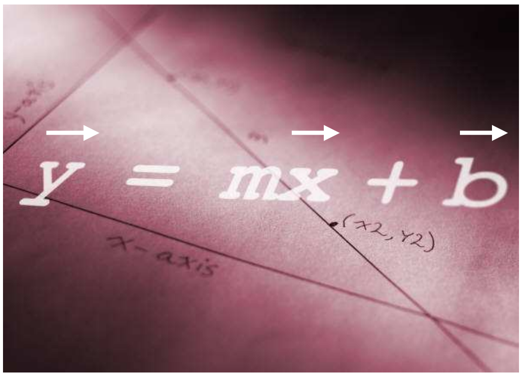
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

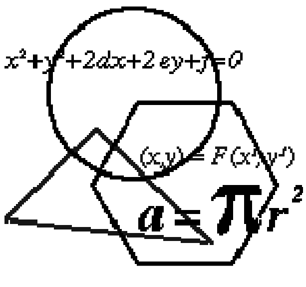
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β! Λυκείου

Εσωτερικό γινόμενο



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$



- *Θεωρία*
- *Μέθοδοι*
- *Ασκήσεις*

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης

Σε όσους βλέπουν

το μέλλον τους

σαν μια

διαρκή πρόκληση

για

διάκριση

καταξίωση

και

ποιοτική βελτίωση,

εύχομαι ολόψυχα:

δύναμη,
κουράγιο,
ηρεμία

και προπάντων

«όχι άγχος»!

Μια συμβουλή για το άγχος (και όχι μόνο)

«Μόνον όταν
πάψεις να ψάχνεις εναγωνίως,
θα μάθεις να βρίσκεις
όσα πραγματικά
έχουν αξία»!

Θωμάς Ραϊκόφτσαλης

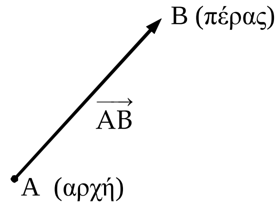
Μάθημα 1ον

• Διανυσματικά και μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη

Μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης, λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**. Τέτοια μεγέθη είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ.,
Μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε ακόμα τη διεύθυνση και τη φορά τους, λέγονται **διανυσματικά** μεγέθη ή απλώς **διανύσματα**. Τέτοια μεγέθη είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η μαγνητική επαγωγή κτλ.

• Το διάνυσμα στη Γεωμετρία

Γεωμετρικά ορίζουμε σαν **διάνυσμα** κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή **διάνυσμα** είναι το κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.



Το διάνυσμα με αρχή το Α και πέρας το Β συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το Α και καταλήγει στο Β.

Το διάνυσμα με αρχή το Β και πέρας το Α συμβολίζεται με $\overrightarrow{BA}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το Β και καταλήγει στο Α.
📖 **Πρόσεξε** ότι αν $A \neq B$ τότε $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ και αυτό διότι εκφράζουν διαφορετικές έννοιες.

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα, το οποίο μπορούμε να το συμβολίσουμε και με $\vec{0}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ τότε τα άκρα ταυτίζονται οπότε $A \equiv B$.

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος για παράδειγμα, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \ldots, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$

• Μέτρο διανύσματος

Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

Αν $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ τότε $|\overrightarrow{AB}| > 0$, ενώ $|\vec{0}| = 0$, οπότε είναι πάντα $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$.

Πρόσεξε ότι το μέτρο ενός διανύσματος είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός!

Πρόσεξε Μην ταυτίζεις ποτέ το διάνυσμα με το μέτρο του γιατί είναι δυο διαφορετικές μαθηματικές έννοιες!

Πρόσεξε ότι το μέτρο ενός διανύσματος εκφράζει και την απόσταση του σημείου Α από το σημείο Β.

Πρόσεξε ότι $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

- **Το μοναδιαίο διάνυσμα**

Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο 1, δηλαδή αν ισχύει ότι $|\overrightarrow{AB}| = 1$, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.

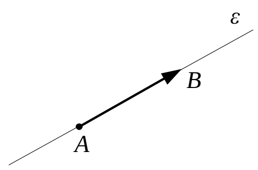
- **Η διεύθυνση και η φορά**

Αν έχουμε μια ευθεία ε, τότε το σύνολο όλων των ευθειών που είναι παράλληλες σ' αυτή λέμε ότι ορίζουν μια διεύθυνση. Η διεύθυνση αυτή είναι ορισμένη, αν δοθεί μια οποιαδήποτε από τις παράλληλες ευθείες η οποία λέγεται και αντιπρόσωπος της διεύθυνσης.

Σε καθεμία από τις ευθείες που έχουν την ίδια διεύθυνση διακρίνουμε δύο φορές. Η μια θεωρείται αυθαίρετα ως η θετική φορά οπότε, η άλλη θα θεωρείται ως η αρνητική.

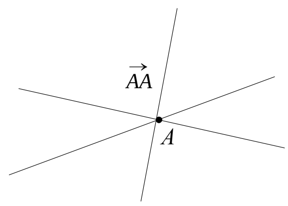
- **Διεύθυνση και φορέας διανύσματος**

Ως διεύθυνση ενός διανύσματος ορίζουμε τη διεύθυνση της ευθείας στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.



Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\overrightarrow{AB}$.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το Α.

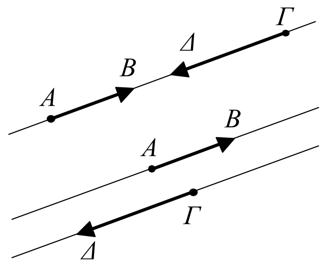


- **Διάνυσμα παράλληλο προς ευθεία**

Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ε, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ε και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // ε$.

- **Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα**

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

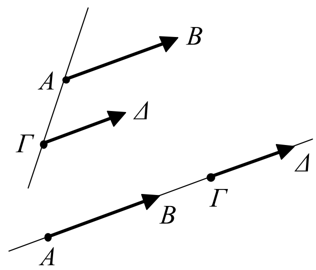


- **Διανύσματα ομόρροπα και αντίρροπα**

Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα:

— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:

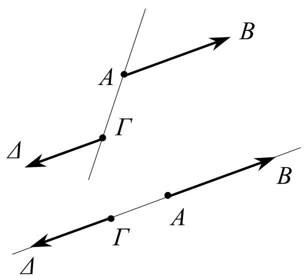
α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή



β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

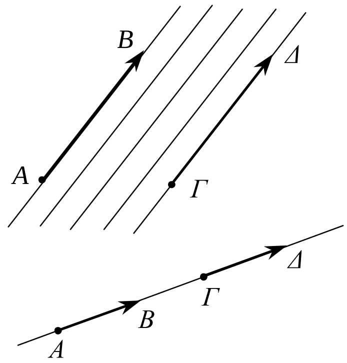
— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



🕮 **Πρόσεξε** ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι δυο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είτε ομόρροπα είτε αντίρροπα είναι να είναι συγγραμμικά! Αν δεν είναι συγγραμμικά τότε δεν έχει νόημα η σύγκριση ως προς τη φορά τους!

- **Ίσα διανύσματα**

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Πρόσεξε ότι τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους.

Πρόσεξε ότι από τον ορισμό της ισότητας διανυσμάτων γίνεται φανερό ότι ένα διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί με ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει ορισμένο μήκος, διεύθυνση και φορά αλλά όχι συγκεκριμένη θέση στο χώρο.

- **Ιδιότητες της ισότητας στα διανύσματα**

Για την ισότητα στο σύνολο των διανυσμάτων ισχύουν οι σχέσεις:

α. $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (ανακλαστική)

β. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (συμμετρική)

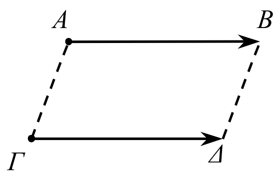
γ. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\mathrm{EZ}}$ τότε και $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{EZ}}$ (μεταβατική)

Σημείωση: Μια σχέση που είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική λέγεται σχέση ισοδυναμίας, οπότε η ισότητα στο σύνολο των διανυσμάτων (αλλά και γενικά) είναι σχέση ισοδυναμίας.

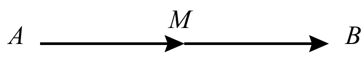
- **Προτάσεις**

Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma} = \overrightarrow{\mathrm{B}\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}} = \overrightarrow{\Gamma\mathrm{A}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



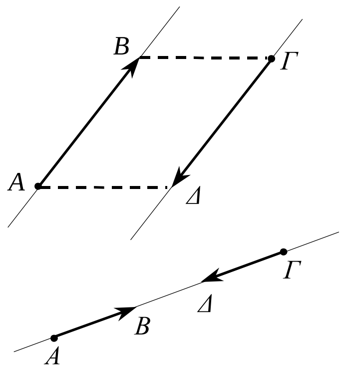
- Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, τότε $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}}$ και αντιστρόφως.



• Αντίθετα διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$.



Είναι φανερό ότι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

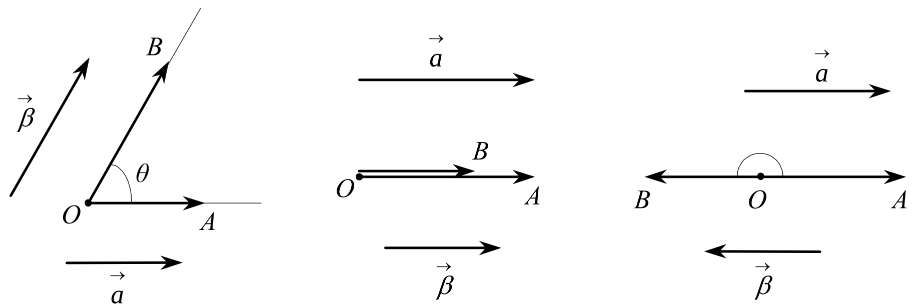
Ειδικότερα, έχουμε $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι η έκφραση δυο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα και αντίθετα είναι λάθος!

📖 **Πρόσεξε** ότι τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, δηλαδή $|\overrightarrow{AB}| = |-\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$ και ίδια διεύθυνση, δηλαδή είναι συγγραμμικά, οπότε $\overrightarrow{AB} // -\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BA}$.

• Γωνία δύο διανυσμάτων – διανύσματα ορθογώνια ή κάθετα

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

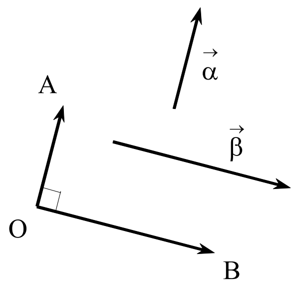


Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα $\hat{\theta}$.

Αποδεικνύεται ότι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο. Είναι φανερό επίσης ότι $0^0 \le \hat{\theta} \le 180^0$ ή σε ακτίνια $0 \le \hat{\theta} \le \pi$ και ειδικότερα:

- $\hat{\theta} = 0$, αν $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$.
- $\hat{\theta} = \pi$, αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$.

Αν $\hat{\theta} = \frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.



📖 **Πρόσεξε** ότι αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία $\hat{\theta}$ με $0 \le \hat{\theta} \le \pi$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

Έλεγχος γνώσεων

Α! Γενικές ερωτήσεις

1. Τι είναι μονόμετρο και τι διανυσματικό μέγεθος;
2. Τι καλείται διάνυσμα στη Γεωμετρία;
3. Ποιο διάνυσμα λέγεται μηδενικό;
4. Τι είναι μέτρο ενός διανύσματος;
5. Ποιο διάνυσμα καλείται μοναδιαίο;
6. Τι καλείται φορέας ενός διανύσματος;
7. Ποια διανύσματα καλούνται συγγραμμικά;
8. Ποια διανύσματα καλούνται ομόρροπα;
9. Ποια διανύσματα καλούνται αντίρροπα;
10. Πότε δύο διανύσματα καλούνται ίσα;
11. Πότε δύο διανύσματα καλούνται αντίθετα;
12. Πως ορίζεται η γωνία δύο διανυσμάτων;
13. Πότε δύο διανύσματα καλούνται κάθετα ή ορθογώνια;

Β! Ερωτήσεις κρίσεως

1. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι:
   α) μηδενικό; β) μοναδιαίο; γ) έχει μέτρο 1; δ) έχει μέτρο 0.
2. Το μηδενικό διάνυσμα:
   α) δεν έχει φορέα, β) έχει φορέα την οποιαδήποτε ευθεία, γ) έχει φορέα την οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο που καθορίζουν τα ταυτιζόμενα άκρα του.
3. Το μέτρο ενός διανύσματος είναι:
   α) αρνητικός αριθμός, β) θετικός αριθμός, γ) αριθμός μη αρνητικός, δ) οποιοσδήποτε αριθμός.
4. Αν $|\overrightarrow{AB}| = 1$ και $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 1$, τότε:

α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γ) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δ) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, μοναδιαία διανύσματα.

5. Αν $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:
   α) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γ) έχουν ίδια διεύθυνση, δ) έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.
6. Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε:
   α) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$, β) $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$, γ) $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$, δ) $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
7. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$=θ, τότε:
   α) $0^\circ\le\theta\le180^\circ$, β) $0^\circ\le\theta\le360^\circ$, γ) $-180^\circ\le\theta\le180^\circ$, δ) $0^\circ\le\theta\le90^\circ$.
8. Αν $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:
   α) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=360^\circ$, β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=90^\circ$, γ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=180^\circ$, δ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^\circ$.
9. Αν $\overrightarrow{AB}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:
   α) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=360^\circ$, β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=90^\circ$, γ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=180^\circ$, δ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0^\circ$.
10. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$=θ, τότε: α) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=-\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right)$, β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right)$.

Μέθοδοι και τεχνικές για την επίλυση των ασκήσεων

1. 🕮 Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα θα εργαζόμαστε ως εξής: Θα δείχνουμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα ή θα δείχνουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν το ίδιο μέσο, δηλαδή τα ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται.

2. 🕮 **Πρόσεξε** ότι τα μοναδιαία διανύσματα δεν είναι ίσα, αλλά απλώς έχουν όλα μέτρο ίσο με 1.

3. 🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}$ τότε $B\equiv\Gamma$ και αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma B}$ τότε $A\equiv\Gamma$.

4. 🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ τότε το Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, εφόσον $A\neq B$.

5. 🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $|\overrightarrow{AM}|=|\overrightarrow{MB}|$ και τα σημεία Α, Β, Μ δεν είναι συνευθειακά, τότε το Μ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

6. 🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $|\overrightarrow{OM}|=\rho$, $\rho>0$, όπου Ο ένα σταθερό σημείο και Μ ένα μεταβλητό σημείο, τότε το σημείο Μ βρίσκεται πάνω σε έναν κύκλο που έχει κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ίση με ρ.

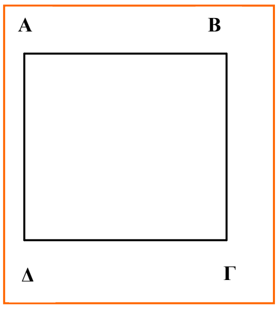
Θέματα προς εμπέδωση

1. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος) στις παρακάτω ισότητες.

i. $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} = \overrightarrow{\text{ΓΔ}}$ **Σ** **Λ**

ii. $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = \overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ **Σ** **Λ**

iii. $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \overrightarrow{\text{ΒΔ}}$ **Σ** **Λ**



2. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος) στις παρακάτω ισότητες.

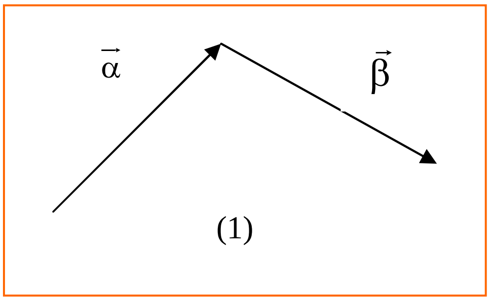
i. $|\overrightarrow{\text{ΑΒ}}| = |\overrightarrow{\text{ΓΔ}}|$ **Σ** **Λ**

ii. $|\overrightarrow{\text{ΑΓ}}| = |\overrightarrow{\text{ΒΔ}}|$ **Σ** **Λ**

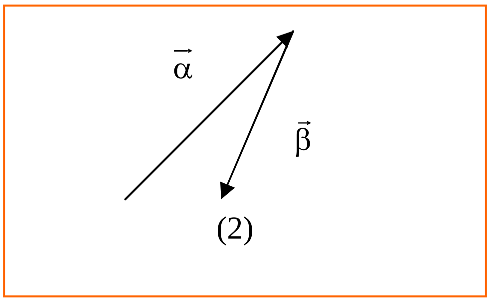
iii. $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{ΒΑ}},\overrightarrow{\text{ΒΔ}}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ **Σ** **Λ**

iv. $\left(\widehat{\overrightarrow{\text{ΔΑ}},\overrightarrow{\text{ΒΔ}}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ **Σ** **Λ**

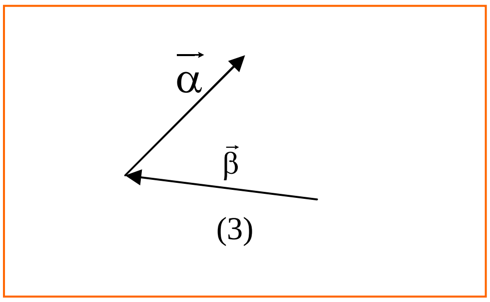
3. Να σημειώσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις.



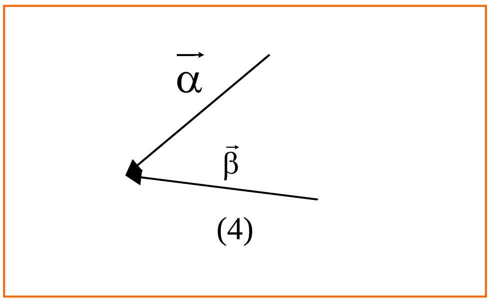
(1)



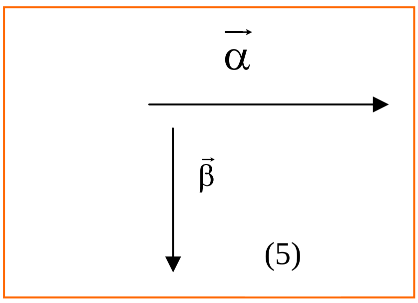
(2)



(3)

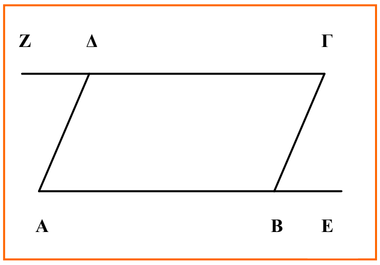


(4)



(5)

4. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{Z}$. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).



i. $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}$ **Σ Λ**
ii. $\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ **Σ Λ**
iii. $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}|$ **Σ Λ**
iv. $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ **Σ Λ**
v. $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ **Σ Λ**
vi. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **Σ Λ**
vii. $|\overrightarrow{\mathrm{ZA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma}|$ **Σ Λ**
viii. $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\overrightarrow{\Gamma\mathrm{Z}}$ **Σ Λ**
ix. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}},\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BE}},\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}}\right)$ **Σ Λ**
x. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}},\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}}\right)=\pi-\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma\Delta},\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}}\right)$ **Σ Λ**

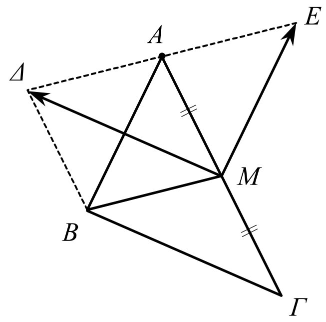
5. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).

i. Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=|-\vec{\alpha}|$ **Σ Λ**
ii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ **Σ Λ**
iii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow-\vec{\beta}$ τότε $-\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ **Σ Λ**
iv. Ισχύει ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow-(-\vec{\alpha})$ **Σ Λ**
v. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\uparrow-\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ **Σ Λ**

6. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).

i. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{A}\Gamma}$, τότε $\mathrm{B}\equiv\Gamma$ **Σ Λ**
ii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ **Σ Λ**
iii. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι
$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\left(\widehat{-\vec{\alpha},-\vec{\beta}}\right)$ **Σ Λ**
iv. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι
$\left(\widehat{-\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi-\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ **Σ Λ**

Ασκήσεις



1. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Με αρχή το Μ γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδειχτεί ότι το Α είναι το μέσο του ΔΕ.

Λύση

Επειδή $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$, είναι $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$ (1). Όμως Μ μέσο του ΑΓ. Άρα, $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{AM}$ (2). Λόγω των (1) και (2), έχουμε $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AM}$, οπότε: $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{BM}$ (3). Επειδή επιπλέον $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$, έχουμε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BM}$ (4). Έτσι, από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AE}$, οπότε Α είναι το μέσο του ΔΕ.

2. Αν για τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, να εξάγετε κατάλληλα συμπεράσματα για τα σημεία Α,Β,Γ,Δ,

3. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ονομάζουμε Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να συγκριθούν τα διανύσματα $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{M\Lambda}, \overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{K\Lambda}$ ανά δύο.

β) Να υπολογιστούν οι $\left(\widehat{\overrightarrow{K\Lambda}, \overrightarrow{KM}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\Lambda M}, \overrightarrow{\Lambda B}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{K\Gamma}, \overrightarrow{KB}}\right)$.

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Δείξετε ότι το σημείο Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ.

5. Πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα και γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma N}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο.

6. Εξωτερικά του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΔΓΘΗ. Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{ZH} = \overrightarrow{E\Theta}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B\Theta}$, $\overrightarrow{Z\Delta} = \overrightarrow{AH}$.

ii. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΗΕ έχουν κοινό μέσο.

iii. Το κέντρο Ο του ΑΒΓΔ είναι κοινό μέσο των ΕΗ και ΖΘ.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ μέσο της πλευράς του ΑΓ. Γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Β,Ε είναι συνευθειακά και ότι το Β είναι το μέσο του ΔΕ.

8. Έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ καθώς και τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΔ, ΝΕ, ΑΓ έχουν κοινό μέσο.

9. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθούν τα σημεία Χ του επιπέδου έτσι ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AX}$ να έχουν:

α) την ίδια κατεύθυνση, β) την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μέτρο.

γ) την ίδια διεύθυνση, δ) το ίδιο μήκος.

Μάθημα 2ον

• Πρόσθεση Διανυσμάτων

Α. Ορισμός της πρόσθεσης δυο διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το Α παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

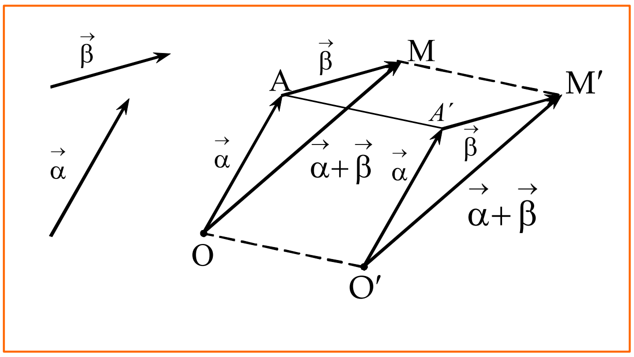
📖 **Πρόσεξε ότι** το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου Ο.

Απόδειξη

Έστω O' ένα άλλο σημείο. Παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$.

Επειδή $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$, έχουμε:

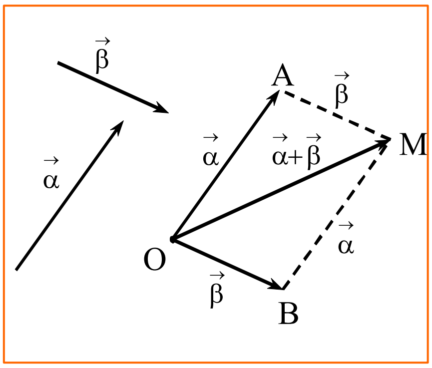
$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AA'}$ και $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$.



Επομένως, $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{MM'}$, που συνεπάγεται ότι και $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M'}$.

Γ. Κανόνας του παραλληλογράμμου

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο κανόνα του παραλληλόγραμμου. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο Ο πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο $\overrightarrow{OM}$ του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις ΟΑ και ΟΒ.



• Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

(2) $(\alpha+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

(3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ (Ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης το $\vec{0}$)

(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=(-\vec{\alpha})+\vec{\alpha}=\vec{0}$. (Αντίθετα διανύσματα έχουν άθροισμα $\vec{0}$)

Απόδειξη

(1) Από το προηγούμενο σχήμα έχουμε: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$ και $\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OM}$. Επομένως, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

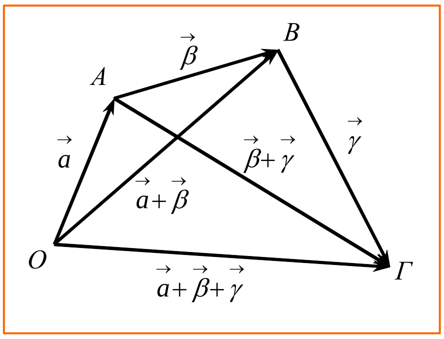
(2) Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$

και

$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$.

Επομένως, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$.

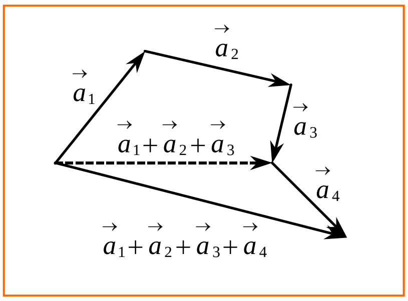


Οι ιδιότητες **(3)** και **(4)** είναι προφανείς.

- Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
- Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,...,\vec{\alpha}_\nu$, $\nu\geq 3$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής: $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+...+\vec{\alpha}_\nu=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+...+\vec{\alpha}_{\nu-1})+\vec{\alpha}_\nu$.

Για παράδειγμα,

$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_4=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)+\vec{\alpha}_4$



📖 **Πρόσεξε** ότι για να προσθέσουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,...,\vec{\alpha}_\nu$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

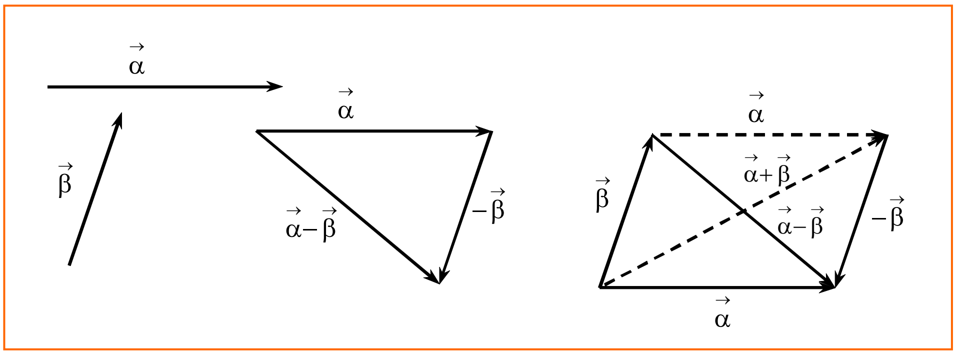
📖 **Πρόσεξε** ότι για τρία τυχαία σημεία A,B,Γ ισχύει η σχέση του Shasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$. (Η σχέση του Shasles ισχύει και για ν τυχαία σημεία)

📖 **Πρόσεξε** ότι κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο ή περισσοτέρων διανυσμάτων!
Για παράδειγμα $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$ ή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ είναι αντίθετα, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$. Ταυτόχρονα το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ!

• Αφαίρεση Διανυσμάτων

Η διαφορά $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.



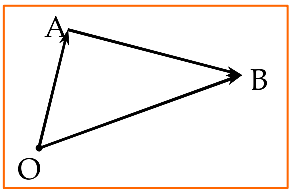
Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$. Πράγματι, $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (-\vec{\beta})+(\vec{\beta}+\vec{x})=(-\vec{\beta})+\vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{0}+\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

📖 **Πρόσεξε λοιπόν** ότι η εξίσωση $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$ έχει μοναδική λύση $\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι οι ιδιότητες της πρόσθεσης δεν ισχύουν για την αφαίρεση.

• Διάνυσμα Θέσης ή Διανυσματική Ακτίνα

Έστω Ο ένα σταθερό σημείο του χώρου. Για κάθε σημείο Μ του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του Μ** ή **διανυσματική ακτίνα του Μ**.



Το σημείο Ο, που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

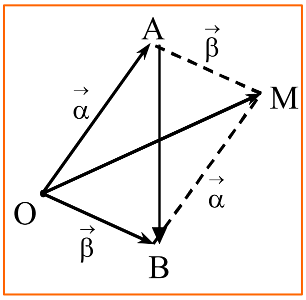
Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ και επομένως $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι «Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατός του μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του».

📖 **Πρόσεξε τα εξής!**

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\quad \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$. Οπότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την διανυσματική πρόσθεση συμπεραίνουμε τα εξής:



1. Η διαγώνιος με αρχή το Ο, δηλαδή το $\overrightarrow{OM}$ εκφράζει το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

2. Η διαγώνιος με αρχή το Α, δηλαδή το $\overrightarrow{AB}$ εκφράζει το $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

3. Η διαγώνιος με αρχή το Β, δηλαδή το $\overrightarrow{BA}$ εκφράζει το $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Πρόσεξε τα εξής!

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{MO}|$

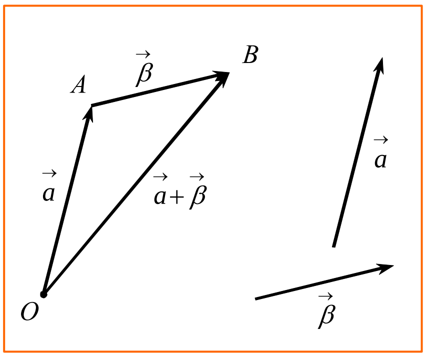
$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = |\vec{\beta}-\vec{\alpha}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

- **Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων (τριγωνική ανισότητα)**

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι

$|(OA)-(AB)| \leq (OB) \leq (OA)+(AB)$

και επομένως $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$



Πρόσεξε τα εξής!

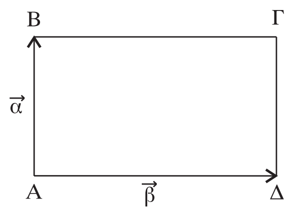
Ισχύει ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

Ισχύει ότι $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Θέματα προς εμπέδωση

1.	Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.	Σ	Λ
2.	Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$, τότε $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{0}$.	Σ	Λ
3.	Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.	Σ	Λ
4.	Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA}$ - $\overrightarrow{OB}$ είναι ίσα.	Σ	Λ
5.	Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.	Σ	Λ
6.	Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.	Σ	Λ
7.	Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \leq |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$.	Σ	Λ
8.	Για τα αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$.	Σ	Λ

9. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$.



α. Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΓ}$ ισούται με $\vec{α} + \vec{β}$ **Σ** **Λ**

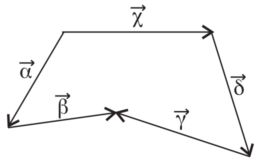
β. Το διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΔ}$ ισούται με $\vec{β} - \vec{α}$ **Σ** **Λ**

10. Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με:

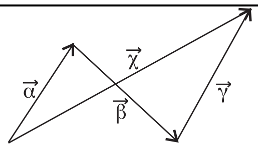
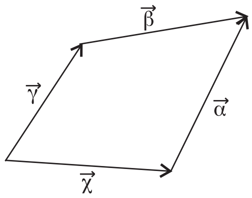
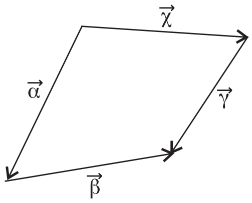
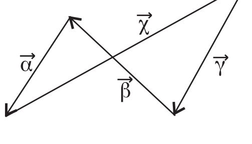
Α. $\vec{α} - \vec{β} - \vec{γ} - \vec{δ}$ **Β.** $\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ} - \vec{δ}$

Γ. $\vec{α} - \vec{β} + \vec{γ} - \vec{δ}$ **Δ.** $\vec{α} + \vec{β} - \vec{γ} - \vec{δ}$

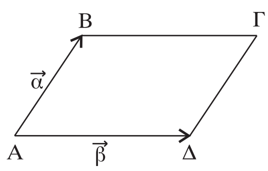
Ε. $\vec{α} - \vec{β} - \vec{γ} + \vec{δ}$



11. Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη (Α) αντιστοιχεί μια τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σχήμα της στήλης (Α) με το αντίστοιχο $\vec{x}$ της στήλης (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
	$\vec{α} + \vec{β} - \vec{γ}$
	$\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ}$
	$-(\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ})$
	$\vec{α} - \vec{β} - \vec{γ}$
	$\vec{β} + \vec{γ} - \vec{α}$
	$\vec{β} - \vec{γ} - \vec{α}$

12. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{ΑΒ} = \vec{α}$, $\overrightarrow{ΑΔ} = \vec{β}$. Να αντιστοιχήσετε κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) με το ίσο του της στήλης (Β).

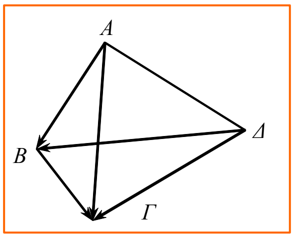


στήλη Α	**στήλη Β**
$\overrightarrow{A\Gamma}$	$-\vec{\alpha}$
$\overrightarrow{\Gamma B}$	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
$\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	$\vec{\beta}-\vec{\alpha}$
$\overrightarrow{B\Delta}$	$\vec{\alpha}-\vec{\beta}$
	$-\vec{\beta}$

Ασκήσεις

1. Για τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδειχτεί ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

Λύση



Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}=.$$

$$=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$$

2. Να αποδειχτεί ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

Λύση

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως και Μ τυχαίο σημείο της ΑΔ, να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{A\Lambda}=\overrightarrow{M\Gamma}$.

4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δειχτεί ότι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

5. Για τα μη συγγραμμικά και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}+\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}\ge 1$.

6. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, κέντρου Ο. Να βρεθούν τα διανύσματα:

α. $\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{ZA}$ β. $\overrightarrow{O\Gamma}-(\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{\Delta E})$

γ. $\overrightarrow{\Delta O}-\overrightarrow{AB}$ δ. $\overrightarrow{\Delta Z}-\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Delta B}$

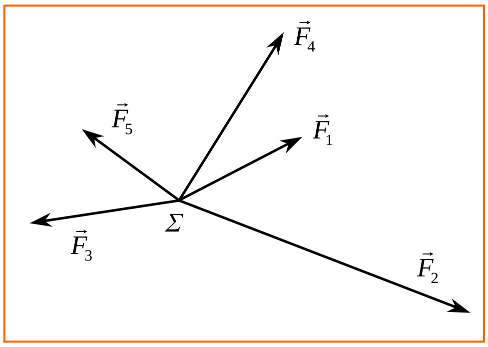
7. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ της πλευράς ΓΔ. Βρείτε τα διανύσματα:

α. $\overrightarrow{\Delta M}-\overrightarrow{AM}$ **β.** $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{BM}$ **γ.** $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{AB}$

8. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τις ΒΓ και ΔΑ και παίρνουμε τμήματα $\Gamma Z = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{\Delta E} = \vec{0}$ β. $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB}$ γ. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{Z\Delta}$

9. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_5$ ασκούνται στο σώμα Σ. Ποια δύναμη χρειάζεται, ώστε να μην αφήσει το σώμα Σ να μετακινηθεί από τη θέση του;



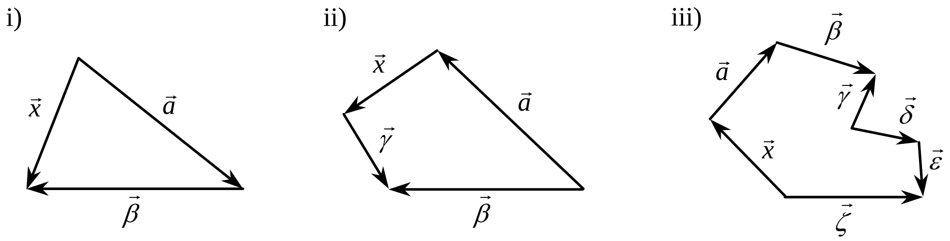
10. Δίνονται τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ και έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο. Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ αν:

i. $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta}$

ii. $|\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\delta}|$

iii. $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha} - \vec{\gamma}| = |\vec{\beta} - \vec{\delta}|$

11. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:



12. Αν για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

13. Δίνονται τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ και έστω Ο, το μέσο του τμήματος ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

14. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

15. Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{P_1P_3} + \overrightarrow{P_2P_4} + \overrightarrow{P_3P_5} + \overrightarrow{P_4P_6} + \overrightarrow{P_5P_1} + \overrightarrow{P_6P_2} = \vec{0}$.

16. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το μέσο Ο της διαγωνίου του ΒΔ. Να δειχτεί ότι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\Delta A} - \overrightarrow{\Gamma B}$.

17. Αν ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{\Gamma Z} + \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ να είναι όλα διακεκριμένα.

18. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να συγκρίνετε τα διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\vec{y} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B}$.

19. Αν ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ συμπίπτουν.

20. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

21. Αν είναι $|\vec{\alpha}| = \frac{3}{4}$, $|\vec{\beta}| = \frac{1}{4}$ και $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \geq 1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$.

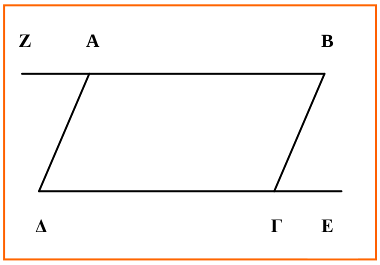
22. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|\overrightarrow{M\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{MA}|$.

23. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Βρείτε σημείο Μ του επιπέδου του, τέτοιο ώστε:

i. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{M\Delta}$

ii. $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}$

24. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $\Gamma E = AZ$. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).



i.	$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$	**Σ**	**Λ**
ii.	$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$	**Σ**	**Λ**
iii.	$\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$	**Σ**	**Λ**
iv.	$\overrightarrow{ZA} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Delta Z}$	**Σ**	**Λ**
v.	$\lvert\overrightarrow{ZB} - \overrightarrow{Z\Delta}\rvert = \lvert\overrightarrow{\Delta B}\rvert$	**Σ**	**Λ**
vi.	$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$	**Σ**	**Λ**
vii.	$\overrightarrow{Z\Delta} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ZE} + \overrightarrow{AZ}$	**Σ**	**Λ**

25. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB // \Gamma\Delta$. Από το Δ η παράλληλη προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{M\Gamma}$

26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{K\Gamma} + \overrightarrow{K\Delta} = \vec{0}$.

ii. Αν Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου του τότε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Delta}$.

27. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ. Ορίζουμε τα σημεία Δ και Ε από τις σχέσεις: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{\Gamma E} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

28. Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία A, B, Γ, Δ και το μέσο Μ της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

Μάθημα 3ον

• Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Α. Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Έστω ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ και ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Ορίζουμε σαν γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

1. Έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$, δηλαδή ισχύει ότι $|\lambda \cdot \vec{\alpha}| = |\lambda||\vec{\alpha}|$.

2. **α.** Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$,

β. Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$,

γ. Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$.

Επίσης ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda > 0$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda < 0$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε ή $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

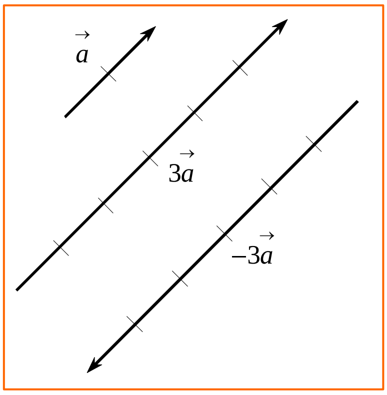
📖 **Πρόσεξε** ότι το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha}$ με $\lambda \neq 0$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Παράδειγμα

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει μέτρο 2, τότε:

- Το διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $|3\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.

- Το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο ίσο $|-3\vec{\alpha}| = |-3|\,|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.



Β. Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες τις οποίες τις έχεις χωρίς απόδειξη:

1. $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

2. $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

3. $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

4. $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

5. $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$

6. $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$

7. $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$

8. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

9. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$.

Γ. Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$.
Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, όπου $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=-2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Δ. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Θεώρημα

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow \text{ υπάρχει } \lambda\in\mathbb{R} \text{ τέτοιο ώστε: } \vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}.$$

Απόδειξη

⇨ (Ευθύ) Αν ισχύει η σχέση $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, τότε όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

⇨ (Αντίστροφο) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.

Θέτουμε $\kappa=\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, όπου $\kappa\geq 0$, τότε $|\vec{\alpha}|=\kappa|\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

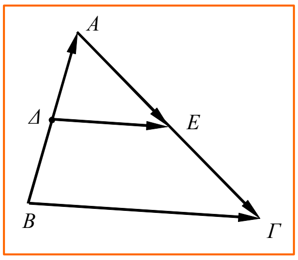
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=\kappa\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda=\kappa>0$, έχουμε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}=-\kappa\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda=-\kappa<0$, έχουμε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$, τότε $\vec{\alpha}=0\cdot\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda=\kappa=0$, έχουμε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει $\lambda\in\mathbf{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha}=\lambda\cdot\vec{\beta}$.

Θα δείξουμε ότι ο λ είναι μοναδικός.
Έστω ότι υπάρχει και άλλος πραγματικός αριθμός μ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha}=\mu\cdot\vec{\beta}$, οπότε: $\lambda\cdot\vec{\beta}=\mu\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda\cdot\vec{\beta}-\mu\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow(\lambda-\mu)\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\overset{\vec{\beta}\neq\vec{0}}{\Leftrightarrow}\lambda-\mu=0\Leftrightarrow\lambda=\mu$.

Παράδειγμα

Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι $\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.



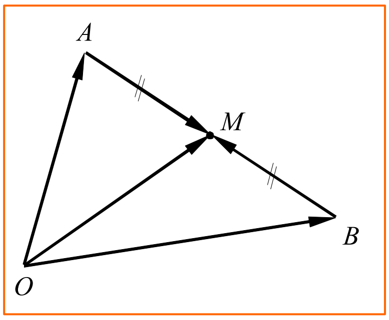
Είναι: $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 2\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AE}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{\Delta A}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}) = 2\,\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$.

Αφού λοιπόν $\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{\Delta E} // \mathrm{B\Gamma}$ και $|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}| = 2|\overrightarrow{\mathrm{\Delta E}}|$, που σημαίνει ότι $\mathrm{\Delta E} = \frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}$, δηλαδή αποδείξαμε διανυσματικά τη γνωστή μας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία σχέση $\mathrm{\Delta E} = // \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

Δ. Διανυσματική Ακτίνα του Μέσου Τμήματος (Βασικό Θέμα 1)

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ το μέσο του. Αν Ο τυχαίο σημείο αναφοράς τότε

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}.$$

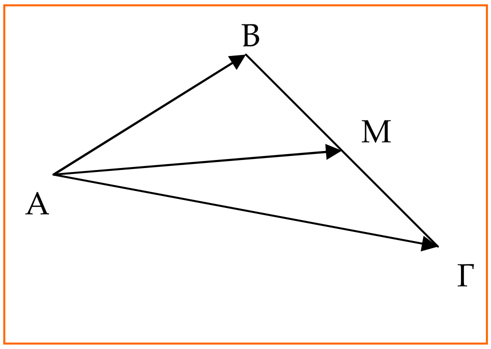


Απόδειξη

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$2\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \text{ άρα } \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}.$$

Πρόσεξε ότι αν θέλεις να εκφράσεις το άθροισμα δυο διανυσμάτων $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$ που έχουν κοινή αρχή το σημείο Α σε συνάρτηση με ένα διάνυσμα, τότε θα χρησιμοποιείς τη σχέση: $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = 2 \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$, όπου Μ το μέσο του τμήματος ΒΓ.

