμή που μπορεί να πάρει η f. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Αν } f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha>0 \text{ τότε για κάθε } x \text{ ισχύει} \\ f(x)\geq f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}\end{array}} \quad (4.59)$$



Γενικά αν έχουμε μία συνάρτηση f ορισμένη στο A λέμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Σημειώστε ότι για να πούμε ότι ένας αριθμός m είναι ελάχιστο της f δεν αρκεί να ισχύει απλώς $f(x) \geq m$ για όλα τα x. *Πρέπει ο αριθμός αυτός να είναι τιμή της f δηλαδή $m = f(x_0)$ για κάποιο x_0.*

Παράδειγμα 114. Να βρεθεί το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + x + 2$.

Λύση Εδώ $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$. Μπορούμε τώρα να βρούμε το ελάχιστο με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι να πάμε κατευθείαν στον τύπο που δίνει το ελάχιστο δηλαδή τον $-\frac{\Delta}{4a}$. Έχουμε $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1^2-4\cdot2\cdot2}{4\cdot2} = \frac{15}{8}$. Ο άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε την πληροφορία ότι το ελάχιστο παρουσιάζεται για $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Βρίσκουε πάλι $f\left(-\frac{1}{2\cdot2}\right) = \frac{15}{8}$.

Παράδειγμα 115. Μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$ και με ένα άλλο τρόπο ως εξής. Θέλουμε να μάθουμε ποια είναι η πιο μικρή τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση δηλαδή να μάθουμε ποιο είναι το πιο μικρό y για το οποίο ισχύει

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y$$

Για να ακριβολογούμε να μάθουμε ποια είναι η πιο μικρή τιμή του y για την οποία υπάρχει x ώστε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y$ δηλαδή ποια είναι η πιο μικρή τιμή για την οποία η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y$ ή διαφορετικά η εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + (\gamma - y) = 0 \ \ (*)$$

έχει λύση. Αλλά το αν έχει μία εξίσωση λύση καθορίζεται από την διακρίνουσα της. Πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης $(*)$ να είναι μη αρνητική δηλαδή πρέπει

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha y \geq 0$$

Λύνουμε την παραπάνω ανίσωση ως προς x και βρίσκουμε $4\alpha y \geq -\left(\beta^2 - 4\alpha\gamma\right)$ δηλαδή

$$y \geq -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} \ \ (**)$$

επομένως η πιο μικρή τιμή του y είναι $-\frac{\Delta}{4\alpha}$. Για να βρούμε όμως για ποιο x επιτυγχάνεται αυτή η πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

Αν το κάνουμε (δείτε άσκηση 395) θα βρούμε $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Ένα πιο «οικονομικός» τρόπος είναι να παρατηρήσουμε ότι η μικρότερη τιμή του y που είναι λύση της $(**)$ είναι εκείνη που την κάνει να ισχύει σαν ισότητα. Τότε όμως η διακρίνουσα της $(*)$ είναι μηδέν και έχει διπλή ρίζα $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Άσκηση 393. Βρείτε το ελάχιστο της $x^2 + x + 1$.

Άσκηση 394. Για ποιά m ισχύει $2m - 3 \leq 4x^2 - 8x + 5$ για όλα τα x;

4.2.17 Έχει η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν $\alpha > 0$ μέγιστο;

Αντίστοιχη έννοια με το ελάχιστο είναι το μέγιστο: Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο A λέμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$ αν ισχύει $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Ισχύει ανάλογη παρατήρηση με εκείνη που κάναμε στο ελάχιστο: Το μέγιστο πρέπει να είναι τιμή της συνάρτησης.

Θα εξετάσουμε τώρα αν η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μέγιστο. Αν η f παρουσίαζε μέγιστο στο x_0 τότε θα έπρεπε $f(x) \leq f(x_0)$ για όλα τα x. Αν εργασθούμε ακριβώς όπως πριν θα βρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geq \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

για όλα τα x. Δηλαδή θα πρέπει $\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \geq 0$ και επομένως θα πρέπει $\sqrt{\left(x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} \geq \sqrt{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2}$ δηλαδή για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει

$$\left|x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right| \geq \left|x + \frac{\beta}{2\alpha}\right|$$

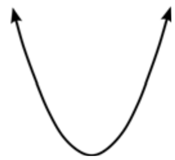
Η παραπάνω σχέση γράφεται και

$$-\left|x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right| \leq x + \frac{\beta}{2\alpha} \leq \left|x_0 + \frac{\beta}{2\alpha}\right|$$

ή και

$$\underbrace{-\left|x_0+\frac{\beta}{2\alpha}\right|-\frac{\beta}{2\alpha}}_{\alpha}\leq x\leq\underbrace{\left|x_0+\frac{\beta}{2\alpha}\right|-\frac{\beta}{2\alpha}}_{\beta}$$

Δηλαδή θα πρέπει για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει $\alpha \leq x \leq \beta$ (άτοπο) (δείτε 396). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι «προς τα πάνω» η γραφική παράσταση της f επεκτείνεται απεριόριστα.



Άσκηση 395. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν έχει μέγιστο εξετάζοντας την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y$ (δείτε και παράδειγμα 115).

Άσκηση 396. Που είναι το άτοπο στον ισχυρισμό

«για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει $\alpha \leq x \leq \beta$» που συναντήσαμε προηγουμένως;

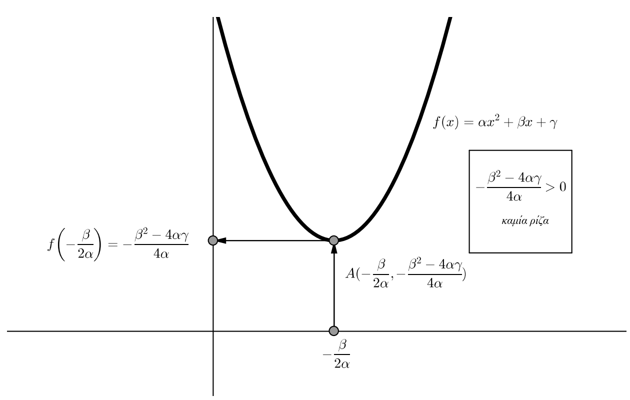
Άσκηση 397. Δεν μπορεί να ισχύει $2x^2 + 3x - 1 < \sqrt{2}$ για όλα τα x. Βρείτε όλα τα x για τα οποία η παραπάνω ανισότητα είναι ψευδής.

Άσκηση 398. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + \frac{1}{x}$ ορισμένη στο $(0, +\infty)$. Να χρησιμοποιήσετε την τεχνική που παρουσιάζεται στο παράδειγμα 115 για να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

4.2.18 Ρίζες της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν $\alpha > 0$.

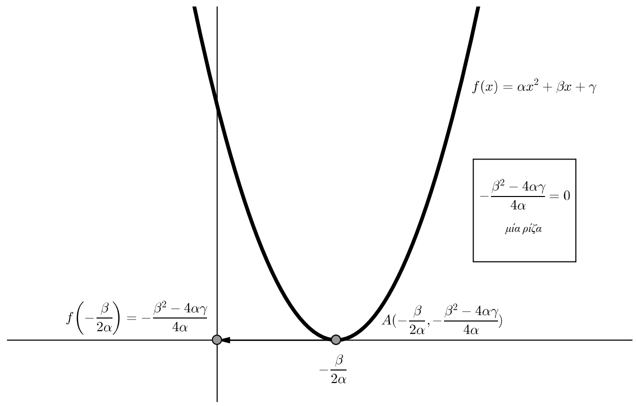
Ας ονομάσουμε A το σημείο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δηλαδή το $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$.

Αν το A βρίσκεται πάνω από τον $x'x$ δηλαδή έχει τεταγμένη θετική, ασφαλώς η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον $x'x$ δηλαδή η $f(x) = 0$ δεν θα έχει ρίζες.

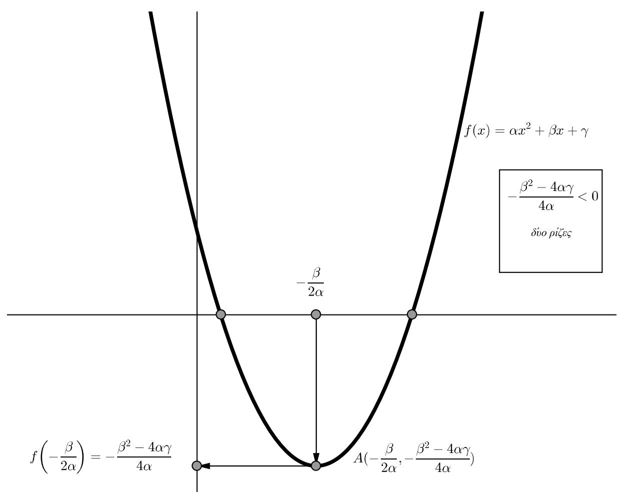


Αλλά η τεταγμένη αυτού του σημείου είναι $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$. Θα είναι η παράσταση αυτή θετική δηλαδή $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha} > 0$ όταν (εργαζόμαστε στην περίπτωση όπου $\alpha > 0$) $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Επιβεβαιώνεται δηλαδή ένα αποτέλεσμα στο οποίο είχαμε καταλήξει με άλλο τρόπο.

Αν το A βρίσκεται πάνω στον άξονα $x'x$ τότε έχουμε μία μόνο ρίζα και αυτό συμβαίνει όταν $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0$ δηλαδή $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$



Αν το A βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ τότε η $f(x)$ έχει δύο ρίζες. Στην περίπτωση αυτή είναι $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha} < 0$ δηλαδή $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

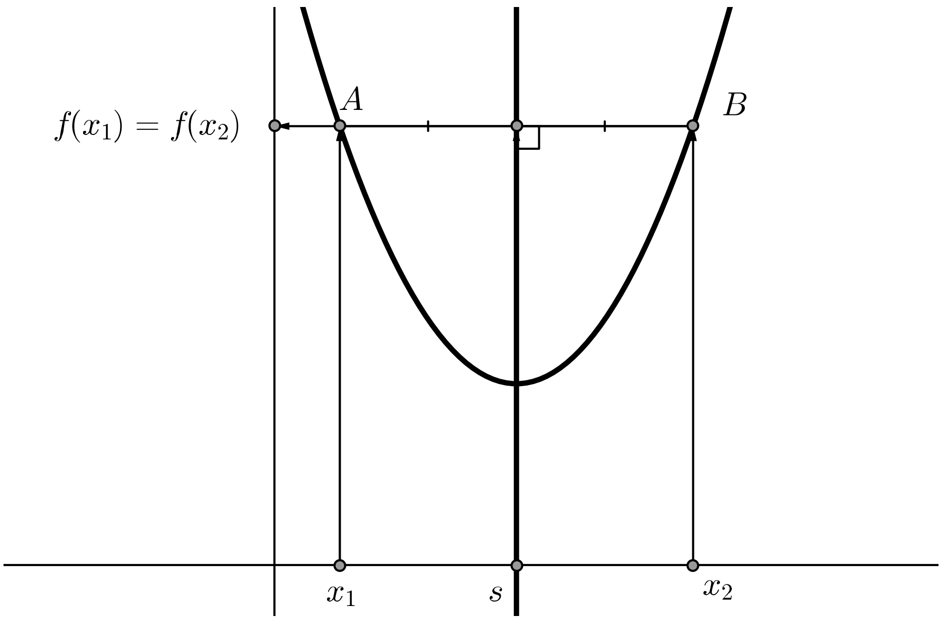


Άσκηση 399. Η εξίσωση $x^2 + x + 1 = 0$ δεν έχει λύσεις. Να αποδείξετε ότι και η $x^2 + x + 1 + 2012 = 0$ δεν έχει λύσεις.

Άσκηση 400. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, $\delta >)$ και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει λύσεις τότε και η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \delta = 0$ δεν έχει λύσεις.

4.2.19 Άξονας συμμετρίας της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ φαίνεται να παρουσιάζει κάποια συμμετρία ως προς ένα κατακόρυφο (: κάθετο στον $x'x$) άξονα. Θα επιχειρήσουμε να τον βρούμε. Ας πούμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας μία κατακόρυφη ευθεία $x = s$.



Αν πάρουμε ένα σημείο A της γραφικής παράστασης της f πρέπει το συμμετρικό του B ως προς την ευθεία $x = s$ να ανήκει πάλι στην γραφική παράσταση της f. Τα A και B θα έχουν τις ίδιες τεταγμένες ενώ οι τετμημένες τους x_1, x_2 θα ισαπέχουν από το s. Θα είναι λοιπόν

$$s - x_1 = x_2 - s \quad (\#)$$

και

$$f(x_1) = f(x_2) \quad (\#\#)$$

Από την πρώτη σχέση βρίσκουμε ότι

$$s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ενώ από την (##) έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\alpha x_1^2 - \alpha x_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(x_1^2 - x_2^2\right) + \beta(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + \beta(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x_1 - x_2\right)\left(\alpha\left(x_1 + x_2\right) + \beta\right) = 0 \underset{(x_1 \neq x_2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha\left(x_1 + x_2\right) + \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha\left(x_1 + x_2\right) = -\beta \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha}$$

και επομένως

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\beta}{2\alpha} \quad (\#\#\#)$$

Συνδυάζοντας τις $(\#)$ και $(\#\#\#)$ βρίσκουμε ότι πρέπει:

$$s = \frac{-\beta}{2\alpha}$$

Συνοψίζοντας έχουμε:

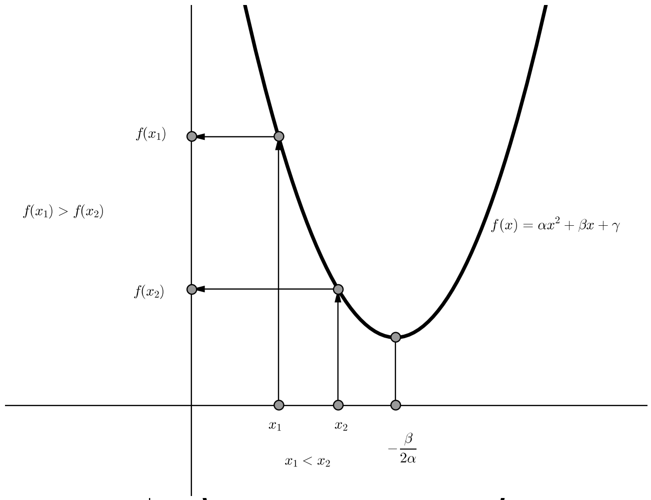
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Αν } f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ τότε} \\ \bullet \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ ισχύει } f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\beta}{2\alpha} \\ \bullet \text{ η ευθεία } x = \frac{-\beta}{2\alpha} \text{ είναι άξονας συμμετρίας} \\ \text{της γραφικής παράστασης της } f \end{array}} \tag{4.60}$$

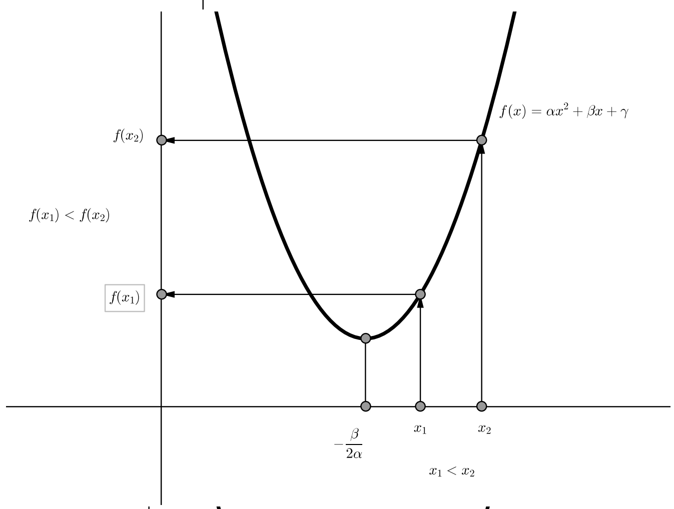
Άσκηση 401. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους $\rho_1 < \rho_2$ τότε η ευθεία $x = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

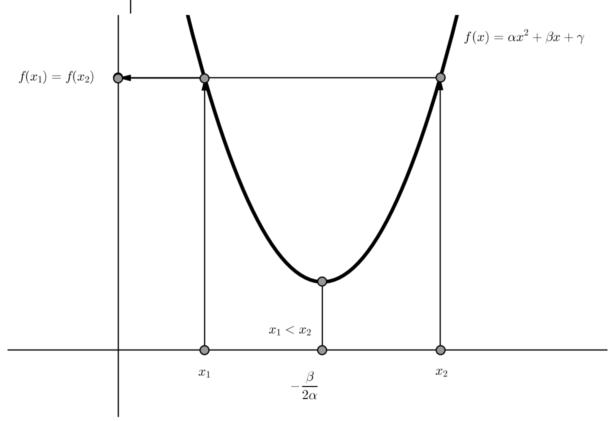
Άσκηση 402. Να αποδείξετε ότι με $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ισχύει $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha} + h\right) = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha} - h\right)$ για όλα τα h.

4.2.20 Μονοτονία της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν $\alpha > 0$.

Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν είναι γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα αφού για $x_1 < x_2$ άλλοτε ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, άλλοτε $f(x_1) > f(x_2)$ και άλλοτε $f(x_1) = f(x_2)$. Όμως όπως βλέπουμε αν πάρουμε μεν $x_1 < x_2$ αλλά χωρίς να ξεπεράσουν το $-\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλαδή τα x_1, x_2 να ανήκουν στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ θα έχουμε $f(x_1) > f(x_2)$. Λέμε ότι η f είναι *γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$.







Ας δώσουμε και μία απόδειξη αυτού που βλέπουμε στο σχήμα:

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow \quad (\sharp)$$

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma > \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\alpha x_1^2 + \beta x_1 - \alpha x_2^2 - \beta x_2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x_1^2 - \alpha x_2^2 + \beta x_1 - \beta x_2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha (x_1 - x_2)((x_1 + x_2) + \beta (x_1 - x_2) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(\alpha (x_1 + x_2) + \beta) > 0 \underset{x_1 - x_2 < 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha (x_1 + x_2) + \beta < 0 \quad (\sharp\sharp)$$

Η σχέση $(\sharp)$ ισχύει διότι αφού $x_1 < x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι $x_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha}$. Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι $x_1 + x_2 < -\frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$ δηλαδή από την οποία προκύπτει ότι $\alpha (x_1 + x_2) < -\beta$ και από την οποία προκύπτει η $(\sharp\sharp)$.
Όμοια διαπιστώνουμε ότι αν πάρουμε $x_1 < x_2$ αλλά στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$.
Άρα

Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \;\; \alpha > 0$
• στο διαστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα
• στο διαστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα

(4.61)

Για να δηλώσουμε ότι μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα χρησιμοποιούμε το βελάκι $\nearrow$ ενώ αν είναι γνησίως φθίνουσα γράφουμε $\searrow$.

Στην περίπτωση όπου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει δύο ρίζες $\rho_1 < \rho_2$ έχουμε τον πίνακα:

x	$-\infty$		ρ_1		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		ρ_2		$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$		$\searrow$	0	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Αν όμως διαβάσουμε τον πίνακα προσεκτικά μπορούμε να έχουμε και άλλες πληροφορίες:

- Στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα δηλαδή η γραφική της παράσταση κατεβαίνει. Στο ρ_1 η συνάρτηση γίνεται μηδέν άρα πιο πριν θα είναι θετική και μετά θα είναι αρνητική. Πιο τυπικά: $x < \rho_1 \Rightarrow f(x) > f(\rho_1) \Rightarrow f(x) > 0$ και $\rho_1 < x \leq -\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow f(\rho_1) > f(x) \Rightarrow 0 > f(x)$

Στο διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα δηλαδή η γραφική της παράσταση ανεβαίνει. Στο ρ_2 η συνάρτηση γίνεται μηδέν άρα πιο πριν θα είναι αρνητική και μετά θα είναι θετική. Με σύμβολα: $-\frac{\beta}{2\alpha} \leq x < \rho_2 \Rightarrow f(x) < f(\rho_2) \Rightarrow f(x) < 0$ και $\rho_2 < x \Rightarrow f(\rho_2) < f(x) \Rightarrow 0 < f(x)$ Άρα μπορούμε να συμπληρώσουμε στον πίνακα και επιπλέον στοιχεία για το πρόσημο της f:

x	$-\infty$		ρ_1		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		ρ_2		$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$		$\searrow +$	0	$\searrow -$	0	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	

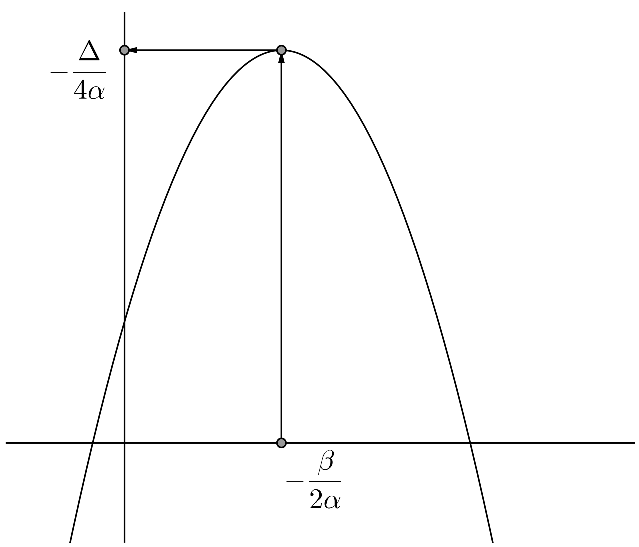
Τα παραπάνω στοιχεία επιβεβαιώνουν με άλλο τρόπο αυτό που μάθαμε ήδη: Το $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν έχει ρίζες και είναι $\alpha > 0$ εκτός των ριζών είναι θετικό και μεταξύ των ριζών είναι αρνητικό.

Αν μία συνάρτηση σε κάποιο διάστημα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέμε ότι είναι *γνησίως μονότονη*.

Άσκηση 403. Βρείτε σε ποιο διάστημα η η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα και σε ποιο είναι γνησίως φθίνουσα.

4.2.21 Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όταν $\alpha < 0$

Στην περίπτωση αυτή με όμοιο τρόπο όπως πριν μπορούμε να αποδείξουμε ότι $f(x) \leq f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ για όλα τα x δηλαδή ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και ότι η γραφική παράσταση της f επεκτείνεται απεριόριστα προς τα κάτω.



Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

Άσκηση 404. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3x^2 + 12x + 11$. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της. Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) < 25$ για κάθε x.

Άσκηση 405. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις:

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
3. $f(x) = (x-1)(x+3)$
4. $f(x) = (x+2)^2 - 5$

- Να γίνει στην Geogebra η γραφική της παράσταση.
- Να βρεθεί η διακρίνουσα και οι ρίζες (εφ' όσον υπάρχουν).
- Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας και το μέγιστο ή ελάχιστο.

Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που βρήκατε με την εικόνα που σας δείχνει η Geogebra.

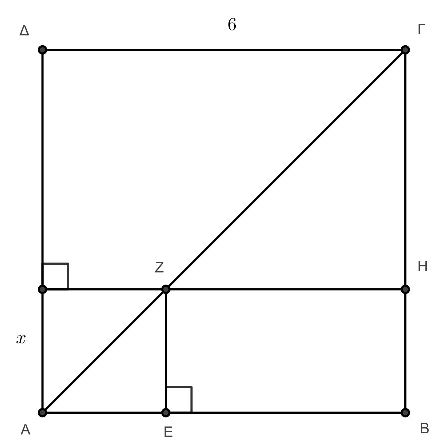
Άσκηση 406. Να δώσετε πλήρη απόδειξη της πρότασης:
Αν $\alpha < 0$ τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει μέγιστο το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Άσκηση 407.
1. Να βρείτε την μέγιστη τιμή της $x(3-x)$.
2. Δύο αριθμοί x, y έχουν άθροισμα 3. Βρείτε την μέγιστη τιμή του γινομένου τους.

Άσκηση 408. Να αποδείξετε ότι αν δύο αριθμοί x, y έχουν σταθερό άθροισμα c τότε το γινόμενο τους xy γίνεται μέγιστο όταν οι αριθμοί γίνου ίσοι δηλαδή όταν $x = y = \frac{c}{2}$.

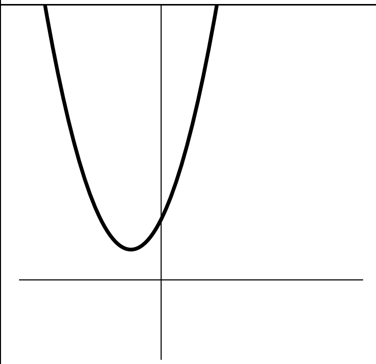
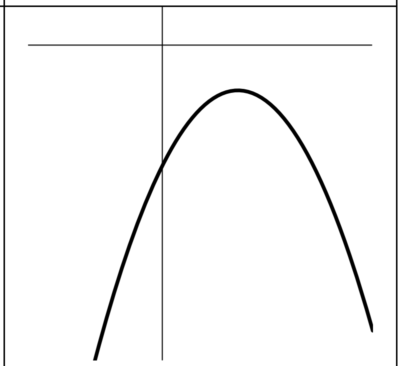
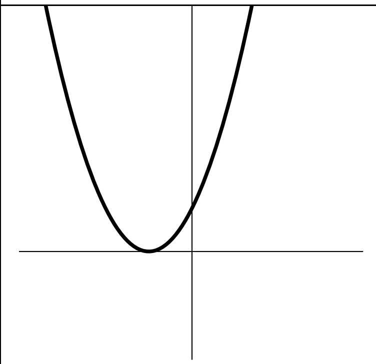
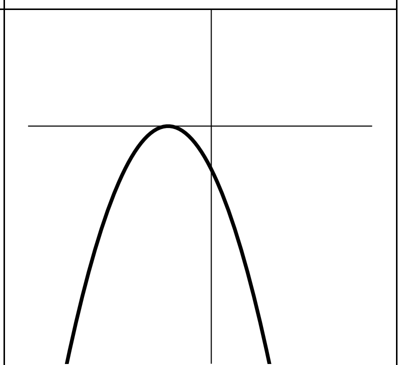
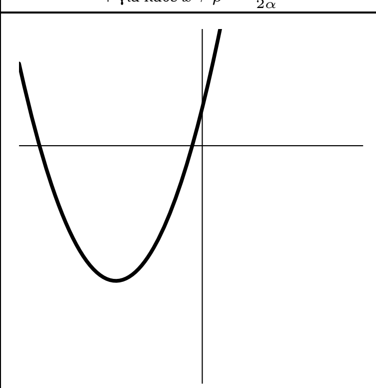
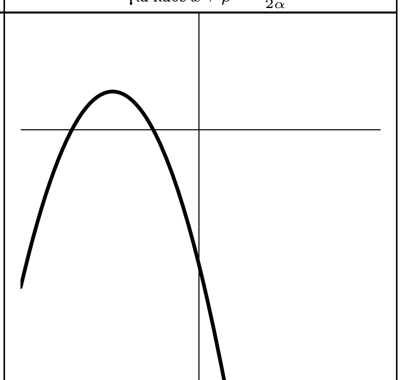
Άσκηση 409. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια που έχουν την ίδια περίμετρο μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

Άσκηση 410. Στο σχήμα το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι τετράγωνο πλευράς 3.



Το τμήμα x είναι μεταβλητό. Βρείτε την μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου EZHB

4.2.22 Η $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Μία σύνοψη.

	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
		
	ελάχιστο $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$	μέγιστο $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
$\Delta < 0$	$\searrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, $\nearrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$	$\nearrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, $\searrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
	Δεν έχει ρίζες	Δεν έχει ρίζες
	Πάντα +	Πάντα −
		
	ελάχιστο $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$	μέγιστο $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
$\Delta = 0$	$\searrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, $\nearrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$	$\nearrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, $\searrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
	Μία διπλή ρίζα $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$	Μία διπλή ρίζα $\rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$
	+ για κάθε $x \neq \rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$	− για κάθε $x \neq \rho = -\frac{\beta}{2\alpha}$
		
	ελάχιστο $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$	μέγιστο $f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) = -\frac{\Delta}{4\alpha}$
$\Delta > 0$	Δύο ρίζες $\searrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, $\nearrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$	Δύο ρίζες $\nearrow$ στο $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, $\searrow$ στο $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$
	Δύο ρίζες $\rho_1 = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} < \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \rho_2$	Δύο ρίζες $\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} < \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \rho_2$
	+ εκτός των ριζών − μεταξύ	− εκτός των ριζών + μεταξύ

5 Συμπληρωματικές Ασκήσεις

5.1 Ασκήσεις στο κεφάλαιο 1

1.1 Οι Φυσικοί Αριθμοί

Άσκηση 411. Ας συμβολίσουμε, προς στιγμήν, με $a*$ τον επόμενο του φυσικού αριθμού a.

1. Βρείτε τον $((12*)*-1)*$
2. Βρείτε τον x αν $(x*)* = 19$

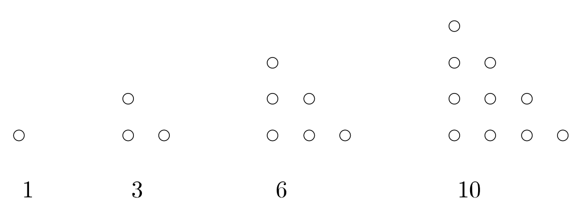
Άσκηση 412. Ποιες από τις παρακάτω διαφορές είναι φυσικοί αριθμοί;

1. $4-3$
2. $44-33$
3. $333-444$
4. $0-0$
5. $0-1$
6. $33-33$

Άσκηση 413. Ποια από τα παρακάτω πηλίκα είναι φυσικοί αριθμοί;

1. $33:11$
2. $44:12$
3. $12:13$
4. $0:33$
5. $84:12$
6. $(232\cdot 233):233$

Άσκηση 414. Στο σχήμα εμφανίζονται 4 αριθμοί. Ονομάζονται *τρίγωνοι αριθμοί*.



