

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”

ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΤΩΝ ΤΟΠΙΚΩΝ ΝΟΜΑΡΧΙΑΚΩΝ
ΕΠΙΤΡΟΠΩΝ, ΠΡΟΕΔΡΟΥΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΤΗΡΗΤΕΣ

1. Παρακαλούμε να διαβάσετε προσεκτικά τις οδηγίες στους μαθητές.
2. Οι επιτηρητές των αιθουσών θα διανείμουν πρώτα κόλλες αναφοράς, στις οποίες οι μαθητές θα πρέπει απαραίτητα να γράψουν **ΕΠΩΝΥΜΟ, ΟΝΟΜΑ, ΣΧΟΛΕΙΟ, ΤΑΞΗ, ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΤΟΙΚΙΑΣ και ΤΗΛΕΦΩΝΟ**, τα οποία θα ελεγχθούν σε αντιπαράβολή με την ταυτότητα που θα έχουν οι εξεταζόμενοι, πριν καλυφθούν και μετά θα γίνει η υπαγόρευση ή διανομή φωτοτυπιών των θεμάτων στους μαθητές.
3. Η εξέταση πρέπει να διαρκέσει ακριβώς τρεις (3) ώρες από τη στιγμή που θα γίνει η εκφώνηση των θεμάτων (9-12 περίπου). Δε θα επιτρέπεται σε κανένα μαθητή ν' αποχωρήσει πριν παρέλθει μία ώρα από την έναρξη της εξέτασης.
4. Οι επιτηρητές των αιθουσών έχουν το δικαίωμα ν' ακυρώσουν τη συμμετοχή μαθητών, αν αποδειχθεί ότι αυτοί έχουν χρησιμοποιήσει αθέμιτα μέσα, σημειώνοντας τούτο στις κόλλες των μαθητών. Η επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. έχει δικαίωμα να επανεξετάσει μαθητή αν έχει λόγους να υποπτευτείται ότι το γραπτό του είναι αποτέλεσμα χρήσης αθέμιτου μέσου.
5. Υπολογιστές οποιουδήποτε τύπου απαγορεύονται.
6. Αμέσως μετά το πέρας της εξέτασης, οι κόλλες των μαθητών πρέπει να σφραγιστούν εντός φακέλου ή φακέλων, που θα έχουν την υπογραφή του υπεύθυνου του εξεταστικού κέντρου και ν' αποσταλούν στην **Επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε., Πανεπιστημίου 34, 106 79 Αθήνα**, αφού πρώτα στα παραρτήματα, εφόσον είναι εφικτό, γίνει μία πρώτη βαθμολόγηση, σύμφωνα με το σχέδιο βαθμολόγησης της επιτροπής διαγωνισμών.
7. Τα αποτελέσματα του διαγωνισμού θα σταλούν στους Προέδρους των Τοπικών Νομαρχιακών Επιτροπών (ΤΝΕ) και τα Παραρτήματα της Ε.Μ.Ε. και δεν προβλέπεται Αναβαθμολόγηση (διότι γίνεται εσωτερικά).
8. Η Εθνική Ολυμπιάδα Μαθηματικών «**ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ**» θα γίνει στις **25 Φεβρουαρίου 2006** στην Αθήνα. Από τους διαγωνισμούς αυτούς και επί πλέον από ένα τελικό διαγωνισμό στην Ε.Μ.Ε. και μια προφορική εξέταση με προκαθορισμένη διαδικασία θα επιλεγεί η εθνική ομάδα, που θα συμμετάσχει στη **23^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (Κύπρος, Μάιος 2006)**, στην **10^η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (Μολδαβία, Ιούνιος 2006)** και στην **47η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Σλοβενία, Ιούλιος 2006)**.
9. Με την ευκαιρία αυτή, το Δ.Σ. της Ε.Μ.Ε. ευχαριστεί όλους τους συναδέλφους που συμβάλλουν στην επιτυχία των Πανελληνίων Μαθητικών Διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Παρακαλούνται οι Πρόεδροι των ΤΝΕ να επιδώσουν σε κάθε συνάδελφο επιτηρητή ένα αντίγραφο της συνημμένης ευχαριστήριας επιστολής, αφού πρώτα αναγράψουν το όνομά του.