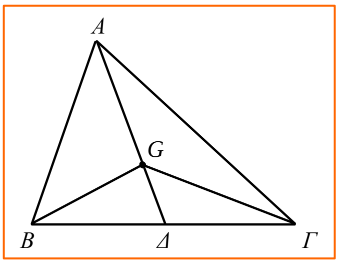


Ε. Διανυσματική Ακτίνα του κέντρου βάρους (Βασικό Θέμα 2)

Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο G είναι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{G\Gamma}} = \vec{0}$ και ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}})$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $AG = 2G\Delta$, όπου ΑΔ η διάμεσος του τριγώνου.



Επομένως, ισχύει $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{G\Delta}$, οπότε έχουμε

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Delta} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG} = \vec{0}$.

Αντιστρόφως, αν για ένα σημείο G ισχύει $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$, τότε θα έχουμε $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Delta} = \vec{0}$, όπου Δ το μέσον της ΒΓ, οπότε θα ισχύει $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{G\Delta}$.

Έτσι, το σημείο G ανήκει στη διάμεσο ΑΔ και ισχύει $AG = 2G\Delta$. Άρα, το G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

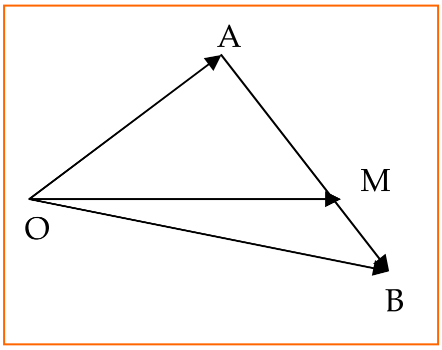
Από τη σχέση $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma} = \vec{0}$ έχουμε για τυχαίο σημείο Ο ότι:

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OG} = \vec{0}$. Άρα $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν θέλεις να εκφράσεις το άθροισμα τριών διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}$ που έχουν κοινή αρχή το σημείο Α σε συνάρτηση με ένα διάνυσμα, τότε θα χρησιμοποιείς τη σχέση: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta} = 3\cdot\overrightarrow{AG}$, όπου G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

ΣΤ. Διανυσματική Ακτίνα του σημείου Μ που χωρίζει το τμήμα ΑΒ σε απλό λόγο λ, ($\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\overrightarrow{MB}$) με $\lambda \neq -1,0$. (Βασικό Θέμα 3)

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Μ εσωτερικό του τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\overrightarrow{MB}$, με $\lambda \neq -1,0$. Για το τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου του ισχύει ότι $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{\lambda+1}$.



Απόδειξη

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου Μ του τμήματος ΑΒ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ (1) και $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$ (2).

Πολλαπλασιάζουμε επί λ και τα δυο μέλη της (2) και έχουμε $\lambda\cdot\overrightarrow{OM} = \lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BM}$ (3).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3) έχουμε:

$\overrightarrow{OM}+\lambda\cdot\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BM}$ (4).

Όμως $\overrightarrow{AM} = \lambda\cdot\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\lambda\cdot\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\lambda\cdot\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ (5). Η (4) λόγω της (5) μας δίνει: $(1+\lambda)\cdot\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{\lambda+1}$.

Πρόσεξε ότι για $\lambda = 1$, έχουμε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ και ισχύει ότι $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OB}}{1+1} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Μέθοδοι και τεχνικές για την επίλυση των ασκήσεων που αναφέρονται στα Μαθήματα 2 και 3.

Μελέτησε πολύ προσεκτικά τα επόμενα!

- **Μέθοδος 1η**

Το άθροισμα δυο διαδοχικών διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα που έχει για αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος (πέρας) το τέλος του δεύτερου και γενικά το άθροισμα ν διαδοχικών διανυσμάτων είναι ένα διάνυσμα που έχει για αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος (πέρας) το τέλος του τελευταίου.

- **Μέθοδος 2η**

Η διανυσματική διαφορά δυο πλευρών ενός τριγώνου με κοινή αρχή ισούται με το διάνυσμα της τρίτης πλευράς με κατάλληλη φορά, δηλαδή $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma}$.

- **Μέθοδος 3η**

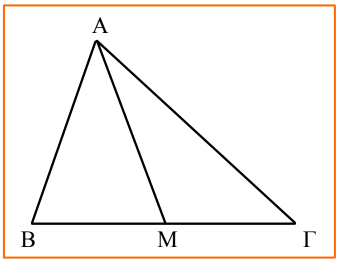
Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί:

α. Σε άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων, δηλαδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$.

β. Σε διαφορά διανυσμάτων με κοινή αρχή, δηλαδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

- **Μέθοδος 4η**

Το διανυσματικό άθροισμα δυο πλευρών ενός τριγώνου με κοινή αρχή ισούται με το διπλάσιο του διανύσματος της περιεχόμενης διαμέσου με την ίδια αρχή, δηλαδή ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.



- **Μέθοδος 5η**

Οι περισσότερες διανυσματικές σχέσεις μπορούν να αντιμετωπισθούν αποτελεσματικά με τη μέθοδο των διανυσματικών ακτίνων.
Με τη μέθοδο αυτή εκφράζουμε κάθε διάνυσμα της προς απόδειξη σχέσης με διανύσματα κοινής αρχής, θεωρώντας σαν σημείο αναφοράς το τυχαίο σημείο Ο, (διαλέγουμε σαν σημείο αναφοράς αυτό που μας διευκολύνει

περισσότερο), οπότε κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ γράφεται $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, δηλαδή το τυχαίο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εκφράζεται σαν διανυσματική ακτίνα του τέλους μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής.
Πρέπει να γνωρίζουμε και τα εξής:

α. Αν Μ μέσο του ΑΒ τότε $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

β. Αν Μ σημείο που χωρίζει το τμήμα ΑΒ σε (απλό) λόγο λ, δηλαδή ισχύει ότι $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ με $\lambda \neq -1, 0$, τότε $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{\lambda + 1}$.

γ. Αν G κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$.

- ## Μέθοδος 6η

α. Το άθροισμα $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ δυο διανυσμάτων με κοινή αρχή το σημείο Μ στις διανυσματικές σχέσεις μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το διάνυσμα $2 \cdot \overrightarrow{MN}$, όπου Ν το μέσο του ΑΒ, δηλαδή $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$.

β. Το άθροισμα $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma}$ τριών διανυσμάτων με κοινή αρχή το σημείο Μ στις διανυσματικές σχέσεις μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το διάνυσμα $3 \cdot \overrightarrow{MG}$, όπου G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = 3 \cdot \overrightarrow{MG}$.

γ. Το άθροισμα $\kappa \cdot \overrightarrow{MA} + \lambda \cdot \overrightarrow{MB}$ με $\kappa \neq \lambda$ και $\kappa, \lambda \neq -1, 0, 1$ δυο διανυσμάτων με κοινή αρχή το σημείο Μ και εφόσον τα σημεία Α,Β,Μ δεν είναι συνευθειακά, στις διανυσματικές σχέσεις μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το διάνυσμα $(\kappa + \lambda) \cdot \overrightarrow{MP}$, όπου Ρ σταθερό σημείο της ευθείας ΑΒ που χωρίζει το ΑΒ σε απλό λόγο $\dfrac{\lambda}{\kappa}$, δηλαδή $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\lambda}{\kappa} \cdot \overrightarrow{PB}$.

Απόδειξη

Έστω το σημείο Ρ της ευθείας ΑΒ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AP} = \dfrac{\lambda}{\kappa} \cdot \overrightarrow{PB} \Leftrightarrow$ $\lambda \cdot \overrightarrow{PB} = \kappa \cdot \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \lambda \cdot \overrightarrow{PB} + \kappa \cdot \overrightarrow{PA} = \vec{0}$ (1).

$$\kappa \cdot \overrightarrow{MA} + \lambda \cdot \overrightarrow{MB} = \kappa \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA}) + \lambda \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PB}) = \kappa \cdot \overrightarrow{MP} + \kappa \cdot \overrightarrow{PA} + \lambda \cdot \overrightarrow{MP} + \lambda \cdot \overrightarrow{PB} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$\kappa \cdot \overrightarrow{MA} + \lambda \cdot \overrightarrow{MB} = \kappa \cdot \overrightarrow{MP} + \lambda \cdot \overrightarrow{MP} = (\kappa + \lambda) \cdot \overrightarrow{MP}.$$

- ## Μέθοδος 7η

Για να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αρκεί να δείξουμε ότι είναι συγγραμμικά, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

- **Μέθοδος 8η**

Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δυο από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma A}$ είναι συγγραμμικά, δηλαδή ότι το ένα γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός του άλλου, για παράδειγμα αρκεί να αποδείξουμε ότι: $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

- **Μέθοδος 9η**

Για να αποδείξουμε ότι δυο σημεία Α,Β ταυτίζονται αρκεί να δείξουμε ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες ταυτίζονται, δηλαδή αν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow A \equiv B$.

- **Μέθοδος 10η**

Αν μας ζητούν να δείξουμε μια σχέση της μορφής $\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_\nu = \nu \cdot \vec{\upsilon}$, όπου το πλήθος των προσθετέων είναι ίσο με τον συντελεστή του διανύσματος $\vec{\upsilon}$, τότε συνήθως εργαζόμαστε ως εξής:
Εκφράζουμε το διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ με ν διαφορετικούς τρόπους χρησιμοποιώντας κάθε φορά τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \ldots, \vec{\upsilon}_\nu$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε το ζητούμενο.

- **Μέθοδος 11η**

Αν μας ζητούν να δείξουμε μια σχέση της μορφής $\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_\nu = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_\nu$, τότε συνήθως εργαζόμαστε ως εξής:

α. Δείχνουμε ότι το καθένα από τα διανύσματα $\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_\nu$ και $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_\nu$ είναι ίσο με ένα άλλο διάνυσμα που είναι συνήθως της μορφής $\nu \cdot \vec{\alpha}$.

β. Σχηματίζουμε τη διαφορά $\left(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_\nu\right) - \left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_\nu\right)$ και δείχνουμε ότι η διαφορά αυτή είναι ίση με το $\vec{0}$, δηλαδή αποδεικνύουμε ότι:

$$\left(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_\nu\right) - \left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_\nu\right) = \left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}_1\right) + \left(\vec{\upsilon}_2 - \vec{u}_2\right) + \ldots + \left(\vec{\upsilon}_\nu - \vec{u}_\nu\right) = \vec{0}$$

- **Μέθοδος 12η**

Όταν σε μια άσκηση δίνεται ένας γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων ίσος με το μηδενικό διάνυσμα και του οποίου το άθροισμα όλων των συντελεστών του είναι μηδέν, χωρίς να είναι όλοι (οι συντελεστές) μηδέν, θα εργαζόμαστε όπως στο παρακάτω:
Έστω $\kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta} + \mu \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$ (1) και $\kappa + \lambda + \mu = 0$ (2) με $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| > 0$ (σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας από τους κ,λ,μ είναι διάφορος του μηδενός).

Αν Ο ένα τυχαίο σημείο αναφοράς θέτουμε $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, οπότε η σχέση (1) παίρνει τη μορφή $\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ (3). Αν $\kappa\neq 0$, λύνουμε τη (2) ως προς μ (ή ως λ, πάντως όχι ως προς κ) και έχουμε $\mu=-\kappa-\lambda$ και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+(-\kappa-\lambda)\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}-\kappa\cdot\overrightarrow{O\Gamma}-\lambda\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)+\lambda\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\kappa\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}\overset{\kappa\neq 0}{\Leftrightarrow}\overrightarrow{\Gamma A}=-\frac{\lambda}{\kappa}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Leftrightarrow$$

τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

Γεωμετρικοί τόποι

Γεωμετρικός τόπος είναι ένα σύνολο σημείων του επιπέδου (ή του χώρου) που όλα έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα και μόνον αυτά.

Βασικοί Γεωμετρικοί τόποι

α. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}$, όπου Α,Β σταθερά σημεία είναι η ευθεία ΑΒ.

β. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\kappa\cdot\overrightarrow{MA}+\lambda\cdot\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, όπου Α,Β σταθερά σημεία και κ,λ πραγματικοί αριθμοί με $\kappa+\lambda\neq 0$, είναι η ευθεία ΑΒ.

γ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από δυο σταθερά σημεία Α και Β, δηλαδή για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$, είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

δ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο, δηλαδή για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\rho$, $\rho>0$, είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνας ρ.

ε. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{B\Gamma}$, όπου Α,Β,Γ σταθερά σημεία είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την ΒΓ.

στ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ο λόγος των αποστάσεών τους από δυο σταθερά σημεία Α και Β είναι σταθερός, δηλαδή ισχύει ότι $\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|}=\lambda$, με $\lambda>0$, είναι απολλώνειος κύκλος.

ζ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $\left|\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}\right|=\left|\kappa\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+\lambda\cdot\overrightarrow{M\Delta}\right|$ (1), όπου Α,Β,Γ,Δ σταθερά σημεία του επιπέδου, και α,β,κ,λ κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί, αντιμετωπίζεται ως εξής:

α. Βρίσκουμε τα σταθερά σημεία Ρ και Σ για τα οποία ισχύουν:
$\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MP}$ και $\kappa \cdot \overrightarrow{M\Gamma} + \lambda \cdot \overrightarrow{M\Delta} = (\kappa + \lambda) \cdot \overrightarrow{M\Sigma}$.

β. Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε τη σχέση (1) και έχουμε:
$\left|(\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MP}\right| = \left|(\kappa + \lambda) \cdot \overrightarrow{M\Sigma}\right| \Leftrightarrow \dfrac{\left|\overrightarrow{MP}\right|}{\left|\overrightarrow{M\Sigma}\right|} = \dfrac{|\kappa + \lambda|}{|\alpha + \beta|} = \rho$.

γ. i. Αν $\rho = 1$ τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΡΣ

ii. Αν $\rho \neq 1$ τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι ένας Απολλώνειος κύκλος.

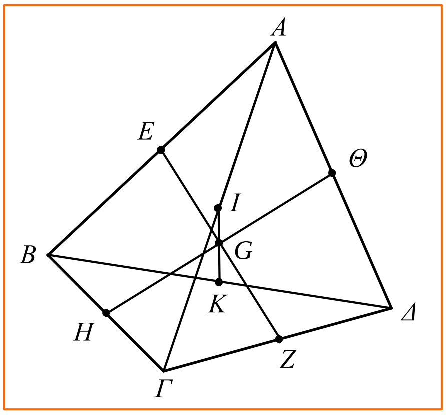
Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 1

Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζουν τα μέσα των απέναντι πλευρών ενός τετραπλεύρου και τα μέσα των διαγωνίων του διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται από το σημείο αυτό.

Απόδειξη
(Μελέτησε τις μεθόδους 5 και 9)

Έστω $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}, \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}, \overrightarrow{O\Delta} = \vec{\delta}$ τα διανύσματα θέσεως των κορυφών A, B, Γ, Δ, αντιστοίχως, ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ ως προς ένα τυχαίο σημείο αναφοράς Ο.



Τα διανύσματα θέσεως των μέσων Η της ΒΓ και Θ της ΑΔ είναι αντίστοιχα:
$\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma}) = \dfrac{1}{2} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ και

$\overrightarrow{O\Theta} = \dfrac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta}) = \dfrac{1}{2} \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\delta})$.

Το διάνυσμα θέσεως του μέσου G του ΗΘ είναι το
$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{2} \cdot \left[\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{O\Theta}\right] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + \dfrac{1}{2}(\vec{\alpha} + \vec{\delta})\right] = \dfrac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta})$.

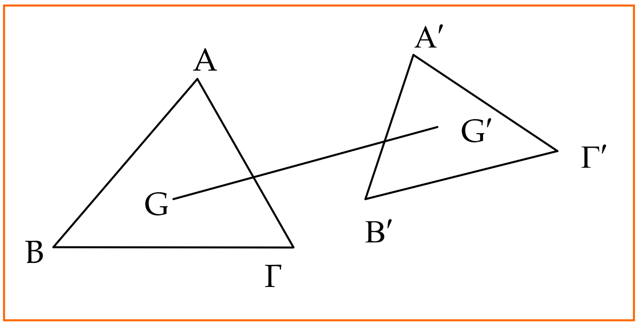
Ομοίως βρίσκουμε ότι το διάνυσμα θέσεως των μέσων των τμημάτων ΕΖ και ΙΚ είναι το $\dfrac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta})$.

Άρα τα τμήματα ΗΘ, ΕΖ και ΙΚ διέρχονται από το ίδιο σημείο και διχοτομούνται από αυτό.

Εφαρμογή 2

Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ και έστω G και G' τα κέντρα βάρους τους αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $3\cdot\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$.

Απόδειξη



(Μελέτησε τη μέθοδο 5)

Έστω O τυχαίο σημείο αναφοράς.

Για το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})\Leftrightarrow$

$3\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$ (1).

Για το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε $\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'})\Leftrightarrow$

$3\cdot\overrightarrow{OG'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'}$ (2).

Αφαιρούμε κατά μέλη την (1) από την (2) και έχουμε:

$3\cdot\overrightarrow{OG'}-3\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\Leftrightarrow$

$3\cdot(\overrightarrow{OG'}-\overrightarrow{OG})=(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{O\Gamma'}-\overrightarrow{O\Gamma})\Leftrightarrow 3\cdot\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$.

Εφαρμογή 3

Αν για τα σημεία Α,Β,Γ και Ο ισχύει η σχέση $9\cdot\overrightarrow{OA}-7\cdot\overrightarrow{OB}-2\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη

1ος τρόπος

(Μελέτησε τις μεθόδους 12, 7 και 8)

Επειδή το άθροισμα των συντελεστών αυτού του μηδενικού γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων είναι $9-7-2=0$ στη σχέση θέτουμε $9=7+2$ και έχουμε:

$(7+2)\cdot\overrightarrow{OA}-7\cdot\overrightarrow{OB}-2\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow 7\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OA}-7\cdot\overrightarrow{OB}-2\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$7\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+2\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})=\vec{0}\Leftrightarrow 7\cdot\overrightarrow{BA}+2\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{\Gamma A}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{BA}//\overrightarrow{\Gamma A}$, άρα τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

2ος τρόπος

(Μελέτησε τις μεθόδους 5, 7 και 8)

Θεωρούμε ένα σημείο από τα Α,Β,Γ και Ο σαν σημείο αναφοράς, έστω το Α και εργαζόμαστε με τη μέθοδο των διανυσματικών ακτίνων, οπότε:

$9\cdot\overrightarrow{OA}-7\cdot\overrightarrow{OB}-2\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\cdot(\overrightarrow{AA}-\overrightarrow{AO})-7\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO})-2\cdot(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AO})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$-9\cdot\overrightarrow{AO}-7\cdot\overrightarrow{AB}+7\cdot\overrightarrow{AO}-2\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+2\cdot\overrightarrow{AO}=\vec{0}\Leftrightarrow -7\cdot\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$, άρα τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

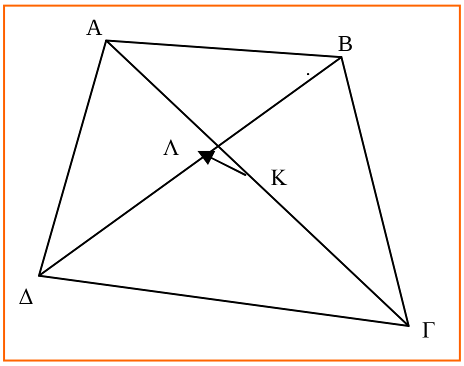
Εφαρμογή 4

Δίνεται τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Αν $Κ,Λ$ τα μέσα αντίστοιχα των διαγωνίων $ΑΓ$ και $ΒΔ$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΓΒ}+\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΑΔ}=4\cdot\overrightarrow{ΚΛ}$.

Απόδειξη

1ος τρόπος

(Μελέτησε τις μεθόδους 3 και 10)



Έχουμε κατά σειρά τα εξής:

$\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΒΛ}$

$\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΚΓ}+\overrightarrow{ΓΒ}+\overrightarrow{ΒΛ}$

$\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΚΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΔΛ}$

$\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΔΛ}$

Προσθέτουμε κατά μέλη και αφού λάβουμε υπόψη ότι $\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΚΓ}=\vec{0}$ και $\overrightarrow{ΚΒ}+\overrightarrow{ΚΔ}=\vec{0}$ σαν άθροισμα αντιθέτων διανυσμάτων, έχουμε:

$$4\cdot\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΒΛ}+\overrightarrow{ΚΓ}+\overrightarrow{ΓΒ}+\overrightarrow{ΒΛ}+\overrightarrow{ΚΓ}+\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΔΛ}+\overrightarrow{ΚΑ}+\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΔΛ}\Leftrightarrow$$
$$4\cdot\overrightarrow{ΚΛ}=\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΓΒ}+\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΑΔ}$$

2ος τρόπος

(Μελέτησε τις μεθόδους 5 και 6)

Έστω Ο σημείο αναφοράς.