Βρείτε τους δύο επόμενους τρίγωνους αριθμούς.

Άσκηση 415. Να βρείτε κατά πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γραφεί ο αριθμός 12 ως άθροισμα δύο άλλων φυσικών (η σειρά δεν μετράει).

Άσκηση 416. *Παλινδρομικοί αριθμοί.* Ένας αριθμός ονομάζεται *παλιδρομικός* αν διαβάζεται το ίδιο από την αρχή ή από το τέλος δηλαδή αν τα ψηφία του είναι συμμετρικά. Ο αριθμός 3443 είναι παλινδρομικός ενώ ο 2345 δεν είναι. Πάρτε ένα οποιοδήποτε αριθμό που δεν είναι παλινδρομικός. Γράψτε τον ανάποδα. Προσθέστε τους δύο αριθμούς. Αν το άθροισμα δεν είναι παλινδρομικός επανάλαβετε. Στο τέλος μετά από κάποια βήματα πιθανότατα θα καταλήξετε σε παλινδρομικό αριθμό. Π.χ. ο 971 δεν είναι παλινδρομικός. Μπορεί να γίνει:

$$971 + 179 = 1150$$

$$1150 + 0511 = 1661$$

Δεν έχει αποδειχθεί αν η διαδικασία εφαρμόζεται για κάθε αριθμό αλλά έχει δοκιμασθεί για ένα μεγάλο πλήθος αριθμών και βρέθηκε ότι δουλεύει. Σε μερικούς όμως αριθμούς η διαδικασία δεν έχει δώσει αποτέλεσμα για παράδειγμα ο 196 δεν δίνει παλινδρομικό αριθμό στα 700.000.000 πρώτα βήματα.
Να μετατρέψετε σε παλινδρομικό τον 234490.

Leonardo Pisano Bigollo

1170 - 1250

Άσκηση 417. *Ένα πρόβλημα του Fibonacci.* Στο έργο του *«Το βιβλίο των Υπολογισμών»* (Liber Abaci) που εξεδόθη το 1202 ο Leonardo Pisano Bigollo γνωστός και ως Fibonacci έχει το ακόλουθο πρόβλημα:
Ένας άνθρωπος είχε ένα ζευγάρι κουνέλια μαζί σε ένα ορισμένο κλειστό χώρο, και επιθυμεί κάποιος να μάθει πόσα (κουνέλια) δημιουργούνται από το ζεύγος αυτό σε ένα χρόνο όταν από τη φύση τους κάθε μήνα γεννούν και άλλο ένα ζευγάρι και τον δεύτερο μήνα εκείνα που γεννήθηκαν θα γεννήσουν επίσης ένα ζευγάρι.

Το πρόβλημα ουσιαστικά λέει: Ξεκινήστε με ένα ζευγάρι κουνελιών (ένα αρσενικό και ένα θηλυκό) που γεννιούνται την 1η Ιανουαρίου. Υποθέστε ότι όλοι οι μήνες έχουν 30 μέρες και ότι τα κουνέλια μπορούν να αναπαραχθούν ένα μήνα μετά την γέννηση τους γεννώντας ένα ζευγάρι μετά από ένα μήνα που με την σειρά του σε δύο μήνες από την γέννηση του θα γεννήσει άλλο ένα ζευγάρι κ.ο.κ. Υποθέτουμε ότι κανένα κουνέλι δεν πεθαίνει μέσα στο χρόνο και ότι ζευγαρώνουν αποκλειστικά τα κουνέλια του ίδιου ζευγαριού. Να δώσετε απάντηση στο πρόβλημα συμπληρώνοντας τον πίνακα:

Αρχή:	Αρθμός ζευγαριών κουνελιών
1ου Μήνα	1
2ου Μήνα	1
3ου Μήνα	2
4ου Μήνα	3
5ου Μήνα	
6ου Μήνα	
7ου Μήνα	
8ου Μήνα	
9ου Μήνα	
10ου Μήνα	
11ου Μήνα	
12ου Μήνα	
13ου Μήνα	

Άσκηση 418. *Παραγοντικά.* Το γινόμενο των ν πρώτων θετικών ακραίων συμβολίζεται με $\nu!$ (διαβάζεται ν-παραγοντικό. Είναι δηλαδή

$$\boxed{\nu! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \nu} \tag{5.1}$$

Συμφωνούμε καταχρηστικά ότι

$$\boxed{0! = 1} \tag{5.2}$$

Έτσι: $0! = 1$, $1! = 1, 2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$.

1. Βρείτε τα $5!$ και $6!$.
2. Δίνεται ότι $9! = 362.880$. Βρείτε τα $10!$ και $11!$.

Άσκηση 419. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{(\nu + 1)! = \nu! \cdot (\nu + 1)} \tag{5.3}$$

Άσκηση 420. *Οι αυτοβιογραφικοί αριθμοί.* Ένας φυσικός αριθμός ονομάζεται αυτοβιογραφικός αν

- Το πρώτο ψηφίο του μας λέει πόσες φορές εμφανίζεται στον αριθμό το ψηφίο 0.
- Το δεύτερο ψηφίο του μας λέει πόσες φορές εμφανίζεται στον αριθμό το ψηφίο 1.
- Το τρίτο ψηφίο του μας λέει πόσες φορές εμφανίζεται στον αριθμό το ψηφίο 2 κ.ο.κ.

Για παράδειγμα ο αριθμός 3211000 είναι αυτοβιογραφικός έχει 3 μηδενικά 2 μονάδες, 1 δύο, 1 τρία, 0 τέσσερα, 0 πέντε, 0 έξη.

1. Να αποδείξετε ότι ένας αυτοβιογραφικός αριθμός δε μπορεί να έχει πάνω από 10 ψηφία.

2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ψηφίων ενός αυτοβιογραφικού αριθμού είναι όσο με το πλήθος των ψηφίων του.
3. Να αποδείξετε ότι άθροισμα των ψηφίων ενός αυτοβιογραφικού αριθμού δεν υπερβαίνει το 10.
4. Να αποδείξετε ένας αυτοβιογραφικός αριθμός θα περιέχει οπωσδήποτε μηδενικά.
5. Προσπαθήστε να βρείτε όσους περισσότερους αυτοβιογραφικούς αριθμούς μπορείτε.

1.2 Οι Ακέραιοι Αριθμοί

Άσκηση 421. Να υπολογισθούν τα:

1. $5+7$
2. $(-8)+(-6)$
3. $6+(-4)$
4. $-9+5$
5. $15+(-15)$
6. $-17+0$
7. $0+15$
8. $13+(-14)$
9. $5-8$
10. $-7-10$
11. $9-(-15)$
12. $-20-18$
13. $-5-(-5)$
14. $30-(-30)$
15. $(-11)+(-11)$

Άσκηση 422. Να υπολογισθούν τα:

1. $5\cdot 7$
2. $(-8)\cdot(-9)$
3. $(-9)\cdot 8$
4. $10\cdot(-4)$
5. $0\cdot 123$
6. $5\cdot(-2)$

Άσκηση 423. Να βρείτε όλους τους διαιρέτες του 100.

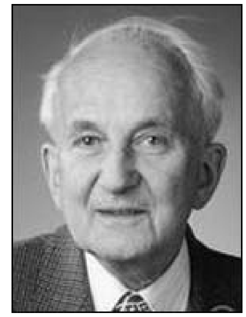
Άσκηση 424. Να αποδείξετε ότι για κάθε ζεύγος ακεραίων α,β ο αριθμός $\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta$ είναι άρτιος.

Άσκηση 425. Οι αριθμοί α,β είναι ακέραιοι. Τι μπορείτε να πείτε για τον αριθμό $\alpha\beta+\alpha+\beta$; Πότε άραγε είναι άρτιος και πότε περιττός;

Άσκηση 426. Δίνεται ότι ο αριθμός p είναι ένας περιττός πρώτος. Ο $p+1$ είναι άραγε πρώτος σύνθετος;

Άσκηση 427. Το γινόμενο δύο σύνθετων αριθμών είναι άραγε πρώτος ή σύνθετος; Τι μπορείτε να πείτε για το γινόμενο δύο πρώτων;

Άσκηση 428. *Η εικασία του Goldbach.* Στις 7 Ιουνίου του 1742 ο Πρώσσος μαθηματικός Christian Goldbach έγραψε ένα γράμμα στον Leonhard Euler στο οποίο ανέφερε την διάσημη εικασία του «Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων» Ο Euler του απάντησε: «το θεωρώ ως ένα απολύτως βέβαιο θεώρημα αν και δε μπορώ να το αποδείξω». Μέχρι τώρα δεν έχει βρεθεί απόδειξη (δηλαδή που να καλύπτει όλους τους αριθμούς) αν και η εικασία έχει επιβεβαιωθεί για πολύ μεγάλους αριθμούς. Να επαληθεύσετε την εικασία του Goldbach για τους άρτιους έως τον 100.



Lothar Collatz
1910-1990

Άσκηση 429. *Οι τέλειοι αριθμοί.* Ένας θετικός ακέραιος λέγεται τέλειος αν είναι ίσος με το άθροισμα των γνησίων θετικών διαιρετών του. Ο 6 είναι τέλειος διότι οι γνήσιοι θετικοί διαιρέτες του είναι οι $1, 2, 3$. Είναι άγνωστο αν υπάρχουν άπειροι ή πεπερασμένοι τέλειοι αριθμοί όπως επίσης άγνωστο είναι αν υπάρχει έστω και ένας περιττός τέλειος αριθμός. Έχουν μέχρι στιγμής βρεθεί 47 τέλειοι αριθμοί, όλοι άρτιοι. Ο μεγαλύτερος είναι ο $2^{431112608}\left(2^{431112609}-1\right)$ και έχει $25.956.377$ ψηφία.
Να επαληθεύσετε ότι οι αριθμοί 28 και 496 είναι τέλειοι.

Άσκηση 430. *Η εικασία του Collatz.* Θεωρείστε ένα θετικό ακέραιο. Αν είναι άρτιος διαιρέστε τον δια 2. Αν είναι περιττός πολλαπλασιάστε τον επί 3 και προσθέστε το 1. Συνεχίστε με αυτό τον τρόπο. Θα **καταλήξετε**, αργά ή γρήγορα, στο 1.

$$3 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 4 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 2 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 1$$

$$18 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 9 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 28 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 14 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 7 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 22 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 11 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 34 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 17 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 52 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{}$$

$$26 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 13 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 40 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 20 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 10 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 5 \xrightarrow[\text{περιττός}]{} 16 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 8 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 4 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 2 \xrightarrow[\text{άρτιος}]{} 1$$

Εκείνο το «**καταλήξετε**» που αναφέρεται πιο πάνω έχει διαπιστωθεί *πειραματικά* δοκιμάζοντας διάφορους αριθμούς. Δεν έχει δοθεί απόδειξη γιαυτό και ονομάζεται «εικασία» που οφείλεται στον Collatz αν και είναι γνωστή με διάφορα ονόματα. Η απόδειξη της εικασίας είναι ένα άλυτο πρόβλημα των Μαθηματικών. Ο Erdos είχε πει: «*Τα Μαθηματικά δεν είναι ακόμη ώριμα για τέτοιου είδους προβλήματα*» δηλαδή δεν υπάρχουν ακόμη τα κατάλληλα εργαλεία για την αντιμετώπιση τους. Να επαληθεύσετε την εικασία του Collatz για τους αριθμούς 19 και 29.

Άσκηση 431. *Τρίχες.* Να αποδείξετε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο (δηλαδή δύο ή περισσότερα) άτομα στην Αθήνα που έχουν στο κεφάλι τους τον ίδιο αριθμό από τρίχες.

1.3 Οι Ρητοί Αριθμοί

Άσκηση 432. Να γράψετε τους παρακάτω ρητούς σε απλούστερη μορφή:

1. $\frac{3}{8}+\frac{7}{12}$
2. $\frac{1}{10}+\frac{4}{15}$
3. $\frac{2}{3}-\frac{3}{7}$
4. $\frac{11}{12}-\frac{3}{4}$
5. $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}$
6. $\frac{4}{6}-\frac{3}{5}$
7. $\frac{4}{9}\cdot\frac{15}{8}$
8. $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}$
9. $4\cdot\frac{3}{24}$
10. $-5\cdot\left(\frac{5}{-2}\right)$
11. $\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{-18}{5}\right)$
12. $\left(\frac{3}{4}\right):\left(\frac{2}{9}\right)$

Άσκηση 433. Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις:

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$
3. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$
4. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{y-2}$

Άσκηση 434. Να συμπληρώσετε με τον κατάλληλο ακέραιο την καρδούλα ώστε να ισχύει η ισότητα των κλασμάτων:

1. $\frac{6}{9} = \frac{2}{\heartsuit}$
2. $\frac{\heartsuit}{5} = \frac{3}{15}$
3. $\frac{7}{\heartsuit} = \frac{1}{4}$
4. $\frac{11}{10} = \frac{121}{\heartsuit}$

Άσκηση 435. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{xy+1}{x+y}$. Να βρείτε την τιμή της A όταν

1. $x = 1,\ y = 2$
2. $x = -\frac{1}{4},\ y = 8$

Άσκηση 436. Για τις τιμές

$$a = 1,\ \ b = 2,\ \ c = 3,\ \ d = 4,\quad e = 5,\quad f = 0$$

βρείτε τα:

1. $9a + 2b + 3c - 2f$
2. $4c - 2a - 3b + 5c$
3. $7ae + 3bc + 9d - af$
4. $8abc - bcd + 9cde - def$
5. $abcd + abce + abde + acde + bcde$
6. $\frac{4a}{b} + \frac{9b}{c} + \frac{8c}{d} - \frac{5d}{e}$
7. $\frac{4ac}{b} + \frac{8bc}{d} - \frac{5bd}{e}$
8. $\frac{12a}{bc} + \frac{6b}{cd} + \frac{20c}{de}$
9. $\frac{cde}{ab} + \frac{5bcd}{ae} - \frac{6ade}{bc}$
10. $7e + bcd - \frac{3bde}{2ac}$
11. $\frac{2a+5b}{c} + \frac{3b+2c}{d} - \frac{a+b+c+d}{2e}$
12. $\frac{b+c+3e}{e+c-d}$
13. $\frac{a+c}{c-a} + \frac{b+d}{d-b} + \frac{c+e}{e-c}$
14. $\frac{a+b+c+d+e}{e-d+c-b+a}$

Άσκηση 437. Να γράψετε σαν ένα κλάσμα τις παραστάσεις:

1. $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$
2. $\frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{x}{y}}$
3. $\frac{\alpha}{\frac{x}{y}}$
4. $\frac{\frac{\alpha}{x}}{y}$

Άσκηση 438. Για τους ακέραιους α, β ισχύει $\alpha\beta = 20$. Με τι είναι ίσο το $3(-\alpha)(-\beta)$;

Άσκηση 439. Για τους ακέραιους α, β ισχύει $\alpha + \beta = 20$. Με τι είναι ίσο το $3((-\alpha) + (-\beta))$;

Άσκηση 440. *Τα τέσσερα τεσσάρια.* Πρόκειται για ένα διαδεδομένο πρόβλημα: Χρησιμοποιώντας ακριβώς τέσσερα τεσσάρια (ούτε περισσότερα ούτε λιγότερα) και τα σύμβολα πράξεων δυνάμεων κτλ να σχηματισθούν όσο περισσότεροι αριθμοί γίνεται. Για παράδειγμα οι 1 και 2 μπορούν να σχηματισθούν ως εξής:

$$\frac{44}{44} = 1$$

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$$

Να σχηματίσετε *όσο μπορείτε* περισσότερους αριθμούς από το 1 έως το 100.

Άσκηση 441. *Από τις εξετάσεις του 1952, Μηχανολόγοι ΕΜΠ.* Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{1}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

όταν $x = \frac{1}{6}$ και $y = \frac{1}{2}$.

Άσκηση 442. Να αποδείξετε ότι αν οι α, β είναι θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1 τότε οι ρητοί $\frac{\alpha}{\alpha\beta-1}$ και $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta(\alpha\beta-1)}$ είναι ίσοι δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\alpha\beta-1} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta(\alpha\beta-1)}$$

Άσκηση 443. *Αιγυπτιακά κλάσματα.* Λέγονται τα θετικά κλάσματα που προκύπτουν αν προσθέσουμε διαφορετικές μεταξύ τους *κλασματικές μονάδες*. Για παράδειγμα το $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{16}$ είναι αιγυπτιακό και προκύπτει από την πρόσθεση των διαφόρων μεταξύ τους κλασματικών μονάδων $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$. Αποδεικνύεται ότι κάθε θετικό κλάσμα μπορεί να γραφεί ως άθροισμα Αιγυπτιακών κλασμάτων. Προσπαθήστε να γράψετε τα κλάσματα $\frac{2}{5}$ και $\frac{2}{7}$ ως άθροισμα Αιγυπτιακών κλασμάτων

Άσκηση 444. Τι είναι πιο συμφέρον

1. Να αγοράσει κάποιος ένα προϊόν με έκπτωση 30% ή
2. Να αγοράσει κάποιος το ίδιο προϊόν με προσφορά 30% επιπλέον προϊόντος;

Άσκηση 445. Βρείτε το:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

Άσκηση 446. Για τους θετικούς ακέραιους α, β ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{4}$.

1. Να συγκρίνετε τους α, β.
2. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta} = \frac{7}{18}$

Άσκηση 447. Έστω x ένας οποιοσδήποτε ρητός. Από τον x αφαιρούμε 5 το αποτέλεσμα το διαιρούμε δια 4 και από αυτό που θα προκύψει αφαιρούμε το $1/3$ του x. Να γράψετε μία παράσταση που να εκφράζει το τελικό αποτέλεσμα. Κατόπιν να γράψετε την παράσταση σε απλούστερη μορφή.

1.4 Οι Πραγματικοί Αριθμοί

Άσκηση 448. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς

1. $(\alpha+7)(\alpha+5)$
2. $(m-9)(m+12)$
3. $(-k+4)(-k-7)$
4. $(3x-4y)(2a+3b)$

Άσκηση 449. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$(p+q)(x+y) = px + py + qx + qy$$

Στη συνέχεια:

1. Με δεδομένο ότι $px + py = 5$ και $qx + qy = -\frac{1}{3}$ βρείτε το $(p+q)(x+y)$.
2. Με δεδομένο ότι $p + q = 4$ και $x + y = -3$ βρείτε το $px + py + qx + qy - 5$.

Άσκηση 450. Να υπολογισθούν:

1. $(-3)^2(-2)^3 + (-0,2)^3(-3)^2$
2. $\left((-3)^2\right)^3 - \left((-5)^5 : (-5)^3\right) + (-1)^9$
3. $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-5}\left(\frac{3}{-5}\right)^{-2}\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}\right) : \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$
4. $\left(\left(\left((-2)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$

Άσκηση 451. Να επαληθεύσετε την ισότητα:

$$x^{2^4} = \left(x^{2^{4-2}}\right)^{2^2}$$

Άσκηση 452. Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

$$a^{2^n} = \left(a^{2^{n-1}}\right)^2 = \left(a^{2^{n-m}}\right)^{2^m}$$

Άσκηση 453. Δίνεται ότι $r^2 + 4r = \frac{13}{9}$. Βρείτε το $(r-3)(r+7)$.

Άσκηση 454. Δίνεται ότι $xa + yb = 11$ και $ya + xb = 12$. Βρείτε το $(a+b)(x+y)$.

Άσκηση 455. Να κάνετε τους πολλαπλασιασμούς:

1. $\left(x^2 - 3x + 2\right)(2x - 1)$
2. $\left(4a^2 - a - 2\right)(2a + 3)$
3. $\left(a^3 + b^3 - a^2b^2\right)\left(a^2b^2 - a^3 + b^3\right)$
4. $\left(5m^2 + 3 - 4m\right)\left(5 - 4m + 3m^2\right)$

Άσκηση 456. Να γίνουν οι πολλαπλασιασμοί:

1. $\left(6c^3\right)\left(7c^4\right)$
2. $\left(9y^2\right)\left(5y^5\right)$
3. $(ab)\left(ab^2\right)$
4. $\left(7xy^2\right)\left(2yz^2\right)\left(xz^3\right)$

Άσκηση 457. Να γίνουν οι διαιρέσεις

1. $\left(2x^3\right) : \left(x^2\right)$
2. $\left(6a^5\right) : (3a)$
3. $\left(-12b^2c^5\right) : \left(6b^2c^4\right)$
4. $\left(-x^3y^4z^5\right) : \left(-x^3yz^2\right)$

Άσκηση 458. Συμπληρώστε τα $\square$ και $\triangledown$ με κατάλληλους αριθμούς ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$\frac{2x^2 + x}{x} = \square x + \triangledown$$

Άσκηση 459. Να υπολογίσετε τα:

1. $\frac{2 \cdot 5^{22} - 9 \cdot 5^{21}}{25^{10}}$
2. $\frac{5\left(3 \cdot 7^{15} - 19 \cdot 7^{14}\right)}{7^{16} + 3 \cdot 7^{15}}$

Άσκηση 460. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

1. $m - (n - p) - (2m - 2p + 3n) - (n - m + 2p)$
2. $\alpha - \beta + \gamma - (\alpha + \beta - \gamma) - (\alpha + \beta + \gamma) - (\beta + \gamma - \alpha)$
3. $3x - y - (x - (2y - z) - (2x - (y - z)))$
4. $3a^2 - \left(6a^2 - \left(8b^2 - \left(9c^2 - 2a^2\right)\right)\right)$

Άσκηση 461. Αν $y = 2x$ βρείτε το

$$\frac{x^2 + 3xy + 5y^2}{4x^2 - 3xy + 6y^2}$$

Άσκηση 462. Να γράψετε με σύμβολα την παράσταση:

6 φορές το γινόμενο των x και y αυξημένο κατά 3 φορές το τετράγωνο του x.

Άσκηση 463. Να γράψετε με σύμβολα την παράσταση:

3 φορές το άθροισμα του τετραγώνου του α και του τετραγώνου του β μείον 7 φορές το γινόμενο των α, β, γ.

Άσκηση 464. Ένας παίκτης τυχερών παιγνιδιών έχει α ευρώ, χάνει β ευρώ και κερδίζει γ ευρώ. Πόσα χρήματα έχει;

Άσκηση 465. Αν $x + y + z = 12$ και $x - y + z = 17$ βρείτε το y.

Άσκηση 466. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

1. $\dfrac{\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}}$
2. $\dfrac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}{1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$
3. $\dfrac{\frac{x-y}{y-a} - \frac{y-a}{x-y}}{\frac{x-y-1}{x-y} - \frac{y-a-1}{y-a}}$

Άσκηση 467. Βρείτε το άθροισμα $A + B + \Gamma$ όταν $A = -\frac{1}{3}m - \frac{1}{4}n$, $B = -\frac{2}{3}m + \frac{3}{4}n$ και $\Gamma = -2m - n$

Άσκηση 468. Βρείτε τα γινόμενα:

1. $\left(a^2 + 2a^{-2} - 7\right)\left(5 + a^2 - 2a^{-2}\right)$
2. $\left(3x^a y^{-a} - x^{-a} y^a\right)\left(x^a y - x^{-a} y^{-1}\right)$

Άσκηση 469. Να γίνουν οι πράξεις:

1. $\dfrac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \dfrac{1}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)} + \dfrac{1}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$

2. $\dfrac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$
3. $\dfrac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$
4. $\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

Άσκηση 470. Αν $\alpha^2=3$ και $\beta^2=8$ βρείτε τα

1. $\alpha^2+\beta^2$
2. $(\alpha\beta)^4$
3. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6$

Άσκηση 471. Αν $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$ και $e=8$ βρείτε τα

1. $\sqrt{2b+4c}$
2. $\sqrt{(e-b)(2e-5b)}$
3. $\sqrt{(e-d)(b+c)-(d-c)(c+a)+a+e}$

Άσκηση 472. Αν $\alpha+\beta-\gamma=2$ βρείτε τα

1. $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\gamma+\beta)(\beta-\gamma+\alpha)$
2. $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\gamma+\beta)^2+(\beta-\gamma+\alpha)^2$

Άσκηση 473. Να γραφούν σε αύξουσα σειρά (από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο) οι αριθμοί:

$$-1,\quad 4,\quad -\frac{3}{2},\quad -\frac{1}{6},\quad 20,\quad -7,\quad -\sqrt{2},\quad \sqrt{3}$$

Άσκηση 474. *Από τις εξετάσεις STEP, 2008.* Να αποδείξετε με απαγωγή στο άτοπο τους παρακάτω ισχυρισμούς A και B που αναφέρονται σε πραγματικούς αριθμούς p και q:

A Αν ο pq είναι άρρητος τότε τουλάχιστον ένας από τους p και q είναι άρρητος.

B Αν ο $p+q$ είναι άρρητος τότε τουλάχιστον ένας από τους p και q

Να αποδείξετε με την βοήθεια ενός αντιπαραδείγματος ότι ο παρακάτω ισχυρισμός C είναι εσφαλμένος:

C Αν οι p και q είναι άρρητοι τότε ο $p+q$ είναι άρρητος.

Άσκηση 475. *Από τον διαγωνισμό Rocket City Math League, 2010.* Να υπολογίσετε το

$$\sqrt{144}+3^2+2(5+3)+53+\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$$

Άσκηση 476. *Από τον διαγωνισμό Canadian Open Mathematics Challenge, 2009.* Να υπολογίσετε το

$$-1+2-3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16-17+18$$

1.5 Η Γλώσσα της Λογικής

Άσκηση 477. Ποιές από τις παρακάτω ισοδυναμίες είναι αληθείς;

1. $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow a^4 = 1$
2. $\alpha^3 = 1 \Leftrightarrow a^4 = 1$
3. $\alpha > 1 \Leftrightarrow a + 1 > 1$
4. $\alpha < 2 \Leftrightarrow a + 2 < 4$

Άσκηση 478. Ποιες από τις παρακάτω ισοδυναμίες είναι αληθείς;

1. $x + y = 3 \Leftrightarrow 2x + 2y = 6$
2. $x + y = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$
3. $x + y = 3 \Leftrightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$
4. $x + y = 3 \Leftrightarrow -3 + y = -x$

Άσκηση 479. Ποιες από τις παρακάτω συνεπαγωγές είναι αληθείς;

1. $x = 4 \Rightarrow x > 0$
2. $x > 0 \Rightarrow x = 4$
3. $x > 2 \Rightarrow 2x > 4$
4. $x + y < 3 \Rightarrow x - y < 3$

Άσκηση 480. Βρείτε το λάθος στην παρακάτω «απόδειξη»:

$$0 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 \Leftrightarrow \emptyset \cdot 1 = \emptyset \cdot 2 \Leftrightarrow 1 = 2$$

Άσκηση 481. Από τις παρακάτω συνεπαγωγές μία μόνο είναι αληθής. Ποια;

1. $x^3 + y^3 = z^3 \Rightarrow x + y = z$
2. $x + y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0$
3. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$
4. $\alpha = \beta \Rightarrow (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = 0$

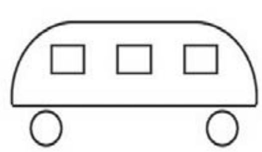
Άσκηση 482. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι αληθείς;

1. $(\alpha + \beta)\left(\alpha^{-1} + \beta^{-1}\right)^{-1} = \alpha\beta$
2. $\frac{2}{\alpha+\beta} = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}$
3. $\frac{1}{\alpha \cdot \beta} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta}$
4. $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$

Άσκηση 483. Ποιες από τις παρακάτω συνεπαγωγές είναι αληθείς;

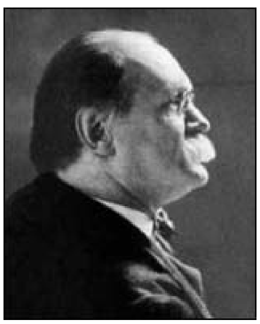
1. $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ **και** $y = 0$
2. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ **ή** $y \neq 0$
3. $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ **και** $y \neq 0$
4. $xy = 1 \Rightarrow x = 1$ **ή** $y = 1$

Άσκηση 484. Στο σχήμα απεικονίζεται (μάλλον άτεχνα) ένα σχολικό λεωφορείο. Προς ποια κατεύθυνση κινείται;



Άσκηση 485. Ένας γρίφος του Sam Loyd. Τέσσερα ζευγάρια πρέπει να περάσουν με μία βάρκα ένα ποτάμι. Στη μέση του ποταμού υπάρχει μία νησίδα. Βρείτε ένα τρόπο να περάσουν το ποτάμι αν:

1. Η βάρκα χωράει το πολύ δύο άτομα.
2. Άνδρες και γυναίκες ζηλεύουν το ταίρι τους και δεν θα ήθελαν με τίποτε και ούτε για λίγο να την (τον) δουν να βρίσκεται μόνη (μόνος) με κάποιο άτομο της παρέας αντίθετου φύλου.