ΓΙΑ ΤΟ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

Ο Πρόεδρος
Καθηγητής Θεόδωρος Εξαρχάκος

Ο Γενικός Γραμματέας
Ιωάννης Τυρλής

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

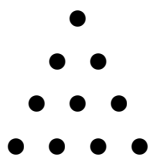
e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Οι αριθμοί α και β είναι ακέραιοι και ισχύει $\alpha + \beta = 1000$. Είναι δυνατόν να ισχύει $3\alpha + 5\beta = 3005$; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.
2. Σε ένα δοχείο υπάρχουν 6 λευκά, 9 κίτρινα, 12 κόκκινα και 15 πράσινα σφαιρίδια. Να προσδιορισθεί ο ελάχιστος αριθμός σφαιριδίων που πρέπει να πάρουμε τυχαία έτσι ώστε να εξασφαλισθεί η παρουσία στο δείγμα τουλάχιστον
Α) 3 λευκών
Β) 5 κίτρινων
Γ) 6 κόκκινων
Δ) 10 πράσινων σφαιριδίων
(τέσσερα διαφορετικά ερωτήματα).
3. Δέκα σημεία είναι τοποθετημένα σε σχήμα ισοπλεύρου τριγώνου όπως στο σχήμα



Να διαγραφεί ο ελάχιστος αριθμός σημείων έτσι ώστε τα υπόλοιπα να μη σχηματίζουν κανένα ισόπλευρο τρίγωνο.

4. Ποιος από τους αριθμούς

$$A = \frac{1}{99} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99} \right)$$

και

$$B = \frac{1}{100} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right)$$

είναι μεγαλύτερος και γιατί;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Να λυθεί η εξίσωση $x + 2x + 3x + \dots + 100x = 2^2 \cdot 5^3 \cdot 101$.
2. Ποιο από τα κλάσματα

$$K = \frac{33333333331}{33333333334}$$

και

$$\lambda = \frac{22222222221}{22222222223}$$

είναι μεγαλύτερο και γιατί;

3. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, όπου $A\Delta = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $AB = \alpha + \beta$ και η πλευρά AB είναι κάθετος προς τις πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$. Να υπολογισθεί η απόσταση της κορυφής A από το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ συναρτήσει των α και β .
4. Αν οι αριθμοί α , β , γ , δ και ϵ είναι διαφορετικοί και καθένας παίρνει μια από τις τιμές 1, 2, 3, 4 και 5, είναι δυνατόν να έχουμε τη σχέση

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \epsilon)(\epsilon + \alpha) = (\alpha + \gamma)(\gamma + \epsilon)(\epsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha);$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί α και $\alpha + 2$ είναι πρώτοι με $\alpha > 3$. Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\alpha + 4$ είναι σύνθετος.
2. Οι αριθμοί α και β είναι θετικοί και ισχύει $\alpha + \beta = \lambda$. Να δεχθεί ότι

$$\frac{4}{3\lambda} \leq \frac{1}{\alpha+\lambda} + \frac{1}{\beta+\lambda} < \frac{3}{2\lambda}.$$

3. Έστω $AB\Gamma$ ένα σκαληνό τρίγωνο. Πόσα σημεία Δ υπάρχουν στο επίπεδο του τριγώνου τέτοια ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία A, B, Γ, Δ να έχει άξονα συμμετρίας διαφορετικό από πλευρά του τριγώνου;
4. Έστω A και B δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους σύνολα των οποίων η ένωση είναι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Να αποδειχθεί ότι ένα τουλάχιστον από τα A και B περιέχει τουλάχιστον τη διαφορά δύο στοιχείων του.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

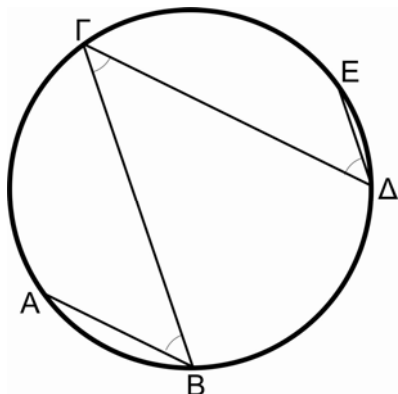
1. Υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε:
- A) Ο $3n$ είναι τέλειος κύβος, ο $4n$ τέλεια τέταρτη δύναμη και ο $5n$ τέλεια πέμπτη δύναμη;
- B) Ο $3n$ είναι τέλειος κύβος, ο $4n$ τέλεια τέταρτη δύναμη, ο $5n$ τέλεια πέμπτη δύναμη και ο $6n$ τέλεια έκτη δύναμη;

2. Να βρεθούν πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w για τους οποίους ισχύει

$$\sqrt{x-y} + \sqrt{y-z} + \sqrt{z-w} + \sqrt{x+w} = x+2.$$

3. Οι κορυφές A, B, Γ, Δ, E μιας τεθλασμένης γραμμής βρίσκονται πάνω σε ένα κύκλο όπως στο σχήμα και οι γωνίες $\mathbf{AB\Gamma}$, $\mathbf{B\Gamma\Delta}$, $\mathbf{\Gamma\Delta E}$ έχουν μέτρο 45° .
Να αποδειχτεί ότι

$$\mathbf{AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2}.$$



4. Μια πραγματική συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$ και για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύει
- $$f(x+1)f(x) + f(x+1) + 1 = f(x).$$

Να δεχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbf{R}$ ισχύουν:

1) $f(x) \neq -1$, 2) $f(x) \neq 0$, 3) $f(x+4) = f(x)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Για μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(f(x)) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθεί το $f(1)$.