Έχουμε $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΓΒ}+\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΑΔ}=\overrightarrow{ΟΒ}-\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}-\overrightarrow{ΟΓ}+\overrightarrow{ΟΔ}-\overrightarrow{ΟΓ}+\overrightarrow{ΟΔ}-\overrightarrow{ΟΑ}=$

$=2\cdot\overrightarrow{ΟΒ}-2\cdot\overrightarrow{ΟΑ}-2\cdot\overrightarrow{ΟΓ}+2\cdot\overrightarrow{ΟΔ}=2\cdot(\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΔ})-2\cdot(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΓ})=2\cdot\overrightarrow{ΟΛ}-2\cdot\overrightarrow{ΟΚ}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΓΒ}+\overrightarrow{ΓΔ}+\overrightarrow{ΑΔ}=2\cdot(2\cdot\overrightarrow{ΟΛ}-2\cdot\overrightarrow{ΟΚ})=4\cdot(\overrightarrow{ΟΛ}-\overrightarrow{ΟΚ})=4\cdot\overrightarrow{ΚΛ}$.

Εφαρμογή 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Κ τέτοιο ώστε να ισχύει $2\cdot\overrightarrow{ΚΑ}-\overrightarrow{ΚΒ}-3\cdot\overrightarrow{ΚΓ}=\vec{0}$.

Απόδειξη

(Μελέτησε τη μέθοδο 5)

Θεωρούμε σαν σημείο αναφοράς το σημείο Α και η σχέση μας γίνεται:

$2\cdot\overrightarrow{ΚΑ}-\overrightarrow{ΚΒ}-3\cdot\overrightarrow{ΚΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\cdot(\overrightarrow{ΑΑ}-\overrightarrow{ΑΚ})-(\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΑΚ})-3\cdot(\overrightarrow{ΑΓ}-\overrightarrow{ΑΚ})=\vec{0}\Leftrightarrow$

$-2\cdot\overrightarrow{ΑΚ}-\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΑΚ}-3\cdot\overrightarrow{ΑΓ}+3\cdot\overrightarrow{ΑΚ}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\cdot\overrightarrow{ΑΚ}-\overrightarrow{ΑΒ}-3\cdot\overrightarrow{ΑΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$

$2\cdot\overrightarrow{ΑΚ}=\overrightarrow{ΑΒ}+3\cdot\overrightarrow{ΑΓ}\Leftrightarrow\overrightarrow{ΑΚ}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$. Άρα το πέρας του διανύσματος που έχει για αρχή το σημείο Α και είναι ίσο με $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$ είναι το μοναδικό σημείο Κ που επαληθεύει την ισότητα $2\cdot\overrightarrow{ΚΑ}-\overrightarrow{ΚΒ}-3\cdot\overrightarrow{ΚΓ}=\vec{0}$.

Εφαρμογή 6

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Α',Β',Γ'$ των πλευρών $ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ$ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\overrightarrow{ΒΑ'}=\lambda\cdot\overrightarrow{ΒΓ}$, $\overrightarrow{ΓΒ'}=\lambda\cdot\overrightarrow{ΓΑ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ'}=\lambda\cdot\overrightarrow{ΑΒ}$ με $\lambda\neq 1,0$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους.

Απόδειξη
(Μελέτησε τις μεθόδους 5 και 9)
Έστω τυχαίο σημείο Ο, οπότε έχουμε ότι

$3\cdot\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$ και $3\cdot\overrightarrow{OG'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'}$.

Επίσης είναι $\overrightarrow{BA'}=\lambda\cdot\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB}=\lambda\cdot(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB})$ (1)

$\overrightarrow{\Gamma B'}=\lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma A}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})$ (2)

$\overrightarrow{A\Gamma'}=\lambda\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{O\Gamma'}-\overrightarrow{OA}=\lambda\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ (3)

Προσθέτοντας τις (1), (2) και (3) κατά μέλη έχουμε

$$\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\lambda\cdot(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\Leftrightarrow$$

$$\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma'}\right)-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\cdot\overrightarrow{OG'}-3\cdot\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG'}=\overrightarrow{OG},$$ άρα τα σημεία G και G′ ταυτίζονται.

Ασκήσεις

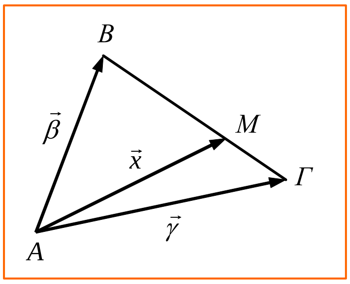
Ομάδα Α

1. Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα, τι μπορείτε να πείτε για το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}_0=\dfrac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot\vec{\alpha}$;

2. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(i) $\dfrac{1}{2}\cdot(\vec{x}+\vec{\alpha})=\dfrac{1}{3}\cdot(\vec{x}+\vec{\beta})$ (ii) $\vec{x}+3\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=4\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$.

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(BM)=2(M\Gamma)$, να αποδείξετε ότι $\vec{x}=\dfrac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$.

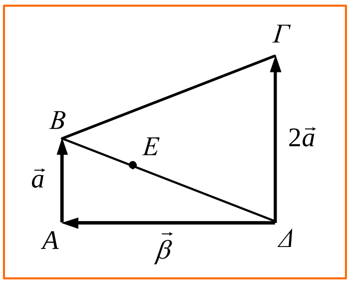


4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

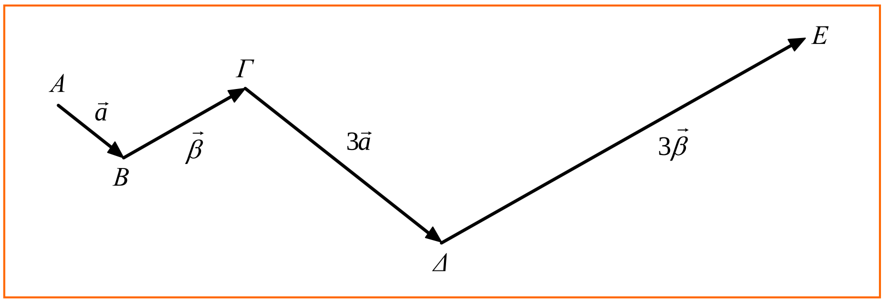
$\Delta E=2EB$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A}=\vec{\beta}$.

i. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$.

ii. Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Α, Ε και Γ;



5. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.



6. Αν $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B\Lambda}+3\overrightarrow{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

7. Αν $A\Delta$, BE και ΓZ είναι διάμεσοι τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{\Gamma Z}=\vec{0}$.

8. Αν K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA, AB, αντιστοίχως, τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{O\Lambda}+\overrightarrow{OM}$.

9. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και σημείο Γ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\mu\overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda-\mu=1$.

10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$.

11. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα.

i. Αν $x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=\vec{0}$, να δείξετε ότι $x=y=0$.

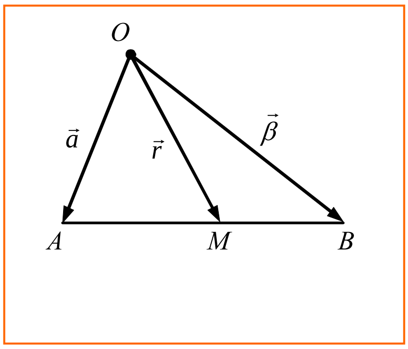
ii. Αν $x_1\vec{\alpha}+y_1\vec{\beta}=x_2\vec{\alpha}+y_2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

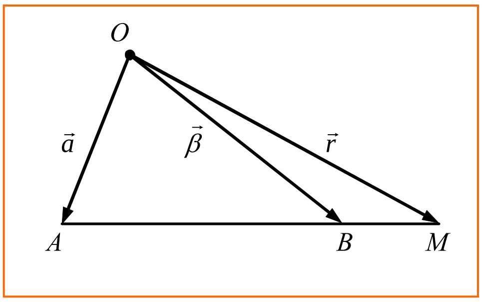
iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ τα διανύσματα $\vec{u}=(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(2+3x)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

12. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία E και Z, ώστε $\overrightarrow{AE}=\kappa\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\lambda\overrightarrow{AB}$ με $\kappa\lambda\neq 0$. Αν $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1$, να αποδείξετε ότι τα σημεία E, Γ και Z είναι συνευθειακά.

13. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x\overrightarrow{KA}+y\overrightarrow{KB}+z\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$, $x\overrightarrow{\Lambda A}+y\overrightarrow{\Lambda B}+z\overrightarrow{\Lambda\Gamma}=\vec{0}$, $x+y+z=0$, τότε θα ισχύει και η τρίτη (το σημείο K είναι διαφορετικό από το Λ).

14. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων Α, Β και Μ αντιστοίχως και $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{\kappa}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι αν το Μ είναι εσωτερικό του ΑΒ, τότε $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$, ενώ αν το Μ είναι εξωτερικό του ΑΒ, τότε $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}}{\lambda-\kappa}$.



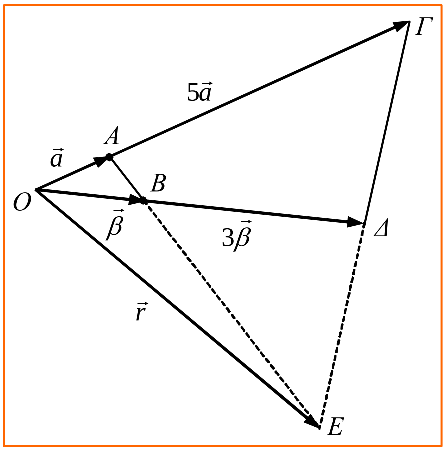


15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Σ. Βρίσκουμε τα συμμετρικά Δ, Ε και Ζ του Σ ως προς τα μέσα Κ, Λ και Μ των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Αν G και G′ τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Σ, G και G′ είναι συνευθειακά.

16. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $4\overrightarrow{ΜΝ}=\overrightarrow{ΑΔ}-\overrightarrow{ΒΓ}$, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

17. Δίνονται τα σημεία Α,Β και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $3\overrightarrow{ΜΑ}-5\overrightarrow{ΜΒ}+2\overrightarrow{ΜΓ}$ είναι σταθερό.

18. Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ ενός επιπέδου έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $5\vec{\alpha}$ και $3\vec{\beta}$ αντιστοίχως, όπου τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά. Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ.



Ομάδα Β

1. Αν $\text{ΑΔ},\text{ΒΕ},\text{ΓΖ}$ οι διάμεσοι ενός τριγώνου ΑΒΓ, δείξτε ότι:
   i. $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΕ}}+\overrightarrow{\text{ΓΖ}}=\vec{0}$.
   ii. Αν Σ τυχαίο σημείο του επιπέδου τότε $\overrightarrow{\Sigma\text{Α}}+\overrightarrow{\Sigma\text{Β}}+\overrightarrow{\Sigma\Gamma}=\overrightarrow{\Sigma\Delta}+\overrightarrow{\Sigma\text{Ε}}+\overrightarrow{\Sigma\text{Ζ}}$.
2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Μ μέσο της ΒΓ και Θ το κέντρο βάρους του ΑΒΓ, δηλαδή ισχύει $\overrightarrow{\text{Α}\Theta}=2\cdot\overrightarrow{\Theta\text{Μ}}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΒΑ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=3\cdot\overrightarrow{\text{Β}\Theta}$.
3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν για τα σημεία $\Delta,\text{Ε}$ του επιπέδου του ισχύει ότι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}+\overrightarrow{\text{ΑΓ}}=\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΑΕ}}$, να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ και $\Delta\text{Ε}$ έχουν κοινό μέσο.
4. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $\text{Μ},\text{Ν}$ τα μέσα των πλευρών του $\text{ΑΒ},\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}=2\cdot\overrightarrow{\text{ΜΝ}}$.
5. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της διαγωνίου του ΑΓ. Αποδείξτε ότι:
   i. $\overrightarrow{\text{ΜΒ}}+\overrightarrow{\text{ΜΔ}}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$, ii. $\overrightarrow{\text{ΜΒ}}-\overrightarrow{\text{ΜΔ}}=\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
6. Έστω κύκλος με κέντρο το σημείο Ο. Αν ΑΒ και $\Gamma\Delta$ δυο κάθετες χορδές του κύκλου οι οποίες τέμνονται στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι:
   i. $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}+\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+\overrightarrow{\text{ΟΓ}}+\overrightarrow{\text{ΟΔ}}=2\cdot\overrightarrow{\text{Ο}\Sigma}$, ii. $\overrightarrow{\text{ΟΑ}}-\overrightarrow{\text{ΟΒ}}+\overrightarrow{\text{ΟΓ}}-\overrightarrow{\text{ΟΔ}}=\overrightarrow{\text{ΒΓ}}+\overrightarrow{\Delta\text{Α}}$.
7. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία $\Delta,\text{Ε},\text{Ζ}$ του επιπέδου του για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{\text{ΑΔ}}=\overrightarrow{\Gamma\text{Β}}$, $\overrightarrow{\text{ΒΕ}}=\overrightarrow{\text{ΒΑ}}+\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΑΖ}}=\overrightarrow{\text{ΒΑ}}-\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.
   i. Να προσδιορισθούν τα σημεία $\Delta,\text{Ε},\text{Ζ}$ και να κάνετε το σχήμα.
   ii. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta\text{ΖΕ}\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
8. **(Βασική άσκηση)** Έστω τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ του επιπέδου. Αποδείξτε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\vec{x}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, δηλαδή αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί λ και μ για τους οποίους ισχύει $\vec{x}=\lambda\cdot\vec{\alpha}+\mu\cdot\vec{\beta}$.
9. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία $\text{Ε},\text{Ζ}$ τα οποία προσδιορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{\text{ΑΕ}}=\overrightarrow{\text{ΖΓ}}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$.
   i. Ερμηνεύστε γιατί τα σημεία $\text{Ε},\text{Ζ}$ είναι σημεία εσωτερικά της διαγωνίου ΑΓ.
   ii. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\text{Ε}}$ και $\overrightarrow{\Delta\text{Ζ}}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.
   iii. Εξηγείστε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\text{Ε}}$ και $\overrightarrow{\Delta\text{Ζ}}$ εκφράζονται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$.
   iv. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{\Delta\text{Ε}}+\overrightarrow{\Delta\text{Ζ}}=\overrightarrow{\Delta\text{Β}}$.
   v. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $\text{ΕΒΖ}\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
10. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία $\Delta,\text{Ε}$ της πλευράς του ΒΓ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{\text{ΒΔ}}=\overrightarrow{\Delta\text{Ε}}=\overrightarrow{\text{ΕΓ}}$. Αποδείξτε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, ii. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$,

iii. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$.

11. Έστω Α,Β,Γ,Δ σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $\left|2\cdot\overrightarrow{MA}+5\cdot\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+4\cdot\overrightarrow{M\Delta}\right|$, όπου Μ μεταβλητό σημείο του επιπέδου.

i. Βρείτε σημείο Ε της ΑΒ ώστε να ισχύει $2\cdot\overrightarrow{MA}+5\cdot\overrightarrow{MB}=7\cdot\overrightarrow{ME}$.

ii. Βρείτε σημείο Θ της ΓΔ ώστε να ισχύει $3\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+4\cdot\overrightarrow{M\Delta}=7\cdot\overrightarrow{M\Theta}$.

iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ.

12. Έστω Α,Β σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $\left|5\cdot\overrightarrow{MA}+3\cdot\overrightarrow{MB}\right|=16$, όπου Μ μεταβλητό σημείο του επιπέδου.

i. Βρείτε σημείο Κ της ΑΒ ώστε να ισχύει $5\cdot\overrightarrow{MA}+3\cdot\overrightarrow{MB}=8\cdot\overrightarrow{MK}$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ.

13. Έστω Α,Β σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $2\cdot\overrightarrow{MA}+4\cdot\overrightarrow{MB}=6\cdot\vec{\alpha}$, όπου Μ μεταβλητό σημείο του επιπέδου και $\vec{\alpha}$ γνωστό διάνυσμα .

i. Βρείτε σημείο Κ της ΑΒ ώστε να ισχύει $2\cdot\overrightarrow{MA}+4\cdot\overrightarrow{MB}=6\cdot\overrightarrow{MK}$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ.

14. Έστω Α,Β,Γ,Μ σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $4\cdot\overrightarrow{MA}+9\cdot\overrightarrow{MB}=13\cdot\overrightarrow{M\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

15. Έστω Α,Β,Κ,Λ,Μ σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $2\cdot\overrightarrow{A\Lambda}+3\cdot\overrightarrow{B\Lambda}+2\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ,Λ,Μ είναι συνευθειακά.

16. Έστω τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τα σημεία Α,Β,Γ με αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

17. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE}=\lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\kappa\cdot\lambda=1$. Αποδείξτε ότι:

i. $\kappa\neq 0$ και $\kappa\neq 0$, ii. Τα σημεία Δ,Γ,Ε είναι συνευθειακά.

18. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ,Ε,Ζ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{B\Delta}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{E\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. Αποδείξτε ότι:

i. $2\cdot\overrightarrow{BZ}+3\cdot\overrightarrow{EB}=\vec{0}$, ii. Τα σημεία Β,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

19. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η διάμεσός του. Αν για τα σημεία Δ,Ε,Ζ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, αποδείξτε ότι τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

20. Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε,Ζ$ τα οποία προσδιορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{1}{7}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ}=\frac{1}{8}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$.

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$.

ii. Αποδείξτε ότι τα σημεία $Δ,Ε,Ζ$ είναι συνευθειακά.

21. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ καθώς και τα σημεία $Α,Β,Γ$ με αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}$, $\overrightarrow{ΟΒ}=5\vec{α}+3\vec{β}+4\vec{γ}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}=13\vec{α}+7\vec{β}+10\vec{γ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α,Β,Γ$ είναι συνευθειακά.

22. Έστω τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

i. Αν ισχύει $κ\cdot\vec{α}+λ\cdot\vec{β}=\vec{0}$, με $κ,λ\in\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $κ=λ=0$.

ii. Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=2\cdot\vec{α}-\vec{β}$ και $\vec{w}=\vec{α}-3\cdot\vec{β}$ είναι επίσης μη συγγραμμικά.

23. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$, για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{α}|=x$, $|\vec{β}|=3x-4$ και $|\vec{α}+\vec{β}|=x^2$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Βρείτε το $x\in\mathbb{R}$.

ii. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι ομόρροπα.

24. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$, για τα οποία ισχύουν ότι $|\vec{β}|=(ν+1)|\vec{α}|$ και $|\vec{α}+\vec{β}|=ν|\vec{α}|$ $ν\in\mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι αντίρροπα.

25. Έστω τα διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{α}-\vec{β}|=2|\vec{β}-\vec{γ}|=4|\vec{γ}-\vec{α}|$. Δείξτε ότι $\vec{α}=\vec{β}=\vec{γ}$.

26. Έστω τα διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ για τα οποία ισχύουν ότι $\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}=\vec{0}$, $|\vec{β}|=λ|\vec{α}|$ και $|\vec{γ}|=(λ+1)|\vec{α}|$ με $λ>0$. Δείξτε ότι:

i. Τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι ομόρροπα.

ii. Τα διανύσματα $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ είναι αντίρροπα.

27. Έστω τα διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ για τα οποία ισχύουν ότι $\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{α}|}{3}=\frac{|\vec{β}|}{4}=\frac{|\vec{γ}|}{7}$. Δείξτε ότι:

i. Τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι ομόρροπα.

ii. Τα διανύσματα $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ είναι αντίρροπα.

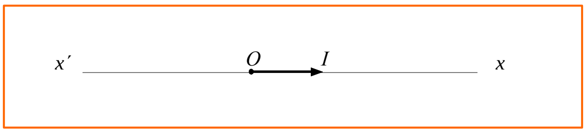
28. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το τυχαίο σημείο $Μ$ του επιπέδου του. Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{δ}=2\cdot\overrightarrow{ΜΑ}+3\cdot\overrightarrow{ΜΓ}+5\cdot\overrightarrow{ΒΜ}$ είναι σταθερό.

29. Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Βρείτε σημείο $Ρ$ του επιπέδου του αν ισχύει ότι $\overrightarrow{ΡΑ}+\overrightarrow{ΡΒ}+\overrightarrow{ΡΓ}=\overrightarrow{ΡΔ}$.

Μάθημα 4ον

• Συντεταγμένες στο Επίπεδο

Α. Τι καλούμε «Άξονα»;



Κάθε προσανατολισμένη ευθεία $x'x$ στην οποία έχουμε καθορίσει:

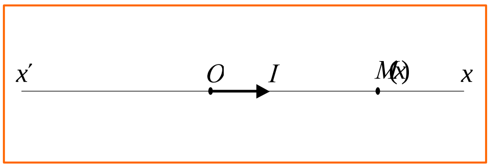
1. Ένα σημείο Ο σαν αρχή.
2. Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ σαν μοναδιαίο, δηλαδή $|\overrightarrow{OI}|=|\vec{i}|=1$

την καλούμε **άξονα** με αρχή το Ο και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, τον οποίο συμβολίζουμε με $x'x$.

🕮 Η ημιευθεία Ox λέγεται θετικός ημιάξονας Ox

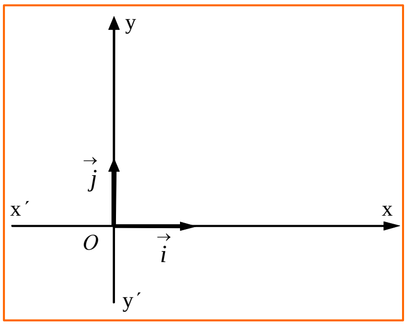
🕮 Η ημιευθεία Ox' λέγεται αρνητικός ημιάξονας Ox'.

Β. Τι καλούμε «τετμημένη σημείου σε άξονα»;



Έστω ο άξονας $x'x$ και το τυχαίο σημείο του Μ. Επειδή $\overrightarrow{OM}//\vec{i}$, θα υπάρχει (συνθήκη συγγραμμικότητας) ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}$. Τον αριθμό x τον ονομάζουμε τετμημένη του Μ.
Αντίστροφα, από την ισότητα $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}$ προκύπτει ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχεί μοναδικό σημείο Μ του άξονα $x'x$ με τετμημένη x. Το σημείο αυτό συμβολίζεται με $M(x)$.