Sam Loyd
1841 - 1911

5.2 Ασκήσεις στο κεφάλαιο 2

2.1 Σύνολα

Άσκηση 486. Ποια από τα στοιχεία 2, 3, 5 ανήκουν στο σύνολο $\{0, 4, 5, 6, -1\}$;

Άσκηση 487. Πως πρέπει να διαλέξουμε τον *ακέραιο* k ώστε ο αριθμός $2k + 3$ να είναι στοιχείο του συνόλου $\{0, 4, 5, 6, -1\}$;

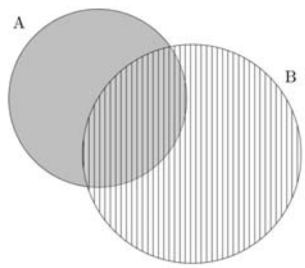
Άσκηση 488. Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι εσφαλμένες;

1. $\{\alpha, \clubsuit, \spadesuit, \beta\} \cap \{\spadesuit, \blacksquare, \beta\} = \{\spadesuit, \beta\}$
2. $\{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit, \beta, \heartsuit\} \cap \{\spadesuit, \blacksquare, \beta, \heartsuit\} = \{\spadesuit, \beta, \blacksquare, \heartsuit\}$
3. $\{\blacksquare, \clubsuit, \spadesuit, \beta, \heartsuit\} - \{\spadesuit, \blacksquare, \beta, \heartsuit\} = \{\clubsuit\}$
4. $(\{\alpha, \diamondsuit, \heartsuit, \blacklozenge\} \cap \{\heartsuit, \eta, \spadesuit\}) \cup \{\blacksquare\} = \{\blacksquare\}$

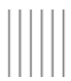
Άσκηση 489. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $\{a,b,c\} \cup \{b,c\} =$
2. $\{a,b,c\} \cap \{b,c\} =$
3. $\{a,b,c\} - \{b,c\} =$
4. $\{b,c\} - \{a,b,c\} =$
5. $(\{a,b,c\} \cup \{d,e\}) \cap \{a,e\} =$
6. $(\{a,b,c\} \cup \{d,e\}) - \{a,b\} =$
7. $\{a,b,d\} - (\{e,b,c\} \cup \{d,e\}) =$
8. $(\{\alpha,\beta,\gamma\} \cap \{\gamma,\delta\}) \cup \{\varepsilon,\vartheta\} =$

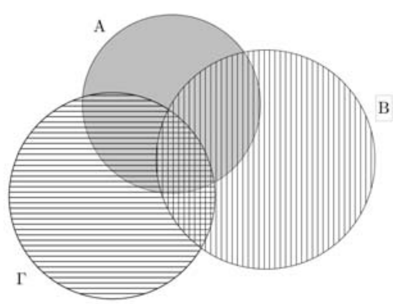
Άσκηση 490. Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα διάγραμμα Venn με δύο σύνολα A και B.



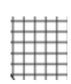
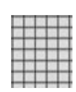
Βρείτε σε ποια σύνολα αντιστοιχούν οι περιοχές με την σκίαση:

1. 
2. 
3. 

Άσκηση 491. Στο σχήμα παρουσιάζεται ένα διάγραμμα Venn με τρία σύνολα A, B και Γ .



Βρείτε σε ποια σύνολα αντιστοιχούν οι περιοχές με την σκίαση:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 

Άσκηση 492. Τα $[\alpha,\beta]$, (α,β) , $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta)$ είναι διαστήματα. Να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. $[\alpha,\beta] - (\alpha,\beta) =$
2. $[\alpha,\beta] - \{\alpha,\beta\} =$
3. $[\alpha,\beta] - (\alpha,\beta] =$
4. $[\alpha,\beta] - [\alpha,\beta) =$
5. $(\alpha,\beta) - [\alpha,\beta] =$
6. $(\alpha,\beta) \cap [\alpha,\beta] =$
7. $(\alpha,\beta) - \{\alpha,\beta\} =$
8. $\{\alpha,\beta\} - (\alpha,\beta) =$
9. $\{\alpha,\beta\} - [\alpha,\beta] =$
10. $(\alpha,\beta] - [\alpha,\beta) =$

Άσκηση 493. Δίνεται ότι $\alpha < \beta$. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

1. $[\alpha,+\infty] - (\alpha,\beta) =$
2. $(-\infty,\beta) \cap (\alpha,+\infty) =$
3. $[\alpha,\beta] \cap (-\infty,+\infty) =$
4. $(-\infty,+\infty) - [\alpha,\beta) =$

Άσκηση 494. Να εξηγήσετε γιατί ισχύει:

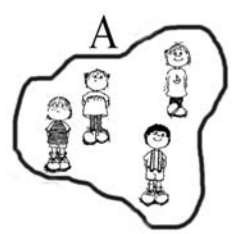
$$\left(0,\frac{1}{4}\right) \subseteq \left(0,\frac{1}{3}\right) \subseteq \left(0,\frac{1}{2}\right) \subseteq (0,1)$$

αλλά και γιατί **δεν ισχύει**:

$$\left(0,\frac{1}{4}\right) = \left(0,\frac{1}{3}\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right) = (0,1)$$

Άσκηση 495. Να βρείτε όλα τα υποσύνολα του $\{a,b,c,d,e,f\}$ που έχουν τρία στοιχεία.

Άσκηση 496. *Μεταθέσεις.* Όταν αναφερόμαστε σε σύνολα μας ενδιαφέρουν τα στοιχεία τους και όχι κάποια σειρά που ενδεχομένως έχουν. Ας θεωρήσουμε το σύνολο A που απαρτίζεται από τέσσερα παιδιά:



Ας υποθέσουμε τώρα ότι τοποθετούμε τα παιδιά του συνόλου A σε μία σειρά. Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να γίνει αυτό λ.χ. ένας είναι ο:

1. Να βρείτε **όλους** τους δυνατούς τρόπους με τους οποίους μπορούν τα παιδιά του συνόλου A να μπουν σε μία σειρά.
2. Αν για να απαντήσετε στο προηγούμενο ερώτημα δοκιμάσατε όλους τους τρόπους ένα-ένα σκεφθείτε μήπως θα μπορούσατε να βρείτε την απάντηση πιο γρήγορα. Κατά πόσους τρόπους θα μπορούσαν να τοποθετηθούν σε μία σειρά τα στοιχεία του A αν είχαμε 5 αντί για 4 παιδιά;

3. Έστω ένα σύνολο με ν στοιχεία. Κάθε τοποθέτηση των στοιχείων του συνόλου σε μία σειρά λέγεται μετάθεση των στοιχείων του. Το πλήθος των όλων των δυνατών μεταθέσεων ενός συνόλου με ν στοιχεία συμβολίζεται με M_ν. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι $\nu!$ (δείτε και άσκηση 418. Δηλαδή να αποδείξετε ότι

$$\boxed{M_\nu = \nu!} \tag{5.4}$$

Άσκηση 497. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 100\}$.

1. Έστω A το σύνολο των αριθμών του Ω που είναι άρτιοι αριθμοί. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του $N(A)$.
2. Έστω B το σύνολο των αριθμών του Ω που είναι πολλαπλάσια του 3. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του $N(B)$.
3. Έστω Γ το σύνολο των αριθμών του Ω που είναι πολλαπλάσια του 6. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του $N(\Gamma)$.
4. Βρείτε το πλήθος των αριθμών του Ω που είναι άρτιοι αριθμοί ή πολλπλάσια του 3.
5. Αν στο προηγούμενο ερώτημα μετρήσατε για να βρείτε την απάντηση εξηγείστε πως αυτή μπορεί να βρεθεί από την σχέση (2.24).

Άσκηση 498. *Διατάξεις.*

1. Σε μια πολυκατοικία κατοικούν 21 ένοικοι.

Οι ένοικοι της πολυκατοικίας συχνά εξυπηρετούνται από διάφορα καταστήματα που είναι τριγύρω. Μία ημέρα στην κοντινή τράπεζα βρίσκονται σε μία σειρά 7 ένοικοι της πολυκατοικίας.

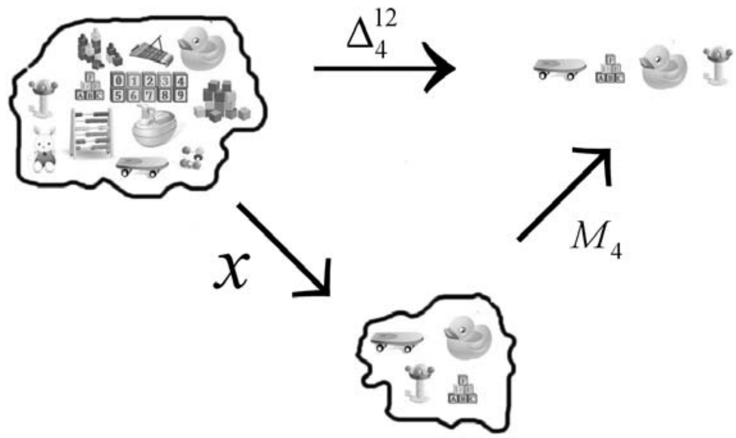
Αφού η πολυκατοικία έχει 21 ενοίκους θα μπορούσαν να βρεθούν σε μία σειρά 7 ατόμων άλλα άτομα. Επίσης θα μπορούσαν να είναι μεν τα ίδια αλλά σε διαφορετική σειρά. Βρείτε πόσες διαφορετικές «ουρές» μπορούμε να έχουμε από τα 21 άτομα της πολυκατοικίας. Για το τελικό αποτέλεσμα μπορείτε να «αναθέσετε» τις πράξεις σε υπολογιστή, κινητό κτλ.

2. Γενικά από ένα σύνολο ν στοιχείων φτιάχνουμε μία σειρά με κ από αυτά. Κάθε τέτοια σειρά λέγεται μία *διάταξη των ν ανά κ*. Το συνολικό πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ συμβολίζεται με Δ_κ^ν. Να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\Delta_\kappa^\nu = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots \cdot (\nu - (\kappa - 1))} \tag{5.5}$$

Άσκηση 499. *Συνδυασμοί.*

1. Ένα παιδάκι έχει 12 παιγνίδια.



Βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να διαλέξει 4 από αυτά. Το σχήμα περιέχει και μία υπόδειξη.

2. Από ένα σύνολο που έχει ν στοιχεία διαλέγουμε κ. Μία τέτοια επιλογή ονομάζεται *συνδυασμός ν ανά κ*. Το πλήθος **όλων** των συνδυασμών των ν ανά κ συμβολίζεται με $\binom{\nu}{\kappa}$. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\Delta_\kappa^\nu}{M_\kappa} = \frac{\nu \cdot (\nu - 1) \cdot \ldots \cdot (\nu - (\kappa - 1))}{\kappa!}} \tag{5.6}$$

Άσκηση 500. *Εξάσκηση στους συνδυασμούς.* Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

		ν						
		1	2	3	4	5	6	7
κ	0	$\binom{1}{0}=$	$\binom{2}{0}=$	$\binom{3}{0}=$	$\binom{4}{0}=$	$\binom{5}{0}=$	$\binom{6}{0}=$	$\binom{7}{0}=$
	1	$\binom{1}{1}=$	$\binom{2}{1}=$	$\binom{3}{1}=$	$\binom{4}{1}=$	$\binom{5}{1}=$	$\binom{6}{1}=$	$\binom{7}{1}=$
	2		$\binom{2}{2}=$	$\binom{3}{2}=$	$\binom{4}{2}=$	$\binom{5}{2}=$	$\binom{6}{2}=$	$\binom{7}{2}=$
	3			$\binom{3}{3}=$	$\binom{4}{3}=$	$\binom{5}{3}=$	$\binom{6}{3}=$	$\binom{7}{3}=$
	4				$\binom{4}{4}=$	$\binom{5}{4}=$	$\binom{6}{4}=$	$\binom{7}{4}=$
	5					$\binom{5}{5}=$	$\binom{6}{5}=$	$\binom{7}{5}=$
	6						$\binom{6}{6}=$	$\binom{7}{6}=$
	7							$\binom{7}{7}=$

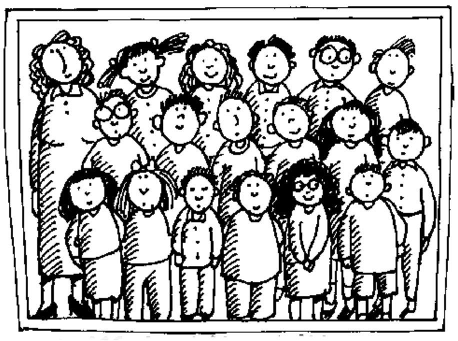
Άσκηση 501. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}} \tag{5.7}$$

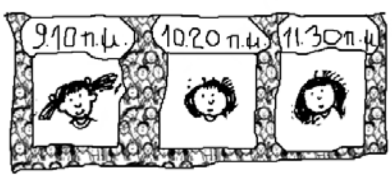
Προσπαθήστε να δώσετε κάνετε την απόδειξη με δύο τρόπους.

Άσκηση 502. *Επαναληπτικές Διατάξεις.*

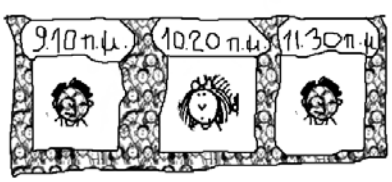
1. Μια τάξη έχει 17 παιδιά.



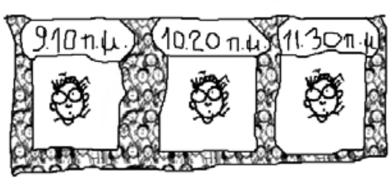
Στην διάρκεια μιας σχολικής μέρας όλα τα παιδιά απαντούν σε ερωτήσεις ή συζητούν για διάφορα πράγματα. Ας υποθέσουμε ότι απομονώνουμε 3 διαφορετικές χρονικές στιγμές και κοιτάμε ποιο παιδί έχει τον λόγο την κάθε χρονική στιγμή. Μπορεί να έχουμε αυτή την καταγραφή



ή αυτή



ή ακόμη και αυτή



Να βρείτε πόσες διαφορετικές καταγραφές είναι δυνατές.

2. Ένα σύνολο έχει ν στοιχεία. Κάνουμε κ επιλογές στοιχείων του συνόλου:

1η Επιλογή , 2η Επιλογή, ..., κ Επιλογή την μία ανεξάρτητα από την άλλη δηλαδή χωρίς να μας ενδιαφέρει αν θα επιλέξουμε ξανά ένα στοιχείο που έχει ήδη επιλεγεί. Κάθε επιλογή και των κ στοιχείων λέγεται *επαναληπτική διάταξη των ν στοιχείων ανά κ.* Το πλήθος όλων των επαναληπτικών διατάξεων των ν στοιχείων ανά κ συμβολίζεται με δ^{ν}_{κ}. Να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\delta^{\nu}_{\kappa} = \nu^{\kappa}} \tag{5.8}$$

Άσκηση 503. «Το κωδικό όνομα ... μπορούσε να έχει εφτά γράμματα. Πόσοι συνδυασμοί των εφτά γραμμάτων γίνονται αν υπολογίσουμε και τα εικοσιπέντε γράμματα της αλφαβήτου...;»

Ουμπέρτο Έκο, *Το εκκρεμές του Φουκώ*, Μετάφραση Έφη Καλλιφατίδη

Άσκηση 504. *Πληθάριθμος Δυναμοσυνόλου.* Θεωρούμε το σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu\}$ που έχει ν στοιχεία. Για να σχηματίσουμε ένα υποσύνολο του A απλώς διαλέγουμε κάποια στοιχεία του A. Μπορεί να μη διαλέξουμε και κανένα οπότε θα έχουμε το κενό σύνολο που είναι υποσύνολο κάθε συνόλου. Στην ουσία για να σχηματίσουμε ένα υποσύνολο πρέπει να «αποφασίσουμε» για κάθε στοιχείο του A αν θα το συμπεριλάβουμε στο υποσύνολο ή όχι. Πρέπει να πάρουμε ν αποφάσεις μία για κάθε στοιχείο του A:

Helmut Hasse

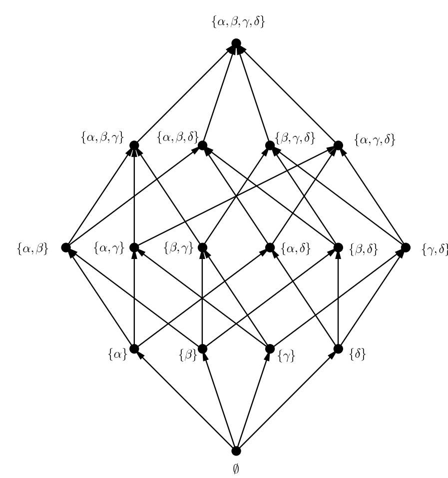
1898 - 1979

α_1	Ναι	Όχι
α_2	Ναι	Όχι
...	...	...
...	...	...
α_ν	Ναι	Όχι

Κάθε διαφορετική επιλογή στα «Ναι», «Όχι» έστω και σε ένα στοιχείο του A οδηγεί σε άλλο υποσύνολο. Να αποδείξετε ότι το A έχει 2^ν υποσύνολα. Δηλαδή

$$\boxed{\text{Το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου με } \nu \text{ στοιχεία είναι } 2^{\nu}} \tag{5.9}$$

Άσκηση 505. *Ένα διάγραμμα Hasse.* Η σχέση $\subset$ του περιέχεσθαι μεταξύ συνόλων έχει αρκετές αναλογίες με την σχέση $<$ των πραγματικών αριθμών αλλά και αρκετές διαφορές. Η σημαντικότερη είναι ότι ενώ δύο διάφοροι πραγματικοί αριθμοί είναι πάντα συγκρίσιμοι δεν ισχύει το ίδιο για τα σύνολα: Δύο διάφορα σύνολα μπορεί να μην είναι συγκρίσιμα δηλαδή κανένα να μην περιέχεται στο άλλο. Στο παρακάτω διάγραμμα απεικονίζονται όλα, 16 τον αριθμό, τα υποσύνολα του $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Κάθε βελάκι κατευθύνεται από ένα υποσύνολο σε ένα υπερσύνολο του δηλαδή σε ένα σύνολο που το περιέχει.



Αν ένα σύνολο στο διάγραμμα περιέχεται σε ένα άλλο πάντα υπάρχει διαδρομή με βελάκια που οδηγεί σε αυτό.

1. Βρείτε σε ποια σύνολα περιέχεται γνησίως το $\{\beta\}$.
2. Βρείτε ποια σύνολα περιέχουν γνησίως το $\{\gamma, \delta\}$.
3. Βρείτε ποια σύνολα δε μπορούν να συγκριθούν με το $\{\alpha, \gamma\}$.

2.2 Πιθανότητες

Άσκηση 506. Ριχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Τι είναι πιθανότερο να φέρουμε: Άθροισμα 11 ή άθροισμα 4;

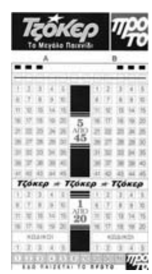
Άσκηση 507. Από ένα ημερήσιο ημερολόγιο διαλέγουμε τυχαία ένα φύλλο. Ποια είναι η πιθανότητα να αντιστοιχεί σε πρωτομηνιά; (Να υποθέσετε ότι το έτος δεν είναι δίσεκτο).

Άσκηση 508. Ρίχνουμε ένα ευρώ δύο φορές και γράφουμε τις ενδείξεις.

Ποια είναι η πιθανότητα να έλθει τουλάχιστον μία φορά η όψη με την γλαύκα;

Άσκηση 509. Ο παππούς Ιορδάνης συνέχεια ξεχνάει. Ξεχνάει και τα δύο τελευταία ψηφία του τηλεφώνου του γιου του. Θυμάται μόνο ότι είναι διαφορετικά. Όποτε τον καλεί τα συμπληρώνει στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να πετύχει τον σωστό αριθμό;

Άσκηση 510. Στο τυχερό παιγνίδι Τζόκερ κληρώνονται 5 αριθμοί από 45 και 1 αριθμός από 20 (ο «τζόκερ»). Η πιο απλή συμπλήρωση μίας στήλης (και εκείνη που πληρώνεται το μικρότερο τίμημα) είναι να επιλεγούν 5+1 αριθμός. Βρείτε ποια είναι η πιθανότητα με μία απλή στήλη να πετύχει κάποιος τους αριθμούς που θα κληρώσουν.



Άσκηση 511. Για τα ενδεχόμενα A, B ισχύουν $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Να βρείτε τις πιθανότητες

1. $P(A)$ 2. $P(B)$ 3. $P(A \cap B')$

Άσκηση 512. Μια τάξη έχει 12 αγόρια και 16 κορίτσια. Τα μισά αγόρια και τα μισά κορίτσια έχουν μαύρα μάτια. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι αγόρι ή να έχει μαύρα μάτια.

Άσκηση 513. Ρίχνουμε δύο ζάρια. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε δύο διαδοχικούς αριθμούς;

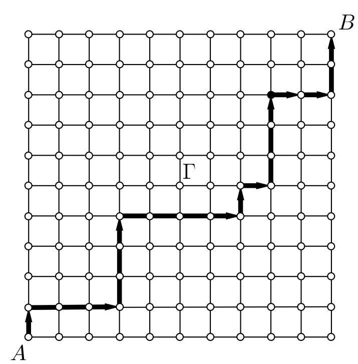
Άσκηση 514. Στα θέματα Θετικής-Τεχνολογικής Κατεύθυνσης στις Πανελλήνιες Εξετάσεις του 2012 υπήρχαν 5 ερωτήσεις τύπου Σωστό-Λάθος. Ποια είναι η πιθανότητα ένας μαθητής που απαντάει στην τύχη να δώσει σωστή απάντηση και στις 5 ερωτήσεις;

Άσκηση 515. Μία συγκεκριμένη μηχανή με «φρουτάκια» («κουλοχέρης» ή «ληστής με το ένα χέρι») έχει 3 τροχούς που κάθε ένας έχει 10 σύμβολα (τα ίδια σε κάθε τροχό). Οι τροχοί περιστρέφονται ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο και παρουσιάζουν ο κάθε ένας ένα από τα 10 σύμβολα. Ποια είναι η πιθανότητα να εμφανισθούν 3 ίδια σύμβολα;

Άσκηση 516. Δείτε πρώτα την Άσκηση 510. Τι είναι πιο πιθανό:

1. Να κερδίσει κανείς στο Τζόκερ γράφοντας ένα απλό δελτίο ή να φέρει ρίχνοντας ένα ζάρι 9 φορές συνεχόμενες 6;
2. Να κερδίσει κανείς στο Τζόκερ γράφοντας ένα απλό δελτίο ή να φέρει ρίχνοντας ένα ζάρι 10 φορές συνεχόμενες 6;

Άσκηση 517. $*$ Στο σχήμα εικονίζεται ένα μέρος μιας πόλης: 100 οικοδομικά τετράγωνα και οι γύρω δρόμοι. Ένας κάτοικος της πόλης ξεκινάει κάθε πρωί από το A και πηγαίνει στο B. Κινείται μόνο δεξιά και πάνω. Για ποικιλία κάθε μέρα διαλέγει τυχαία την διαδρομή του προχωρώντας ένα οικοδομικό τετράγωνο δεξιά ή πάνω. Μία από τις πολλές διαδρομές που μπορεί να κάνει είναι σημειωμένη με τα βελάκια. Ποια είναι η πιθανότητα σε μία διαδρομή να περάσει από το Γ;



5.3 Ασκήσεις στο κεφάλαιο 3

3.1 Ταυτότητες

Άσκηση 518. Να γραφούν ως γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

1. $4\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 + 6\alpha^2\beta^3$
2. $x(\alpha-\beta) + y(\alpha-\beta) - \omega(\alpha-\beta)$
3. $3\alpha(x-y) - 2\omega(x-y) - (x-y)$
4. $7(x+2)(y-3) - y + 3$

Άσκηση 519. Να γράψετε ως γινόμενο παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta$
2. $\alpha t + \alpha u + \beta t + \beta u$
3. $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta^2 + \beta\gamma$
4. $\alpha x^2 + \beta x^2 + \alpha + \beta$
5. $x^3 - \beta x^2 + \alpha x - \alpha\beta$
6. $xy + xz + x\beta + \alpha y + \alpha z + \alpha\beta$

Άσκηση 520. Να γράψετε ως γινόμενο παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $x^2 + xy^3 - y^2x - y^5$
2. $2x^5 + 8x^2y^2 + 3yx^3 + 12y^3$
3. $12xy - 8y^2x + 15yx^3 - 10x^3y^2$
4. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x\alpha^2 - 2x^2\alpha + 10\alpha^3$
5. $x^5 - x^2 - 2x^3 + 2$
6. $2x^2y + 3x^2 + 2xy + 3x + 2y + 3$

Άσκηση 521. Να γραφούν ως γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

1. $\alpha\chi + \beta\psi + \alpha\psi + \beta\chi$
2. $x^3 - xy + x^2y^2 - y^3$
3. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
4. $5a^3b + 10ab^3 + 5a^2b^2 - 2a^2 - 4b^2 - 2ab$

Άσκηση 522. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα:

1. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}$
2. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta}$
3. $\frac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}$
4. $\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha^3-\beta^3)}{(\alpha^2-\beta^2)^2}$
5. $\frac{\alpha^6-\beta^6}{(\alpha+\beta)^2(\alpha^3-\beta^3)}$
6. $\frac{9\alpha^5-16\alpha}{6\alpha^2\beta^2-8\beta^2}$

Άσκηση 523. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

1. $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$
2. $(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\gamma+\alpha)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2$

Άσκηση 524. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

1. $(\alpha+\beta+\gamma)^2 + (\beta+\gamma-\alpha)^2 + (\gamma+\alpha-\beta)^2 + (\alpha+\beta-\gamma)^2 = 4\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)$
2. $(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma) = (2\alpha\beta)^2 - \left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)^2$
3. $(\alpha-\beta)^3 + (\beta-\gamma)^3 + (\gamma-\alpha)^3 = 3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$
4. $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) = \alpha^2\beta + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma$
5. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) + \alpha\beta\gamma$

6. $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma\,(\alpha+\beta+\gamma)$

Άσκηση 525. Να αποδείξετε ότι

$$\left(p^2-q^2\right)^4+\left(2pq+q^2\right)^4+\left(2pq+p^2\right)^4=2\left(q^2+pq+p^2\right)^4$$

Άσκηση 526. Να αποδείξετε ότι για $k=1,2,3$ ισχύει

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

$$\left(p^2-q^2\right)^4+\left(2pq+q^2\right)^4+\left(2pq+p^2\right)^4=2\left(q^2+pq+p^2\right)^4$$

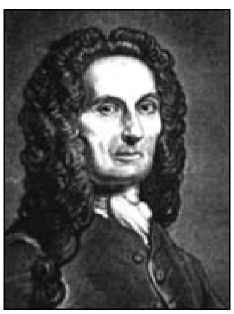
Ισχύει άραγε η παραπάνω ισότητα για $k=4$;

Άσκηση 527. Να αποδείξετε ότι για $k=1,2,3$ ισχύει

$$\left(p^2-q^2\right)^4+\left(2pq+q^2\right)^4+\left(2pq+p^2\right)^4=2\left(q^2+pq+p^2\right)^4$$

Ισχύει άραγε η παραπάνω ισότητα για $k=4$;

Άσκηση 528. Έστω ότι



Abraham de Moivre
1667 - 1754

$$X=q^3+3pq^2-p^3 \quad Y=-3pq\,(p+q) \quad Z=p^2+pq+q^2$$

Να αποδείξετε ότι

$$X^2+XY+Y^2=Z^3$$

Άσκηση 529. *Οι ταυτότητες του Cauchy.* Να αποδειχθεί ότι:

1. $(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3=3\alpha\beta\,(\alpha+\beta)$
2. $(\alpha+\beta)^5-\alpha^5-\beta^5=5\alpha\beta\,(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$
3. $(\alpha+\beta)^7-\alpha^7-\beta^7=7\alpha\beta\,(\alpha+\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)^2$

Άσκηση 530. *Η ταυτότητα του De Moivre.* Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2=-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)$$

Srinivasa Ramanujan
1887-1920

Άσκηση 531. *Μία ταυτότητα του Ramanujan.* Να αποδείξετε ότι

$$\left(3a^2+5ab-5b^2\right)^3+\left(4a^2-4ab+6b^2\right)^3+\left(5a^2-5ab-3b^2\right)^3=\left(6a^2-4ab+4b^2\right)^3$$

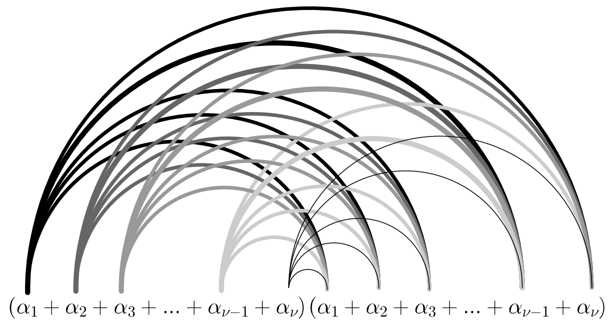
Άσκηση 532. *Τετράγωνο αθροίσματος ν-προσθετέων.* Ένα τετράγωνο αριθμού είναι ο αριθμός επί τον εαυτό του. Για να βρούμε το

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)^2$$

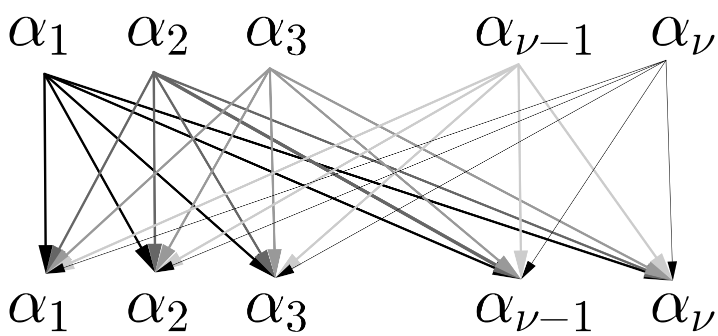
δεν έχουμε παρά να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_2\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu)$$

που εκτελείται αν πολλαπλασιάσουμε **κάθε** προσθετέο του πρώτου αθροίσματος **με κάθε** προσθετέο του δεύτερου:



Οι δουλειές, δηλαδή οι πολλαπλασιασμοί, που έχουν να γίνουν φαίνονται και στο διάγραμμα:



Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\begin{aligned}&(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 ... + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 ... + \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_\nu^2 + \\ &+2\left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + ... + \alpha_1\alpha_{\nu-1} + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 .... + \alpha_2\alpha_{\nu-1} + \alpha_2\alpha_{\nu-1} + ... + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu\right)\end{aligned}} \tag{5.10}$$

Πόσους προσθετέους έχει η τελευταία παρένθεση;

Άσκηση 533. *Η γενική μορφή της ταυτότητας του Lagrange.* Στην άσκηση 146 είδαμε την ταυτότητα του Lagrange που μπορεί και να γραφεί και :

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = (ax + by)^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2$$

όπου

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = ay - bx$$

είναι η ορίζουσα που συναντήσαμε στην (3.20). Να αποδείξετε ότι

$$\left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = (ax + by + cz)^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix}^2$$

Στην συνέχεια να αποδείξετε ότι:

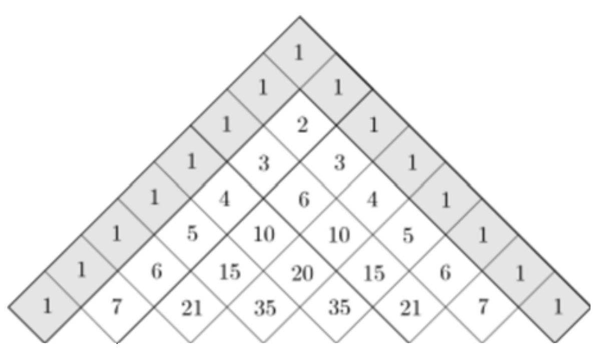
$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots+\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+\ldots+\beta_{\nu-1}^2+\beta_\nu^2\right)=\\
&\left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1}+\alpha_\nu\beta_\nu\right)^2+\\
&+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_{\nu-1}\\ \beta_1 & \beta_{\nu-1}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\\
&+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_{\nu-1}\\ \beta_2 & \beta_{\nu-1}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_\nu\\ \beta_2 & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu\\ \beta_{\nu-1} & \beta_\nu\end{vmatrix}^2
\end{aligned}
}
\tag{5.11}
$$

Άσκηση 534. Προσέξτε τον παρακάτω πίνακα.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
	1	3	6	10	15	21
		1	4	10	20	35
			1	5	15	35
				1	6	21
					1	7
						1

Προσπαθήστε να βρείτε με ποιο τρόπο συμπληρώνονται τα λευκά τετραγωνάκια. Με άλλα λόγια βρείτε ένα *ειρμό* (pattern) που αν τον ακολουθήσουμε μπορούμε να συμπληρώσουμε όλα τα τετραγωνάκια.