B) Να εξετασθεί αν η συνάρτηση

$$g(x) = x^3 + x^2f(x) - 2xf^2(x) + 3$$

είναι 1-1.

2. Έστω α, β θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε

$$\frac{\alpha}{\beta} < \sqrt{5}.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$\sqrt{5} - \frac{\alpha}{\beta} > \frac{1}{4\alpha\beta}.$$

3. Έστω $AB\Gamma\Delta$ κυρτό τετράπλευρο τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$, $A\Delta$ μη παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει σημείο P διάφορο του O τέτοιο ώστε ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων PBD και $PA\Gamma$ να ισούται με το τετράγωνο του λόγου των πλευρών PB και PA αντίστοιχα.

4. Έστω $2n > k$ και έστω ότι οι ακέραιοι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του k . Να αποδειχθεί ότι για κάθε ακέραιο αριθμό λ υπάρχουν δείκτες i, j από το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$ τέτοιοι ώστε

$$k \mid a_i + a_j - \lambda.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 210 3616532 - 2103617784 - Fax: 210 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
66^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
ΣΑΒΒΑΤΟ, 21 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2006

ΛΥΣΕΙΣ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Αδύνατο (άρτια – περιττά).
2. **A)** $3 + 9 + 12 + 15 = 39$,
B) $5 + 6 + 12 + 15 = 38$,
Γ) $6 + 6 + 9 + 15 = 36$,
Δ) $10 + 6 + 9 + 12 = 37$.
3. Διαγραφή πρώτης σειράς (1 σφαιρίδιο), του μεσαίου της τρίτης σειράς και των δύο μεσαίων της τέταρτης σειράς.

4. Έστω

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{99}$$

Τότε

$$A = \Gamma/99,$$

$$B = \Gamma/100 + 1/10000$$

και

$$A - B = (\Gamma - 1)/9900 + 1/990000 > 0.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. $x = 10$
2. Έστω $\alpha = 33333333334$ και $\beta = 22222222223$. Τότε $\kappa = 1 - 3/\alpha$ και $\lambda = 1 - 2/\beta$
και $\kappa - \lambda = 2/\beta - 3/\alpha = (2\alpha - 3\beta)/\alpha\beta = -1/\alpha\beta$. Άρα $\kappa < \lambda$.
3. $(\alpha + \beta)/\sqrt{2}$.
4. Αν ήταν δυνατόν, τότε ο αριθμός
 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \delta)(\delta + \epsilon)(\epsilon + \alpha)(\alpha + \gamma)(\gamma + \epsilon)(\epsilon + \beta)(\beta + \delta)(\delta + \alpha)$ θα ήταν τέλειο
τετράγωνο.
Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4, \epsilon = 5$,
οπότε το γινόμενο αυτό παίρνει την τιμή $2^7 3^5 5^2 7^2$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ένας από τους αριθμούς α , $\alpha + 1$, $\alpha + 2$ διαιρείται με τον 3 και αυτός πρέπει να είναι ο $\alpha + 1$. Άρα ο αριθμός $\alpha + 4 = \alpha + 1 + 3$ διαιρείται με τον 3.

2. Έχουμε

$$\frac{1}{\alpha + \lambda} + \frac{1}{\beta + \lambda} = \frac{3\lambda}{\alpha\beta + 2\lambda^2}.$$

Η πρώτη ανισότητα είναι ισοδύναμη με

$$4\alpha\beta \leq (\alpha + \beta)^2,$$

και η δεύτερη με

$$3\alpha\beta > 0.$$

3. Το Δ πρέπει να είναι συμμετρικό κορυφής του τριγώνου ως προς τη μεσοκάθετο της απέναντι πλευράς. Άρα υπάρχουν 3 τέτοια σημεία.
4. Έστω ότι κανένα από τα δύο σύνολα δεν περιέχει τη διαφορά δύο στοιχείων του. Τότε προφανώς το 2 δεν μπορεί να ανήκει στο ίδιο σύνολο με το 1 ούτε με το 4 γιατί $2 - 1 = 1$ και $4 - 2 = 2$. Έστω λοιπόν $2 \in A$, οπότε $1 \in B$ και $4 \in B$. Επειδή $4 - 1 = 3$, έπεται ότι $3 \notin B$ και επομένως $3 \in A$. Επειδή $5 - 2 = 3$, έπεται ότι $5 \notin A$ και επειδή $5 - 1 = 4$, έπεται $5 \notin B$. Άτοπο επειδή $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. **A)** Ναι, π.χ. $v = 2^{30}3^{30}5^{24}$.