Γ. Τι καλούμε «Καρτεσιανό Επίπεδο»



Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή Ο και μοναδιαία διανύσματα αντίστοιχα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$, οπότε έχουμε ένα **ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ένα **σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο** ή ένα **καρτεσιανό επίπεδο** και το συμβολίζουμε με Oxy.

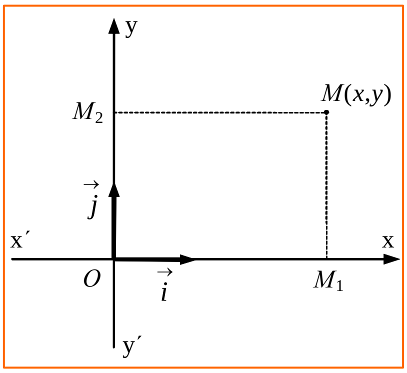
📖 Το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό, γιατί:

1. Είναι ορθογώνιο γιατί οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι κάθετοι.

2. Είναι κανονικό γιατί τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη, δηλαδή ισχύει ότι $|\vec{i}| = |\vec{j}|$.

Δ. Τι καλούμε «συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο»;

Έστω Μ τυχαίο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Από το Μ φέρνουμε $MM_1 // y'y$ και $MM_2 // x'x$.



📖 Έστω x η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$, δηλαδή υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_1} = x \cdot \vec{i}$, τότε ο $x \in \mathbb{R}$ καλείται **τετμημένη** του Μ.

📖 Έστω y η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, δηλαδή υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$, τότε ο $y \in \mathbb{R}$ καλείται **τεταγμένη** του Μ.

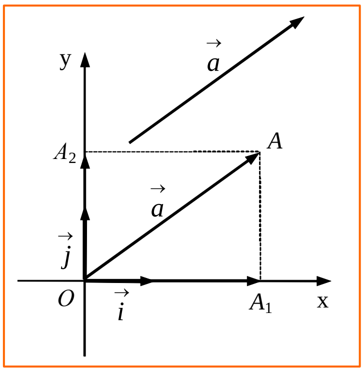
📖 Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου Μ λέγονται **συντεταγμένες του Μ**. Έτσι σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων, δηλαδή ένα ζεύγος (x,y) πραγματικών αριθμών.

📖 Ένα σημείο Μ με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται και με $M(x,y)$ ή απλά με (x,y).

Αντίστροφα τώρα, σε κάθε ζεύγος (x,y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου, το οποίο βρίσκεται ως εξής: Πάνω στον άξονα $x'x$ παίρνουμε το σημείο $M_1(x)$ και στον $y'y$ το σημείο $M_2(y)$. Από τα M_1 και M_2 φέρνουμε παράλληλες στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντιστοίχως, που τέμνονται στο Μ. Το σημείο Μ είναι το ζητούμενο.

📖 Υπάρχει λοιπόν μια «1-1» αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου και του ζεύγους των συντεταγμένων, που αυτό σημαίνει ότι κάθε σημείο του επιπέδου προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο από τις συντεταγμένες του!

Ε. Τι καλούμε «συντεταγμένες Διανύσματος»;



Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα. Με αρχή το O παίρνουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, έχουμε: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}$ (1). Αν x,y είναι οι συντεταγμένες του A, τότε ισχύει $\overrightarrow{OA_1}=x\vec{i}$ και $\overrightarrow{OA_2}=y\vec{j}$. Επομένως η (1) γράφεται $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$, οπότε το $\vec{\alpha}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$. Οι αριθμοί x και y είναι μοναδικοί.

Πρόσεξε τώρα ότι !

«Κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$ και $\vec{j}$, δηλαδή η έκφραση $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ είναι μοναδική».

Απόδειξη

Έστω ότι η έκφραση $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ δεν είναι μοναδική, οπότε υπάρχουν $x',y'\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει και $\vec{\alpha}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$. Οπότε θα έχουμε $x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}+y'\vec{j} \Leftrightarrow (x-x')\vec{i}=(y'-y)\vec{j}$.

Αν $x\neq x'$, δηλαδή ότι $x-x'\neq 0$, τότε θα ισχύει $\vec{i}=\dfrac{y'-y}{x-x'}\vec{j}$, οπότε $\vec{i}//\vec{j}$, που είναι άτοπο, αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά. Επομένως $x-x'=0$, άρα $x=x'$, που συνεπάγεται ότι $y'-y=0$, άρα και $y=y'$, οπότε κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Τα διανύσματα $x\vec{i}$ και $y\vec{j}$ λέγονται **συνιστώσες του διανύσματος** $\vec{\alpha}$ κατά τη διεύθυνση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ αντίστοιχα και ειδικότερα το $x\vec{i}$ καλείται **τετμημένη προβολή** του $\vec{\alpha}$ και το $y\vec{i}$ καλείται **τεταγμένη προβολή** του $\vec{\alpha}$.

Οι αριθμοί x,y λέγονται **συντεταγμένες** του $\vec{\alpha}$ στο σύστημα Oxy και ειδικότερα ο x λέγεται **τετμημένη** του $\vec{\alpha}$ και ο y λέγεται **τεταγμένη** του $\vec{\alpha}$.

ΣΤ. Η ισότητα μεταξύ δυο διανυσμάτων

Έστω δυο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$.

Αν $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow x_1\vec{i}+y_1\vec{j}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j} \Leftrightarrow x_1\vec{i}-x_2\vec{i}=y_2\vec{j}-y_1\vec{j} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x_1-x_2)\vec{i}=(y_2-y_1)\vec{j}$ και επειδή τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι μη συγγραμμικά, έχουμε $x_1-x_2=0$ και $y_2-y_1=0$, οπότε $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

Οπότε:

«Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους είναι ίσες», δηλαδή:

$$\vec{\alpha}=(x_1,y_1) \text{ και } \vec{\beta}=(x_2,y_2) \text{ με } \vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ \text{και} \\ y_1=y_2 \end{cases}.$$

Ζ. *Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων*

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Έχουμε:

- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j})=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}$, οπότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.
- $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})+(-x_2\vec{i}-y_2\vec{j})=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}$, οπότε $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$
- $\lambda\vec{\alpha}=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j})=(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}$, οπότε $\lambda\vec{\alpha}=(\lambda x_1,\lambda y_1)$.
- $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)+(\mu x_2,\mu y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$.

Για παράδειγμα, αν $\vec{\alpha}=(1,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,3)$, τότε:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(1,-2)+(1,3)=(2,1)$,

$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(1,-2)-(1,3)=(1,-2)+(-1,-3)=(0,-5)$

$3\vec{\alpha}=3(1,-2)=(3,-6)$

$2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=2(1,-2)-3(1,3)=(2,-4)-(3,9)=(2-3,-4-9)=(-1,-13)$

Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 1

Να προσδιορισθούν οι $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\kappa^2-9,3\lambda-6)$ να είναι το μηδενικό.

Απόδειξη

Θέλουμε να ισχύει $\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow (\kappa^2-9,3\lambda-6)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa^2-9=0 \\ \text{και} \\ 3\lambda-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \kappa^2 - 3^2 = 0 \\ \text{και} \\ 3(\lambda - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\kappa - 3)\cdot(\kappa + 3) = 0 \\ \text{και} \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 3 \ \acute{\eta} \ \kappa = -3 \\ \text{και} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Εφαρμογή 2

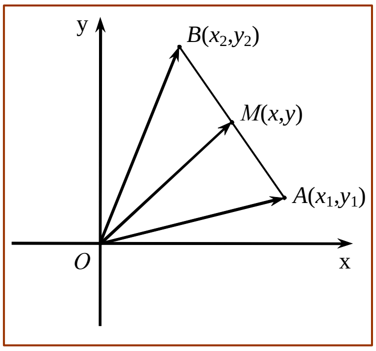
Αν $\vec{v} = (3,6)$ και $\vec{w} = (-2,5)$, να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του $2\vec{v} - 3\vec{w}$

Απόδειξη

$2\vec{v} - 3\vec{w} = 2(3,6) - 3(-2,5) = (6,12) - (-6,15) = (6,12) + (6,-15) = (12,-3)$

Η. *Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος*

Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ το μέσο Μ του ΑΒ.



Γνωρίζουμε ότι :

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (1), $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ (2),

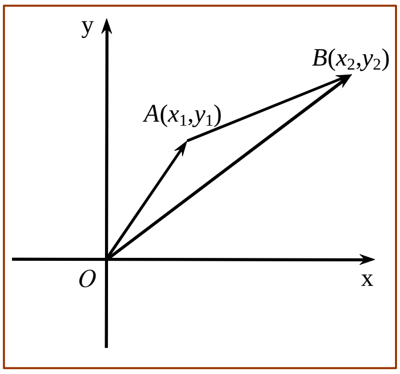
$\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$ (3), $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$ (4).

Η (1) λόγω των (2), (3) και (4) γίνεται:

$$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

📖 Επομένως οι συντεταγμένες του μέσου $M(x, y)$ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, όπου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Θ. *Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα*



Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ που έχει συντεταγμένες (x, y) και άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Επειδή, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$, και $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$, έχουμε: $(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Leftrightarrow$ $(x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, επομένως, οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις $x = x_2 - x_1$ και $y = y_2 - y_1$, δηλαδή

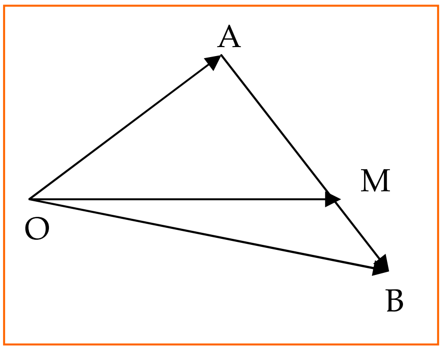
τετμημένη του $\overrightarrow{AB}$ = τετμημένη του Β — τετμημένη του Α

τεταγμένη του $\overrightarrow{AB}$ = τεταγμένη του B — τεταγμένη του A.

📖 Για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το $A(-1,3)$ και πέρας το $B(2,6)$ έχει συντεταγμένες $x=2-(-1)=1+2=3$ και $y=6-3=3$, δηλαδή είναι ίσο με το $\vec{\alpha}=(3,3)$.

I. Συντεταγμένες του σημείου Μ που χωρίζει το τμήμα ΑΒ σε απλό λόγο λ, ($\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$) με $\lambda\neq-1,0$.

Έστω $A(x_A,y_A)$ και $B(x_B,y_B)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x_M,y_M)$ το σημείο του ΑΒ για το οποίο ισχύει ότι $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$, με $\lambda\neq-1,0$.



Έχουμε: $\overrightarrow{AM}=(x_M-x_A,y_M-y_A)$ και $\overrightarrow{MB}=(x_B-x_M,y_B-y_M)$, οπότε η σχέση $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$ γίνεται:

$(x_M-x_A,y_M-y_A)=\lambda(x_B-x_M,y_B-y_M)\Leftrightarrow$

$$(x_M-x_A,y_M-y_A)=(\lambda x_B-\lambda x_M,\lambda y_B-\lambda y_M)\Leftrightarrow\begin{cases}x_M-x_A=\lambda x_B-\lambda x_M\\ y_M-y_A=\lambda y_B-\lambda y_M\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x_M+\lambda x_M=x_A+\lambda x_B\\ y_M+\lambda y_M=y_A+\lambda y_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1+\lambda)x_M=x_A+\lambda x_B\\ (1+\lambda)y_M=y_A+\lambda y_B\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}\\ y_M=\dfrac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}\end{cases}.$$

📖 Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 1

Έστω τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(4,10)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Ν και Σ, όπου Μ μέσο του ΑΒ, Ν σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AB}$ και Σ σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{A\Sigma}=2\overrightarrow{\Sigma B}$

Απόδειξη

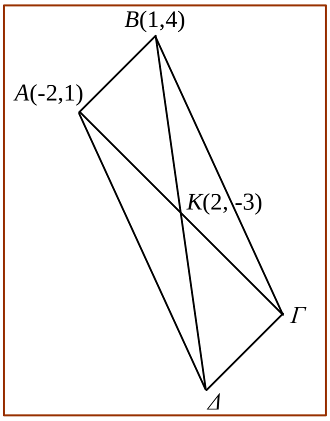
- Αν $M(x,y)$, τότε $x=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-1+4}{2}=\dfrac{3}{2}$ και $y=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2+10}{2}=6$, άρα $M\left(\dfrac{3}{2},6\right)$.
- Αν $N(x,y)$, τότε $\overrightarrow{AN}=(x+1,y-2)$, $\overrightarrow{AB}=(4+1,10-2)=(5,8)$, οπότε $\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow(x+1,y-2)=4(5,8)\Leftrightarrow(x+1,y-2)=(20,32)\Leftrightarrow$ $x+1=20\Leftrightarrow x=19$ και $y-2=32\Leftrightarrow y=34$, άρα $N(19,34)$
- Αν $\Sigma(x,y)$, τότε $x=\dfrac{x_A+2x_B}{1+2}=\dfrac{-1+2\cdot4}{3}=\dfrac{7}{3}$ και

$$y=\frac{y_A+2y_B}{1+2}=\frac{2+2\cdot 10}{3}=\frac{22}{3}, \text{ οπότε } \Sigma\left(\frac{7}{3},\frac{22}{3}\right).$$

Εφαρμογή 2

Αν $A(-2,1)$ και $B(1,4)$ είναι οι δύο κορυφές του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ και $K(2,-3)$ το κέντρο του, βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

Απόδειξη



Αν $\Gamma(x_1,y_1)$ και $\Delta(x_2,y_2)$ είναι οι δύο άλλες κορυφές του παραλληλόγραμμου, επειδή το K είναι το μέσον των ΑΓΑ και Δ, έχουμε:

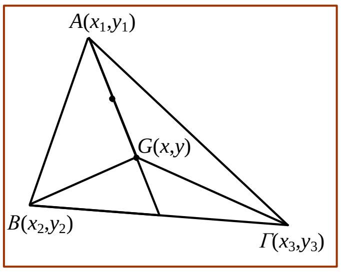
$$\begin{cases}\dfrac{x_1+(-2)}{2}=2\\ \dfrac{y_1+1}{2}=-3\end{cases} \text{ και } \begin{cases}\dfrac{x_2+1}{2}=2\\ \dfrac{y_2+4}{2}=-3\end{cases}.$$ Επομένως,

$$\begin{cases}x_1=6\\ y_1=-7\end{cases} \text{ και } \begin{cases}x_2=3\\ y_2=-10\end{cases}.$$ Άρα, οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ είναι $(6,-7)$ και $(3,-10)$ αντίστοιχα.

Εφαρμογή 3

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους G του τριγώνου $AB\Gamma$, αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των κορυφών του.

Λύση



Αν (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) είναι οι συντεταγμένες των κορυφών A,B,Γ αντίστοιχα και (x,y) είναι οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους του $AB\Gamma$, επειδή $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ θα έχουμε:

$$(x_1-x,y_1-y)+(x_2-x,y_2-y)+(x_3-x,y_3-y)=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3-3x,y_1+y_2+y_3-3y)=(0,0) \Leftrightarrow$$
$$x_1+x_2+x_3-3x=0 \quad \text{και} \quad y_1+y_2+y_3-3y=0.$$

Άρα $x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$.

Εφαρμογή 4

Δίνονται τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(-5,-1)$. Βρείτε σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα A και B.

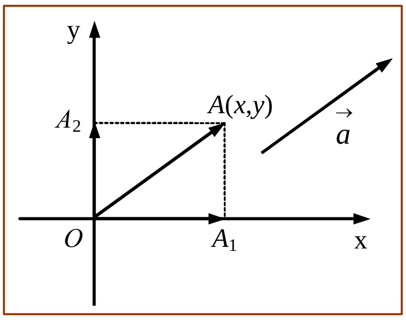
Λύση

Έστω $M(x,0)$ σημείο του άξονα $x'x$ με $MA=MB \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(-2-x)^2+4^2}=\sqrt{(-5-x)^2+(-1)^2} \Leftrightarrow 4+4x+x^2+16=25+10x+x^2+1 \Leftrightarrow$$
$$-6x=6 \Leftrightarrow x=-1, \text{ οπότε } M(-1,0).$$

Κ. *Μέτρο Διανύσματος*

• *Όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του διανύσματος*



Έστω $\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα διάνυσμα του καρτεσιανού επιπέδου και Α το σημείο με διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$. Αν A_1 και A_2 είναι οι προβολές του Α στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, επειδή το σημείο Α έχει τετμημένη x και τεταγμένη y, θα ισχύει $(OA_1)=|x|$ και $(OA_2)=|y|$. Έτσι θα έχουμε:

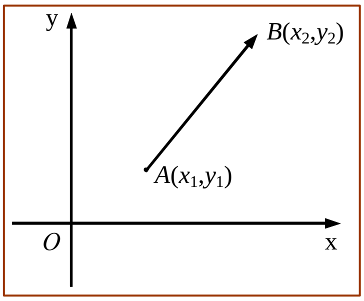
$$|\vec{\alpha}|^2=(OA)^2=(OA_1)^2+(A_1A)^2=(OA_1)^2+(OA_2)^2=|x|^2+|y|^2=x^2+y^2.$$

📖 Επομένως:
Αν $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

📖 Για παράδειγμα, αν $\vec{\alpha}=(6,8)$, τότε

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$.

• *Όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των άκρων του*



Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$. Επειδή η απόσταση (AB) των σημείων Α και Β είναι ίση με το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$, οπότε $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

📖 Επομένως:

το **μέτρο** ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ με άκρα τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, δίνεται από τη σχέση $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

📖 Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 1

Έστω το διάνυσμα $\overline{AB}$ με $A(8,-10)$ και $B(2,-2)$. Να βρεθεί το $|\overline{AB}|$.

Λύση

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-8)^2 + (-2+10)^2} = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$.

Εφαρμογή 2

Βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5}$ και $x + y = 1$.

Λύση

Είναι $x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$ (1). Επίσης $|\vec{\alpha}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$ $x^2 + (1-x)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$. Για $x = 2$ η (1) δίνει $y = -1$, οπότε $\vec{\alpha} = (2, -1)$, ενώ για $x = -1$ η (1) δίνει $y = 2$, οπότε $\vec{\alpha} = (-1, 2)$.

Λ. *Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων*

- Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου.

- Αν τα διανύσματα είναι παράλληλα και είναι $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε θα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιος, ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$. Επομένως, $(x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)$ ή ισοδύναμα: $x_1 = \lambda x_2$ και $y_1 = \lambda y_2$, οπότε θα ισχύει $x_1 y_2 - y_1 x_2 = \lambda x_2 y_2 - \lambda y_2 x_2 = 0$ ή ισοδύναμα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.
- Αν $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε θα ισχύει $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Επομένως αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, τότε $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$.

- Αντιστρόφως, αν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ θα είναι παράλληλα. Πράγματι, επειδή $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$, έχουμε $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Επομένως,

- Αν $x_2 \neq 0$, τότε $y_1 = \frac{x_1}{x_2} y_2$, οπότε, αν θέσουμε $\frac{x_1}{x_2} = \lambda$, θα έχουμε $x_1 = \lambda x_2$ και $y_1 = \lambda y_2$. Άρα, $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και συνεπώς $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

- Αν $x_2 = 0$, τότε $x_1 y_2 = 0$, οπότε αν $x_1 = 0$, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ θα είναι παράλληλα προς τον άξονα των τεταγμένων, άρα και μεταξύ τους παράλληλα, ενώ, αν $y_2 = 0$, τότε το $\vec{\beta}$ θα είναι το μηδενικό διάνυσμα και άρα, παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$.

Δείξαμε λοιπόν ότι μια συνθήκη παραλληλίας (συγγραμμικότητας) των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι η εξής: $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$.

Την ορίζουσα $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, που έχει ως 1η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$ και ως 2η γραμμή τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\beta}$, τη λέμε **ορίζουσα των διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$ (με τη σειρά που δίνονται) και τη συμβολίζουμε με $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})$.

Έτσι, η παραπάνω **συνθήκη παραλληλίας (συγγραμμικότητας)** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ διατυπώνεται ως εξής: $\boldsymbol{\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0}$.

Προφανές είναι ότι αν $\boldsymbol{\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})\neq 0}$, τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ **δεν είναι παράλληλα (συγγραμμικά)**.

Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 1

Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\sqrt{3},-1)$ και $\vec{\beta}=(3,-\sqrt{3})$ καθώς και τα $\vec{\gamma}=(-2,3)$ και $\vec{\delta}=(3,-2)$ είναι ανά δύο παράλληλα.

Λύση

- Έχουμε $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 3 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}=-3+3=0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\sqrt{3},-1)$ και $\vec{\beta}=(3,-\sqrt{3})$ είναι παράλληλα.
- Έχουμε $\det(\vec{\gamma},\vec{\delta})=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=4-9=-5\neq 0$, άρα τα διανύσματα $\vec{\gamma}=(-2,3)$ και $\vec{\delta}=(3,-2)$ δεν είναι παράλληλα.

Εφαρμογή 2

Δίνονται τα σημεία $A(0,1)$, $B(x,-3)$ και $\Gamma(-1,3)$. Να βρεθεί ο $x\in\mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A,B,Γ να είναι συνευθειακά.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{B\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -4 \\ -1-x & 6 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$ $6x-4-4x=0 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2$.

Εφαρμογή 3

Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in R$ για τις οποίες τα σημεία $A(1,0)$, $B(-\mu^2,3)$ και $\Gamma(-5\mu,9)$ είναι συνευθειακά.