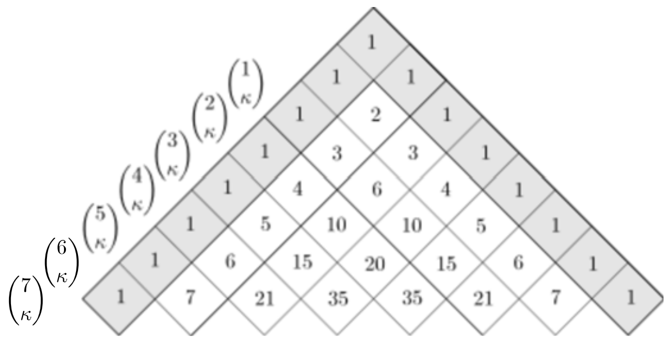
Άσκηση 535. *Το τρίγωνο του Pascal.* Αν αλλάξουμε μορφή στον πίνακα της άσκησης 534 θα έχουμε το παρακάτω σχήμα:



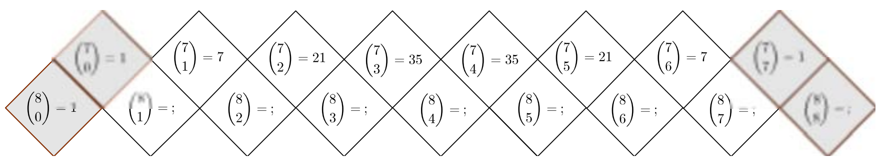
Στην άσκηση 534 φάνηκε ένας τρόπος με τον οποίο θα συμπληρώσουμε τον πίνακα. Αν τον προσαρμόσουμε στο παραπάνω τρίγωνο γίνεται:

«Κανόνας: *ο αριθμός σε κάθε τετραγωνάκι είναι το άθροισμα των αριθμών που βρίσκονται στα δυο τετραγωνάκια που βρίσκονται πάνω από αυτό*»

Ο πίνακας προέκυψε από την άσκηση 500 όπου υπολογίσαμε τους συνδυασμούς $\binom{\nu}{\kappa}$, $0 \leq \kappa \leq \nu \leq 7$ ($\nu \neq 0$). Άρα τα στοιχεία του πίνακα *είναι* συνδυασμοί.



Μπορούμε να συνεχίσουμε να συμπληρώνουμε τον πίνακα ακολουθώντας τον παραπάνω κανόνα. Θα είναι όμως και οι νέοι αριθμοί που θα προκύψουν συνδυασμοί; Συμπληρώστε την επόμενη γραμμή με δύο τρόπους



1. Ακολουθώντας τον κανόνα.
2. Υπολογίζοντας απ' ευθείας τους συνδυασμούς $\binom{8}{\kappa}$.

Οι υπολογισμοί δείχνουν ότι:
$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}=\binom{8}{1}$, $\binom{7}{1}+\binom{7}{2}=\binom{8}{2}$, $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=\binom{8}{3}$, $\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=\binom{8}{4}$, $\binom{7}{4}+\binom{7}{5}=\binom{8}{5}$, $\binom{7}{5}+\binom{7}{6}=\binom{8}{6}$, $\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=\binom{8}{7}$ και επομένως παρέχουν κάποια ένδειξη ότι ισχύει

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa}=\frac{\nu!}{\kappa!\,(\nu-\kappa)!}} \tag{5.12}$$

Να αποδείξετε την παραπάνω σχέση στηριζόμενοι στην (5.7).

Άσκηση 536. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\binom{\nu}{\kappa+1}}{\binom{\nu}{\kappa+1}+\binom{\nu}{\kappa+2}}+\frac{\binom{\nu}{\kappa+3}}{\binom{\nu}{\kappa+3}+\binom{\nu}{\kappa+4}}=\frac{2\binom{\nu}{\kappa+2}}{\binom{\nu}{\kappa+2}+\binom{\nu}{\kappa+3}}$$

Άσκηση 537. Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa}\binom{\kappa}{\lambda}=\binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu-\lambda}{\kappa-\lambda}$$

Sir Isaac Newton

1643-1727

Άσκηση 538. Να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa}\binom{\nu-\kappa}{\lambda} = \binom{\nu}{\lambda}\binom{\nu-\lambda}{\kappa}$$

Άσκηση 539. Να αποδείξετε ότι

$$\boxed{\binom{\nu}{\kappa+1} = \frac{\nu-\kappa}{\kappa+1}\binom{\nu}{\kappa}} \tag{5.13}$$

Άσκηση 540. *Το διωνυμικό θεώρημα του Νεύτωνα.* Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$(\alpha+\beta)^4 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$$

Για να κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς πρέπει να πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο της πρώτης παρένθεσης με κάθε στοιχείο της δεύτερης και με κάθε στοιχείο της τρίτης και της τέταρτης. Θα πάρουμε κάποια γινόμενα στα οποία μετά θα κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων. Έτσι θα πάρουμε τα γινόμενα (η σειρά δείχνει από ποια παρένθεση παίρνουμε τι):

$$\alpha\alpha\alpha\alpha \quad = \alpha^4 \ \ 1\ \text{όρος}$$

$$\alpha\alpha\alpha\beta = \alpha\alpha\beta\alpha = \alpha\beta\alpha\alpha = \beta\alpha\alpha\alpha = \alpha^3\beta \ \ 4\ \text{όροι}$$

$$\alpha\alpha\beta\beta = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\beta\beta\alpha = \beta\beta\alpha\alpha = \beta\alpha\beta\alpha = \beta\alpha\alpha\beta = \alpha^2\beta^2 \ \ 6\ \text{όροι}$$

$$\beta\beta\beta\alpha = \beta\beta\alpha\beta = \beta\alpha\beta\beta = \alpha\beta\beta\beta = \alpha\beta^3 \ \ 4\ \text{όροι}$$

$$\beta\beta\beta\beta = \beta^4 \ \ 1\ \text{όρος}$$

Όταν κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων θα έχουμε

$$(\alpha+\beta)^4 = \mathbf{1}\cdot\alpha^4 + \mathbf{4}\cdot\alpha^3\beta + \mathbf{6}\cdot\alpha^2\beta^2 + \mathbf{4}\cdot\alpha\beta^3 + \mathbf{1}\cdot\beta^4$$

Στην περίπτωση τυχόντα εκθέτη είναι:

$$(\alpha+\beta)^\nu = \underbrace{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)}_{\nu}$$

Από κάθε παρένθεση παίρνουμε ένα α ή ένα β και θα προκύψουν γινόμενα της μορφής:

$$\alpha^{\text{πόσα } \alpha \text{ πήραμε}}\beta^{\text{πόσα } \beta \text{ πήραμε}}$$

Ας πούμε ότι πήραμε κ από τα α από κ παρενθέσεις. Από τις υπόλοιπες παρενθέσεις που είναι $\nu-\kappa$ θα πάρουμε β. Άρα θα πάρουμε $\nu-\kappa$ από τα β. Ο αντίστοιχος όρος θα είναι:

$$\alpha^\kappa\beta^{\nu-\kappa}$$

Θα υπάρχουν δε τόσοι προσθετέοι της παραπάνω μορφής όσοι τρόποι υπάρχουν για να διαλέξουμε τις κ παρενθέσεις από τις οποίες θα πάρουμε τα α. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha+\beta)^\nu = \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \binom{\nu}{2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{0}\beta^\nu$$

και στη συνέχεια ότι

$$\boxed{(\alpha+\beta)^\nu = \binom{\nu}{0}\alpha^\nu + \binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta + \binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu-2}\alpha^2\beta^{\nu-2} + \binom{\nu}{\nu-1}\alpha\beta^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\beta^\nu} \tag{5.14}$$

Άσκηση 541. Να βρείτε ποιος είναι ο συντελεστής του $\alpha^8\beta^2$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^{10}$

Άσκηση 542. Να αποδείξετε ότι

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\ldots+\binom{\nu}{\nu-1}+\binom{\nu}{\nu}=2^{\nu}$$

Προσπαθήστε να βρείτε δύο αποδείξεις.

Άσκηση 543. Έστω ότι

$$x=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta},\qquad y=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma},\qquad z=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}$$

Να αποδείξετε ότι

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$$

Άσκηση 544. Με την βοήθεια της (5.13) να επιβεβαιώσετε τον παρακάτω τρόπο για να βρίσκουμε τους συντελεστές του αναπτύγματος $(\alpha+\beta)^{\nu}$:

- Ο πρώτος συντελεστής είναι 1
- Ο m-ος συντελεστής προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον προηγούμενο συντελεστή επί $\nu-m+2$ και διαιρέσουμε δια $m-1$.

Άσκηση 545. *Στοιχειώδεις συμμετρικές παραστάσεις.* Θεωρούμε τους ν αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_{\nu}$. Οι αριθμοί

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu}\\ S_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_{\nu-1}+\alpha_1\alpha_{\nu}+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_2\alpha_{\nu-1}+\alpha_2\alpha_{\nu}+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu}\\ S_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu}+\ldots+\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu}\\ \ldots\\ \ldots\\ S_{\nu}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdot\ldots\cdot\alpha_{\nu-1}\alpha_{\nu}\end{array}}\qquad(5.15)$$

ονομάζονται *στοιχειώδεις συμμετρικές*[1] *παραστάσεις* των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_{\nu}$. Η S_1 είναι το άθροισμα των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_{\nu}$, η S_2 είναι το άθροισμα των γινομένων τους ανά δύο, , η S_3 είναι το άθροισμα των γινομένων τους ανά τρεις κ.ο.κ. Η S_{ν} είναι το γινόμενο τους. Καταχρηστικά λέμε ότι η S_1 είναι το άθροισμα των γινομένων τους ανά ένα και η S_{ν} είναι το άθροισμα των γινομένων τους ανά τρεις ν.

1. Ποιο είναι το πλήθος των προσθετέων στις $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_{\nu}$·
2. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\ldots\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_{\nu}^2=S_1^2-2S_2$$

[1]*Συμμετρικές* διότι παρουσιάζουν την εξής συμμετρία: Αν στην θέση του α_1 βάλουμε οποιονδήποτε αριθμό από τους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_{\nu}$ στην θέση του α_2 οποιονδήποτε από τους $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_{\nu}$ εξαιρουμένου εκείνου που βάλαμε στη θέση του α_1 κ.ο.κ. η παράσταση δεν αλλάζει. Στοιχειώδεις διότι όπως αποδεικνύεται, δυστυχώς όχι εύκολα, κάθε συμμετρική παράσταση των $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_{\nu-1},\alpha_{\nu}$ που προκύπτει από αυτούς με την βοήθεια των 4 πράξεων μπορεί να εκφρασθεί ως μία παράσταση των $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_{\nu}$ που προκύπτει από τις $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_{\nu}$ με την βοήθεια των 4 πράξεων.

3. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}}+\frac{1}{\alpha_\nu}=\frac{S_{\nu-1}}{S_\nu}$$

Άσκηση 546. Με τα S_1, S_2, ... να είναι όπως στην άσκηση 545 να αποδείξετε την παρακάτω ταυτότητα που είναι γνωστή ως ταυτότητα του Νεύτωνα:

$$\boxed{(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x+\alpha_{\nu-1})(x+\alpha_\nu)=x^\nu+S_1x^{\nu-1}+S_2x^{\nu-2}+\ldots+S_{\nu-1}x+S_\nu} \quad (5.16)$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε την

$$\boxed{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_\nu)=x^\nu-S_1x^{\nu-1}+S_2x^{\nu-2}-\ldots+(-1)^{\nu-1}S_{\nu-1}x+(-1)^\nu S_\nu} \quad (5.17)$$

Τέλος να δώσετε άλλη μία απόδειξη του διωνυμικού θεωρήματος (5.14)

Άσκηση 547. Δείξτε ότι $p^3=\left(p\frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right)^3+\left(q\frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right)^3+q^3$

Άσκηση 548. Να αποδείξετε ότι αν

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 \text{ και } \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=0$$

τότε

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

Άσκηση 549. Υποθέτουμε ότι $\alpha+\beta+\gamma=0$. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2=2\left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right)=4\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\right)$$

Άσκηση 550. Να αποδείξετε ότι

$$m(m+1)(m+2)(m+3)+1=\left(m^2+3m+1\right)^2$$

Άσκηση 551. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ τότε

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=3(\alpha\beta\gamma+\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\alpha\beta\delta)$$

Άσκηση 552. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε

1. $(2\alpha-\beta)^3+(2\beta-\gamma)^3+(2\gamma-\alpha)^3=3(2\alpha-\beta)(2\beta-\gamma)(2\gamma-\alpha)$
2. $(\alpha+\beta-\gamma)^3+(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3=3(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)$
3. $(p\alpha+q\beta)^3+(p\beta+q\gamma)^3+(p\gamma+q\alpha)^3=3(p\alpha+q\beta)(p\beta+q\gamma)(p\gamma+q\alpha)$

Άσκηση 553. Να αποδείξετε ότι αν $xyz=x+y+z=\alpha$ και $xy+yz+zx=2\alpha$ τότε

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=2\alpha^2$$

Άσκηση 554. Οι x,y,z είναι ανά δύο διάφοροι μη μηδενικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$$2\alpha-3y=\frac{(z-x)^2}{y}, \qquad 2\alpha-3z=\frac{(x-y)^2}{z}$$

Να αποδείξετε ότι

1. $x+y+z=\alpha$
2. $2\left(x^2+y^2+z^2\right)=\alpha^2$
3. $2\alpha-3x=\frac{(y-z)^2}{x}$

Άσκηση 555. Υποθέτουμε ότι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2}{3}$. Βρείτε τα:

1. $\beta = \frac{3}{2}\alpha$
2. $\frac{12\alpha-2\beta}{3\alpha+2\beta}$
3. $\frac{\alpha\beta+\beta^2-3\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$
4. $\frac{p\alpha-q\beta}{p\alpha+q\beta}$ (συναρτήσει των p, q).

Άσκηση 556. Έστω ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Να αποδείξετε ότι:

1. $\frac{\kappa\alpha^2+\lambda\beta^2}{\kappa\alpha^2-\lambda\beta^2} = \frac{\kappa\gamma^2+\lambda\delta^2}{\kappa\gamma^2-\lambda\delta^2}$
2. $\frac{\gamma^2\delta+\gamma\delta^2}{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2} = \frac{(\gamma+\delta)^3}{(\alpha+\beta)^3}$
3. $\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+3\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\delta+3\delta^2} = \frac{\beta(\alpha-3\beta)}{\delta(\gamma-3\delta)}$
4. $\frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\gamma\delta}{\gamma+\delta}$

Άσκηση 557. Για τους μη μηδενικούς αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta) = (\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Άσκηση 558. Υποθέτουμε ότι

$$\frac{\alpha^2+\alpha x+x^2}{\alpha^2-\alpha x+x^2} = \frac{\beta^2+\beta y+y^2}{\beta^2-\beta y+y^2}$$

Δείξτε ότι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{y}$ ή $\alpha\beta = xy$.

Άσκηση 559. Δείξτε ότι αν

$$\frac{x}{\kappa+\lambda-\mu} = \frac{y}{\lambda+\mu-\kappa} = \frac{z}{\mu+\kappa-\lambda}$$

τότε

$$(\kappa-\lambda)x + (\lambda-\mu)y + (\mu-\kappa)z = 0$$

Άσκηση 560. Δείξτε ότι αν

$$\frac{\lambda}{\alpha-\beta} = \frac{\mu}{\beta-\gamma} = \frac{\nu}{\alpha-\gamma}$$

τότε

$$\lambda+\mu = \nu$$

Άσκηση 561. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας που αναφέρεται σε στοιχεία τεσσάρων αριθμητικών προόδων:

α_1	α_ν	ν	ω
4	49	19	
$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$		$\frac{2}{5}$
25		20	8
	145	21	7

Άσκηση 562. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας που αναφέρεται σε στοιχεία τεσσάρων γεωμετρικών προόδων:

α_1	α_ν	ν	λ
1		11	2
$\frac{2}{3}$		6	$\frac{1}{2}$
	448	6	2
	$\frac{2}{27}$	5	$\frac{1}{3}$

Άσκηση 563.
1. Να βρείτε το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, ...$
2. Να βρείτε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $-2, \frac{5}{2}, -\frac{25}{8}$.
3. Να βρείτε το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, ...$
4. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $2, \ -4, \ 8, ...$

Άσκηση 564.
1. Να βρείτε το άθροισμα των 17 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $49, 44, 39, ...$
2. Να βρείτε το άθροισμα των 19 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $\frac{3}{4}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{7}{12}, ...$
3. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $2, \ \frac{13}{4}, \frac{9}{2}, ...$.
4. Να βρείτε το άθροισμα των 16 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου $3,75, \ 3,5, \ 3,25, ...$

Άσκηση 565. Στην αριθμητική πρόοδο $\alpha_1, \alpha_2, ...$ να βρείτε το άθροισμα

$$\alpha_\kappa + \alpha_{\kappa+1} + ... + \alpha_\lambda$$

Στην τελική απάντηση θα πρέπει να υπάρχουν τα $\kappa, \lambda, \alpha_\kappa, \alpha_\lambda$.

Άσκηση 566. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, ...$ για την οποία ισχύει $\alpha_\nu = 3\nu + 8$ για όλα τα ν.

1. Βρείτε τα α_1, α_2, α_3, α_{23}.
2. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος. Ποια είναι η διαφορά της;
3. Να βρείτε το άθροισμα των 100 πρώτων όρων της.
4. Να βρείτε το άθροισμα $\alpha_{23} + ... + \alpha_{123}$.
5. Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 6044.

Άσκηση 567. Το ρολόι μίας εκκλησίας κτυπάει στις ακέραιες ώρες: Στις 1 μία φορά στις 2 δύο φορές κ.ο.κ. Πόσες φορές κτυπάει σε ένα εικοσιτετράωρο;

Άσκηση 568. Σε μία αριθμητική πρόοδο ο 12ος όρος είναι 30 και ο 30ος όρος είναι 23. Να βρεθεί ο πρώτος όρος και η διαφορά της προοόδου.

Άσκηση 569.

1. Όλοι οι παρακάτω αριθμοί είναι πολλαπλάσια του 3. Πόσοι είναι;
$$18, 21, 24, \dots, 999$$
2. Βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 3 περιέχονται στο διάστημα $\left(\sqrt{33}, 1001\right)$
3. Όλοι οι παρακάτω αριθμοί είναι πολλαπλάσια του π. Πόσοι είναι;
$$-23\pi,\ -22\pi,\ -21\pi,\ \dots\ 23\pi$$
4. Βρείτε πόσα πολλαπλάσια του π περιέχονται στο διάστημα $(17, 100)$

Άσκηση 570. Σε μία γεωμετρική πρόοδο είναι $a_1 = 8$ και $\lambda = -\frac{1}{2}$.

1. Βρείτε τον a_5.
2. Βρείτε τον a_ν.
3. Βρείτε ποιοι όροι είναι θετικοί και ποιοι αρνητικοί.
4. Βρείτε την τιμή της παράστασης

Άσκηση 571. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ μία πρόοδος (αριθμητική ή γεωμετρική). Έστω $S_\nu, S_{2\nu}, S_{3\nu}$ τα αθροίσματα των ν, 2ν, 3ν πρώτων όρων της αντιστοίχως.

1. Να αποδειχθεί ότι αν η πρόοδος είναι αριθμητική τότε
$$S_{3\nu} = 3\left(S_{2\nu} - S_\nu\right)$$
2. Να αποδειχθεί ότι αν η πρόοδος είναι γεωμετρική τότε
$$S_\nu\left(S_{3\nu} - S_{2\nu}\right) = \left(S_{2\nu} - S_\nu\right)^2$$

Άσκηση 572. Να αποδειχθεί ότι αν ακολουθία $\alpha_1, a_2, \dots$ είναι γεωμετρική πρόοδος τότε
$$\alpha_\kappa^{\lambda-\mu}\alpha_\lambda^{\mu-\kappa}\alpha_\mu^{\kappa-\lambda} = 1$$

Άσκηση 573. Να αποδειχθεί ότι αν ακολουθία $\alpha_1, a_2, \dots$ είναι αριθμητική πρόοδος τότε
$$(\lambda-\mu)\,\alpha_\kappa + (\mu-\kappa)\,\alpha_\lambda + (\kappa-\lambda)\,\alpha_\mu = 0$$

Άσκηση 574. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου είναι επίσης και οι αριθμοί:

1. $\alpha^2 - \beta\gamma, \quad \beta^2 - \gamma\alpha, \quad \gamma^2 - \alpha\beta$
2. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2, \quad \beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2, \quad \gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha^2$
3. $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}} \qquad (\alpha, \beta, \gamma$ θετικοί)
4. $\alpha^2, \quad -\gamma\alpha, \quad \gamma^2 - 4\beta^2$

Άσκηση 575. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου είναι επίσης και οι αριθμοί:

1. $\alpha^2, \quad \beta^2, \quad \gamma^2$
2. $\frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\beta}, \quad \frac{1}{\gamma}$
3. $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \qquad (\alpha, \beta, \gamma$ θετικοί)
4. $\alpha - \frac{\alpha^2}{\beta}, \quad \beta - \alpha, \quad \gamma - \beta$
5. $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{1}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma^2}$

Άσκηση 576. Σε μια αριθμητική πρόοδο συμβολίζουμε με S_ν το άθροισμα των ν πρώτων όρων της. Αν είναι γνωστό ότι $S_p = q$ και $S_q = p$ βρείτε το S_{p+q}.

Άσκηση 577. Να αποδείξετε ότι τα τετράγωνα των αριθμών

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1,, \ \ \alpha^2 + 1,, \ \ \alpha^2 + 2\alpha - 1$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Άσκηση 578. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\alpha^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^2 + \ldots + \left(\alpha^\nu - \frac{1}{\alpha^\nu}\right)^2$$

Άσκηση 579. Να αποδειχθεί ότι αν η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ έχει θετικούς όρους τότε ισχύει:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{\nu-1}} + \sqrt{\alpha_\nu}} = \frac{\nu - 1}{\frac{1}{\sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_\nu}}}$$

Άσκηση 580. Να αποδειχθεί για την αριθμητική πρόοδο $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$:

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_{2k-2}^2 - \alpha_{2k}^2 = \frac{k}{2k-1}\left(\alpha_1^2 - \alpha_{2k}^2\right)$$

3.2 Ανισότητες

Άσκηση 581. Έστω ότι $0 < \alpha < \gamma$ και $0 < \beta < \delta$. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha - \frac{1}{\beta} < \gamma - \frac{1}{\delta}$$

Άσκηση 582. Να αποδείξετε ότι αν για τους αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha < \beta + \gamma, \qquad \beta < \gamma + \alpha, \qquad \gamma < \alpha + \beta$$

τότε και οι τρεις αριθμοί είναι θετικοί.

Άσκηση 583. Με α, β, γ θετικούς να αποδείξετε τις ανισότητες (κάποιες τις έχετε ξαναδεί)

1. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$
2. $2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \geq (\alpha + \beta)^2$
3. $\frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}$
4. $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$
5. $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta}$
6. $\sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$
7. $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$
8. $\gamma + \frac{1}{\gamma} \geq 2$

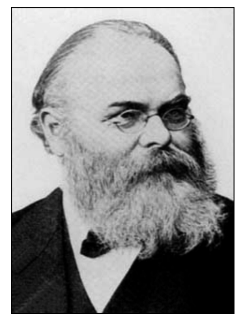
Προσπαθήστε τώρα να αποδείξετε τις ίδιες ανισότητες ακολουθώντας τα βελάκια. Κάθε φορά θα πρέπει να κάνετε κάποια κατάλληλη αντικατάσταση στην σχέση που βρίσκεσθε για να προκύψει η ανισότητα που δείχνει το βελάκι

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & x^2 \geq 0 & & \\
 & & \downarrow^{(1)} & & \\
\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} & \overset{(2)}{\leftarrow} & \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta & \overset{(3)}{\rightarrow} & \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \\
\downarrow^{(4)} & & \downarrow^{(5)} & & \downarrow^{(6)} \\
\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} & & 2\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \geq (\alpha + \beta)^2 & & \gamma + \frac{1}{\gamma} \geq 2 \\
\downarrow^{(7)} & & \downarrow^{(8)} & & \\
\sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} & & \frac{\alpha+\beta}{2} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}} & &
\end{array}
$$

Άσκηση 584. Να αποδείξετε ότι $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Άσκηση 585. Να αποδείξετε ότι για κάθε τριάδα μη αρνητικών αριθμών α, β, γ ισχύει:

1. $\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha) \geq 6\alpha\beta\gamma$
2. $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \geq 8\alpha\beta\gamma$



Hermann Amandus Schwarz
1843-1921

Άσκηση 586. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \pm \alpha\beta \pm \beta\gamma \pm \gamma\alpha \geq 0$$

Άσκηση 587. Να αποδείξετε ότι $(\alpha + \beta)^4 \leq 8\left(\alpha^4 + \beta^4\right)$.

Άσκηση 588. *Η ανισότητα Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky.* Με την βοήθεια της ταυτότητας (5.11) του Lagrange να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\begin{array}{l}\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots + \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_\nu^2\right)\left(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \ldots + \beta_{\nu-1}^2 + \beta_\nu^2\right) \geq \\ (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \ldots + \alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1} + \alpha_\nu\beta_\nu)^2\end{array}} \tag{5.18}$$

Viktor Yakovlevich
Bunyakovsky
1804-1889

Άσκηση 589. *Από τις εξετάσεις του 2004.* Δείξτε ότι αν $\alpha > 0$, $\alpha > \beta$ και $\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2}$ τότε $\beta < 0$.

Άσκηση 590. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β, γ και x, y, z είναι θετικοί τότε ισχύει:

- $(\alpha x + \beta y + \gamma z)\left(\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{\gamma}{z}\right) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2$
- $(\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) \geq 9$

Jacob (Jacques) Bernoulli
1654-1705

Άσκηση 591. *Από τον διαγωνισμό «Θαλής» της ΕΜΕ, 1990.* Αν $x > 0$ να δείξετε ότι:

$$\frac{x^2+3x+3}{x+1}+\frac{1}{x}>4$$

Άσκηση 592. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+...+\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu^2\right)\left(\frac{1}{\alpha_1^2}+\frac{1}{\alpha_2^2}+\frac{1}{\alpha_3^2}+...+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}^2}+\frac{1}{\alpha_\nu^2}\right)\geq \nu^2$$

Άσκηση 593. *Η ανισότητα του Bernoulli.* Έστω $\alpha > -1$ και $\nu > 1$ φυσικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι

1. $(1+\alpha)^\nu - 1 = \alpha\left((1+\alpha)^{\nu-1}+...+(1+\alpha)+1\right)$
2. Να αποδείξετε την ανισότητα του Bernoulli:

$$\boxed{(1+\alpha)^\nu > 1+\nu\alpha} \tag{5.19}$$

3. Τι γίνεται στην παραπάνω σχέση αν παίρναμε $\nu = 1$ ή $\alpha = -1$;

Άσκηση 594. *Μία παραλλαγή της ανισότητας του Bernoulli.* Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό $\nu > 1$ και κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$\boxed{x^\nu > 1+\nu(x-1)} \tag{5.20}$$

Άσκηση 595. Στηριχθείτε σε κάποια από τις ανισότητες (5.19), (5.20) για να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό ν με $\nu > 1$ ισχύουν οι ανισότητες:

1. $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu > 2$,
2. $2^\nu > 1+\nu$,
3. $\left(1-\frac{1}{\nu^2}\right)^\nu > 1-\frac{1}{\nu}$
4. $(1-\alpha)^\nu < \frac{1}{1+\nu\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$

Άσκηση 596. θεωρούμε αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$.