B) Όχι., διότι, αν υπήρχε, τότε $2|v$. Έστω a ο μεγαλύτερος εκθέτης τέτοιος ώστε $2^a|v$.

Τότε $4|a+2$ (λόγω του ότι ο $4v$ είναι τέλεια τετάρτη δύναμη) και $2|a+1$ (λόγω του ότι ο $6v$ είναι τέλεια έκτη δύναμη) και άρα $2|1$, δηλ. άτοπο.

2. Η σχέση είναι ισοδύναμη με

$$(\sqrt{x-y}-1)^2 + (\sqrt{y-z}-1)^2 + (\sqrt{z-w}-1)^2 + (\sqrt{x+w}-1)^2 = 0$$

και άρα $x = 2, y = 1, z = 0, w = -1$.

3. Προφανώς $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Gamma \parallel \Delta E$ και άρα $A\Gamma = B\Delta = E\Gamma$. Επίσης έχουμε $B\Gamma = A\Delta$, $\Delta\Gamma = BE$ και $\angle ABE = \angle A\Delta E = 90^\circ$. Άρα

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = AE^2 = A\Delta^2 + \Delta E^2 = B\Gamma^2 + \Delta E^2.$$

4. 1) Αν $f(a) = -1$, τότε $2 = 0$. 2) Αν $f(\beta) = 0$, τότε $f(\beta + 1) = -1$. Άτοπο λόγω 1).

3) Έχουμε $f(x+1) = (f(x)-1)/(f(x)+1)$, $f(x+2) = -1/f(x)$ και επομένως

$$f(x+4) = -1/f(x+2) = f(x).$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισχύει $f(f(1)) = 1$ και επομένως $f(1) = f(f(f(1))) = (f(1))^3 - 2(f(1))^2 + 3f(1) - 1$.

Λύνοντας ως προς $f(1)$ έχουμε $f(1) = 1$. Επίσης, $g(0) = g(1) = 3$.

2. Έχουμε

$$\sqrt{5} - \alpha / \beta = (\beta\sqrt{5} - \alpha) / \beta = (5\beta^2 - \alpha^2) / \beta(\beta\sqrt{5} + \alpha) \geq 1 / \beta(\beta\sqrt{5} + \alpha) > 1 / 4\alpha\beta$$

αν $3\alpha > \beta\sqrt{5}$. Αν $3\alpha < \beta\sqrt{5}$, τότε

$$\sqrt{5} - \alpha / \beta > \sqrt{5} - \sqrt{5} / 3 = 2\sqrt{5} / 3 > 1 > 1 / 4\alpha\beta.$$

3. Θεωρούμε τους περιγεγραμμένους K_1 και K_2 στα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΓ$ με διαφορετικά σημεία τομής $Ο$ και P λόγω του ότι η πλευρά $ΑΔ$ δεν είναι παράλληλη προς την πλευρά $ΒΓ$. Λόγω του ότι οι γωνίες $ΑΟΔ$ και $ΒΟΓ$ είναι ίσες ως κατά κορυφήν καθώς και οι πλευρές $ΑΔ$, $ΒΓ$ από την υπόθεση, οι κύκλοι K_1 και K_2 είναι ίσοι και τα τρίγωνα $PΒΔ$, $PΑΓ$ όμοια.
4. Οι αριθμοί $\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n$ αφήνουν διαφορετικά υπόλοιπα όταν διαιρεθούν δια του κ . Ο μέγιστος αριθμός αυτών των υπολοίπων είναι κ . Επειδή $2n > \kappa$, δύο από τους $2n$ αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n$ θα αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν δια του κ και δεν μπορούν να ανήκουν στο ίδιο σύνολο $\{\lambda - \alpha_1, \lambda - \alpha_2, \dots, \lambda - \alpha_n\}$ ή $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, δηλ. ο ένας θα είναι κάποιος α_i και ο άλλος κάποιος $\lambda - \alpha_j$. Η διαφορά τους διαιρείται με τον κ .