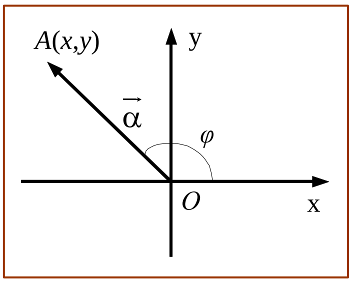
Λύση

Τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(-\mu^2-1,\ 3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(-5\mu-1,\ 9)$ είναι παράλληλα, δηλαδή, αν και μόνο αν $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=0$.

Έχουμε λοιπόν $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu^2-1 & 3 \\ -5\mu-1 & 9 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -9\mu^2-9+15\mu+3=0 \Leftrightarrow$

$3\mu^2-5\mu+2=0 \Leftrightarrow \mu=1$ ή $\mu=\dfrac{2}{3}$.

Μ. *Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος*



• Έστω $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}=(x,y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Τη γωνία ϕ, που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία ΟΑ, την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα** $\vec{\alpha}$ **με τον άξονα** $x'x$. Είναι φανερό ότι $0 \le \phi < 2\pi$. Για τη γωνία ϕ, αν το $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, ισχύει $\varepsilon\varphi\phi=\dfrac{y}{x}$.

📖 Το πηλίκο $\dfrac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha}=(x,y)$, με $x\neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή απλώς με λ. Επομένως: $\lambda=\dfrac{y}{x}=\varepsilon\varphi\phi$

Είναι φανερό ότι

- Αν $y=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}//x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda=0$.
- Αν $x=0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha}//y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

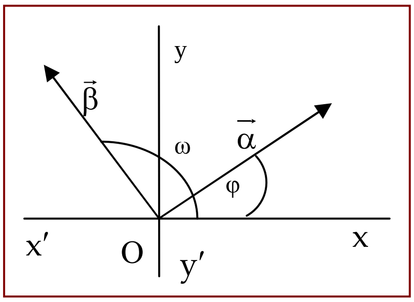
Συνθήκη παραλληλίας

📖 Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2.$$

⇨ Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής: $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

Συνθήκη καθετότητας



Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2} + \phi \Leftrightarrow \varepsilon\phi\omega = \varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\phi\omega = -\frac{1}{\varepsilon\phi\phi} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = -\frac{1}{\lambda_{\vec{\beta}}} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1.$$

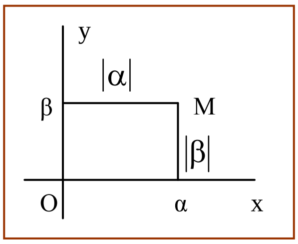
⇨ Επομένως, η συνθήκη καθετότητας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$.

Μέθοδοι και τεχνικές για την επίλυση των ασκήσεων

Μελέτησε πολύ προσεκτικά τα επόμενα!

- **Μέθοδος 1η**

Έστω ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.



⇨ Η απόσταση του σημείου Μ από τον άξονα $x'x$ είναι $|\beta|$.

⇨ Η απόσταση του σημείου Μ από τον άξονα $y'y$ είναι $|\alpha|$.

- **Μέθοδος 2η**

Έστω ένα σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

⇨ Αν το σημείο Μ ανήκει στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση $y = x$, γιατί η εξίσωση αυτής της διχοτόμου είναι $y = x$.

⇨ Αν το σημείο Μ ανήκει στη διχοτόμο της δεύτερης και τέταρτης γωνίας των αξόνων τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τη σχέση $y = -x$, γιατί η εξίσωση αυτής της διχοτόμου είναι $y = -x$.

⇨ Αν το σημείο Μ έχει σταθερή τετμημένη, $x = c$, τότε ανήκει στην ευθεία $x = c$.

⇨ Αν το σημείο Μ έχει σταθερή τεταγμένη, $y = c$, τότε ανήκει στην ευθεία $y = c$.

⇨ Αν το σημείο Μ ανήκει στον άξονα $x'x$ έχει τεταγμένη μηδέν, δηλαδή έχει $y=0$, οπότε έχει τη μορφή $M(x,0)$.

⇨ Αν το σημείο Μ ανήκει στον άξονα $y'y$ έχει τετμημένη μηδέν, δηλαδή έχει $x=0$, οπότε έχει τη μορφή $M(0,y)$.

- **Μέθοδος 3η**

Έστω ένα σημείο $M(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

⇨ Το συμμετρικό Ν του σημείου Μ ως προς τον άξονα $x'x$ έχει την ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη, οπότε είναι $N(x,-y)$

⇨ Το συμμετρικό Ρ του σημείου Μ ως προς τον άξονα $y'y$ έχει αντίθετη τετμημένη και ίδια και τεταγμένη, οπότε είναι $P(-x,y)$

⇨ Το συμμετρικό Σ του σημείου Μ ως προς την αρχή των αξόνων έχει αντίθετη τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη, οπότε είναι $\Sigma(-x,-y)$

- **Μέθοδος 4η**

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{w}=(x,y)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.

⇨ Αν το διάνυσμα $\vec{w}=(x,y)$ είναι παράλληλο προς τον άξονα $x'x$ τότε θα ισχύει $y=0$.

⇨ Αν το διάνυσμα $\vec{w}=(x,y)$ είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$ τότε θα ισχύει $x=0$.

⇨ Αν το διάνυσμα $\vec{w}=(x,y)$ είναι παράλληλο προς γνωστό διάνυσμα $\vec{v}=(\alpha,\beta)$, τότε $\begin{vmatrix} x & y \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \beta x-\alpha y=0$.

- **Μέθοδος 5η**

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Ισχύουν τα εξής:

⇨ Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι παράλληλα (συγγραμμικά) τότε και μόνο τότε όταν $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=0$.

- **Μέθοδος 6η**

⇨ Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2, που σημαίνει ότι $x_1\neq 0$ και $x_2\neq 0$, τότε ισχύουν τα εξής:

  ➢ Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι παράλληλα (συγγραμμικά) τότε και μόνο τότε όταν $\lambda_1=\lambda_2$.

  ➢ Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι κάθετα τότε και μόνο τότε όταν $\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$.

- **Μέθοδος 7η**

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Ισχύουν τα εξής:

⇨ $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$.

⇨ $\vec{\alpha}=-\vec{\beta}\Leftrightarrow(x_1,y_1)=(-x_2,-y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\y_1=-y_2\end{cases}$.

⇨ $\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow(x_1,y_1)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\y_1=0\end{cases}$.

- **Μέθοδος 8η**

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Ισχύουν τα εξής:

⇨ $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

⇨ $\vec{\alpha}$ όχι παράλληλο $\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}\neq 0\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1\neq 0$.

⇨ $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$ και τα x_1,x_2 είναι ομόσημα καθώς και τα y_1,y_2 είναι επίσης ομόσημα.

⇨ $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}\Leftrightarrow \det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$ και τα x_1,x_2 είναι ετερόσημα καθώς και τα y_1,y_2 είναι επίσης ετερόσημα.

- **Μέθοδος 9η**

Έστω ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$. Για να βρούμε τη γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ θα εργαζόμαστε ως εξής:

⇨ Αν $x=0$, τότε $\hat{\omega}=90^o$ αν $y>0$ ή $\hat{\omega}=270^o$ αν $y<0$.

⇨ Αν $x\neq 0$, τότε θα βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$, δηλαδή θα υπολογίζουμε το $\lambda_{\vec{\alpha}}=\frac{y}{x}$. Στη συνέχεια θα λύνουμε τη τριγωνομετρική εξίσωση εφω$=\frac{y}{x}$ και θα υπολογίζουμε τη γωνία ω με τα εξής κριτήρια.

i. $0\leq\omega<2\pi$

ii. Αν $x>0$ και $y\geq 0$ τότε $0\leq\omega<\frac{\pi}{2}$,

Αν $x<0$ και $y\geq 0$ τότε $\frac{\pi}{2}<\omega\leq\pi$,

Αν $x<0$ και $y\leq 0$ τότε $\pi\leq\omega<\frac{3\pi}{2}$,

Αν $x>0$ και $y<0$ τότε $\frac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$.

🕮 Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 1

Αν $\vec{\alpha}=(\lambda^2-3\lambda+2,\ \ 2\lambda^2-3\lambda-2)$ και $\vec{\beta}=(\lambda^2-5\lambda+6,\ \ -3\lambda^2+7\lambda-2)$, βρείτε το $\lambda\in R$, ώστε να είναι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.

Απόδειξη

Για να είναι δυο διανύσματα ίσα, αρκεί να έχουν ίσες συντεταγμένες, οπότε:
$\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda+2=\lambda^2-5\lambda+6$ και $2\lambda^2-3\lambda-2=-3\lambda^2+7\lambda-2\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2\lambda=4\\ 5\lambda^2-10\lambda=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ 5\lambda(\lambda-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=2\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=2\end{cases}\Leftrightarrow\lambda=2.$$

Εφαρμογή 2

Δίνονται τα σημεία $A(-1,6)$ και $B(-9,-2)$. Να βρείτε

i. Το σημείο του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα A και B.

ii. Το σημείο του άξονα yy' που ισαπέχει από τα A και B.

Απόδειξη

i. Όλα τα σημεία του άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη μηδέν οπότε το ζητούμενο σημείο έστω ότι είναι το $M(x,0)$. Το σημείο $M(x,0)$ ισαπέχει από τα σημεία A και B, οπότε έχουμε:

$$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{MB}|^2\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+6^2}=\sqrt{(x+9)^2+2^2}\Leftrightarrow$$
$$(x+1)^2+6^2=(x+9)^2+2^2\Leftrightarrow x^2+2x+1+36=x^2+18x+81+4\Leftrightarrow 16x=-48\Leftrightarrow$$
$x=-3$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(-3,0)$.

ii. Όλα τα σημεία του άξονα $y'y$ έχουν τετμημένη μηδέν οπότε το ζητούμενο σημείο έστω ότι είναι το $N(0,y)$. Το σημείο $N(0,y)$ ισαπέχει από τα σημεία A και B, οπότε έχουμε:

$$|\overrightarrow{NA}|=|\overrightarrow{NB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{NA}|^2=|\overrightarrow{NB}|^2\Leftrightarrow\sqrt{(0+1)^2+(y-6)^2}=\sqrt{(0+9)^2+(y+2)^2}\Leftrightarrow$$
$$1^2+(y-6)^2=9^2+(y+2)^2\Leftrightarrow 1+y^2-12y+36=81+y^2+4y+4\Leftrightarrow -16y=48\Leftrightarrow$$
$y=-3$, άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $N(-3,0)$.

Εφαρμογή 3

Έστω $A(4,8)$ και $B(7,5)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overline{AB}$ με τον άξονα $x'x$

Απόδειξη

Είναι $\overline{AB}=(7-4,5-8)=(3,-3)$, άρα $\lambda_{\overline{AB}}=\dfrac{-3}{3}=-1\Leftrightarrow$ εφω $=-1$. Επειδή τώρα είναι $3>0$ και $-3<0$ είναι $\dfrac{3\pi}{2}<\omega<2\pi$, οπότε $\omega=\dfrac{7\pi}{4}$.

Εφαρμογή 4

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,1)$ και $\vec{\beta}=(4,x)$ να είναι ομόρροπα.

Απόδειξη

Αφού θέλουμε να βρούμε τον x για να είναι τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,1)$ και $\vec{\beta}=(4,x)$ ομόρροπα, πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε τη συγγραμμικότητά τους. Έχουμε $\vec{\alpha}//\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & x \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

Για $x=2$ είναι $\vec{\alpha}=(2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,2)=2(2,1)=2\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

Για $x=-2$ είναι $\vec{\alpha}=(-2,1)$ και $\vec{\beta}=(4,-2)=-2(-2,1)=-2\vec{\alpha}$, δηλαδή $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\alpha}$.

Άρα η ζητούμενη τιμή του x είναι η $x=2$.

Εφαρμογή 5

Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων από τους άξονες $x'x$ και yy': $A(-1,2)$, $B(3,4)$, $\Gamma(-5,-6)$, $\Delta(\alpha-1,\beta+2)$, $M(x,y)$.

Απόδειξη

Η απόσταση ενός σημείου $K(\mu,\nu)$ από τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι $|\nu|$ και $|\mu|$ αντιστοίχως. Έτσι έχουμε:

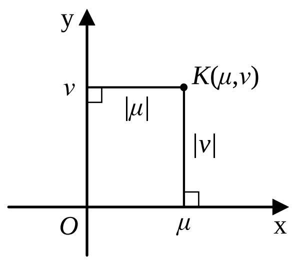
Για το $A: 2$ και 1

Για το $B: 4$ και 3

Για το $\Gamma: 6$ και 5

Για το $\Delta: |\beta+2|$ και $|\alpha-1|$

Για το $M: |y|$ και $|x|$.

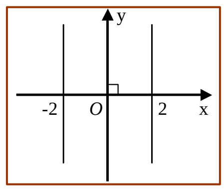


Εφαρμογή 6

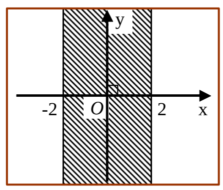
Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει: (i) $|x|=2$ (ii) $|x|<2$ (iii) $|y|>2$ (iv) $|x|=|y|$.

Απόδειξη

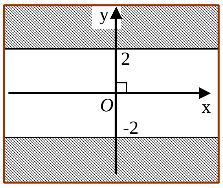
(i) $|x|=2 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=2$



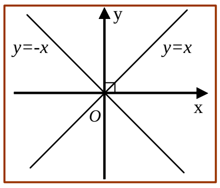
(ii) $|x|<2 \Leftrightarrow -2<x<2$



(iii) $|y|>2 \Leftrightarrow y<-2$ ή $y>2$



(iv) $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ή $x=-y$



Εφαρμογή 7

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\lambda^2-4,\lambda^2-3\lambda+2)$, $\lambda\in R$. Για ποια τιμή του λ είναι:

(i) $\vec{\alpha}=\vec{0}$; (ii) $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}//x'x$;

Απόδειξη

(i) Αν $\vec{\alpha}=\vec{0} \Leftrightarrow (\lambda^2-4,\lambda^2-3\lambda+2)=(0,0) \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda^2-4=0\\ \lambda^2-3\lambda+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=2 \text{ ή } \lambda=-2\\ \lambda=2 \text{ ή } \lambda=1\end{cases}$,

οπότε $\lambda=2$.

(ii) Αν $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}//x'x$ αρκεί $\begin{cases}\lambda^2-4\neq 0\\ \lambda^2-3\lambda+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda\neq 2 \text{ και } \lambda\neq -2\\ \lambda=2 \text{ ή } \lambda=1\end{cases}$,

οπότε $\lambda=1$.

Εφαρμογή 8

Έστω το διάνυσμα $\vec{u}=(3,4)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{v}$ το οποίο είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$ και ισχύει $|\vec{v}|=2|\vec{u}|$.

Απόδειξη

Αφού το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$ θα έχει τη μορφή $\vec{v}=\lambda\vec{u}=\lambda(3,4)=(3\lambda,4\lambda)$.

Αφού θα ισχύει $|\vec{v}|=2|\vec{u}| \Leftrightarrow \sqrt{(3\lambda)^2+(4\lambda)^2}=2\sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{9\lambda^2+16\lambda^2}=2\sqrt{9+16} \Leftrightarrow \sqrt{25\lambda^2}=2\sqrt{25} \Leftrightarrow 5\sqrt{\lambda^2}=10 \Leftrightarrow |\lambda|=2 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-2$.

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα είναι ή το $\vec{v}=(6,8)$ ή το $\vec{v}=(-6,-8)$.

Ασκήσεις

Ομάδα Α

1. Αν δυο διανύσματα έχουν ίσες συντεταγμένες δεν είναι απαραίτητα ίσα. **Σ** **Λ**
2. Αν $\vec{\alpha}=(3,-5)$ και $\vec{\beta}=(-6,10)$ τότε $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$. **Σ** **Λ**
3. Αν $\vec{u}=(x_1,-y_1)$ και $\vec{v}=(-x_1,y_1)$ τότε $\vec{u}=-\vec{v}$. **Σ** **Λ**
4. Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}=\vec{i}+3\vec{j}$ είναι το διάνυσμα $\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{i}+3\vec{j})$. **Σ** **Λ**
5. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(-2,2)$ είναι παράλληλο με το $\vec{\beta}=(3,-3)$. **Σ** **Λ**
6. Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διευθύνσεως. **Σ** **Λ**
7. Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\lambda\cdot\vec{i}+\lambda\cdot\vec{j}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας xOy. **Σ** **Λ**
8. Αν $\vec{\alpha}=(1,-3)$, $\vec{\beta}=(-1,-3)$ και $\vec{\gamma}=(2,-6)$ είναι $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. **Σ** **Λ**
9. Δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διευθύνσεως είναι ομόρροπα **Σ** **Λ**

10. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\lambda^2-3\lambda-4,\ \lambda-2)$ είναι μηδενικό με:

    Α. $\lambda=2$ **Β.** $\lambda=1$ **Γ.** $\lambda=-4$ **Δ.** $\lambda=0$

    Ε. για κανένα πραγματικό αριθμό λ

11. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta)$ είναι το μηδενικό με:

    Α. $\theta=2\kappa\pi$ **Β.** $\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

    Δ. $\theta=2\kappa\pi+\pi$ **Ε.** καμία τιμή του θ

12. Είναι $\vec{\alpha}=(\eta\mu\theta,\ \sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$ και $\kappa\in\mathbb{Z}$. Το $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ με:

    Α. $\theta=\kappa\pi$ **Β.** $\theta=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$

    Δ. $\theta=\kappa\pi+\pi$ **Ε.** $\theta=\kappa\pi-\pi$

13. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$=(ημθ, συνθ), είναι παράλληλο στο $\vec{\beta}$=(συνθ, ημθ) με:

Α. $\theta = 0$ **Β.** $\theta = \frac{\pi}{4}$ **Γ.** $\theta = \frac{\pi}{2}$

Δ. $\theta = \pi$ **Ε.** $\theta = \frac{2\pi}{3}$

14. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$= (1, λ), και $\vec{\beta}$=(4, - λ) είναι παράλληλα με:

Α. $\lambda = -1$ **Β.** $\lambda = 0$ **Γ.** $\lambda = 1$

Δ. $\lambda = 4$ **Ε.** $\lambda = -4$

15. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda, \frac{1}{\lambda})$ και $\vec{\beta}=(-1, \frac{8}{\lambda})$ είναι κάθετα με:

Α. $\lambda = -1$ **Β.** $\lambda = 0$ **Γ.** $\lambda = 1$

Δ. $\lambda = 2$ **Ε.** $\lambda = 8$

16. Με $\vec{\alpha}$= (1, - 3) και $\vec{\beta}$= (- 1, - 3) και $\vec{\gamma}$= (2, - 6) ισχύει:

Α. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ **Β.** $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ **Γ.** $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$

Δ. $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ **Ε.** $\vec{\alpha}-\vec{\gamma}=\vec{\beta}$

17. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda^2, 2\lambda)$ και $\vec{\beta}$=(1, - 2) είναι παράλληλα. Ο λ ισούται με:

Α. - 2 **Β.** - 1 **Γ.** $\sqrt{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** 2

18. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$=(- 2, 4) και $\vec{\beta}$=(3, - 2). Αν $\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε:

Α. $\kappa=\frac{2}{3}$ **Β.** $\kappa=-\frac{2}{3}$ **Γ.** κ=- 2 **Δ.** κ=2

Ε. κανένα $\kappa\in\mathbb{R}$.

19. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(2, -\sqrt{2})$. Παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι το:

Α. $\vec{x}=(-2, \sqrt{2})$ **Β.** $\vec{y}=(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ **Γ.** $\vec{z}=(-\sqrt{2}, 2)$

Δ. $\vec{\omega}=(1, -\sqrt{2})$ **Ε.** $\vec{v}=(\sqrt{2}, -2)$

Ομάδα Β

1. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων για τα οποία ισχύει:

i. $|x|=6$, **ii.** $|x|+|y|=0$, iii. $\sqrt{y^2}=6$

iv. $(x-2)^2+(y+3)^2=0$.

2. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων για τα οποία ισχύει:

i. $|x| = 2$, ii. $|x| > 2$, iii. $|x| < 2$

iv. $|y| = 3$, v. $|y| \leq 2$, vi. $|x| = |y|$

3. Έστω τα σημεία $A(2,4)$ και $B(4,2)$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy.

α. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

β. Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

γ. Βρείτε το $|\overrightarrow{AB}|$.

δ. Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του $\overrightarrow{AB}$.

ε. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $x'x$.

4. Έστω ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy και τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x,1)$ και $\vec{\beta} = (9,x)$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε τα διανύσματα να είναι αντίρροπα.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-1, 3)$ και $\vec{v}=(2, -1)$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = (x,\ y)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, **β.** $\vec{u}+\vec{w} = \vec{v}$

γ. $\vec{u}+2\vec{v} - 3\vec{w} = \vec{0}$, **δ.** $\vec{w} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

6. Στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων Οχψ θεωρούμε τα σημεία Α, Β του x'x, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιοριστεί ο $\lambda \in R$ ώστε το μέσο του ΑΒ να έχει τετμημένη 7.

7. Πάνω στο άξονα x'x παίρνουμε τα σημεία Α(3), Β(- 6), Γ(- 8). Εάν Μ, Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΓ και ΜΝ αντιστοίχως τότε:

α) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων Μ και Ν

β) Να βρείτε τις τετμημένες των Κ και Λ

γ) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα έτσι ώστε να είναι $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

8. Δίνονται τα σημεία Α (5, - 1), Β (1, 1) και Γ (2, 3). Να μελετηθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

9. Δίνονται τα σημεία Α (3, 2), Β (7, - 4). Να βρεθεί σημείο του x'x, ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι:

α) ισοσκελές με κορυφή το Μ

β) ορθογώνιο στο Μ

10. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα x'x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα σημεία Α (1, 2) και Β (3, 4) να είναι ελάχιστο.

11. Να βρείτε το σημείο Μ του άξονα ψψ', ώστε η διαφορά των αποστάσεών του από τα σημεία Α (- 3, 2) και Β (2, 5) να είναι μέγιστη.