- Έστω η αριθμητική πρόοδος $x_1, x_2, x_3, ...$ που έχει πρώτο όρο τον α και δεύτερο όρο τον β.
- Έστω η γεωμετρική πρόοδος $y_1, y_2, y_3, ...$ που έχει πρώτο όρο τον α και δεύτερο όρο τον β.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\nu > 2$ ισχύει $y_\nu > x_\nu$.

Άσκηση 597. Θεωρούμε τους αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$. Ο αριθμός

$$\boxed{A_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu}{\nu}} \tag{5.21}$$

ονομάζεται *αριθμητικός μέσος ή μέση τιμή* των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$. Είναι αυτό που λέμε και μέσος όρος: το άθροισμα των αριθμών δια του πλήθους τους.

1. Να βρείτε το αριθμητικό μέσο των αριθμών $1, 2, 3, ..., \nu-1, \nu$.

2. Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ ανηκουν στο διάστημα $[m, M]$ τότε και ο αριθμητικός μέσος τους ανήκει στο διάστημα $[m, M]$.

Άσκηση 598. Θεωρούμε τους θετικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$. Επίσης θεωρούμε (δείτε και άσκηση 597) τους αριθμητικούς μέσους:

$$A_1 = \frac{\alpha_1}{1}$$

$$A_2 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$$

$$A_3 = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}$$

....

$$A_{\nu-1} = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}}{\nu-1}$$

$$A_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu}{\nu}$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa = 2, 3, ..., \nu$ ισχύουν:

1. $\kappa A_\kappa - (k-1) A_{\kappa-1} = \alpha_\kappa$
2. $\frac{A_\kappa^\kappa}{A_{\kappa-1}^{\kappa-1}} \geq \alpha_\kappa$

Τέλος δείξτε ότι

$$\boxed{A_\nu^\nu \geq \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu} \tag{5.22}$$

Πότε στην τελευταία σχέση ισχύει η ισότητα;

3.3 Εξισώσεις

Άσκηση 599. Να λυθεί η εξίσωση $2(x+3) + \alpha = 0$. Πως πρέπει να διαλέξουμε τον α ώστε η εξίσωση να έχει λύση τον αριθμό 3;

Άσκηση 600. Να λυθεί η εξίσωση $4 + \frac{2x-5}{3} = \frac{x+11}{9}$.

Άσκηση 601. Να επαληθεύσετε ότι ο αριθμός $3 - 2\sqrt{2}$ είναι λύση της εξίσωσης $(1-x)\sqrt{2} = x + 1$. Έχει η εξίσωση άλλη λύση;

Άσκηση 602. 1. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta)$$

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\alpha^2 x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2 x}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\gamma^2 x}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} = \alpha\beta\gamma$$

Άσκηση 603. Να λυθεί:

$$\frac{2(3x-2)}{3(2x-3)} = \frac{14}{9}$$

Άσκηση 604. Να λύσετε τις παρακάτω σχέσεις ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή:

1. $\bar{\alpha} = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t - t_0}$ ως προς t
2. $x = \upsilon_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ως προς t
3. $\Sigma = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 g}$ ως προς F_2
4. $B = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$ ως προς h
5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ ως προς r
6. $\frac{P_1T_2V_1}{T_1} = P_2V_2$ ως προς T_1.
7. $\left(\frac{x_1 - d}{d}\right)^2 = \frac{|q_2|}{|q_1|}$ ως προς x_1.
8. $V = kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ ως προς r_2.
9. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ ως προς R_3.

Girolamo Cardano
1501 - 1576

Άσκηση 605. *Ένα πρόβλημα από την Ars Magna του Girolamo Cardano.* Υπάρχουν δύο επικεφαλής που ο καθένας τους μοίρασε 48 χρυσά στους στρατιώτες του.

- Ο ένας είχε δύο στρατιώτες περισσότερους από τον άλλο.
- Εκείνος που είχε τους λιγότερους στρατιώτες είχε να διαθέσει 4 χρυσά παραπάνω σε κάθε στρατιώτη.

Ζητείται να βρεθεί πόσους στρατιώτες είχε κάθε ομάδα.

Άσκηση 606. *Από τις εξετάσεις του Cambridge, 1821* . Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{12 + 2x}{x + 3} + \frac{4x - 3}{2x + 1} - \frac{4x - 1}{x - 1} = 0$$

Άσκηση 607. *Από τις εισαγωγικές εξετάσεις του Harvard, 1878.* Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x + 13a + 3b}{5a - 3b - x} - \frac{a - 2b}{x + 2b} = 1$$

Άσκηση 608. *Από τις εισαγωγικές εξετάσεις του MIT, 1878.* Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{4}{x + 1} + \frac{5}{x + 2} - \frac{12}{x + 3} = 0$$

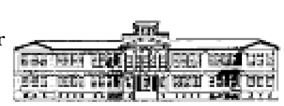
Άσκηση 609. Με δεδομένο ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x - \alpha}{\beta + \gamma} + \frac{x - \beta}{\gamma + \alpha} + \frac{x - \gamma}{\alpha + \beta} = \frac{3x}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Άσκηση 610. *Από τον διαγωνισμό Harvard-MIT,1999.* Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του $\frac{d}{a}$ ώστε $a^2 - 6ad + 8d^2 = 0$, $a \neq 0$.

Άσκηση 611. Για τις διάφορες τιμές του m να λυθεί η εξίσωση:

$$m^2x + 1 = x + m$$



Άσκηση 612. Για τις διάφορες τιμές του λ να λυθεί η εξίσωση:

$$\lambda x + \frac{9x - \lambda}{3} = 4x + 2$$

Άσκηση 613. Για τις διάφορες τιμές των κ, λ να λυθεί η εξίσωση:

$$\kappa x + \kappa = \lambda x + \lambda$$

Άσκηση 614. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $x^2 + 5x = 0$
2. $-55x^2 + 75x = 0$
3. $2x^2 - 18 = 0$
4. $x^2 - 2x - 80 = 0$
5. $x^2 - 9x + 14 = 0$
6. $x^2 + 25x + 156 = 0$
7. $5x^2 - 7x + 1 = 0$
8. $2x^2 + 2x + 5 = 0$
9. $9x^2 - 6x + 4 = 0$
10. $5x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$
11. $\left(1 - \sqrt{2}\right)x^2 - 2\left(1 + \sqrt{2}\right)x + 3\sqrt{2} + 1 = 0$
12. $(x+1)^2 - (x-1)(x+2) = -2x(x-3)$
13. $(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) - (3x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 1 - 2x$
14. $\frac{3x+1}{3-x} - \frac{3-x}{x+1} - \frac{5}{3} = 0$
15. $\frac{25}{12} - \frac{2x+1}{x-3} = \frac{x-3}{2x+1}$
16. $\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0$

Άσκηση 615. Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = 4\left(\frac{1+t^2}{t^2} - \frac{3}{2t}\right)$$

Άσκηση 616. Να λυθούν

1. $x^2 - 4a^2 + 4a - 1 = 0$
2. $(ax+b)^2 + (a-bx)^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$
3. $\frac{bx+a}{b} = \frac{ab}{b^2-x}$
4. $\frac{a+b}{a-b}x^2 - \left(a^2 - b^2\right)$

Άσκηση 617. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να τις λύσετε:

1. $x^2 - 11x + 28 = 0$
2. $x^2 - 24x + 143 = 0$
3. $x^2 - 16x + 64 = 0,$
4. $x^2 - 17x + 11 = 0$
5. $3x^2 + 7x + 5 = 0$
6. $8x^2 - 4x + 5 = 0$


Nicholas Saunderson
1682 - 1739

Άσκηση 618. Για ποιες τιμές του m η εξίσωση $mx^2 + mx - 3 = 0$ έχει μία ρίζα;

Άσκηση 619. Για ποιες τιμές του m η εξίσωση $(m+1)\,x^2 + 4x - 1 = 0$ έχει μία ρίζα;

Άσκηση 620. Δείτε προσεκτικά τις εξισώσεις. Κάντε ένα σχόλιο!

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$
$$x + \frac{1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}$$

Άσκηση 621. Ο Nicholas Saunderson υπήρξε διαπρεπής Άγγλος Μαθηματικός του 17ου αιώνα σχεδόν σύγχρονος του Νεύτωνα. Αν και έχασε το φως του σε ηλικία ενός έτους κατόρθωσε να μορφωθεί. Δίδαξε στο Cambridge Μαθηματικά, Αστρονομία και Οπτική. Υπήρξε έξοχος δάσκαλος και είπαν γι' αυτόν: *«ήταν ένας δάσκαλος που αν και δε μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα μάτια του μάθαινε τους άλλους να χρησιμοποιούν τα δικά τους»*. Το έργο του «Στοιχεία Άλγεβρας» είχε μεγάλη επιτυχία στην εποχή του. Παρακάτω βλέπετε ένα απόσπασμα από την Γαλλική μετάφραση του έργου:

Exemple 16.

615 *x* — 7 *xxx* = 48 *x*: divisez le tout par *x*, & vous aurez 615 — 7 *xx* = 48; donc 615 = 7 *xx* + 48; donc 615 — 48 = 7 *xx*, c'est-à-dire, 7 *xx* = 567; donc, *xx* = 81; & *x* = 9.

La Preuve.

L'équation originale 615 *x* — 7 *xxx* = 48 *x*; *x* = 9; donc *xx* = 81; donc *xxx* = 729; 7 *xxx* = 5103; de plus, 615 *x* = 5535; donc 615 *x* — 7 *xxx* = 5535 — 5103 = 432: enfin, 48 *x* = 432; donc 615 *x* — 7 *xxx* = 48 *x*.

όπου επιλύεται η εξίσωση $615x - 7x^3 = 48x$. Λύστε την και εσείς και συγκρίνετε την πορεία λύσης και την απάντηση με εκείνες του κειμένου. Σχολιάστε τις διαφορές.

Άσκηση 622. Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2 - 7\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right) + 12 = 0$
2. $\frac{\alpha+x}{\alpha-x} + 10\frac{\alpha-x}{\alpha+x} = 7$

Άσκηση 623. Η εξίσωση $x^2 - 3x - 10 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό 5, Βρείτε την άλλη ρίζα της χωρίς να λυθεί η εξίσωση.

Άσκηση 624. Να βρείτε εξίσωση δεύτερου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς:

1. $2,\ 3$
2. $-6,\ 9$
3. $1,\ \frac{1}{3}$
4. $2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$
5. $1,\ 2+\sqrt{3}$
6. $\mu,\ \mu^2$

Άσκηση 625. Η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 8x + 12 = 0$ είναι τριπλάσια της άλλης. Να βρεθούν οι ρίζες χωρίς να λυθεί η εξίσωση.

Άσκηση 626. Βρείτε δύο αριθμούς:

1. Με άθροισμα 10 και γινόμενο 9
2. Με άθροισμα 10 και γινόμενο 10
3. Με άθροισμα 10 και γινόμενο 16
4. Με άθροισμα 10 και γινόμενο 26

Άσκηση 627. Για ποιες τιμές του a η εξίσωση $9x^2 - 2x + a = 6 - ax$, έχε ίσες ρίζες;

Άσκηση 628. Οι εξίσωση $x^2 + tx + 12 = 0$ έχει δύο ρίζες που η διαφορά τους είναι 1. Βρείτε το t.

Άσκηση 629. Για ποιές τιμές του a η εξίσωση $x^2 + ax + a + 2 = 0$ έχει δύο ρίζες που ο λόγος τους είναι 2;

Άσκηση 630. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει λύσεις ρ_1, ρ_2. Να εκφράσετε συναρτήσει των α, β, γ τις παραστάσεις:

1. $(\rho_1 - \rho_2)^2$
2. $\rho_1^3 + \rho_2^3$

Άσκηση 631. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 3\right) + \left(x^2 + 3x + 5\right) + \dots + \left(x^2 + 20x + 39\right) = 4500$$

Άσκηση 632. *Η χρυσή τομή.* Στο 6ο βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη υπάρχει ο ακόλουθος ορισμός (ορισμός γ′):

> γ΄. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετμῆσθαι λέγεται,
> ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα,
> οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

που σε ελεύθερη απόδοση σημαίνει
Ένα ευθύγραμμο τμήμα θα έχει χωρισθεί σε *μέσο και άκρο λόγο*,
όταν ολόκληρο το τμήμα προς το μεγαλύτερο (από εκείνα στα οποία έχει χωρισθεί), είναι όσο το μεγαλύτερο τμήμα προς το μικρότερο. Με άλλα λόγια αν ισχύει η ισότητα

$$\frac{\text{ολόκληρο το τμήμα}}{\text{μεγαλύτερο από τα δύο κομμάτια του}} = \frac{\text{μεγαλύτερο από τα δύο κομμάτια του}}{\text{μικρότερο από τα δύο κομμάτια του}}$$

Ας ονομάσουμε το αρχικό τμήμα α και το μεγάλο κομμάτι x.

1. Να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$.

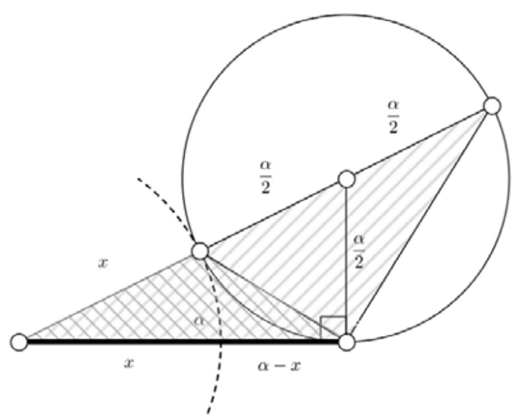
2. Να αποδείξετε ότι $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$.

3. Να αποδείξετε ότι $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$.

4. Να αποδείξετε το μεγαλύτερο από τα δύο κομμάτια είναι $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\alpha$ και το μικρότερο $\frac{3-\sqrt{5}}{2}\alpha$.

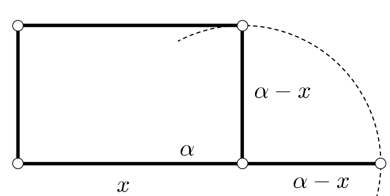
5. Να αποδείξετε ότι
$$\frac{\text{μεγαλύτερο κομμάτι}}{\text{μικρότερο κομμάτι}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$
   Από την κλασική αρχαιότητα θεωρείται ότι λόγος των δύο κομματιών δηλαδή ο $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ αποτελεί ιδανικό λόγο για διαστάσεις ορθογωνίων (που λέγονται *χρυσά ορθογώνια*).

6. Στο παρακάτω φαίνεται ένας τρόπος διαίρεσης του τμήματος α σε μέσο και άκρο λόγο.

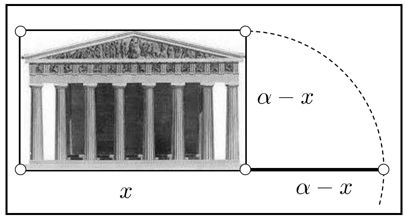


   Μπορείτε να τον περιγράψετε; Μπορείτε να αποδείξετε ότι όντως εξασφαλίζεται η διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο;

Πιστεύεται ότι χρυσά ορθογώνια δηλαδή εκείνα που οι δύο πλευρές προκύπτουν από την διαίρεση ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο:



εμφανίζονται σε πολλές αρχιτεκτονικές και καλλιτεχνικές δημιουργίες όπως στον Παρθενώνα:



Ο αριθμός $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,618$ λέγεται και χρυσός λόγος και η διαίρεση ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο ονομάζεται *χρυσή τομή*. Ο χρυσός λόγος συμβολίζεται διεθνώς με φ (προς τιμήν του Φειδία). Είναι:

$$\boxed{\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tag{5.23}$$

Άσκηση 633. *Η ακολουθία Fibonacci.* Στην άσκηση 417 συναντήσαμε τους αριθμούς $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$. Κάθε ένας από αυτούς προκύπτει από τους δύο προηγουμένους του αν τους προσθέσουμε. Δηλαδή πρόκειται για μια ακολουθία

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$$

με

$$\boxed{\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu \quad \text{για όλα τα } \nu = 1, 2, \ldots} \tag{5.24}$$

1. Χρησιμοποιείστε αριθμομηχανή ή υπολογιστή για να βρείτε τους 40 πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci.

2. «Πειράξτε» την ακολουθία Fibonacci ορίζοντας να είναι

   $$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu \quad \text{για όλα τα } \nu = 1, 2, \ldots$$

   και βρείτε τους 10 πρώτους όρους της «πειραγμένης» ακολουθίας.

3. «Πειράξτε» πάλι την ακολουθία ορίζοντας

   $$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \quad \text{για όλα τα } \nu = 1, 2, \ldots$$

   Βρείτε πάλι τους 10 πρώτους όρους της ακολουθίας.

4. Θεωρείστε την εξίσωση $x^2 = x + 1$. Έστω $\rho_1 < \rho_2$ οι ρίζες της.

   (α') Να αποδείξετε ότι $\rho_1^2 = \rho_1 + 1$, $\rho_2^2 = \rho_2 + 1$ και $\rho_2^2 = \rho_2 + 1$, $\rho_2^3 = 2\rho_2 + 1$

   (β') Θεωρούμε την ακολουθία $u_\nu = \frac{\rho_2^\nu - \rho_1^\nu}{\sqrt{5}}$

   i. Δείξτε ότι $u_1 = 1$, $u_2 = 1$
   ii. Βρείτε τα u_3, u_4, u_5
   iii. Να συγκρίνετε τους 5 πρώτους όρους της ακολουθίας u_ν με τους 5 πρώτους όρους της ακολουθίας Fibonacci. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $u_\nu = \alpha_\nu$ για όλα τα ν;
   iv. Να αποδείξετε ότι για όλα τα ν ισχύει $u_{\nu+2} = u_{\nu+1} + u_\nu$.
   v. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $u_\nu = \alpha_\nu$ για όλα τα ν;

Άσκηση 634. Για ποιες τιμές του m η εξίσωση $x^2 - x + m = 0$ δεν έχει ρίζες;

Άσκηση 635. Βρείτε τα k για τα οποία ισχύει $(k-12)\,x^2+2\,(k-12)\,x+2\neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Άσκηση 636. *Από τις εξετάσεις Matriculation, Λονδίνο, 1894.* Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$1+y\,(1+x)^2\,(1+xy)$$

Άσκηση 637. Βρείτε τους συντελεστές της εξίσωσης $x^2+px+q=0$ ώστε οι αριθμοί p,q να είναι ρίζες της.

Άσκηση 638. *Από τις εξετάσεις STEP, 2010.* Η δευτεροβάθμια εξίσωση Τηε $t^2-pt+q=0$ έχει ρίζες τους α και β. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha^3+\beta^3=p^3-3qp$$

Δίνεται ότι μία από τις δύο αυτές ρίζες είναι το τετράγωνο της άλλης. Με την βοήθεια της παράστασης

$$\left(\alpha^2-\beta\right)\left(\alpha-\beta^2\right)$$

να βρείτε την σχέση μεταξύ των p και q.

3.4 Ανισώσεις

Άσκηση 639. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε στον άξονα το σύνολο λύσεων τους.

1. $\frac{2x+1}{5}-\frac{3-x}{3}>2$
2. $-\frac{x}{2}<3x-\frac{3+2x}{4}$
3. $\frac{1}{2}\,(3x-1)+\frac{x}{5}<-7x+10$
4. $4+\frac{3}{2}x>-\frac{13}{8}+\frac{1}{6}\,(4x-3)$

Άσκηση 640. Να λυθούν οι ανισώσεις:

1. $a\,(x+2)>x-1$
2. $4\mu^2x-4\nu^2x>\mu^4-\nu^4$

Άσκηση 641. Να λύσετε κάθε μία από τις ανισώσεις, να παραστήσετε σε ένα άξονα τις λύσεις τους και να βρείτε εφ' όσον υπάρχουν κοινές λύσεις που τις συναληθεύουν.

1. $6x+\frac{5}{7}>4x+7$ και $\frac{8x+3}{2}<2x+25$
2. $8x-5>\frac{15x-8}{2}$ και $2\,(2x-3)>5x-\frac{3}{4}$

Άσκηση 642. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$x^2-5x>0 \text{ και } 2x^2-11x<0$$

Άσκηση 643. Δίνεται η εξισωση

$$x^2-Sx+P=0$$

1. Θεωρείστε το S δεδομένο. Για ποια P η εξίσωση έχει λύση;

2. Θεωρείστε το P δεδομένο. Για ποια S η εξίσωση έχει λύση;

Αξιοποιείστε τα συμπεράσματα σας για να απαντήσετε στα ερωτήματα:

- Το άθροισμα δύο θετικών μεταβλητών αριθμών είναι σταθερό. Πως πρέπει να επιλέξουμε τους αριθμούς ώστε το γινόμενο τους να γίνει μέγιστο;
- Το γινόμενο δύο θετικών μεταβλητών αριθμών είναι σταθερό. Πως πρέπει να επιλέξουμε τους αριθμούς ώστε το άθροισμα τους να γίνει ελάχιστο;

Άσκηση 644. Το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δεν έχει ρίζες και $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Βρείτε το πρόσημο του γ.

Άσκηση 645. Για ποιές τιμές του a η ανίσωση

$$(a+4)\,x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$$

έχει σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$;

Άσκηση 646. *Εθνικό Πιστοποιητικό Ν. Αφρικής, Ανώτερο Επίπεδο, 2009.* Να λυθούν:

1. $x\,(x-1) = 30$
2. $3x^2 - 5x + 1 = 0$
3. $15x - 4 < 9x^2$

Άσκηση 647. *Από τον διαγωνιμό «Θαλής» της ΕΜΕ, 2010.* Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2 - 5x = 14, \qquad x^2 - 5x - 14\frac{x-1}{2} + \frac{x^2-1}{4} < \frac{x\,(x-1)}{4}$$

5.4 Ασκήσεις στο κεφάλαιο 4

4.1 Συντεταγμένες

Άσκηση 648. Ποιοι αριθμοί απέχουν από το 5 απόσταση 3;

Άσκηση 649. Για ποια τιμή του λ οι αριθμοί $\lambda + 1$ και $3\lambda - 1$ απέχουν μεταξύ τους απόσταση 8;

Άσκηση 650. Τα x, y, z είναι διάφορα του 0. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η παρακάτω παράσταση;

$$\frac{x}{|x|} + \frac{y}{|y|} + \frac{z}{|z|}$$

Αν οι x_1, x_2, .. είναι διάφοροι του μηδενός τι μπορείτε να πείτε για την επόμενη παράσταση;

$$\frac{x_1}{|x_1|} + \frac{x_2}{|x_2|} + \ldots + \frac{x_\nu}{|x_\nu|}$$

Άσκηση 651. Για ποια x ισχύει $|x+1| = |x| + 1$;

Άσκηση 652. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $|\alpha + 1| = |\alpha| + 1$ και $|\beta + 2| = |\beta| + 2$ τότε θα ισχύει $|\alpha + \beta + 3| = |\alpha| + |\beta| + 3$.

Άσκηση 653. Να απλοποιήσετε το κλάσμα

$$\frac{13|x| + 12x^2}{13 + 12|x|}$$

Άσκηση 654. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |t-1| - |t-2|$ αν είναι γνωστό ότι $1 < t < 2$.

Άσκηση 655. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = |t-3| - |t-5|$ αν είναι γνωστό ότι $t^2 - 8t + 15 < 0$.

Άσκηση 656. Να υπολογισθεί η παράσταση $\left|\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{8}{9}\right| + \left|\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{7}{10}\right|$

Άσκηση 657. Θεωρούμε αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$. Βρείτε τα x που, κατά περίπτωση, ικανοποιούν τις:

1. $|x-\alpha| = |x-\beta|$
2. $|x-\alpha| + |x-\beta| = |\alpha-\beta|$
3. $|x-\alpha| = 2|x-\beta|$
4. $|x-\alpha| = |x-\beta| + |\alpha-\beta|$

Άσκηση 658. Οι x, y συνδέονται με την σχέση $y = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Δείξτε ότι:
$$x = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad x > 0 \Leftrightarrow y > 0, \quad x < 0 \Leftrightarrow y < 0$$
2. Δείξτε ότι $|y| < 1$.
3. Δείξτε ότι $x = \frac{1}{1-|y|}$.

Άσκηση 659.

1. Να συμπληρώσετε το ερωτηματικό ώστε η ισοδυναμία να είναι αληθής:
$$-1 < x < 1 \Leftrightarrow |x| < \;;$$
2. Να αποδείξετε ότι:
$$\alpha \in (-1,1) \quad \textbf{και} \quad \beta \in (-1,1) \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta \in (-1,1)$$
3. Να αποδείξετε ότι:
$$\alpha \in (-1,1) \quad \textbf{και} \quad \beta \in (-1,1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta} \in (-1,1)$$

Άσκηση 660. Να αποδείξετε τις ισοδυναμίες:

1. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow |\alpha| + |\beta| = 0$
2. $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow |\alpha| + |\beta| > 0$

Άσκηση 661. Έστω ότι $y \neq 0$ και $|x| \leq 1$. Να αποδείξετε ότι

$$-\frac{1}{|y|} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{1}{|y|}$$

Άσκηση 662. Να βρείτε όλους τους ακέραιους m για τους οποίους ισχύει $|m| < \sqrt{29}$.

Άσκηση 663. Να βρείτε το άθροισμα όλον των ακεραίων αριθμών m για τους οποίους ισχύει $|m - 100| < \sqrt{1000}$.

Άσκηση 664. Να αποδείξετε ότι:

$$x^2 + |xy| + |-x|\, y + y\, |-y| = (|x| + |y|)\, (|x| + y)$$

Άσκηση 665. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2. Να εκφράσετε συναρτήσει των α, β, γ την απόσταση των ρ_1, ρ_2. (Μπορείτε να δείτε και την άσκηση 630

Άσκηση 666. *Από τις εξετάσεις STEP, 2004.* Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| < 2\sqrt{2}$ δεν υπάρχει τιμή του x για την οποία να ισχύει

$$x^2 - \alpha\, |x| + 2 < 0 \qquad (*)$$

Βρείτε τις λύσεις της $(*)$ για $\alpha = 3$.

Άσκηση 667. Έστω ότι $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και η παράσταση

$$A = |x - \alpha| + |x - \beta| + |x - \gamma| + |x - \delta|$$

Για τις διάφορες τιμές του x να γράψετε την παράσταση A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

Άσκηση 668. *Από τις εξετάσεις του 1948, Μηχανολόγοι, ΕΜΠ.* Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $2\beta\,(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$ τοτε ισχύει $|2\beta - 1| < 1$ και $\alpha\,(1 - |2\beta - 1|) = 2\beta - 1$.

Άσκηση 669. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\boxed{|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_\nu| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_\nu| \Leftrightarrow \text{ οι } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu \text{ είναι ομόσημοι}} \qquad (5.25)$$

Άσκηση 670. *Από τις εξετάσεις του 1952, Πολιτικοί Μηχανικοί ΕΜΠ.* Με δεδομένο ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει $|\alpha| \le |\beta + \gamma|$, $|\beta| \le |\gamma + \alpha|$, $|\gamma| \le |\alpha + \beta|$ να αποδειχθεί ότι για κάθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha^2\,(x - y)\,(x - z) + \beta^2\,(y - z)\,(y - x) + \gamma^2\,(z - x)\,(z - y) \ge 0$$

Να βρείτε τα t για τα οποία ισχύει:

$$|1 - |1 - |1 - |t|||| = 2$$

4.2 Συνάρτησεις

Άσκηση 671. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi\,(x) = \sqrt{(x+1)(2-x)}$.

Βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Βρείτε για ποιες τιμές του m η συνάρτηση ορίζεται στον $2m - 1$.

Βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $\varphi\,(x) = \sqrt{2}$.

Άσκηση 672. Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $A = [1, 5]$ και ισχύει $g(x) = 3 - x$.

1. Να κάνετε την γραφική παράσταση τη g.
2. Να λύσετε την εξίσωση $(g(x) + 1)^2 - \frac{1}{2} = 0$.

Άσκηση 673. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^{2012}(x + 1)^{2013}$.

1. Να βρείτε τα $f(1)$, $f(-1)$
2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες.
3. Να βρείτε σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

Άσκηση 674. *Από τις εξετάσεις του 2001.* Για τις συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$ για κάθε x. Αν είναι $g(x) = 1$ για κάθε x να βρείτε την $f(x)$.

Άσκηση 675. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$.