12. Να εξετάσετε αν τα σημεία Α(-6,1), Β(-2,3) και Γ(-10, - 1) είναι συνευθειακά.

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-2,4)$ και $\vec{\beta}=(3,-2)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u}=(x,y)$ έτσι ώστε να είναι:

α. $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, **β.** $\vec{\alpha}+\vec{u}=\vec{\beta}$, **γ.** $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}$, $\kappa\in\mathbb{R}$,

δ. $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, **ε.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{u}=\vec{0}$.

14. Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$, $\vec{\beta}=(-1,1)$ και $\vec{\gamma}=(-2,3)$ να υπολογιστούν τα:

α. $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}|$, **β.** $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\beta}+\vec{\gamma}|+|\vec{\gamma}+\vec{\alpha}|$.

15. Αν $\vec{\alpha}=(2x-y,\ x+2y-4)$, $\vec{\beta}=(x-3y+2,\ -3x+2y-2)$, $\vec{\gamma}=(3,-2)$ και $\vec{\delta}=(-3,4)$ τότε:

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες (x_1,y_1) του διανύσματος $\vec{u}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$.

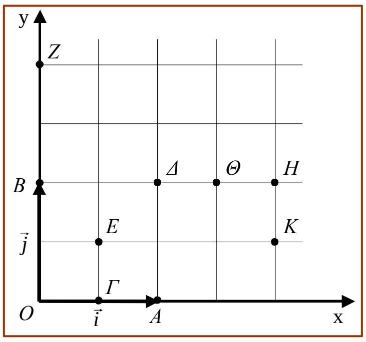
β) Να βρείτε τη σχέση ανάμεσα στα x και ψ ώστε $\vec{u}//\vec{\delta}$.

γ) Να υπολογιστούν τα x και y αν είναι $\vec{u}=\vec{0}$.

16. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων είναι $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$. Να εκφράσετε ως συνάρτηση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$:

α. Τα διανύσματα θέσεως των σημείων Γ, Δ, Ε, Ζ, Κ και Η.

β. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{H\Delta}$, $\overrightarrow{K\Delta}$, $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{ZA}$ και $\overrightarrow{KZ}$.



17. Αν τα σημεία $K\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$, $\Lambda\left(3,\frac{7}{2}\right)$, $M\left(4,\frac{5}{2}\right)$, $N(3,1)$ και $\Xi\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ και ΕΑ, αντιστοίχως, του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του πενταγώνου.

18. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τετμημένες δύο σημείων Α και Β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-4\lambda+3)x-17=0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το μέσον του τμήματος ΑΒ να έχει τετμημένη ίση με 4.

19. Δίνονται τα σημεία $M_1(\kappa_1,\lambda_1)$, $M_2(\kappa_2,\lambda_2)$, $M_3(\kappa_3,\lambda_3)$ και $M_4(\kappa_4,\lambda_4)$. Να εξετάσετε πότε τα σημεία αυτά είναι τα μέσα των διαδοχικών πλευρών τετραπλεύρου.

20. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,x,y$ να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2}+\sqrt{(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2}\geq\sqrt{(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2-\beta_1)^2}.$$

21. Δίνονται δύο μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ενός επιπέδου. Να αποδείξετε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{r}$ του επιπέδου αυτού μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κατά μοναδικό τρόπο.

22. Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}=(-2,6)$ σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}=(2,-1)$ και $\vec{w}=(3,1)$.

23. Έστω τα $\vec{\alpha}=(\text{συν}x, \text{ημ}x)$, $\vec{\beta}=(\text{συν}2x, \text{ημ}2x)$ και $\vec{\gamma}=(\text{συν}3x, \text{ημ}3x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(3, 0) και Β(1, 2) και G(3, 2), όπου G το βαρύκεντρό του. Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.

25. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,4)$, $\vec{\beta}=(2,3)$ και $\vec{\gamma}=(-2,2)$. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ σε δυο συνιστώσες από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη προς το $\vec{\beta}$ και η άλλη παράλληλη προς το $\vec{\gamma}$.

26. Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x^2-xy+y^2, x+y)$ και $\vec{\beta}=(-7,-5)$ να είναι αντίθετα.

27. Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(xy+x+y, x^2y+xy^2)$ και $\vec{\beta}=(11,30)$ να είναι ίσα.

28. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(4,3)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\beta}$ το οποίο να είναι παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$ και να έχει τριπλάσιο μέτρο από το $\vec{\alpha}$.

29. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνονται τα σημεία Α και Β. Αν οι τεταγμένες των Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-(\lambda^2-5\lambda+2)x-2004=0$, να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ να έχει τεταγμένη ίση με -1.

30. Δίνεται ότι οι συντεταγμένες ενός σημείου Α είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda^2-3\lambda+9)x+\lambda+2=0$ και οι συντεταγμένες ενός άλλου σημείου Β είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-(\lambda+2)x+3-2\lambda=0$ με $\lambda \in \mathbb{R}-\{-1\}$. Αν για το σημείο $P(x_P, y_P)$ ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$ και $x_P+y_P=5$, να προσδιορισθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}-\{-1\}$.

31. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$. Αν η τεταγμένη του σημείου Γ είναι ίση με το ημιάθροισμα των τεταγμένων των σημείων Α και Β και $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι αντίστοιχα οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma A}$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}=\frac{2}{\lambda_1}$.

Ομάδα Γ (Γενικές Ασκήσεις)

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $\text{ΒΡ} = \frac{1}{2}\text{ΡΓ}$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΡΑ}} + \overrightarrow{\text{ΡΒ}} + \overrightarrow{\text{ΡΔ}} = 2\overrightarrow{\text{ΒΑ}}$.

2. Αν Κ, Λ είναι αντίστοιχα τα κέντρα των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\overrightarrow{\text{ΑΕ}} + \overrightarrow{\text{ΒΖ}} + \overrightarrow{\text{ΓΗ}} + \overrightarrow{\text{ΔΘ}} = 4\overrightarrow{\text{ΚΛ}}$.

3. Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διάμεσοι ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} + \overrightarrow{\text{ΒΕ}} + \overrightarrow{\text{ΓΖ}} = \overrightarrow{0}$.

4. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Αν Κ είναι το μέσο του ΕΖ, να αποδείξετε ότι:
   i) $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΑΓ}} + \overrightarrow{\text{ΑΔ}} = 4\overrightarrow{\text{ΑΚ}}$ ii) $\overrightarrow{\text{ΚΑ}} + \overrightarrow{\text{ΚΒ}} + \overrightarrow{\text{ΚΓ}} + \overrightarrow{\text{ΚΔ}} = \overrightarrow{0}$

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{ΜΑ}} + \overrightarrow{\text{ΜΒ}} - 2\overrightarrow{\text{ΜΓ}}$ είναι σταθερό.

6. Αν για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$ και $\frac{|\overrightarrow{\alpha}|}{3} = \frac{|\overrightarrow{\beta}|}{5} = \frac{|\overrightarrow{\gamma}|}{2}$, να αποδείξετε ότι:
   i) $\overrightarrow{\alpha} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\gamma}$ ii) $\overrightarrow{\beta} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\gamma}$

7. Στην πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Ρ τέτοιο, ώστε $2\overrightarrow{\text{ΒΡ}} = 3\overrightarrow{\text{ΡΓ}}$. Να αποδειχθεί ότι $2\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + 3\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = 5\overrightarrow{\text{ΑΡ}}$.

8. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι
$$\overrightarrow{\text{ΑΕ}} + \overrightarrow{\text{ΑΖ}} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΑΓ}} + \overrightarrow{\text{ΑΔ}})$$

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$. Αν είναι $\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = 2\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\text{ΒΕ}} = -5\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\text{ΓΖ}} = 3\overrightarrow{\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΕ}} + \overrightarrow{\text{ΒΖ}} + \overrightarrow{\text{ΓΔ}} = \overrightarrow{0}$.

10. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και σημείο Γ τέτοιο, ώστε να ισχύει $\overrightarrow{\text{ΑΓ}} = \lambda\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$ και $\overrightarrow{\text{ΒΓ}} = \mu\overrightarrow{\text{ΑΒ}}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda - \mu = 1$.

11. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Κ το κέντρο του και Μ το μέσο του ΚΓ. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + 2\overrightarrow{\text{ΑΓ}} + \overrightarrow{\text{ΑΔ}} = 4\overrightarrow{\text{ΑΜ}}$.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ του χώρου. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ του επιπέδου του ΑΒΓ, ώστε να ισχύει $|\overrightarrow{\text{ΜΒ}} + \overrightarrow{\text{ΜΔ}}| = |\overrightarrow{\text{ΜΓ}} + \overrightarrow{\text{ΜΔ}}|$.

13. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει η σχέση $3\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + 5\overrightarrow{\text{ΑΔ}} = 8\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά.

14. Ποια είναι η θέση στο καρτεσιανό επίπεδο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει:

i) $|x| = 4$ ii) $|x| + |y| = 0$

iii) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$ iv) $\sqrt{y^2} = 2$

15. Να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^2 - xy + y^2,\ x + y)$ και $\vec{\beta} = (-7, -5)$ να είναι αντίθετα.

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^3 - 19,\ x - 1)$, $\vec{\beta} = (y^3, y)$. Να βρείτε τα x, y, έτσι ώστε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\eta\mu x,\ \sigma\upsilon\nu x)$, $\vec{\beta} = (\eta\mu 3x,\ \sigma\upsilon\nu 3x)$ και $\vec{\gamma} = (2\eta\mu 2x,\ 2\sigma\upsilon\nu 2x)$. Αν $x \in [0, \pi)$, να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

18. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x + 1,\ 5)$ και $\vec{\beta} = (5,\ x + 1)$ να είναι αντίρροπα.

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-3, -2)$. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ καθώς και η γωνία που σχηματίζει το $\vec{v}$ με τον άξονα $x'x$.

20. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A(4, -1)$, $B(6, 7)$, $\Delta(-2, -4)$. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

21. Δίνονται τα σημεία $B(1, 2)$ και $\Gamma(-1, 6)$. Να βρείτε σημείο Α του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με $(AB) = (A\Gamma)$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^2 + y^2,\ x)$ και $\vec{\beta} = (2xy + 4,\ 6 - y)$. Να βρείτε τα x, y ώστε να είναι $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

23. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ και είναι $K(1, 3)$, $\Lambda(3, -2)$, $M(4, 0)$, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

24. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 5)$ και $B(-10, -3)$. Να βρείτε:

i) σημείο του άξονα $x'x$ που να ισαπέχει από τα Α, Β,

ii) σημείο της ευθείας $(\varepsilon): y = -1$ που να ισαπέχει από τα Α, Β.

26. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-1, 0)$, $B(5, 2)$, $\Gamma(1, 2)$. Αν για τα σημεία Δ, Ε ισχύει $\vec{A\Delta} = -3\vec{\Delta\Gamma}$ και $\vec{BE} = -3\vec{E\Gamma}$, να αποδείξετε ότι:

i) το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τραπέζιο,

ii) $\vec{A\Delta} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AE}$.

Τεστ 1

1. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (3, -7)$, $\vec{\gamma} = (-2, 5)$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 8\vec{\gamma}$.

2. Να εξετασθεί αν είναι συνευθειακά τα σημεία $M_1(\alpha+\beta,\ \alpha-\beta)$, $M_2(\alpha,\ -\beta)$ και $M_3(\alpha+2\beta,\ 2\alpha-\beta)$.

3. Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε τα σημεία A και B του άξονα $x'x$, τα οποία έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (\lambda^2 - 5\lambda + 20)x - 1998 = 0$. Να προσδιορισθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το μέσο του AB να έχει τετμημένη 7.

4. Δίνονται τα σημεία A(3, 2), B(7, −4). Να βρεθεί σημείο του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με κορυφή M.

5. Κάθε διάνυσμα της στήλης A έχει μέτρο έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη B. Να συμπληρώσετε τον σχετικό πίνακα.

Στήλη A	**Στήλη B**
i) $-\sqrt{8}\,\vec{i} + \vec{j}$	α) 3
	β) $\sqrt{2}$
ii) $x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$	γ) $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$
	δ) $\sqrt{x^2+y^2}$
iii) $(2\eta\mu\theta)\,\vec{i} - (2\sigma\upsilon\nu\theta)\,\vec{j}$	ε) $\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta$
	στ) 2
iv) $(x-y)\,\vec{i} + 2\sqrt{xy}\,\vec{j}$	ζ) $\lvert x+y\rvert$

A	i	ii	iii	iv
B				

6. Κάθε διάνυσμα της στήλης A έχει συντελεστή διεύθυνσης έναν αριθμό που βρίσκεται στη στήλη B. Να συμπληρώσετε τον σχετικό πίνακα.

Στήλη A	**Στήλη B**
i) $2\vec{i} + 2\vec{j}$	α) $\sqrt{2}$
	β) 2
ii) $2\vec{i}$	γ) 0
	δ) 4
iii) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}\vec{j}$	ε) δεν ορίζεται
	στ) 1
iv) $2\vec{i} - 2\vec{j}$	ζ) −1

A	i	ii	iii	iv
B				

Τεστ 2

1. Κάθε διάνυσμα της στήλης Α σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οx γωνία θ, η οποία γράφεται στη στήλη Β. Να συμπληρωθεί ο σχετικός πίνακας.

Στήλη Α	Στήλη Β
i) $-3\vec{i}+3\sqrt{3}\vec{j}$	α) $\frac{\pi}{4}$
ii) $(1, 1)$	β) $\frac{\pi}{3}$
iii) $(1, \sqrt{3})$	γ) $\frac{5\pi}{6}$
iv) $(1, -1)$	δ) $\frac{2\pi}{3}$
	ε) $\frac{7\pi}{4}$

Α	i	ii	iii	iv
Β				

2. **Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-6, 1)$, $B(-2, 3)$ και $\Gamma(-10, -1)$ είναι συνευθειακά.**

3. **Να αντιστοιχίσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α με το μέτρο του που βρίσκεται στη στήλη Β και να συμπληρώσετε το σχετικό πίνακα.**

Στήλη Α *Διάνυσμα*	**Στήλη Β** *Μέτρο*
i) $(1, -1)$	α) 2
	β) 0
ii) $(2\eta\mu\theta, 2\sigma\upsilon\nu\theta)$	γ) 1
	δ) 3
iii) $(\sqrt{2}, 1)$	ε) $\sqrt{3}$
iv) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	στ) $\sqrt{2}$

Α	i	ii	iii	iv
Β				

4. **Σε ένα σύστημα συντεταγμένων οι τεταγμένες δύο σημείων Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-(\lambda^2-5\lambda+2)x-1998=0$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το μέσο του τμήματος ΑΒ να έχει τεταγμένη ίση με -1.**

Τεστ 3

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-3\lambda^2 + 7\lambda - 2,\ \lambda^2 - 5\lambda + 6)$ και $\vec{\beta} = (2\lambda^2 - 3\lambda - 2,\ \lambda^2 - 3\lambda + 2)$. Να εξετάσετε πότε ισχύει:

   i) $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \| y'y$ ii) $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \| x'x$
   iii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

2. Να γράψετε τα παρακάτω διανύσματα σε μια σειρά, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης καθενός να είναι μικρότερος από τον συντελεστή διεύθυνσης του επόμενού του:

$$\vec{\alpha} = (1, \sqrt{2}),\quad \vec{\beta} = \left(-\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right),\quad \vec{\gamma} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \vec{\delta} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\right)$$

3. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός x, έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x, 1)$ και $\vec{\beta} = (9, x)$ να είναι αντίρροπα.

4. Αν τα σημεία $K(4, 0)$, $\Lambda(6, 2)$ και $M(3, 5)$ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(0, -2)$, $B(7, -3)$, $\Gamma(8, -2)$. Να βρείτε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

6. Αν $A(-2, 1)$, $B(-3, -2)$ και $\Gamma(6, 0)$ είναι τρεις διαδοχικές κορυφές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να βρείτε τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Δ.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ για το οποίο ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM} = \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + \mu \cdot \overrightarrow{BA}$. Να αποδειχθούν τα εξής:

   i. $\lambda = \mu = \dfrac{1}{2}$.

   ii. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ.

Διαγώνισμα (Γενικό)

Θέμα 1ον

1. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Τι καλούμε **«γραμμικό συνδυασμό»** των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$; **Μον. 5**

2. **α.** Πότε δυο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **«παράλληλα» ή «συγγραμμικά»**; **Μον. 2,5**

β. Αναφέρατε μια συνθήκη **συγγραμμικότητας** των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. **Μον. 2,5**

3. Έστω ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy και το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$. Πότε και πως ορίζεται ο **συντελεστής διεύθυνσης** του διανύσματος $\vec{\alpha}$; **Μον. 5**

4. Έστω ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy και το μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,y)$.

α. Ορίστε τη **γωνία** ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$; **Μον. 5**

β. Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$, τι σχέση υπάρχει μεταξύ του συντελεστή διεύθυνσής του και της γωνίας ω που σχηματίζει το $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$; **Μον. 5**

Θέμα 2ον

1. Είναι σωστό ή λάθος ότι:

α. για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

Σ Λ **Μον. 3**

β. για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|-|\vec{\gamma}|$.

Σ Λ **Μον. 3**

γ. δυο διανύσματα με ίσους συντελεστές διεύθυνσης είναι ομόρροπα.

Σ Λ **Μον. 3**

δ. το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\lambda\cdot\vec{i}+\lambda\cdot\vec{j}$ με $\lambda\in\mathbb{R}$, στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy, βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{xOy}$.

Σ Λ **Μον. 3**

2. Έστω τα σημεία $A(2,4)$ και $B(4,2)$ στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy.

α. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. **Μον. 2**

β. Βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. **Μον. 2**

γ. Βρείτε το $|\overrightarrow{AB}|$. **Μον. 3**

δ. Βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης του $\overrightarrow{AB}$. **Μον. 3**

ε. Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{AB}$ με τον άξονα $x'x$. **Μον. 3**

Θέμα 3ον

α. Για τα σημεία Α,Β,Γ και Ο ενός επιπέδου ισχύει η σχέση $12\cdot\overrightarrow{OA}-7\cdot\overrightarrow{OB}-5\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$. Αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά. **Μον. 12**

β. Δίνονται τα σημεία A,B,Γ,Δ, για τα οποία ισχύει ότι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{BE}$. Αποδείξτε ότι τα σημεία Α και Β συμπίπτουν. **Μον. 13**

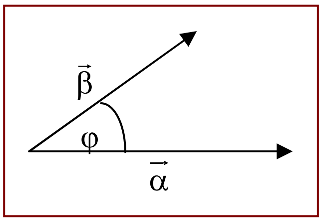
Θέμα 4ον

α. Έστω ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy και τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x,1)$ και $\vec{\beta}=(9,x)$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $x\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε τα διανύσματα να είναι αντίρροπα. **Μον.12,5**

β. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy δίνονται τα σημεία Α και Β. Αν οι τεταγμένες των Α και Β είναι ρίζες της εξίσωσης $2x^2-(\lambda^2-5\lambda+2)x-2004=0$, να βρείτε τη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ να έχει τεταγμένη ίση με -1. **Μον.12,5**

Μάθημα 5ον

• *Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων*



➢ Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δυο μη μηδενικά διανύσματα. Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο των** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\phi$, όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

➢ Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=0$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

🕮 Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=10$ και $\phi=\frac{2\pi}{3}$ είναι:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\frac{2\pi}{3}=2\cdot10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-10.$$

🕮 **Ιδιότητες**

➢ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

➢ Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ και αντιστρόφως.

➢ Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

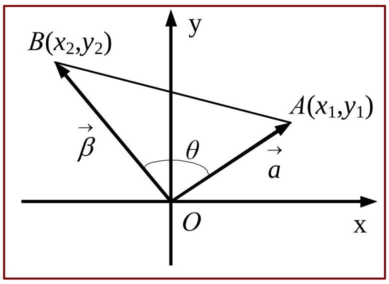
➢ Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

➢ Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\vec{\alpha}^2$ και λέγεται **τετράγωνο του** $\vec{\alpha}$. Έχουμε: $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\alpha}|\text{συν}0=|\alpha|^2$.

Επομένως $\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2$.

➢ Ειδικότερα, για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ του καρτεσιανού επίπεδου ισχύουν: $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$ και $\vec{i}^2=\vec{j}^2=1$.

• *Αναλυτική Έκφραση Εσωτερικού Γινομένου*



Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$. Με αρχή το Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$. Από το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΟΑΒ έχουμε ότι $(AB)^2=(OA)^2+(OB)^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\widehat{O}B$ (1), η οποία ισχύει και στην περίπτωση που τα σημεία Ο,Α,Β είναι συνευθειακά.

Είναι $(AB)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ (2), $(OA)^2=x_1^2+y_1^2$ και $(OB)^2=x_2^2+y_2^2$ (3).

Επομένως, η (1) λόγω των (2) και (3) έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

$$x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B$$

και επειδή $(OA)(OB)\text{συν}A\hat{O}B=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, έχουμε τελικά: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$.

Δηλαδή:

“Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους”.

📖 Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}=(-4,5)$ και $\vec{\beta}=(4,-5)$ είναι: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(-4)\cdot4+5(-5)=-16-25=-41$.

• *Άλλες Ιδιότητες του Εσωτερικού Γινομένου*

Με τη βοήθεια της αναλυτικής έκφρασης του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

- $\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}),\quad \lambda\in\mathbb{R}$.
- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$ όπου $\lambda_1=\lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2=\lambda_{\vec{\beta}}$, $(\vec{\alpha},\vec{\beta}\not\parallel y'y)$

Πράγματι, αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\gamma}=(x_3,y_3)$, τότε έχουμε:

- $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=(\lambda x_1,\lambda y_1)(x_2,y_2)=(\lambda x_1)x_2+(\lambda y_1)y_2=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$ και

  $\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=(x_1,y_1)(\lambda x_2,\lambda y_2)=x_1(\lambda x_2)+y_1(\lambda y_2)=\lambda(x_1x_2+y_1y_2)=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

  Άρα, $(\lambda\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot(\lambda\vec{\beta})=\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$.