1. Αν $\alpha + \beta = 4$ βρείτε το $f(\alpha + \beta)$.
2. Αν $\alpha + \beta = 4$ βρείτε το $f(\alpha + \beta)$.
3. Αν $x_1 + x_2 + \ldots + x_{300} = 100$ βρείτε τα $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{300})$ και $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{300})$

Άσκηση 676. Οι συντεταγμένες ενός μεταβλητού σημείου M είναι $x = 3t - 1$ και $y = 5 - 2t$ όπου $t \in \mathbb{R}$. Αφού βρείτε ποια σχέση συνδέει το x με το y δείξτε ότι το σημείο M ανήκει σε μία συγκεκριμένη ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Άσκηση 677. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	0	1	-1	$\frac{1}{2}$		
$f(x)$					$-\frac{3}{5}$	5

2. Αν κάνατε σωστά τους υπολογισμούς σας στο προηγούμενο ερώτημα θα συναντήσατε αριθμό που δεν είναι κάποιο $f(x)$ δηλαδή δεν είναι τιμή της f. Βρείτε όλα τα y που **είναι** τιμές της f δηλαδή εκείνα τα y για τα οποία υπάρχει x στο πεδίο ορισμού της f ώστε $f(x) = y$.

Άσκηση 678. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

για όλα τα x, y. Να αποδείξετε ότι:

1. $f(5) = f(2) + f(3)$

2. $f(10) + f(11) = f(3) + f(5) + f(6) + f(7)$
3. $f(0) = 0$
4. $f(-x) = -f(x)$

Άσκηση 679. Θεωρούμε την ευθεία $y = \alpha x + \beta$ και το σταθερό σημείο $P(p, q)$.

1. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τυχόντος σημείου $M(x, \alpha x + \beta)$ της ευθείας από το σημείο P είναι

$$d(x) = \sqrt{(1 + \alpha^2)\, x^2 + 2\,(\alpha\beta - p - \alpha q)\, x + q^2 + p^2 - 2\beta q + \beta^2}$$

2. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του τριωνύμου

$$\left(1 + \alpha^2\right) x^2 + 2\,(\alpha\beta - p - \alpha q)\, x + q^2 + p^2 - 2\beta q + \beta^2$$

είναι

$$\frac{(\alpha p - q + \beta)^2}{1 + \alpha^2}$$

3. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου P από την ευθεία είναι $\frac{|\alpha p - q + \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$.

Άσκηση 680. *Από τις εξετάσεις του 2001.* Για τις συναρτήσεις $g(x)$, $f(x)$ ισχύει για όλα τα x ότι:

$$g(x)\left(3\,(f(x))^2 + 2\beta f(x) + \gamma\right) = x^2 - 4x + \beta$$

Επίσης ισχύει $\beta^2 < 3\gamma$. Να αποδειχθεί ότι $g(x) > 0$ για κάθε x.

Άσκηση 681. *Από τις εξετάσεις του 2005.* Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση η οποία ανήκει στο $(0, 1)$.

Άσκηση 682. *Από τις εξετάσεις του 2009.* Για μία συνάρτηση είναι γνωστό ότι $f(\alpha) > 1$ και $f(\beta) > 1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$. Μπορεί το «τουλάχιστον» να γίνει «ακριβώς». Τι είναι προτιμότερο;

Άσκηση 683. *Από τις εξετάσεις του 2008.* Έστω $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \neq \beta$ τότε $g(\alpha) \neq g(\beta)$.

Άσκηση 684. Να υπολογισθούν:

1. $49^{\frac{1}{2}}$
2. $27^{\frac{1}{3}}$
3. $16^{\frac{1}{4}}$
4. $16^{-\frac{1}{4}}$
5. $-16^{\frac{1}{4}}$
6. $-16^{-\frac{1}{4}}$
7. $1000^{\frac{2}{3}}$
8. $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3$
9. $125^{-\frac{1}{3}}$
10. $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$
11. $8^{\frac{2}{3}}$
12. $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Άσκηση 685. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τα:

1. $\sqrt[3]{64\alpha^6}$
2. $\sqrt[4]{16\beta^8}$
3. $\sqrt[4]{\frac{81\alpha^{12}}{625\beta^8}}$
4. $\sqrt[3]{\alpha^6\beta^{12}}$
5. $\sqrt[3]{8\gamma^{54}}$
6. $\sqrt[3]{\frac{27\alpha^{51}\beta^3}{\gamma^9}}$

Άσκηση 686. Οι αριθμοί α, β, γ είναι θετικοί. Να απλοποιήσετε τα:

1. $\sqrt[4]{\alpha^9\beta^{11}}$
2. $\sqrt[31]{\alpha^{101}\beta^{33}\gamma^{62}}$
3. $\sqrt[5]{\alpha^6\beta^7\gamma^8}$
4. $\sqrt[5]{\alpha^{60}\beta^{70}\gamma^{81}}$
5. $\frac{\sqrt[5]{\alpha^7\beta^9\gamma^{13}}}{\sqrt[5]{\alpha^2\beta^4\gamma^3}}$
6. $\left(\sqrt[3]{\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\beta}}\right)^{24}$

Άσκηση 687. Είναι $\alpha > 0$, $\beta < 0$ και $\gamma > 0$. Να υπολογισθούν τα:

1. $\sqrt[4]{\alpha^4\gamma^8}$
2. $\sqrt[4]{\alpha^4\beta^8}$
3. $\sqrt[4]{\alpha^8\beta^4}$
4. $\sqrt{\alpha^{16}\beta^4\gamma^8}$

Άσκηση 688. Να επαληθεύσετε την ισότητα

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

Άσκηση 689. Να αποδείξετε ότι

1. $\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = (\alpha - \beta)\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$
2. $\sqrt[3]{\alpha} - \sqrt[3]{\beta} = (\alpha - \beta)\,\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}^2+\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\beta}^2}$
3. $\sqrt[4]{\alpha} - \sqrt[4]{\beta} = (\alpha - \beta)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}^3+\sqrt[4]{\alpha}^2\sqrt[4]{\beta}+\sqrt[4]{\alpha}\sqrt[4]{\beta}^2+\sqrt[4]{\beta}^3}$
4. $\sqrt[\nu]{\alpha} - \sqrt[\nu]{\beta} = (\alpha - \beta)\,\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu-1}+\sqrt[\nu]{\alpha}^{\nu-2}\sqrt[\nu]{\beta}+\ldots+\sqrt[\nu]{\alpha}\sqrt[\nu]{\beta}^{\nu-2}+\sqrt[\nu]{\beta}^{\nu-1}}$

Άσκηση 690. Η γεωμετρική πρόοδος $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ έχει $\alpha_1 = \alpha > 0$ και λόγο $\lambda > 0$. Να εκφράσετε συναρτήσει των α, λ και ν το γινόμενο $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu$ των ν πρώτων όρων της.

Άσκηση 691. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$;

Άσκηση 692. *Από τον διαγωνισμό της Καναδικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2006* Αν $f(2x+1) = (x-12)(x+13)$ ποιο είναι το $f(31)$;

Άσκηση 693. *Από την Ολυμπιάδα Flanders, 1989-1990* Η έβδομη ρίζα του $7^{(7^7)}$ είναι ίση με:

1. (α') 7^7 $\quad 7^{\left(7^7-1\right)}$ $\quad 7^{\left(6^7\right)}$ $\quad 7^{\left(7^6\right)}$ $\quad \left(\sqrt{7}\right)^7$

(β') (γ') (δ') (ε')

Άσκηση 694. 1. Να βρείτε δύο αριθμούς A, B τέτοιους ώστε για κάθε x διάφορο των 1 και 2 να ισχύει:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

Μπορείτε να δοκιμάσετε τιμές του x, να βρείτε τα A, B και μετά να κάνετε την απαραίτητη επαλήθευση.

2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ και ονομάζουμε ρ_1, ρ_2 τις ρίζες της. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν κατάλληλοι αριθμοί A_1, A_2, τους οποίους και να βρείτε έτσι ώστε για κάθε $x \neq \rho_1, \rho_2$ να ισχύει:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{A}{x-\rho_1} + \frac{B}{x-\rho_2}$$

3. Βρείτε αριθμούς A, B έτσι ώστε για κάθε θετικό ακέραιο ν να ισχύει

$$\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu+1}$$

και μετά να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)}$$

Άσκηση 695. *Η ανισότητα του Cauchy (1821).* Στην άσκηση 597 ορίσαμε τον αριθμητικό μέσο των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$. Αν επιπλέον οι αριθμοί είναι θετικοί ορίζουμε τον γεωμετρικό μέσο των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ να είναι ο αριθμός

$$\boxed{G_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}} \tag{5.26}$$

Δηλαδή ο γεωμετρικός μέσος ν αριθμών είναι η ν-οστή ρίζα του γινομένου τους. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό είναι

$$\begin{aligned}
&G_1 = \sqrt[1]{\alpha_1} = \alpha_1\\
&G_2 = \sqrt[2]{\alpha_1\alpha_2} = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}\\
&G_3 = \sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\\
&\ldots\\
&G_{\nu-1} = \sqrt[\nu-1]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu-1}}\\
&G_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}
\end{aligned}$$

Άσκηση 696. 1. Να αποδείξετε ότι ο μέσος αριθμητικός *δύο* θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον μέσο γεωμετρικό τους δηλαδή

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \geq \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$$

2. Να αποδείξετε ότι ο μέσος αριθμητικός *τριών* θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον μέσο γεωμετρικό τους δηλαδή

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} \geq \sqrt[3]{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

3. Με την βοήθεια της (5.22) να αποδείξετε ότι γενικά ο μέσος αριθμητικός ν θετικών αριθμών είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον μέσο γεωμετρικό τους δηλαδή:

$$\boxed{\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu} \geq \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu}} \tag{5.27}$$

και ότι η ισότητα ισχύει όταν οι αριθμοί είναι ίσοι.

Άσκηση 697. Να αποδείξετε ότι αν το γινόμενο ν θετικών αριθμών είναι 1 τότε το άθροισμα τους είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το πλήθος τους ν.

Άσκηση 698. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{|x_1|+1}{|x_2|+1}+\frac{|x_2|+1}{|x_3|+1}+\ldots+\frac{|x_{\nu-1}|+1}{|x_\nu|+1}+\frac{|x_\nu|+1}{|x_1|+1} \geq \nu$$

Άσκηση 699. Να βρείτε τους αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει $x^5+y^5 = x^6+y^6 = 1$.

Άσκηση 700. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^2-(2p-q)x+\left(p^2-pq+q^2\right), \qquad q \neq 0$$

δεν τέμνει τον $x'x$.

Άσκηση 701. Να αποδείξετε ότι αν $\beta < 0 < 4\gamma < \beta^2$ τότε η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2+\beta x+\gamma$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε δύο σημεία.

Άσκηση 702. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\gamma)(x-\alpha)$$

όπου οι α, β, γ είναι ανά δύο διάφοροι. Να αποδειχθεί ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο διάφορα σημεία.

Άσκηση 703. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha > 0$. Έστω $M\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$ το σημείο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο της $f(x)$. Να αποδείξετε ότι το M ανήκει στην γραφική παράσταση της $g(x) = -\alpha x^2+\gamma$.

Άσκηση 704. *Από τις εξετάσεις του 2006.* Έστω η συνάρτηση $g(x) = 2+(x-2)^2$ ορισμένη στο $[2, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha \neq \beta$ τότε $g(\alpha) \neq g(\beta)$.

Άσκηση 705. *Από τις εξετάσεις του 1954, Μηχανολόγοι ΕΜΠ.* Υποθέτουμε ότι οι συντελεστές του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ακέραιοι αριθμοί και ότι οι αριθμοί $f(0), f(1)$ είναι περιττοί. Να αποδείξετε ότι το $f(x)$ δεν έχει ακέραια ρίζα.

Άσκηση 706. *Από τον διαγωνισμό της Καναδικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2006* Αν $f(2x+1) = (x-12)(x+13)$ ποιο είναι το $f(31)$;

Άσκηση 707. Θεωρούμε τα δευτεροβάθμια τριώνυμα με

$$f_1(x) = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 \;\; f_2(x) = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2$$

για τα οποία υποθέτουμε ότι έχουν και τα δύο ρίζες. Ο αριθμός

$$R(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

ονομάζεται *απαλείφουσα* των f_1, f_2. Να αποδειχθεί ότι τα τριώνυμα έχουν μία τουλάχιστον κοινή ρίζα αν και μόνο αν η απαλείφουσα τους είναι μηδέν.

Άσκηση 708. *Από τις εξετάσεις του 1977, Πολυτεχνικός - Φυσικομαθηματικός - Γεωπονοδασολογικός Κύκλος.* Έστω

$$P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

με $\alpha > 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε ζεύγος αριθμών κ, λ με $\kappa\lambda \leq 0$ ισχύει

$$\left| \frac{P(\kappa) - P(\lambda)}{\kappa - \lambda} \right| \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$$

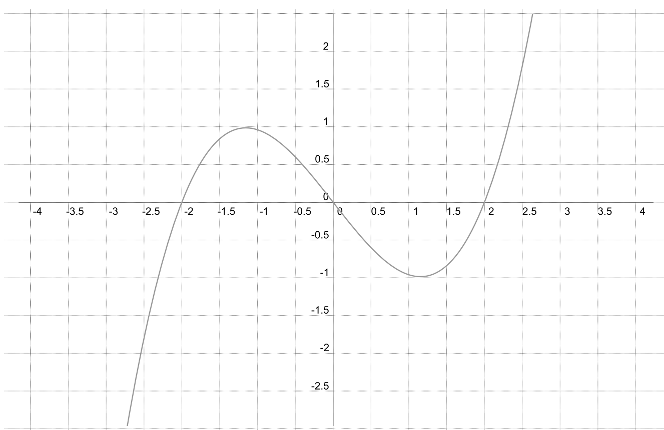
Άσκηση 709. *Από τις εξετάσεις του 1996, Δέσμη Ι.* Για μία συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c$$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ όπου c ένας σταθερός αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

$$(\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2}\left(f(\alpha) + f(\beta)\right)$$

Άσκηση 710. *Από τον διαγωνισμό της Καναδικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2001* Στο σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f(x)$.



Να προσδιορίσετε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$||g(x)| - 1| = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 711. *Από τις εξετάσεις του 2012. Μαθηματικά Γενικής Παιδείας.* Σε κάποια άσκηση χρειάσθηκε να βρεθούν τα β για τα οποία ισχύει $\frac{2}{|\beta-10|} \leq \frac{1}{10}$. Βρείτε τα.

Άσκηση 712. Θεωρούμε τους αριθμούς $a_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + ... + (x - a_\nu)^2$ παίρνει την ελάχιστη ιμή της όταν ο x γίνει ίσος με τον μέσο αριθμητικό των $a_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ δηλαδή όταν $x = \frac{a_1+\alpha_2+...+\alpha_\nu}{\nu}$.

6

Απαντήσεις στις Ασκήσεις

1 2012, 20112012, $a+1$

2 0, 5, 8, 9

3 Ότι είναι ίσοι.

4 Πάντα θα βρίσκουμε τον αριθμό με τον οποίο ξεκινήσαμε. Ας πούμε ότι ξεκινάμε με το a. Έχουμε

$$a \to_{\text{προσθέτουμε } 5} a+5 \to_{\text{παίρνουμε τον αντίθετο}} -a-5 \to_{\text{προσθέτουμε } 5} -a \to_{\text{παίρνουμε τον αντίθετο}} a$$

5 Πράγματι όλοι οι ακέραιοι α μπορούν να πάρουν την μορφή $\alpha = 2\beta$ αλλά για να είναι άρτιοι αυτό δεν είναι αρκετό: Πρέπει ο β να είναι ακέραιος. Ο $13 = 2\left(\frac{13}{2}\right)$ δεν είναι άρτιος γιατί ο $\frac{13}{2}$ δεν είναι ακέραιος.

6 1) $\underbrace{\kappa - \lambda}_{\text{άρτιοι}} = 2\underbrace{\mu}_{\text{ακέραιος}} - 2\underbrace{\nu}_{\text{ακέραιος}} = 2\left(\underbrace{\mu - \nu}_{\text{ακέραιος}}\right) = 2\rho = \text{άρτιος}$

2) $\underbrace{\kappa - \lambda}_{\text{περιττοί}} = \left(2\underbrace{\mu}_{\text{ακέραιος}} + 1\right) + \left(2\underbrace{\nu}_{\text{ακέραιος}} + 1\right) = 2\mu + 2\nu = 2\left(\underbrace{\mu + \nu}_{\text{ακέραιος}}\right) = 2\rho = \text{άρτιος}$

7

1. Περιττός
2. Άρτιος
3. Περιττός
4. Άρτιος

8 Αν ο β ήταν άρτιος τότε ο $\alpha\beta$ θα ήταν αι αυτός άρτιος επομένως ο $\alpha\beta+1$ θα ήταν περιττός (άτοπο αφού είναι άρτιος). Άρα ο ο β είναι περιττός.

9 Δεν ξέρουμε αν α είναι άρτιος ή περιττός. Μπορούμε όμως να δούμε τι συμβαίνει σε κάθε μία από αυτές τις δύο περιπτώσεις με τον αριθμό $\alpha(\alpha+1)$. Η τυπική έκφραση που χρησιμοποιούμε στα Μαθηματικά είναι «διακρίνουμε περιπτώσεις». Διακρίνουμε περιπτώσεις λοιπόν:

Περίπτωση 1 Ο αριθμός α είναι άρτιος. Τότε ο αριθμός $\alpha + 1$ είναι ο επόμενος ενός άρτιου αριθμού και επομένως περιττός. Το γινόμενο $\alpha(\alpha+1)$ είναι γινόμενο του άρτιου α και του περιττού $\alpha + 1$ επομένως είναι ένας άρτιος αριθμός.

Περίπτωση 2 Ο αριθμός α είναι περιττός. Τότε ο αριθμός $\alpha + 1$ είναι ο επόμενος ενός περιττού αριθμού και επομένως άρτιος. Το γινόμενο $\alpha(\alpha+1)$ είναι γινόμενο του περιττού α και του άρτιου $\alpha + 1$ επομένως είναι ένας άρτιος αριθμός.

Σε κάθε περίπτωση ο αριθμός μας $\alpha(\alpha+1)$ είναι άρτιος.

Μπορούμε να σκεφθούμε και πιο γρήγορα και να έχουμε μία πιο σύντομη απόδειξη: Έχουμε ένα αριθμό τον α και τον επόμενο του τον $\alpha + 1$. Κάποιος από τους δύο θα είναι άρτιος και το γινόμενο ενός αρτίου με οποιοδήποτε ακέραιο είναι αριθμός άρτιος και επομένως ο αριθμός $\alpha(\alpha+1)$ είναι άρτιος.

10 $(3\kappa+1)+(3\lambda+2) = 3\kappa+3\lambda+3 = 3(\kappa+\lambda+1) = 3\rho$

11 $(4\kappa+2)(4\lambda+3) = 16\kappa\lambda+12\kappa+8\lambda+6 = 4(4\kappa\lambda+3\kappa+2\lambda+1)+2 = 4\rho+2$

12 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

13 $\frac{-61}{28}, \frac{7}{8}, \frac{71}{81}$

14 Παρατηρείστε ότι $\alpha\gamma\beta = \beta\gamma\alpha$.

15 Όχι. Το γινόμενο των μέσων είναι γινόμενο δύο περιττών άρα περιττός και το γινόμενο των άκρων είναι γινόμενο αρτίων άρα άρτιος. Επομένως αυτά τα δύο γινόμενα δε μπορούν να είναι ίσα.

16 Ο μόνος τρόπος για να είναι ένας ρητός ίσος με μηδέν είναι ο αριθμητής του κλάσματος που τον εκφράζει να είναι μηδέν. Επομένως πρέπει $x - 3 = 0$ και άρα $x = 3$.

17 Οι παρονομαστές είναι φυσικοί αριθμοί οπότε αρκεί να συγκρίνουμε τα γινόμενα $11 \cdot 94$ και $28 \cdot 33$. Είναι $11 \cdot 94 = 1034$ και $28 \cdot 33 = 924$. Αφού το πρώτο γινόμενο είναι και το μεγαλύτερο ο πρώτος ρητός θα είναι και ο μεγαλύτερος. Επομένως $\frac{11}{28} > \frac{33}{94}$

18 Εδώ οι παρονομαστές δεν είναι είναι φυσικοί αριθμοί και πρέπει πρώτα να κάνουμε μια μετατροπή. Είναι $\frac{11}{-17} = \frac{-11}{17}$ και θα συγκρίνουμε τους $\frac{-11}{17}$ και $\frac{-50}{83}$. Είναι $(-11) \cdot 83 = -913$ και $(-50) \cdot 17 = -850$ επομένως αφού -913‘-850 είναι $\frac{11}{-17} < \frac{-50}{83}$.

19

1. $A = \frac{103}{40}$
2. $B = \frac{73}{40}$
3. $\Gamma = -\frac{1}{6}$
4. $\Delta = \frac{4}{5}$

22 Σύντομος τρόπος: $1 + 671 + 999 = (1 + 999) + 671 = 1000 + 671 = 1671$

23 $\frac{12}{19} + 3 + \frac{7}{19} = \left(\frac{12}{19} + \frac{7}{19}\right) + 3 = \frac{19}{19} + 3 = 4$

24 $3A + 3B = 3(A + B) = 3 \cdot 7 = 21$

25

1. $6(x+2)$
2. $\alpha(3\beta+1)$

26

1. $xy + xz - xt$
2. $xy + xz - xt + \alpha y + \alpha z - \alpha t$
3. $x\alpha y + x\alpha z - x\alpha t$
4. $\alpha\kappa - \alpha\lambda + \alpha\mu + \beta\kappa - \beta\lambda + \beta\mu - \gamma\kappa + \gamma\lambda - \gamma\mu$

27

1. $\frac{13}{12}$
2. $\frac{5}{12}$
3. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$
4. $\frac{y-x-3}{(x+1)(y-2)}$

28

1. 1
2. $-\frac{4}{31}$

29

1. $\frac{14}{15}$
2. $\frac{\alpha y}{\beta x}$
3. $\frac{\alpha y}{x}$
4. $\frac{\alpha}{xy}$

31

1. $(\beta - 5)(\alpha - 3)$
2. $(c + d)(p + q)$
3. $(b + e)(a - d)$
4. $(a + 5)(b + 6)$
5. $(a - 5)(b - 6)$
6. $(2a + 3)(b - 5)$

32

1. $\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$
2. $\frac{\alpha+\gamma+\delta}{\varepsilon}$
3. $\frac{a-b}{a+b}$
4. $\frac{x+3}{2x-3}$
5. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$
6. $\frac{y-\beta}{y+\beta}$

33 Αφού $(y-1)(y-2)(y-3) = 0$ κάποιος από τους $y-1$, $y-2$, $y-3$ είναι μηδέν και επομένως ο y μπορεί να είναι κάποιος από τους 1, 2, 3. Άρα η παράσταση $(y+1)(y+2)(y+3)$ 24 ή με

- ή θα είναι ίση με $(1+1)(1+2)(1+3) = 24$
- ή θα είναι ίση με $(2+1)(2+2)(2+3) = 60$
- ή θα είναι ίση με $(3+1)(3+2)(3+3) = 120$

35 Θα σήμαινε $\alpha + (\beta \cdot \gamma) = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$. Η σχέση αυτή δε μπορεί να αληθεύει για όλα τα α, β, γ. Δοκιμάζοντας για παράδειγμα $a = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 2$ καταλήγουμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $1 = 3$.

36 4

37 $12 \cdot 2 : 3 \cdot 4 = (12 \cdot 2) : 3 \cdot 4 = 24 : 3 \cdot 4 = (24 : 3) \cdot 4 = 8 \cdot 4 = 32$

38 $\frac{46}{3}$

39 $-\frac{303}{16}$

40

1. 16
2. 16
3. 32
4. 25
5. $\frac{1}{8}$
6. 9

41 $\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = 5 \cdot 12 = 60$, $\alpha^{\mu-\nu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{5}{12}$

42 Είναι $\frac{\alpha^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}} = \alpha^{(\mu+1)-\mu} = \alpha^1 = \alpha$. Αλλά $\frac{\alpha^{\mu+1}}{\alpha^{\mu}} = \frac{q}{p}$. Άρα $\alpha = \frac{q}{p}$.

43

1. $\frac{16}{81}$
2. $\frac{216}{125}$
3. $-\frac{8}{27}$
4. $\frac{9}{25}$

44
1. α^8
2. α^{-2}
3. α^6
4. α^{45}
5. α^{-1}
6. α^{84}

45
1. $-\frac{44}{9}$
2. 1
3. 0
4. 0

46

$$\alpha^\mu \alpha^\nu = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\mu}\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu} = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\mu+\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$$

48
1. $(\alpha + x)(x\alpha - \beta)$
2. $(x - \beta)(\alpha + x)$
3. $x^4y^2(x + y)$
4. $a^{13}b^{11}(1 - ab)$
5. $\left(x^2 + a^4\right)\left(y^4 + b^3\right)$
6. $\left(4\beta - \alpha^2\right)\left(4\alpha^2 - \beta\right)$

49
1. $\frac{a+b^2}{a^2+b}$
2. $\frac{r-s}{r+s}$
3. $\frac{yz^2}{y+2z}$
4. $\frac{m+t^3}{m-t^3}$

50
1. 20
2. -22
3. 190
4. $-\frac{28}{5}$

51
1. $\alpha_1^7\alpha_2^{11}$
2. $\alpha_1^{12}\beta_1^8$
3. $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2$
4. $x_1^6x_2^{10}x_3^8$

52 Σ, Σ, Λ, Σ, Λ, Λ

53 Είναι $b < d$.

54 Όχι. Αν $x = 10$ και $y = 5$ ικανοποιούνται οι υποθέσεις και είναι $x > y$. Αν $x = 5$ και $y = 10$ πάλι ικανοποιούνται οι υποθέσεις αλλά αυτή τη φορά ισχύει $x < y$.

56 Οι (α), (γ), (δ).

57 $\frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2}$

61 Οι (α′), (ς')

63 $+, -, -, -, -, -$

64 $\frac{19}{7} = 2, \overline{7142857}$ (η γραμμή δηλώνει την περίοδο)

65 Ο $3, 23$

66 1221

67 3

68 Ο αριθμός έχει μη τερματιζόμενη δεκαδική παράσταση. Αν υποθέσουμε ότι υπήρχε κάποια επαναλαμβανόμενη περίοδος της οποίας δεν ήταν όλα τα ψηφία μηδενικά ας ονομάσουμε m το πλήθος των στοιχείων της. Τότε αυτά τα m ψηφία που δεν είναι όλα μηδέν θα έπρεπε να επαναλαμβάνονται. Αυτό σημαίνει πως από κάποιο σημείο και μετά m αν διαλέξουμε m οποιαδήποτε συνεχόμενα ψηφία αυτά δεν θα είναι όλα μηδέν. Όμως στην δεκαδική παράσταση σε κάποια θέση θα εμφανισθούν οπωσδήποτε m συνεχόμενα μηδενικά (άτοπο).

69 9630

70 9630

71 $13,\ 14,\ 15,\ \frac{13}{14},\ \frac{15}{14}$

72 Μία προσέγγιση είναι $\sqrt{3} = 1,\ 73$

73 Οι $1{,}3{,}5$

74 Οι $1{,}3{,}5$

75 Όλες εκτός της 2.

76 Μόνο η 1.

77 Οι $1{,}2{,}3$

78 Οι $2{,}3{,}4$

79 Οι $2{,}4{,}5$

80 Οι $1{,}4{,}5$

81 $B = \{\mathbb{Z} \mid \ -3 \le x \le 20\}$

82 Αν συμβολίσουμε με A το σύνολο των αρτίων τότε $A = \{\alpha \in \mathbb{Z} | \alpha = 2\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}\}$. Αν συμβολίσουμε με Π το σύνολο των περιττών τότε $\Pi = \{\alpha \in \mathbb{Z} | \alpha = 2\nu + 1,\ \nu \in \mathbb{Z}\}$

83 $\{1, -1, 2, -1, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12\}$

84 $\{6, -6, 12, -12, 18, -18, 24, -24, 30, -30, \dots\}$

85 Πρέπει $x = -4$ και $y = \pm 3$.

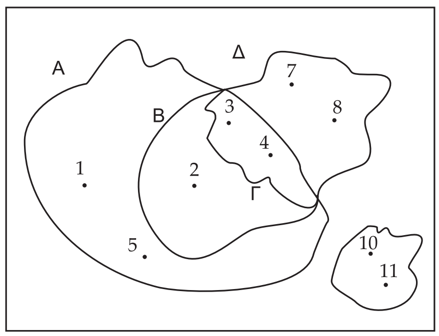
86 Στις τρεις πρώτες.

88 Τα δύο τελευταία.

89 $\{\varnothing, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p,q\}, \{p,r\}, \{q,r\}, \{p,q,r\}\}$

90 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

91



92 Όλες εκτός από την τελευταία.

93 Η πρώτη και η τρίτη.

97 Όλες εκτός της 2.

98 Για $x = 2$

99 Για καμία.

103 $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$

104 Το κενό σύνολο

105

1. $\{1, 4\}$
2. $[0, 4]$
3. $\mathbb{N}$
4. $[0, 4)$

106 $\left(\frac{23}{11}, \frac{19}{7}\right)$

107 Για $x = 1$ ή $x = 3$ ή $x = 5$.

108 $\{-1, 4, 5, 7\}$

110 1. $(2,5]$

2. $\mathbb{R}$

Άσκηση 713. Να αποδείξετε ότι $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

111 1. $\{3\}$

2. $\{1,2,3\}$

3. $[5,6]$

112 Το σύνολο των αρρήτων.

113 $(-\infty,7) \cup (7,+\infty)$

115 1. 2012

2. 2000

3. 101

116 1. 4

2. 11

3. 7

117 $0,1,2,,\ldots,11$

118 $11,12,13,\ldots$

119 23

120 3

121 $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

122 $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{3\mu} = \frac{1}{\mu}$

123 $\frac{1}{13},\frac{1}{13},\frac{1}{4},\frac{1}{52}$

124 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

125 $\frac{5}{36}, 7$

126 $\frac{1}{7140}$

128 Το A.

129 $\frac{9}{11}$

130 $0,9$

131 $0,3$

132

133 $\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}$

136 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta + 2\beta\gamma - 2\gamma\alpha$

137 7

139 22

143

1. $\alpha^2 + 6\alpha\beta + 9\beta^2$
2. $(2x - y)^2$

144 $(x - a)^2 + (y - b)^2$

147 Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα του Lagrange.

148 $(\alpha + \beta)^2 = 14$, $\pm\sqrt{14}$.

149 $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$

150 14

154 $\alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$

158

1. $4\beta\alpha$
2. $4z\,(x + y)$

159

1. $x + y$
2. $a^2 + b^2$

161 $\frac{2\left(3+\sqrt{2}\right)}{7}, \frac{14\left(\sqrt{7}+2\right)}{3}, \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}$

162 $(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$

163 $\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}$

167 $1 + (-2) + (-2)^2 + \ldots + (-2)^9 = \frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = -341$

168

1. 1658931
2. 2025078
3. 366147

169 $\frac{9\cdot(9+1)}{2} = 45$, $\frac{90\cdot(90+1)}{2} = 4095$

174 -1 και 29

176 $\frac{474}{7}$, $\frac{711}{7}$, $\frac{948}{7}$, $\frac{1185}{7}$

178 $\frac{5}{13}$

179 $\alpha_1 = \frac{3}{4}$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \frac{4}{3}$, $\alpha_4 = \frac{16}{9}$, $\alpha_5 = \frac{64}{27}$.

180 $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_4 = \frac{1}{2}$, $\alpha_5 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

183 $\alpha_{12} = \alpha_1 \lambda^{11} = \frac{1}{16} \cdot 2^{11} = \frac{1}{2^4} \cdot 2^{11} = 2^7 = 128$

185 $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 3$, $\alpha_5 = 5$

186 $\alpha_1 = \frac{1}{3}$, $\alpha_2 = \frac{5}{6}$, $\alpha_3 = \frac{4}{3}$, $\alpha_4 = \frac{11}{6}$, $\alpha_5 = \frac{7}{3}$

189 $\alpha_{12} = 19$

191 -511

192 800

193 Είναι το άθροισμα των 40 πρώτων όρων μίας αριθμητικής προόδου της οποίας ο πρώτος όρος είναι 2, η διαφορά 2. Εφαρμόζοντας τον τύπο θα βρούμε 1640.

194 Πρόκειται για άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Ο πρώτος όρος είναι $3 \cdot (-2)$, ο λόγος είναι -2 και το πλήθος είναι 10. Εφαρμόζοντας τον τύπο θα βρούμε 2046.

205 $x = 4$, $y = 2$

206 $x = y = 6$

207 $\alpha = -1, \beta = 0$

214 Μπορούμε να φτιάξουμε όσες τριάδες τέτοιων αριθμών θέλουμε. Διαλέγουμε τους δύο ας πούμε 2 και $\frac{15}{7}$ και σαν τρίτο παίρνουμε τον αντίστροφο του γινομένου των άλλων δύο: $\frac{7}{30}$.

215 Ναι. Αν ο ν ήταν μηδέν ή αρνητικός ακέραιος το συμπέρασμα δεν ισχύει. Για παράδειγμα ας πάρουμε την $2 < 3$. Δεν ισχύει $2^0 < 3^0$ αφού και τα δύο μέλη είναι ίσα με 1. Επίσης δεν ισχύει $2^{-1} < 3^{-1}$ αφού $2^{-1} = \frac{1}{2}$ και $3^{-1} = \frac{1}{3}$ και οι αριθμοί αυτοί συν•δεονται με ανισότητα αλλά αντίθετης φοράς από την αρχική: $2^{-1} > 3^{-1}$.

218 Είναι $\left(1 - \sqrt{5}\right)^3 < \left(2 - \sqrt{5}\right)^3$

221 Από $298,25m^2$ έως $301,75m^2$.

229 Αντιστοίχως στα B, A, D, C

232 Μόνο όταν οι α, β είναι δύο ίση μη αρνητικοί αριθμοί ή όταν $\alpha \geq 0 = \beta$.

234 $A = \alpha\beta^2$, $B = \alpha^4\beta\gamma^2$, $\Gamma = \alpha\beta\gamma$, $\Delta = \alpha^2\beta^3\gamma^3\sqrt{\alpha\beta\gamma}$

235 $A = \frac{\alpha}{\beta^2\gamma^3}$, $B = \frac{\alpha\beta}{\gamma^4}\sqrt{\alpha}$, $\Gamma = \frac{\alpha^3}{\beta\gamma}$, $\Delta = \frac{2\alpha^2\gamma^3}{7\beta}$

238

1. 3
2. 3
3. -3
4. -3
5. $3-\sqrt{3}$
6. $\sqrt{3}-1$

239 Ναι, Όχι, Ναι, Ναι, Ναι.

241
1. $x=-4$
2. $x=7$
3. $x=-\frac{t}{\alpha}$
4. $x=-t\alpha$
5. $x=\frac{\alpha}{\alpha+1}$
6. $x=\frac{3}{\alpha}$

242
1. $x=8$
2. Αδύνατη.
3. $x=4$
4. $x=\frac{1}{6}$
5. $x=-8$
6. $x=-3$

243
1. $x=-48$
2. $x=11$
3. $x=\frac{1}{11}$
4. $x=0$
5. $x=-2$
6. Αδύνατη.

244
1. $x=3$, $x=-3$, $x=\frac{6}{5}$
2. $x=\frac{3}{2}$, $x=5$, $x=-2$

245
1. $x=\pm 2$
2. $x=\pm\frac{3}{2}$
3. $x=-1$, $x=2$

246 Για $\lambda \neq 5$ έχει λύση $x=\frac{5\lambda-4}{\lambda-5}$. Για $\lambda=5$ είναι αδύνατη.

247 Για $\lambda=1$.

248 $t=\frac{5}{4}$

249 $x=\frac{\alpha\lambda}{1+\lambda}$, $y=\alpha-x=\alpha-\frac{\alpha\lambda}{1+\lambda}=\frac{\alpha}{1+\lambda}$

250
1. $x=-\frac{37}{2}$, $x=-\frac{9}{2}$
2. $x=-19$, $x=-4$
3. $x=-17$, $x=-6$
4. $x=-\frac{5}{2}$, $x=4$
5. $x=-\frac{11}{2}$, $x=7$
6. $x=-\frac{13}{8}$, $x=\frac{21}{8}$

251
1. $x=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}$
2. $x=-\alpha\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2+2\beta}$
3. $x=2\alpha$, $x=-\beta$
4. $x=-4\alpha$, $x=\frac{3}{2}\alpha$
5. $x=\frac{-\mu\pm\sqrt{\mu^2-4\nu}}{2}$
6. $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\gamma}$

252
1. $x=\left(\sqrt{2}-1\right)y$, $x=\left(-1-\sqrt{2}\right)y$
2. $y=\left(\sqrt{2}+1\right)x$, $y=\left(1-\sqrt{2}\right)x$

253 (α′) $\lambda=1$ (β′) $\lambda=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}$

254

1. $x = -\frac{5}{2},\ x = 3$
2. $x = -2,\ x = -\frac{5}{3}$
3. $x = 3 \pm \sqrt{6}$
4. $x = -2,\ x = -1$
5. $x = -4,\ \ x = 3$
6. $x = \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta},\ \ x = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

255
1. $x = 1, x = 2, x = -2, x = -1$
2. $x = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{13}$
3. $x = -4$
4. $x = 0$
5. $x = -2, x = 1$
6. $x = 2, x = \frac{1}{2}$

256
1. $S = 29,\ P = 6$
2. $S = -1500,\ P = -2$
3. $S = \alpha,\ P = 3$
4. $S = 2,\ P = t$

257
1. $\frac{2\gamma-\beta}{\alpha}$
2. $\frac{2\alpha-\beta}{\alpha+\gamma-\beta}$

258
1. $x^2 + 5x + 4 = 0$
2. $24x^2 + 7x - 5 = 0$
3. $3x^2 - x - 1 = 0$
4. $12x^2 - 16x\sqrt{3} + 12 = 0$

259
1. -465
2. 8192

260
1. 14 και 1
2. -7 και -12,
3. $6 + \sqrt{33}$ και $6 - \sqrt{33}$
4. $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$

261
1. μία θετική, μία αρνητική
2. μία θετική, μία αρνητική
3. δύο θετικές
4. δύο αρνητικές

262
1. $\frac{3}{2} < x$
2. $-\frac{3}{2} < x$
3. $-\frac{3}{2} < x$
4. $\frac{3}{2} < x$
5. $\frac{1}{4} < x$
6. $-\frac{3}{2} < x$

263
1. $\frac{4}{\alpha} < x$
2. $x \le \frac{-2}{\alpha-2}$
3. $x < \frac{\alpha+1}{2\alpha-1}$
4. $x < \frac{3+2\alpha}{\alpha^2+\beta^2+1}$

264
1. $5 < x$
2. $x < \frac{21}{10}$

265 $t < \frac{2}{3}$

266 Σύνολο λύσεων:
1. Ως προς x: $\left(\frac{1+3y}{2}, +\infty\right)$
2. Ως προς y: $\left(-\infty, \frac{2x-1}{3}\right)$

267 Πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m+1) = 1 - 8m$ να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Βρίσκουμε ότι αυτό συμβαίνει για $m \le \frac{1}{8}$.

268
1. $6 \le x$

2. $\frac{9}{2} < x < \frac{31}{4}$

269 $\frac{35}{48} < x \leq \frac{4}{3}$

270 $\frac{1}{5} < \lambda < 1$

271 Είναι $-$.

272 Είναι $+$.

273

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$3 - x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$5 + 4x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-x)(5+4x)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

274 1. $(-\infty,-5):-,\left(-5,\frac{1}{2}\right):+,\left(\frac{1}{2},+\infty\right):-$

2. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right):+,\left(\frac{1}{2},+\infty\right):+$

3. $(-\infty,1):+,(1,2):-,(2,3):+,(3,+\infty):-$

275 $(-\infty,-3):-,\left(-3,-\frac{7}{5}\right):+,\left(-\frac{7}{5},\frac{1}{2}\right):-,\left(\frac{1}{2},+\infty\right):+$

276 1. $(2x-1)(x-2)$

2. $(2x+1)^2$

3. $(x+3)(x-11)$

277 1. $\frac{x+13}{x+15}$

2. $\frac{2(a+9)}{3(a-7)}$

3. $\frac{b-7x}{x+b}$

278 Αν έπαιρνε αυτή την μορφή θα είχε ρίζες.

279

1. Ρίζες $-7,\ 1$, θετικό εκτός, αρνητικό μεταξύ.
2. Ρίζες $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ θετικό εκτός, αρνητικό μεταξύ.
3. Ρίζες $-8,1$ θετικό μεταξύ, αρνητικό εκτός.
4. Θετικό για όλα τα x.
5. Αρνητικό για όλα τα x.
6. Μία διπλή ρίζα το $\frac{1}{3}$. Θετικό για όλα τα x τα διάφορα του $\frac{1}{3}$.

280 Δείτε τις παραστάσεις σαν τριώνυμα ως προς α

282 +

283
1. $-2 < x < 2$
2. $x \leq -7$ ή $-3 \leq x$
3. $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$
4. $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{4}{3}$
5. $x < -5$ ή $-\frac{5}{2} < x$
6. $-\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$

284
1. $\alpha < x < \beta$
2. $x < -\beta$ ή $x > -\alpha$
3. $-\alpha \leq x \leq \delta$
4. $x \leq -\delta$ ή $x \geq -\gamma$
5. $\frac{\alpha}{2} < x < \alpha$
6. $-\gamma < x < \alpha$

285
1. $x < -3$ ή $4 < x$
2. $-\frac{1}{3} < x < 1$
3. $x < \frac{1}{2}$ ή $\frac{1}{2} < x$ δηλαδή $x \neq \frac{1}{2}$
4. $x < 1$ ή $\frac{1}{3} < x$
5. $x < \frac{-1-\sqrt{17}}{8}$ ή $\frac{-1+\sqrt{17}}{8} < x$
6. Αδύνατη
7. $x = \frac{1}{2}$
8. κάθε $x \in \mathbb{R}$

286
1. $-1 < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 2$
2. Κάθε x είναι λύση.
3. $x < -\frac{4}{3}$ ή $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 0$ ή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x$

287 $-2 \leq y \leq 2$

288 $y \leq -8 - 2\sqrt{15}$ ή $-8 + 2\sqrt{15} \leq y$

289
1. $\lambda < \frac{3-\sqrt{57}}{8}$ ή $\frac{3+\sqrt{57}}{8} < \lambda$
2. $0 < \lambda \leq \frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{4} < \lambda$
4. $-2\sqrt{2} < \lambda < 2\sqrt{2}$

290
1. $x < 1$ ή $2 < x < 3$ ή $4 < x$
2. $x < -1$ ή $0 < x$
3. $-2 < x \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ή $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \leq x < 1$
4. $-3 < x < 0$ ή $\frac{1}{3} < x < 1$ ή $2 < x$
5. $x < -2$ ή $-1 < x < 1$ ή $2 < x$
6. $-\sqrt{3} < x < -\sqrt{2}$ ή $-1 < x < 1$ ή $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$
7. $0 < x < 1$
8. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ή $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} < x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ ή $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} < x < 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

291
1. 7
2. $\frac{1}{3}$
3. 2
4. $3^{2000} - 5$
5. $\frac{1}{4111} - \frac{1}{8111}$
6. $x^2 + 3$

292
1. 0
2. $\frac{7}{2}$
3. $\frac{15}{8}$
4. 2
5. 5
6. 6

293
1. $\alpha - \beta + 1$
2. $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$
3. $4(\alpha - \beta)$
4. α

295 $x - 1$

296 $-2x + 13$

297 $2x + 16$

299

$$|2-x| + |4+x| = \begin{cases} -2x-2 & \text{αν} \quad x < -4 \\ 6 & \text{αν} \quad -4 \le x < 2 \\ 2x+2 & \text{αν} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

300

$$(x-2)\,|x+2| - |x| = \begin{cases} -x^2+x+4 & \text{αν} \quad x < -2 \\ x^2+x-4 & \text{αν} \quad -2 \le x < 0 \\ x^2-x-4 & \text{αν} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

301
1. $x = 3, x = -3$
2. $x = 3,\ x = -\frac{7}{3}$
3. $x = \frac{11}{5},\ x = -\frac{11}{5}$
4. Αδύνατη
5. $x = \frac{1}{3},\ x = -\frac{1}{3},\ x = 2,\ x = -2$
6. $x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17},\ x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}$
7. $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5},\ x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},\ = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5},$
$x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

302 $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

303 $x = 1$

304
1. $x = \frac{11}{3},\ x = -1$
2. $x = -\frac{1}{2}$
3. $x = -1 - \sqrt{5},\ x = \sqrt{5} - 1$
4. $x = 4 - \sqrt{15},\ x = 4 + \sqrt{15},\ x = 4 - \sqrt{17}$
5. $x = -1$ και κάθε $x \ge 0$
6. $x = 1, x = 2,$
7. $x = \frac{4}{3}$

305
1. $1 < x < 5$
2. $-5 < x < -1$
3. $4 \le x \le 12$
4. $x < -9$ ή $-5 < x$

306

1. $-7 < x < 7$
2. $-12 \leq x \leq 12$
3. $x < -11$ ή $x > 11$
4. $x \leq -3$ ή $x \geq 3$
5. $|x| < \frac{1}{2}$
6. $|x| > 8$

307

1. $-14 < x < 8$
2. $1 < x$ ή $x < -\frac{3}{5}$
3. $0 < x < \frac{2}{5}$
4. $-\frac{5}{2} < x$

308

1. $x < -\frac{4}{3}$ ή $\frac{10}{3} < x$
2. $x < 1$ ή $3 < x$
3. $x < \frac{1}{2}$
4. $\frac{5}{3} < x < 2$
5. κάθε x είναι λύση
6. $-1 - \sqrt{2} < x < 1 - \sqrt{2}$ ή $\sqrt{2} - 1 < x$

309

1. 8
2. 16
3. 8
4. 8
5. 5
6. $\frac{287}{4}$

312 Όχι. Μεταξύ άλλων «χαλάει» αν επιλέξουμε να είναι $|\beta| > |\alpha|$.

314 (α') $x = \frac{\alpha}{2} - 3$

318 (α') $x = 2$ ή $x = -6$ (β') $x = \pm\alpha^2 - \alpha$

319 Για τα μη αρνητικά.

323

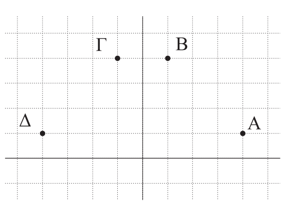
1. $|x| + |x+1|$
2. $x + |x-1|$
3. $\left|x^2 - 3x + 2\right| + x^2$
4. $|x| x^2$

325 6, 0, 3, 1, 1, 2

327 $x = 2$

328 $x = 3$ και $x = 11$

329 Είναι όλοι οι αριθμοί του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.



330

331 $x_1 \neq x_2$ ή $y_1 \neq y_2$

332
1. Ως προς $x'x$: $A_1(-2,-4)$, ως προς $y'y$: $A_2(2,4)$.
2. $A_3(2,-4)$
3. Ως προς την 1η διχοτόμο: $A_4(4,-2)$, ως προς την 1η διχοτόμο: $A_5(-4,2)$.

333 $x = 2 + 2\sqrt{3}$, $x = 2 - 2\sqrt{3}$

334 $B\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ ή $B\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

335 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

336 $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 34$

337 $x + 3y - 10 = 0$

338 $x - y - 2 = 0$

339 $M\left(\frac{7}{5}, \frac{3}{5}\right)$

341
1. 11
2. -1
3. $\frac{11}{4}$
4. $3 + 3\sqrt{2}$
5. $x^2 + 7x + 11$
6. $x^2 - x - 1$

342
1. 3
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{x+5}{x+3}$
4. $\frac{x-5}{x-3}$
5. $\frac{3x+1}{3x-1}$
6. $\frac{x+3}{x-3}$

343 $\alpha = 9$

345 Να δώσετε σύμφωνα με τις οδηγίες:
1. f(x)=**3x**
2. f(x)=**3x**
3. f(x)=**xx**
4. f(x)=**x ^ 3**
5. f(x)=**3x+4**
6. f(x)=**-3(x+4)**

346 Να δώσετε σύμφωνα με τις οδηγίες:
1. f(x)=**(x+2)/(x+3)**
2. f(x)=**xx+3x+3**
3. f(x)=**x^3-2x**
4. f(x)=**x/(1+1/x)**

347
1. $A(2,2)$
2. Δεν υπάρχει
3. Βρείτε σημεία της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη $B\left(\frac{3}{2}, 3\right)$
4. Δεν υπάρχει

348
1. $\lambda = \frac{2}{5}$
2. $\mu = -1$

349
1. $x < 0$ ή $1 < x$
2. Τα σημεία τομής με τον $x'x$ είναι τα $A(0,0)$ και $B(1,0)$. Το A είναι συγχρόνως και το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$.

350

1. $\mathbb{R} - \{-1\}$
2. $\mathbb{R} - \{-1, -2\}$
3. $\mathbb{R}$
4. $[1, +\infty)$
5. $x < -2$ ή $1 \le x$
6. $1 \le x \le 5$

351

1. $2^3 < 2^4$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 > \left(\frac{2}{3}\right)^9$
3. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{33} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{44}$
4. $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}\right)^4 > \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+1}\right)^7$
5. $(1+|x|)^{2012} > (1+|x|)^{2000}$
6. $1+\left(\frac{2}{3}\right)^{11} > 1+\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$

352

1. $0 < x^2 < x$
2. Πολλαπλασιάζοντας την ανισότητα $0 < x^2 < x$ με x βρίσκουμε $0 < x^3 < x^2$, πολλαπλασιάζοντας με x έχουμε $0 < x^4 < x^3$ κ.ο.κ. Τελικά:

$$0 < x^\nu < \ldots. < x^\mu < \ldots < x^2 < x < 1$$

353

1. $\sqrt[4]{1296} = 6$
2. $\sqrt[5]{a^{10}} = a^2$
3. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$
4. $\sqrt[r]{a^{rt}} = a^t$
5. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{36}}} = a^4$
6. $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{8}} = 2$

354 Αφού $\sqrt[4]{\alpha} = 3$ θα είναι $\alpha = 3^4 = 81$. Αφού $\sqrt[4]{\beta} = 5$ θα είναι $\beta = 5^4 = 625$. Επομένως $\alpha + \beta = 81 + 625 = 706$

361 $A = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{2}$, $B = 3\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{2}^3$, $\Gamma = 2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2}^2 + 2\sqrt[5]{2}^3$

363 $A = \alpha^2\beta^4\gamma^{11}$, $B = \alpha^4\beta^3\gamma^5$, $\Gamma = \alpha^2\beta^3\gamma^2$, $\Delta = \sqrt[3]{\alpha}^7\beta^9\gamma^6$

364

1. $2pd^2$
2. x^3y^7
3. $\sqrt[8]{x}$
4. $\sqrt[3]{\alpha}^2\,\sqrt[12]{\beta}$

365 $\sqrt{t^3}$

366

1. 396
2. $\frac{4}{11}$
3. -945
4. $\frac{4}{11}$

367 $\sqrt[12]{\alpha^4}$, $\sqrt[12]{\beta^3}$, $\sqrt[12]{\gamma^2}$

369

1. $\sqrt[3]{6} < \sqrt[3]{11}$
2. $\sqrt[5]{\frac{6}{11}} > \sqrt[5]{\frac{7}{13}}$
3. $\sqrt[13]{3} > 1$
4. $\sqrt[5]{8} > \sqrt[15]{8}$
5. $\sqrt[4]{\sqrt{2}-1} < \sqrt[14]{\sqrt{2}-1}$
6. $\sqrt[5]{\sqrt[11]{7}} < \sqrt[4]{\sqrt[13]{7}}$

371

1. $x = 2$
2. $x = -2$
3. $x = -\sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$
4. $x = -\frac{2}{3}$

372 1. 2 2. -2

373 1. 4 2. 4 3. 32 4. $\frac{1}{8}$ 5. $\frac{1}{16}$ 6. 9

374 1. $\alpha^{\frac{5}{6}}$ 2. 1 3. x 4. $\alpha^3\beta^6$ 5. $\frac{5}{2}\alpha\beta^2$ 6. 256

376 2

377

378 $\lambda = 6$

379 Τον $x'x$ στο $A\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ τον $y'y$ στο $B\,(0, 2)$.

380 $y = -\frac{7}{3}x + \frac{13}{3}$

382 $y = \sqrt{3}x + 2 - \sqrt{3}$

383 Τον $x'x$ στο $A\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ τον $y'y$ στο $B\,(0, 2)$.

384 $y = x + 1$ ή $y = -x - 3$

385 $t = \frac{1}{2}$

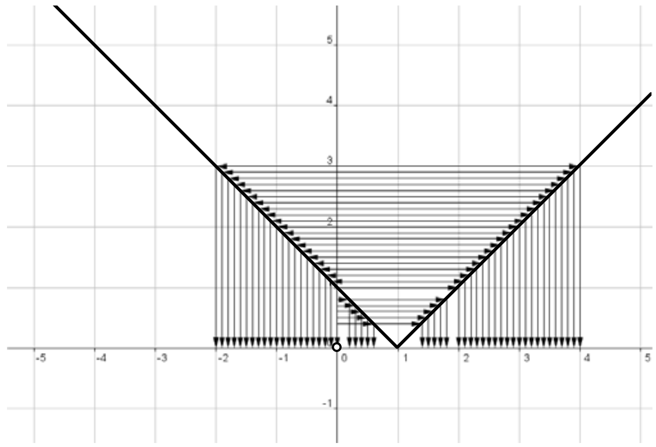
386 $t = -\frac{13}{6}$

387 $y = -3x$

388 $y = -\frac{1}{8}x + \frac{21}{4}$

390 1. $x = 3$ 2. $x = 0$ 3. $1 < x$ 4. $-1 < x < 3$

391 Σύνολο λύσεων της ανίσωσης είναι το $(-2, 4)$.



392 $f(x) = -x^2 + x + 2$

393 $\frac{3}{4}$

394 Πρέπει το $2m - 3$ να μην υπερβαίνει το ελάχιστο της $4x^2 - 8x + 5$ που είναι το 1. Άρα πρέπει $m \leq 2$.

397 $-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17 + 8\sqrt{2}} < x < -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17 + 8\sqrt{2}}$

398 2 για $x = 1$.

403 γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

404 23 για $x = 2$.

407
1. $\frac{9}{4}$
2. $\frac{9}{4}$

410 $\frac{9}{4}$ για $x = \frac{3}{2}$

411
1. 14
2. 17

412 Οι $4 - 3 = 1$, $44 - 33 = 11$, $0 - 0 = 0$, $33 - 33 = 0$.

413 Τα $33 : 11 = 3$, $0 : 33 = 0$, $84 : 12 = 7$, $(232 \cdot 233) : 233 = 232$.

414 15 και 21

415 7

416

$$234490 + 094432 = 328\,922$$

$$328922 + 229823 = 558745$$

$$558745 + 547855 = 1106600$$

$$1106600 + 0066011 = 1172611$$

$$1172611 + 1162711 = 2335322$$

$$2335322 + 2235332 = 4570654$$

$$4570654 + 4560754 = 9131408$$

$$9131408 + 8041319 = 17172727$$

$$17172727 + 72727171 = 89899898$$

417 233

418

1. 120 και 720.
2. 3.628.800 και 39.916.800.

420 Όλοι οι αυτοβιογραφικοί αριθμοί είναι 1210, 2020, 21200, 3211000, 42101000, 521001000, 6210001000.

421

1. 12
2. -14
3. 2
4. -4
5. 0
6. -17
7. 15
8. -1
9. -3
10. -17
11. 24
12. -38
13. 0
14. 60
15. -22

422

1. 35
2. 72
3. -72
4. -40
5. 0
6. -10

423 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm5, \pm10, \pm20, \pm25, \pm50, \pm100$

425 Είναι άρτιος όταν και οι δύο αριθμοί είναι άρτιοι και είναι περιττός σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

426 Σύνθετος.

427 Και στις δύο περιπτώσεις θα έχουμε σύνθετο αριθμό.

429 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$

432

1. $\frac{23}{24}$
2. $\frac{11}{30}$
3. $\frac{5}{21}$
4. $\frac{1}{6}$
5. $\frac{29}{35}$
6. $\frac{1}{15}$
7. $\frac{5}{6}$
8. $\frac{15}{56}$
9. $\frac{1}{2}$

10. $\frac{25}{2}$ 11. $\frac{9}{10}$ 12. $\frac{27}{8}$

433 1. $\frac{13}{12}$
2. $\frac{5}{12}$
3. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$
4. $\frac{y-x-3}{(x+1)(y-2)}$

434 1. $\heartsuit = 3$
2. $\heartsuit =$
3. $\heartsuit = 28$
4. $\heartsuit = 110$

435 1. 1
2. $-\frac{4}{31}$

436 1. 22
2. 19
3. 89
4. 564
5. 274
6. 10
7. 10
8. 6
9. 34
10. 39
11. 6
12. 5
13. 9
14. 5

437 1. $\frac{14}{15}$ 2. $\frac{\alpha y}{\beta x}$ 3. $\frac{\alpha y}{x}$ 4. $\frac{\alpha}{xy}$

438 60

439 −60

440 7

441 126

443 $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ και $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

444 Η αγορά με έκπτωση 30%.

445 $\frac{5}{6}$

446 $\alpha < \beta$

447 $\frac{x-5}{4} - \frac{x}{3}$, $-\frac{1}{12}x - \frac{5}{4}$

448 1. $\alpha^2 + 12\alpha + 35$
2. $m^2 + 3m - 108$
3. $k^2 + 3k - 28$
4. $6xa + 9xb - 8ya - 12yb$

449 1. $\frac{14}{3}$
2. -17

450

1. $-\frac{9009}{125} = -72,072$
2. 703
3. 1
4. -2

453 $-\frac{176}{9}$

454 23

455

1. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$
2. $8a^3 + 10a^2 - 7a - 6$
3. $2a^5b^2 - a^6 + b^6 - a^4b^4$
4. $15m^4 - 32m^3 + 50m^2 - 32m + 15$

456

1. $42c^7$
2. $45y^7$
3. a^2b^3
4. $14x^2y^3z^5$

457

1. $2x$
2. $2a^4$
3. $-2c$
4. y^3z^3

458 $2x + 1$

459

1. 5
2. $\frac{1}{7}$

460

1. $-5n + p$
2. -4β
3. $4x$
4. $-a^2 + 8b^2 - 9c^2$

461 $\frac{27}{22}$

462 $6xy + 3x^2$

463 $3\left(\alpha^2 + \beta^2\right) - 7\alpha\beta\gamma$

464 $\alpha - \beta + \gamma$

465 $y = -\frac{5}{2}$.

466

1. 1
2. $\frac{2\alpha}{\alpha-\beta}$
3. $x - a$

467 $-3m - \frac{1}{2}n$

468 1. $-2a^2 + a^4 - 35 + \frac{24}{a^2} - \frac{4}{a^4}$

2. $3x^{2a}y^{-a+1} - 3y^{-a-1} - y^{a+1} + x^{-2a}y^{a-1}$

469 1. 0

2. 0

3. 0

4. 1

470 1. 11

2. 576

3. $\frac{27}{512}$

471 1. 4

2. 6

3. 4

472 1. 8

2. 12

473

$$-7, \quad -\frac{3}{2}, \quad -\sqrt{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{6}, \quad \sqrt{3}, \quad 4, \quad 20$$

474 $\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0$

475 92

476 9

477 Η πρώτη και η τέταρτη.

478 Όλες εκτός της δεύτερης.

479 Η πρώτη και η τρίτη.

480 Δεν μπορούμε να διαγράψουμε ο 0.

481 Η τελευταία.

482 Όλες εκτός της δεύτερης.

483 Η δεύτερη και η τρίτη.

484 Η πόρτα του οδηγού είναι από την άλλη πλευρά άρα κινείται προς τα αριστερά.

486 Το 5.

487 $-8, -2, 1, 4$

488 Η τελευταία. Έπρεπε να γράφει $\left(\{\alpha, \diamondsuit, \heartsuit, \blacklozenge\} \cap \{\heartsuit, \eta, \spadesuit\}\right) \cup \{\blacksquare\} = \{\blacksquare, \heartsuit\}$

489

1. $\{b, a, c\}$
2. $\{b, c\}$
3. $\{a\}$
4. $\varnothing$
5. $\{a, e\}$
6. $\{c, d, e\}$
7. $\{a\}$
8. $\{\gamma, \varepsilon, \vartheta\}$

490 1. $A - B$ 2. $B - A$ 3. $A \cap B$

491 1. $(A - B) - \Gamma = (A - \Gamma) - B$

2. $(B - A) - \Gamma = (B - \Gamma) - A$
3. $(\Gamma - A) - B = (\Gamma - B) - A$
4. $(A \cap B) - \Gamma$
5. $(A \cap \Gamma) - B$
6. $(B \cap \Gamma) - A$
7. $A \cap B \cap \Gamma$

492 1. $\{\alpha, \beta\}$

2. (α, β)
3. $\{\alpha\}$
4. $\{\beta\}$
5. $\varnothing$
6. (α, β)
7. (α, β)
8. $\{\alpha, \beta\}$
9. $\varnothing$
10. $\{\beta\}$

493 1. $\{\alpha\} \cup [\beta, +\infty)$

2. (α, β)
3. $[\alpha, \beta]$
4. $(-\infty, \alpha) \cup [\beta, +\infty)$

495

$$
\begin{array}{l}
\{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,b,f\},\\
\{a,c,d\}, \{a,c,e\}, \{a,c,f\},\\
\{a,d,e\}, \{a,d,f\},\\
\{a,e,f\},\\
\{b,c,d\}, \{b,c,e\}, \{b,c,f\},\\
\{b,d,e\}, \{b,d,f\},\\
\{b,e,f\},\\
\{c,d,e\}, \{c,d,f\},\\
\{c,e,f\},\\
\{d,e,f\}
\end{array}
$$

496 1. Είναι 24. Ας συμβολίσουμε για λόγους ευκολίας τα παιδιά με a, b, c, d. Τότε όλοι οι τρόποι είναι:

$$
\begin{array}{l}
[\mathrm{a,b,c,d}], [\mathrm{a,b,d,c}], [\mathrm{a,c,b,d}], [\mathrm{a,c,d,b}], [\mathrm{a,d,b,c}], [\mathrm{a,d,c,b}],\\
[\mathrm{b,a,c,d}], [\mathrm{b,a,d,c}], [\mathrm{b,c,a,d}], [\mathrm{b,c,d,a}], [\mathrm{b,d,a,c}], [\mathrm{b,d,c,a}],\\
[\mathrm{c,a,b,d}], [\mathrm{c,a,d,b}], [\mathrm{c,b,a,d}], [\mathrm{c,b,d,a}], [\mathrm{c,d,a,b}], [\mathrm{c,d,b,a}],\\
[\mathrm{d,a,b,c}], [\mathrm{d,a,c,b}], [\mathrm{d,b,a,c}], [\mathrm{d,b,c,a}], [\mathrm{d,c,a,b}], [\mathrm{d,c,b,a}]
\end{array}
$$

2. 120

497 1. 50

2. 33
3. 16
4. Αν ονομάσουμε Δ το σύνολο των αριθμών του Ω που είναι άρτιοι αριθμοί ή πολλαπλάσια του 3 τότε $\Gamma = A \cap B$, $\Delta = A \cup B$ και επομένως $N(\Delta) = N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B) = 50 + 33 - 16 = 67$

498 Μπορούν να δημιουργηθούν 586.051.200 διαφορετικές ουρές.

499 495

500

	ν						
	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2		1	3	6	10	15	21
3			1	4	10	20	35
4				1	5	15	35
5					1	6	21
6						1	7
7							1

502 1. $17^3 = 4913$

503 $25^7 = 6.103.515.625$

504

505 1. $\{\alpha,\beta\},\{\beta,\gamma\},\{\beta,\delta\},\{\alpha,\beta,\gamma\},\{\alpha,\beta,\delta\},\{\beta,\gamma,\delta\},\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

2. $\{\alpha,\gamma,\delta\},\{\beta,\gamma,\delta\},\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

3. $\{\beta\},\{\delta\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\delta\},\{\beta,\gamma\},\{\beta,\delta\},\{\gamma,\delta\},\{\alpha,\beta,\delta\},\{\beta,\gamma,\delta\}$.

506 Η πιθανότητες είναι αντιστοίχως $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ και $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Πιθανότερο λοιπόν είναι να έλθει άθροισμα 4.

507 $\frac{12}{365}$

508 Ο δειγματικός χώρος του πειράματος απαρτίζεται από ζεύγη ενδείξεων 1η ρίψη - 2η ρίψη:

Βλέπουμε ότι υπάρχουν τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις στις οποίες σε κάποια ρίψη (ή και στις δύο) εμφανίζεται η γλαύκα. Άρα η πιθανότητα είναι $\frac{3}{4}$.

509 $\frac{1}{90} = 1,1\%$

510 $\frac{1}{24.435.180}$

511 1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{12}$

512 $\frac{5}{7}$

513 $\frac{5}{18}$

514 $\frac{1}{32}$ δηλαδή περίπου 3%.

515 $\frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$

516
1. Να φέρει 9 φορές συνεχόμενες 6
2. Να κερδίσει κανείς στο Τζόκερ.

517 $\frac{15.876}{46.189} = 0,34$

518
1. $2\alpha^2\beta\left(3\beta^2 - \beta + 2\alpha\right)$
2. $(\alpha - \beta)(x + y - \omega)$
3. $(3\alpha - 2\omega - 1)(x - y)$
4. $(y - 3)(7x + 13)$

519
1. $\alpha(\beta + \gamma - \delta)$
2. $(\alpha + \beta)(t + u)$
3. $(\beta + \gamma)(\alpha + \beta)$
4. $\left(x^2 + 1\right)(\alpha + \beta)$
5. $\left(x^2 + \alpha\right)(x - \beta)$
6. $(y + z + \beta)(x + \alpha)$

520
1. $\left(x + y^3\right)\left(x - y^2\right)$
2. $\left(3y + 2x^2\right)\left(x^3 + 4y^2\right)$
3. $\left(3y + 2x^2\right)\left(x^3 + 4y^2\right)$
4. $\frac{1}{3}(-6\alpha + x)\left(-5\alpha^2 + x^2\right)$
5. $(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - 2\right)$
6. $\left(x^2 + x + 1\right)(2y + 3)$

521
1. $(\chi + \psi)(\alpha + \beta)$
2. $\left(x^2 - y\right)\left(y^2 + x\right)$
3. $\left(x^3 + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right)$
4. $(5ab - 2)\left(2b^2 + ab + a^2\right)$

522
1. $\frac{1}{\alpha - \beta}$
2. $\frac{\alpha + \beta}{\alpha}$
3. $\alpha + \beta$
4. $\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta}$
5. $\frac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta}$
6. $\frac{\alpha\left(3\alpha^2 + 4\right)}{2\beta^2}$

526 Όχι.

527 Όχι.

528 Όχι.

532 Το β' μέλος έχει συνολικά ν^2 προσθετέους οπότε η παρένθεση έχει $\nu^2 - \nu$ δια δύο δηλαδή $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ προσθετέους.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
	1	3	6	10	15	21
		1	4	10	20	35
			1	5	15	35
				1	6	21
					1	7
						1

534

Σε κάθε τρία τετραγωνάκια σχήματος L:

x	
y	z

ισχύει $x + y = z$

541 $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot(10-1)}{2} = 45$

542 Μια λύση είναι με υπολογισμό του $(1+1)^{\nu}$. Μία άλλη μπορείτε να κάνετε με την βοήθεια της (5.9)

545 για το πρώτο ερώτημα: $\binom{\nu}{1} = \nu$, $\binom{\nu}{2} = \frac{(\nu-1)\nu}{2}, \ldots, \binom{\nu}{\nu} = 1$

555
1. -5
2. $\frac{3}{2}$
3. $-\frac{3}{5}$
4. $\frac{2p-3q}{2p+3q}$

559

561 $\omega = \frac{5}{2}$, $\nu = 11$, $\alpha_\nu = 177$, $\alpha_1 = 5$.

562 $\alpha_\nu = 1024$, $\alpha_\nu = \frac{1}{192}$, $\alpha_1 = 14$, $\alpha_1 = 14$.

563
1. $\frac{2059}{1458}$
2. $\frac{1281}{512}$
3. $\frac{765}{4}$
4. -682

564
1. 153
2. 0
3. $\frac{555}{2}$
4. 30

565 $\frac{(\alpha_\kappa+\alpha_\lambda)(\lambda-\kappa+1)}{2}$

566
1. 11, 14, 17, 77
2. $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 3 = \omega$
3. 15 950
4. $\alpha_{23} + \ldots + \alpha_{123} = 22\,927$
5. Ο α_{2012}.

567 156 φορές

568 $\alpha_1 = \frac{104}{3}$, $\omega = -\frac{7}{18}$

569
1. 328
2. 332
3. 47
4. 26

570
1. $\alpha_5 = \frac{1}{2}$
2. $\alpha_\nu = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}$
3. Θετικοί είναι εκείνοι που έχουν, στην πρόοδο, περιττή τάξη δηλαδή οι $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots$. Αρνητικοί εκείνοι που έχουν περιττή τάξη: $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots$.
4. $\left(\frac{\alpha_{2010}}{\alpha_{2014}}\right)^3 + \left(\frac{\alpha_{1000}}{\alpha_{1003}}\right)^3 = 3584$

576 $S_{p+q} = -(p+q)$

578 $\frac{\alpha^{4\nu+2}-(2\nu+1)\alpha^{2\nu+2}+(2\nu+1)\alpha^{2\nu}-1}{\alpha^{2\nu}(\alpha^2-1)}$

583 Για το δεύτερο ερώτημα. Οι αριθμοί αναφέρονται στα βελάκια

1. όπου x το $\alpha - \beta$
2. όπου α, β τα $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$
3. διαιρούμε με $\alpha\beta$
4. διαιρούμε με 2
5. διαιρούμε με 4 και μετά παίρνουμε ρίζες
6. όπου α, β τα $\gamma, 1$
7. όπου α, β τα $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
8. διαιρούμε με 4 και μετά παίρνουμε ρίζες

593 3) Ισχύει σαν ισότητα.

597 1) Ο αριθμητικός μέσος των $1, 2, 3, \ldots, \nu - 1, \nu$ είναι $\frac{1+2+3+\ldots+(\nu-1)+\nu}{\nu} = \frac{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}{\nu} = \frac{\nu+1}{2}$

598 Η ισότητα ισχύει όταν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι

599 $x = -3 - \frac{\alpha}{2}$ και για να έχει λύση το 3 πρέπει $\alpha = -12$.

600 $x = -2$

601 Όχι. Είναι, τελικά της μορφής $\alpha x + \beta = 0$ με $\alpha = \sqrt{2} + 1 \neq 0$.

602

1. $\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta) = -(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$
2. $x = \alpha\beta\gamma$

603 $x = 3$

604

1. $t = \frac{\bar{\alpha} t_0 + \upsilon - \upsilon_0}{\bar{\alpha}}$
2. $t = \frac{1}{2\alpha}\left(-2\upsilon_0 \pm 2\sqrt{\upsilon_0^2 + 2\alpha x}\right)$
3. $F_2 = -F_1 \sigma\upsilon\nu\varphi \pm \sqrt{\left(F_1^2(\sigma\upsilon\nu\varphi)^2 - F_1^2 + \Sigma^2\right)}$
4. $h = -\frac{BR \pm \sqrt{BGMm}}{B}$
5. $r = \frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{T^2 \pi GM}$
6. $T_1 = P_1 T_2 \frac{V_1}{P_2 V_2}$
7. $x_1 = d \pm \frac{d}{|q_1|}\sqrt{|q_1||q_2|}$
8. $r_2 = kQ\frac{r_1}{kQ - Vr_1}$
9. $R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1R_2 - RR_2 - RR_1}$

605 6 και 4

606 $x = 0$ ή $x = 37$

607 Αν $\alpha \neq 0, \frac{1}{5}b, 2b$ έχει λύσεις τους $x = -3b + \frac{1}{2}a$ και $x = -b - 5a$.

608 $x = -\frac{5}{3}$ ή $x = 3$.

609 $x = \alpha + \beta + \gamma$

610

611 Για $m \neq \pm 1$ έχει μία μόνο λύση $x = \frac{1}{m+1}$. Για $m = -1$ είναι αδύνατη και για $m = 1$ έχει κάθε πραγματικό ως λύση.

612 Για $\lambda \neq 1$ έχει μία μόνο λύση $x = \frac{\lambda+6}{3(\lambda-1)}$. Για $\lambda = 1$ είναι αδύνατη.

613 Για $\kappa \neq \lambda$ έχει μία μόνο λύση $x = -1$. Για $\kappa = \lambda$ έχει σύνολο λύσεων το $\mathbb{R}$.

614
1. $x = 0,\ x = -5$
2. $x = 0, x = \frac{15}{11}$
3. $x = 3,\ x = -3$
4. $x = -8,\ x = 10$
5. $x = 2,\ x = 7$
6. $x = -13,\ x = -12$
7. $x = \frac{7\pm\sqrt{29}}{10}$
8. Αδύνατη
9. Αδύνατη
10. $x = \frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{23}}{10}$
11. $x = 1,\ x = -\frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
12. $x = 1,\ x = -\frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
13. $x = 0,\ x = \pm 5\sqrt{2}$
14. $x = 1,\ x = \frac{3}{2}$
15. Αδύνατη
16. $x = -3,\ x = \frac{13}{11}$
17. $x = -\frac{15}{2},\ x = -\frac{13}{5}$

615 $t = \frac{3}{4},\ t = 1$

616
1. $x = -2a + 1,\ x = 2a - 1$
2. Αν ένα τουλάχιστον από τα a, b είναι διάφορο του μηδέν λύσεις είναι οι $x = \pm 1$. Αν και τα δύο είναι μηδέν λύση είναι κάθε πραγματικός αριθμός.
3. $x = 0,\ x = \frac{b^3-a}{b}$
4. Εννοείται ότι $a \neq b$. Αν είναι και $a \neq -b$ τότε λύσεις είναι οι $x = \pm(a-b)$. Αν όμως είναι $a \neq -b$ τότε κάθε πραγματικός αριθμός είναι λύση.

617

1. 2
2. 2
3. 1
4. 2
5. 0
6. 0

618 $m = 0$ και $m = -12$

619 $m = -1, \quad m = -5$

620 Είναι αδύνατες και οι δύο.

622

1. Αν $\alpha = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $\alpha \neq 0$ τότε έχει λύσεις $x = -2\alpha$ και $x = -\frac{5}{3}\alpha$.
2. Αν $\alpha = 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη. Αν $\alpha \neq 0$ τότε έχει λύσεις $x = \frac{1}{3}\alpha$ και $x = \frac{2}{3}\alpha$.

623 Το άθροισμα των ριζών είναι 3 και αφού η μία είναι 5 η άλλη είναι -2.

624

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 - 3x - 54 = 0$
3. $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$
4. $x^2 - 4x + 1 = 0$
5. $x^2 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x + 2 + \sqrt{3} = 0$
6. $x^2 - \left(\mu + \mu^2\right)x + \mu^3 = 0$

625 Το άθροισμα των ριζών είναι -8. Οι ρίζες είναι ρ και 3ρ άρα $4\rho = -8$ και βρίσκουμε ότι οι ρίζες είναι -2 και -6.

626

1. 1 και 9
2. $5 + \sqrt{15}$ και $5 - \sqrt{15}$
3. 2 και 8
4. Δεν υπάρχουν.

627 $a = 20 \pm 6\sqrt{5}$

628 $t = \pm 7$

629 $6, \quad -\frac{3}{2}$

630

1. $\frac{\beta^2 - 4\gamma\alpha}{\alpha^2}$
2. $\frac{\beta\left(3\gamma\alpha - \beta^2\right)}{\alpha^3}$

631 $x = -\frac{41}{2}$ και $x = 10$

632

633

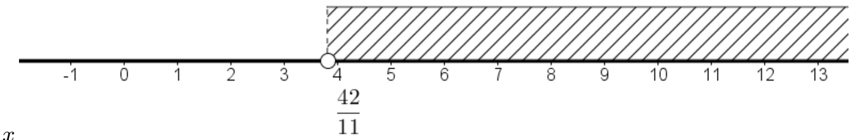
634 $\frac{1}{4} < m$

635 $12 < k < 14$

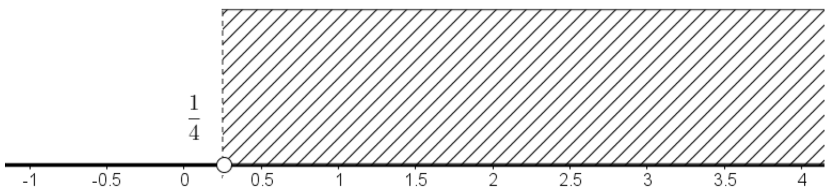
636 $1 + y\,(1 + x)^2\,(1 + xy) = (xy + y + 1)\left(x^2y + xy + 1\right)$

637 $p = 0,\ q = 0$ ή $p = 1,\ q = -2$ ή $p = -\frac{1}{2},\ q = -\frac{1}{2}$.

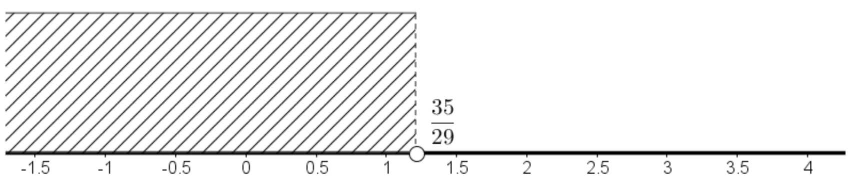
638 $p^3 - 3qp - q^2 - q = 0$



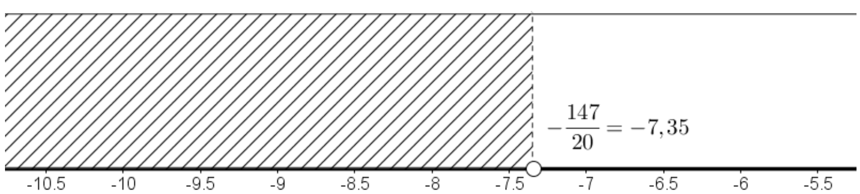
639 1. $\frac{42}{11} < x$



2. $\frac{1}{4} < x$



3. $x < \frac{35}{29}$

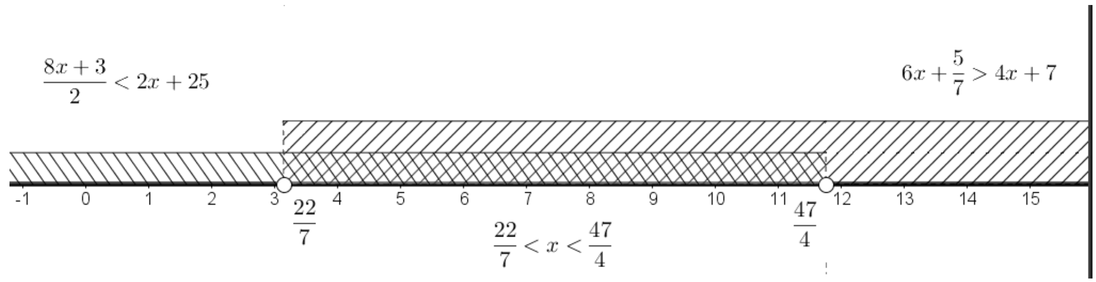


4. $-\frac{147}{20} < x$

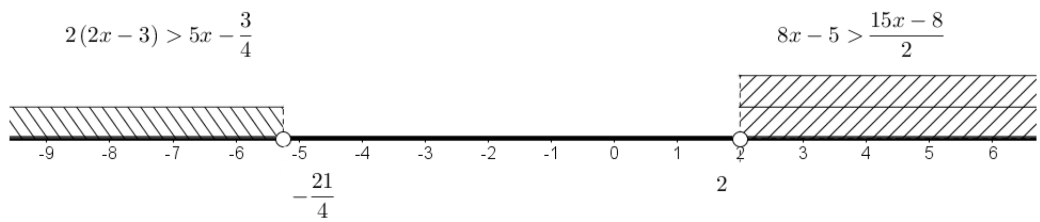
640 1. Αν $a = 1$ σύνολο λύσεων είναι το $\mathbb{R}$. Αν $a > 1$ τότε το σύνολο λύσεων είναι το $\left(-\infty, \frac{2a+1}{1-a}\right)$. Αν $a < 1$ σύνολο λύσεων είναι το $\left(\frac{2a+1}{1-a}, +\infty\right)$.

2. Αν $\mu^2 = \nu^2$ η ανίσωση είναι αδύνατη. Αν $\mu^2 > \nu^2$ τότε λύσεις είναι τα $x > \frac{\mu^2+\nu^2}{4}$ ενώ αν $\mu^2 < \nu^2$ λύσεις είναι τα $x < \frac{\mu^2+\nu^2}{4}$.

641 1. $\frac{22}{7} < x$ και $x < \frac{47}{4}$ συναληθεύουν στα $\frac{22}{7} < x < \frac{47}{4}$



2. $2 < x$ και $x < -\frac{21}{4}$, δεν συναληθεύουν



642 $5 < x < \frac{11}{2}$

643 1. $P \le \frac{S^2}{4}$

2. Αν το P είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός η εξίσωση έχει λύση για όλα τα S. Αν το P είναι θετικό η εξίσωση έχει λύση για $S < -2\sqrt{P}$ ή $2\sqrt{P} < S$.

Για τα άλλα ερωτήματα: Και στις δύο περιπτώσεις οι αριθμοί πρέπει να επιλεγούν ώστε να είναι ίσοι. Στην πρώτη περίπτωση ίσοι με το μισό του σταθερού αθροίσματος και στην δεύτερη ίσοι με την τετραγωνική ρίζα του σταθερού γινομένου.

644 Είναι $\gamma < 0$.

645 $a < -6$

646 1. $x = -5$, $x = 6$

2. $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$

3. $x < \frac{1}{3}$ ή $\frac{4}{3} < x$

647 $x = -2$

648 Οι 2 και 8

649 $\lambda = 5$, $\lambda = -3$

650 $-3, -1, 1, 3$ Στην γενική περίπτωση η παράσταση μπορεί να πάρει τις τιμές $\pm(\nu - 2\mu)$, $\quad 0 \le \mu \le \frac{\nu}{2}$.

651 Για τα $x \geq 0$.

653 $\frac{13|x|+12x^2}{13+12|x|} = |x|$

654 $A = (x-1) - (2-x) = 2x - 3$

655 $A = |t-3| - |t-5| = (t-3) - (5-t) = 2t - 8$

656 $\left|\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{8}{9}\right| + \left|\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{7}{10}\right| = \frac{17}{90}$

657 1. $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

2. $\alpha \leq x \leq \beta$

3. $x = 2\beta - \alpha$, $x = \frac{\alpha+2\beta}{3}$

4. $\beta \leq x$

659 Στη θέση του ερωτηματικού πρέπει να μπει το 1.

662 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5

663 6300

665 $\frac{\sqrt{\beta^2-4\gamma\alpha}}{|\alpha|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}$

666 Οι λύσεις για $\alpha = 3$ είναι $1 < x < 2$ και $-2 < x < -1$.

667

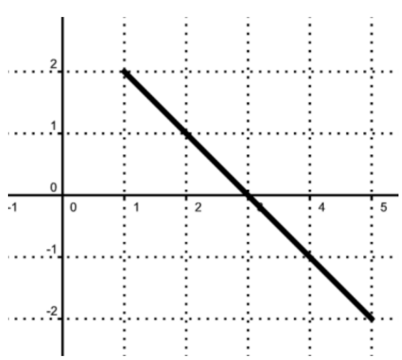
$$A = \begin{cases} -4x + (\alpha+\beta+\gamma+\delta) & \text{αν} \quad x < \alpha \\ -2x + (-\alpha+\beta+\gamma+\delta) & \text{αν} \quad \alpha \leq x < \beta \\ -\alpha-\beta+\gamma+\delta & \text{αν} \quad \beta \leq x < \gamma \\ 2x + (-\alpha-\beta-\gamma+\delta) & \text{αν} \quad \gamma \leq x < \delta \\ 4x + (-\alpha-\beta-\gamma-\delta) & \text{αν} \quad \delta \leq x \end{cases}$$

669 $t = \pm 5$

671 1. $[-1, 2]$

2. $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$

3. $x = 0$ και $x = 1$

672 1. 

2. $x = 4 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$

673 1. $f(1) = f(-1) = 0$

2. Με τον $x'x$ τα $A(-1,0)$, $B(1,0)$. Με τον $y'y$ το $\Gamma(0,1)$.

3. Στα $(-1,1)$ και $(1,+\infty)$.

674 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

675 1. $f(\alpha+\beta) = f(4) = 5$

2. $f(\alpha) + f(\beta) = 2(\alpha+\beta) - 6 = 2$

3. $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{300}) = f(100) = 197$,
$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_\nu) = (2x_1 - 3) + (2x_2 - 3) + \ldots + (2x_\nu - 3) = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{300}) - 300 \cdot 3 = 2 \cdot 100 - 300 \cdot 3 = -700$

676 Λύνοντας τις δύο σχέσεις ως προς t βρίσκουμε $t = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x$ και $t = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$. Εξισώνουμε και έχουμε $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$. Αυτή η σχέση που συνδέει τα x, y γράφεται και $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ που μας πληροφορεί ότι το M ανήκει σε ευθεία με αυτή την εξίσωση.

677 1. $\frac{-1-\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

x	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	-2 ή $\frac{1}{3}$	Δεν υπάρχει
$f(x)$	-1	0	-1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	5

2.

681 $\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow x^{2007} = \frac{2007}{2008} \Leftrightarrow x = \sqrt[2007]{\frac{2007}{2008}}$ και αφού ο αριθμός $\frac{2007}{2008}$ ανήκει στο $(0,1)$ και η ρίζα $\sqrt[2007]{\frac{2007}{2008}}$ ανήκει στο $(0,1)$.

682 Η εξίσωση έχει μία μόνο λύση $x = \frac{2f(\beta)-3+f(\gamma)}{f(\beta)-2+f(\gamma)}$ που επιλαληθεύεται ότι ανήκει στο $(1,2)$. Άρα μπορούμε να πούμε «ακριβώς» που είναι προτιμότερο από το «τουλάχιστον» αφού μας πληροφορεί όχι μόνο για την ύπαρξη ριζών αλλά και για τον αριθμό τους.

684 1. 7

2. 3

3. 2

4. $\frac{1}{2}$

5. -2

6. $-\frac{1}{2}$

7. 100

8. 25

9. $\frac{1}{5}$

10. 5

11. 4

12. $\frac{3}{2}$

685

1. $4\alpha^2$
2. $2\beta^2$
3. $\frac{3\alpha^3}{5\beta^2}$
4. $\alpha^2\beta^4$
5. $2\gamma^{18}$
6. $\frac{3\alpha^{17}\beta}{\gamma^3}$

686

1. $\alpha^2\beta^2\sqrt[4]{\alpha\beta^3}$
2. $\alpha^3\beta\gamma^2\sqrt[31]{\alpha^8\beta^2}$
3. $\alpha\beta\gamma\sqrt[5]{\alpha\beta^2\gamma^3}$
4. $\alpha^{12}\beta^{14}\gamma^{16}\sqrt[5]{\gamma}$
5. $\alpha\beta\gamma^2$
6. $\alpha^4\beta^2$

687

1. $\alpha\gamma^2$
2. $\alpha\beta^2$
3. $-\alpha^2\beta$
4. $-\alpha^8\beta^2\gamma^4$

690 $\alpha^\nu\sqrt{\lambda^{\nu(\nu-1)}}$

691 $\frac{1}{3}$

692 84

693 4) $7^{\left(7^6\right)}$

694

1. $A = -1,\ B = 1$
2. $A = \frac{1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)},\ B = \frac{1}{\alpha(\rho_2-\rho_1)}$ και $\frac{1}{\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)} = \frac{\frac{1}{\alpha(\rho_1-\rho_2)}}{(x-\rho_1)} + \frac{\frac{1}{\alpha(\rho_2-\rho_1)}}{(x-\rho_2)}$
3. $\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$ οπότε $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{\nu}} - \frac{1}{\nu+1}\right) = 1 - \frac{1}{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1}$

699 $x_0\ \ y = 1$, ή $y_0\ \ x = 1$

706 84

710 8

711 $\beta \le -10$ ή $30 \le \beta$