- $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=(x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3,y_2+y_3)=x_1(x_2+x_3)+y_1(y_2+y_3)=$
  $(x_1x_2+x_1x_3)+(y_1y_2+y_1y_3)=(x_1x_2+y_1y_2)+(x_1x_3+y_1y_3)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

- $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0\Leftrightarrow y_1y_2=-x_1x_2\Leftrightarrow\dfrac{y_1}{x_1}\dfrac{y_2}{x_2}=-1\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow\lambda_1\lambda_2=-1$.

Μελέτησε προσεκτικά τα επόμενα !!!

- Πρόσεξε ότι δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή δεν ισχύει η ισότητα: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$, διότι το $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\gamma}$, ενώ το $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$ είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$.

- Πρόσεξε ότι δεν έχει νόημα η παράσταση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, διότι δεν καθορίζεται το πώς γίνεται η πράξη!

- Πρόσεξε όμως ότι το $\vec{\alpha}^3$ (με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$) που ορίζεται σαν $\vec{\alpha}^3=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\alpha}=|\vec{\alpha}|^2\cdot\vec{\alpha}$, έχει νόημα και μάλιστα είναι ένα διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, διότι $|\vec{\alpha}|^2>0$.

- Γενικά οι περιττές δυνάμεις του $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, δηλαδή οι εκφράσεις $\vec{\alpha}^3$, $\vec{\alpha}^5$, $\vec{\alpha}^7$, ... , $\vec{\alpha}^{2\nu+1}$ με $\nu\in\mathbb{N}$, είναι διανύσματα ομόρροπα του $\vec{\alpha}$, ενώ οι εκφράσεις $\vec{\alpha}^2$, $\vec{\alpha}^4$, $\vec{\alpha}^6$, ... , $\vec{\alpha}^{2\nu}$ με $\nu\in\mathbb{N}$, είναι θετικοί αριθμοί.

- Αν $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ τότε ισχύει η σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, δηλαδή μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη μιας διανυσματικής ισότητας εσωτερικά με το ίδιο διάνυσμα!

- Άμεση συνέπεια του προηγούμενου είναι ότι μπορούμε να υψώσουμε και τα δυο μέλη μιας διανυσματικής ισότητας στο τετράγωνο, δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή: $\vec{\alpha}=\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2\Rightarrow|\vec{\alpha}|^2=|\vec{\beta}|^2$.

- Πρόσεξε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής στο εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή από τη σχέση $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ δεν συνεπάγεται η $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$. Γενικά να μη χωρίζεις ποτέ το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

- Πρόσεξε ότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\left(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\phi\right)^2=|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\phi$ και μην κάνεις το λάθος να γράψεις ότι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2$ γιατί είναι λάθος!!!

- Πρόσεξε ότι μπορείς να εφαρμόζεις τις γνωστές ταυτότητες:
$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+|\vec{\beta}|^2$,
$\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+|\vec{\beta}|^2$,
$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2$, κ.λ.π.

• *Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων*

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\text{συν}\theta$ και επομένως, $\text{συν}\theta=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$. Είναι όμως $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x_1x_2+y_1y_2$, $|\vec{\alpha}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$.

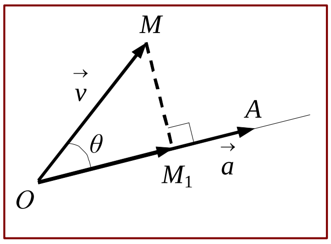
Επομένως, $\text{συν}\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Για παράδειγμα, αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,1)$, τότε:

$$\text{συν}\theta=\frac{1\cdot3+2\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ οπότε } \theta=\frac{\pi}{4}.$$

• *Προβολή Διανύσματος σε Διάνυσμα*

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ του επιπέδου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Με αρχή ένα τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OM}=\vec{v}$. Από το Μ φέρνουμε κάθετο στη διεύθυνση του $\overrightarrow{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ λέγεται **προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$** και συμβολίζεται με $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$. Δηλαδή, $\overrightarrow{OM_1}=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.



Αποδεικνύεται ότι η προβολή του $\vec{v}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο.

Θεώρημα Προβολών

Για το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ έχουμε:

$\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot(\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M})=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}+\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{M_1M}=\vec{\alpha}\cdot\overrightarrow{OM_1}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$,
επομένως: $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$.

📖 **Μελέτησε πολύ προσεκτικά τα επόμενα!**

Μέθοδοι και τεχνικές για την επίλυση των ασκήσεων

◆ 1η Μέθοδος (Μέθοδος του τετραγωνισμού)

α. Αν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση με μέτρα (ισότητα ή ανισότητα), αφού εξασφαλίσουμε ότι και τα δυο μέλη είναι ομόσημα, υψώνουμε στο τετράγωνο και αποδεικνύουμε τη πρόταση που προκύπτει.

Εφαρμογή 1

Να εξετάσετε πότε ισχύει:

(i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

(ii) $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$

Λύση

(i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=(|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|)^2 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2+2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|+|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

(ii) $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \Leftrightarrow (|\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|)^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}| \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=-1 \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

β. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος $\vec{v}$ του οποίου δεν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες εργαζόμαστε ως εξής:
Θα ξεκινάμε από το τετράγωνο του μέτρου του, θα το αντικαθιστούμε με το εσωτερικό του τετράγωνο και εφαρμόζοντας την γνωστή ταυτότητα $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\vec{\beta}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\left|\vec{\beta}\right|^2$ θα βρίσκουμε το $\left|\vec{v}\right|^2$, οπότε παίρνοντας τη τετραγωνική ρίζα του αποτελέσματος θα υπολογίζουμε το μέτρο $\left|\vec{v}\right|$.

Εφαρμογή 2

Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $\hat{\phi}=(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$ και $\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, να βρεθεί το $|\vec{u}|$.

Λύση

$\left|\vec{u}\right|^2=\left|3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(3\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=9\cdot\left|\vec{\alpha}\right|^2-6\cdot\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)+\left|\vec{\beta}\right|^2=9\cdot\left|\vec{\alpha}\right|^2-6\cdot\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot\sigma\upsilon\nu\phi+\left|\vec{\beta}\right|^2=$

$=9\cdot|\vec{\alpha}|^2-6\cdot|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+|\vec{\beta}|^2=9\cdot 2^2-6\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+3^2=36-18+9=27$, οπότε $|\vec{u}|=\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 3}=3\cdot\sqrt{3}$.

◆ 2η Μέθοδος

Η βασική χρησιμότητα του εσωτερικού γινομένου δυο διανυσμάτων είναι το να αποδεικνύουμε τη καθετότητα δυο διανυσμάτων.

Για να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, αρκεί να αποδείξουμε ότι το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με το μηδέν και αντίστροφα, δηλαδή «$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$».

Εφαρμογή 3

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$ και $\vec{v}=|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\cdot\vec{\alpha}$ είναι κάθετα.

Απόδειξη

Έχουμε

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(|\vec{\alpha}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{\alpha})(|\vec{\alpha}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha})=|\vec{\alpha}|^2\,\vec{\beta}^2-|\vec{\beta}|^2\,\vec{\alpha}^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-|\vec{\beta}|^2|\vec{\alpha}|^2=0$,

οπότε $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Εφαρμογή 4

Να βρεθούν τα διανύσματα που είναι κάθετα στο $\vec{u}=(3,-2)$ και έχουν μέτρο ίσο με 1.

Λύση

Έστω $\vec{v}=(x,y)$ το διάνυσμα που ζητάμε, τότε ισχύουν τα εξής:

$\begin{cases}\vec{u}\cdot\vec{v}=0\\ |\vec{v}|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=0\ (1)\\ x^2+y^2=1\ (2)\end{cases}$. Από την (1) έχουμε ότι $y=\frac{3}{2}x$ (3) και αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=1\Leftrightarrow x^2+\frac{9}{4}x^2=1\Leftrightarrow$ $4x^2+9x^2=4\Leftrightarrow 13x^2=4\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{13}\Leftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{13}}$ ή $x=-\frac{2}{\sqrt{13}}$. Η (3) για $x=\frac{2}{\sqrt{13}}$ μας δίνει $y=\frac{3}{\sqrt{13}}$, ενώ για $x=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ μας δίνει $y=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, οπότε έχουμε ότι $\vec{v}=(x,y)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ ή $\vec{v}=(x,y)=\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

◆ 3η Μέθοδος

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη γωνία $\hat{\theta}$ δυο διανυσμάτων $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ θα υπολογίζουμε το $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

Εφαρμογή 5

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που έχουν μέτρα $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=1$ και σχηματίζουν γωνία $\phi=\frac{\pi}{6}$. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{y}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Λύση

Αν θ είναι η γωνία των $\vec{x}$ και $\vec{y}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$. Αρκεί, επομένως, να υπολογίσουμε το $\vec{x}\cdot\vec{y}$ και τα μέτρα $|\vec{x}|$ και $|\vec{y}|$ των $\vec{x},\vec{y}$.

Έχουμε λοιπόν κατά σειρά:

- $\vec{x}\cdot\vec{y}=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{a}^2-\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2=3-1=2$.
- $|\vec{x}|^2=\vec{x}^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu\phi=$
  $3+1+2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7$.
- $|\vec{y}|^2=\vec{y}^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu\phi=$
  $3+1-2\cdot\sqrt{3}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$.

  Άρα, $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{2}{\sqrt{7}\cdot1}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$, οπότε $\theta\cong41^0$.

Εφαρμογή 6

Αν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{2\pi}{3}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Λύση

Αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$, οπότε πρέπει κατά σειρά να υπολογισθούν τα $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $|\vec{u}|$ και $|\vec{v}|$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=2|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+4\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-4|\vec{\beta}|^2=$
  $2|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-4|\vec{\beta}|^2=2+2\cdot1\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-4=-3$.
- $|\vec{u}|^2=(2\vec{\alpha}+4\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2+16\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+16\vec{\beta}^2=4+16\left(-\frac{1}{2}\right)+16=12\Rightarrow|\vec{u}|=2\sqrt{3}$.
- $|\vec{v}|^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=3\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{3}$.

  Επομένως $\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{-3}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$, άρα $\phi=\frac{2\pi}{3}$.

◆ 4η Μέθοδος

Για να βρούμε τη προβολή ενός διανύσματος $\vec{v}$ πάνω σε ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ θα ξεκινάμε από το θεώρημα των προβολών, $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, και επειδή η προβολή του $\vec{v}$ πάνω σε στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα συγγραμμικό του $\vec{\alpha}$, θα θέτουμε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}=\lambda\cdot\vec{\alpha}$ και θα υπολογίζουμε το $\lambda\in\mathbb{R}$.

Εφαρμογή 7

Να βρεθεί η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, αν $|\vec{\alpha}|=\frac{1}{2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{3}$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ είναι ίση με $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

Λύση

Έστω $\vec{v}_1=\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$. Τότε θα ισχύει $\vec{v}_1=\lambda\vec{\alpha}$, με $\lambda\in\mathbb{R}$. Επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, έχουμε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\vec{v}_1\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\vec{\alpha}\cdot\lambda\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{\alpha}^2\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{v}|\,\text{συν}\phi=\lambda\cdot|\vec{\alpha}|^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\lambda=3$. Άρα, $\vec{v}_1=3\vec{\alpha}$.

◆ 5η Μέθοδος

Για να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να έχει τη διεύθυνση ενός γνωστού διανύσματος $\vec{\alpha}$, θα εργαζόμαστε ως εξής:

Θα θέτουμε $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}\,(1)$ με $\vec{x}\perp\vec{y}$ και $\vec{x}//\vec{\alpha}$. Αφού $\vec{x}//\vec{\alpha}$ θα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}$, οπότε η (1) γίνεται: $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{y}$. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη εσωτερικά με $\vec{\alpha}$, οπότε έχουμε $\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=(\lambda\vec{\alpha}+\vec{y})\cdot\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}+\vec{y}\cdot\vec{\alpha}$ (2). Επειδή $\left.\begin{cases}\vec{x}\perp\vec{y}\\ \vec{x}//\vec{\alpha}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\vec{y}\perp\vec{\alpha}$, οπότε $\vec{y}\cdot\vec{\alpha}=0$, και η (2) γίνεται: $\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=\lambda\left|\vec{\alpha}\right|^2+0\Leftrightarrow\lambda=\frac{\vec{v}\cdot\vec{\alpha}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}$.

Εφαρμογή 8

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,1)$ και $\vec{v}=(1,2)$. Να αναλυθεί το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

Λύση

Έστω $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}\,(1)$ με $\vec{x}\perp\vec{y}$ και $\vec{x}//\vec{\alpha}$. Αφού $\vec{x}//\vec{\alpha}$ θα υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}$, οπότε η (1) γίνεται: $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\vec{y}$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη εσωτερικά με $\vec{\alpha}$ και έχουμε $\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=(\lambda\vec{\alpha}+\vec{y})\cdot\vec{\alpha}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}+\vec{y}\cdot\vec{\alpha}$ (2).

Επειδή $\left.\begin{cases}\vec{x}\perp\vec{y}\\ \vec{x}//\vec{\alpha}\end{cases}\right\}\Leftrightarrow \vec{y}\perp\vec{\alpha}$, οπότε $\vec{y}\cdot\vec{\alpha}=0$, και η (2) γίνεται:

$$\vec{v}\cdot\vec{\alpha}=\lambda\left|\vec{\alpha}\right|^2+0\Leftrightarrow\lambda=\frac{\vec{v}\cdot\vec{\alpha}}{\left|\vec{\alpha}\right|^2}=\frac{3\cdot1+1\cdot2}{\left(\sqrt{3^2+1^2}\right)^2}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{\alpha}=\frac{1}{2}(3,1)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ και $\vec{y}=\vec{v}-\vec{x}=(1,2)-\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

Μελέτησε προσεκτικά τις επόμενες εφαρμογές !!!

Εφαρμογή 9

Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, να αποδειχτεί ότι:

(i) $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ (ii) $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2\le\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

Λύση

i. Αν θ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε έχουμε: $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\theta\right|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot|\text{συν}\theta|\le|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

Η ισότητα ισχύει μόνο, αν $\text{συν}\theta=\pm1$, δηλαδή, μόνο αν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

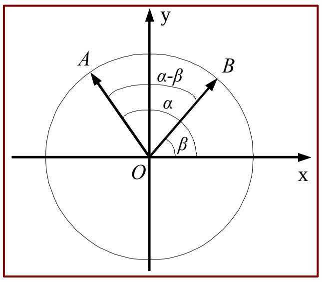
ii. Επίσης, έχουμε $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2=|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|^2\le(|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|)^2=|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$.

Η ισότητα ισχύει, όπως και προηγουμένως, μόνο όταν $\vec{\alpha}//\vec{\beta}$.

Εφαρμογή 10

Να αποδειχτεί ότι $\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\text{ημ}\beta$, όπου $0\le\beta<\alpha\le\pi$.

Απόδειξη



Αν στον τριγωνομετρικό κύκλο τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ σχηματίζουν με τον άξονα x′x γωνίες α και β αντιστοίχως, τότε θα είναι $\overrightarrow{OA}=(\text{συν}\alpha,\text{ημ}\alpha)$ και $\overrightarrow{OB}=(\text{συν}\beta,\text{ημ}\beta)$. Επομένως, θα έχουμε:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\text{συν}(\alpha-\beta)=1\cdot1\cdot\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}(\alpha-\beta)$ και

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\text{συν}\alpha,\text{ημ}\alpha)(\text{συν}\beta,\text{ημ}\beta)=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$.

Άρα, $\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\cdot\text{συν}\beta+\text{ημ}\alpha\cdot\text{ημ}\beta$.

Εφαρμογή 11

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου με $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 1$. Να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{x}$, για το οποίο ισχύει $\vec{\gamma}+\vec{x}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}$.

Σχόλιο

Το διάνυσμα $\vec{x}$ εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος στο εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}$ απ' όπου είναι αδύνατο να απομονωθεί. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό θα δημιουργήσουμε και στο πρώτο μέλος το $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}$, πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της δεδομένης σχέσης εσωτερικά με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Λύση

Έχουμε λοιπόν:

$\vec{\gamma}+\vec{x}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\left[\vec{\gamma}+\vec{x}\right]=\vec{\alpha}\cdot\left[(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}\right] \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}) \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})-\vec{\alpha}\cdot\vec{x} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1)$ και επειδή $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 1$ είναι και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1\neq 0$, οπότε έχουμε $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}$. Αντικαθιστώντας στην αρχική σχέση το $\vec{\alpha}\cdot\vec{x}$ με το $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}$ έχουμε: $\vec{\gamma}+\vec{x}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}\right)\cdot\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{x}=\left(\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-1}\right)\cdot\vec{\beta}-\vec{\gamma}$.

Εφαρμογή 12

Έστω $x,y\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει ότι $x^2+y^2=49$. Να αποδειχθεί ότι $|12x-16y|\leq 140$.

Σχόλιο

Παρατηρούμε ότι το $x^2+y^2=49$ γράφεται $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=7^2$ που σημαίνει ότι αν καλέσουμε $\vec{\alpha}=(x,y)$, τότε $|\vec{\alpha}|=7$. Επίσης αν καλέσουμε $\vec{\beta}=(12,-16)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x\cdot 12+y\cdot(-16)=12x-16y$, οπότε $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|=|12x-16y|$.

Λύση

Έχουμε λοιπόν τα εξής:

$|\vec{\beta}|=\sqrt{12^2+(-16)^2}=\sqrt{144+256}=\sqrt{400}=20$.

Από την εφαρμογή 9 γνωρίζουμε ότι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\leq|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}| \Leftrightarrow |12x-16y|\leq 7\cdot 20 \Leftrightarrow$ $|12x-16y|\leq 140$.

Εφαρμογή 13

Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-6x+13}\geq\sqrt{13}$.

Σχόλιο

Το πρώτο υπόριζο γράφεται $x^2-2x+2=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1^2$.

Το δεύτερο υπόριζο γράφεται $x^2-6x+13=x^2-6x+9+4=(3-x)^2+2^2$

Λύση

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x-1,1)$ και $\vec{\beta}=(3-x,2)$.

Έχουμε $|\vec{\alpha}|=\sqrt{(x-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2-2x+2}$ και $|\vec{\beta}|=\sqrt{(3-x)^2+2^2}=\sqrt{x^2-6x+13}$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, δηλαδή ισχύει ότι $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|\geq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ (1).

Όμως $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(x-1,1)+(3-x,2)=(x-1+3-x,1+2)=(2,3)$, οπότε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$, άρα η (1) γίνεται $\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-6x+13}\geq\sqrt{13}$.

Εφαρμογή 14

Έστω δυο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$ και θ η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, να αποδειχθεί ότι $(\eta\mu\theta)|\vec{\alpha}|\leq 1$.

Λύση

$|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1 \Leftrightarrow$ (μέθοδος του τετραγωνισμού) $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|^2=1^2 \Leftrightarrow \left(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}\right)^2=1 \Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+2\lambda(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\lambda^2\vec{\beta}^2=1 \Leftrightarrow \vec{\beta}^2\lambda^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\lambda+\vec{\alpha}^2-1=0$. Η τελευταία εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς λ για την οποία μας εξασφαλίζεται ότι υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ που την επαληθεύει, οπότε έχει λύση στο $\mathbb{R}$, άρα $\Delta\geq 0$.

$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 4\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2-4\vec{\beta}^2\left(\vec{\alpha}^2-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow 4\left[\left(|\vec{\alpha}|^2\cdot|\vec{\beta}|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)-\left|\vec{\beta}^2\right|\left(\left|\vec{\alpha}^2\right|-1\right)\right]\geq 0 \Leftrightarrow$

$4|\vec{\beta}|^2\left[\left(|\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)-\left(\left|\vec{\alpha}^2\right|-1\right)\right]\geq 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\left|\vec{\alpha}^2\right|+1\geq 0 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2(1-\eta\mu^2\theta)-\left|\vec{\alpha}^2\right|+1\geq 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2-|\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2\theta-\left|\vec{\alpha}^2\right|+1\geq 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2\eta\mu^2\theta\leq 1 \Leftrightarrow$

$|(\eta\mu\theta)\vec{\alpha}|\leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu\theta||\vec{\alpha}|\leq 1$. Επειδή τώρα $\theta\in[0,\pi]$, είναι $\eta\mu\theta\geq 0$ $\Leftrightarrow |\eta\mu\theta|=\eta\mu\theta$, οπότε η τελευταία σχέση γίνεται $(\eta\mu\theta)|\vec{\alpha}|\leq 1$.

Εφαρμογή 15

Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ $\left(|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1\right)$. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

Λύση

$0\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\leq|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}| \Leftrightarrow 0\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\leq 1+1+1 \Leftrightarrow 0\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|\leq 3 \Leftrightarrow$

$0\leq|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|^2\leq 3^2 \Leftrightarrow 0\leq\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+2(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})+2(\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha})\leq 9 \Leftrightarrow$

$0\leq 1+1+1+2\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\right]\leq 9 \Leftrightarrow -3\leq\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\right]\leq 6 \Leftrightarrow$

$-\dfrac{3}{2}\leq\left[\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\right]\leq 3$, οπότε $\min\left\{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\right\}=-\dfrac{3}{2}$ και

$\max\left\{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\right\}=3$.

Ασκήσεις

Ομάδα Α

1. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}>0$ τότε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ είναι οξεία. Σ Λ

2. Το $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ

3. Το $(\lambda\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ

4. Το $(\vec{\alpha}\cdot\lambda)\cdot\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ παριστάνει διάνυσμα. Σ Λ

5. Μπορούμε να γράφουμε: $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$ Σ Λ

6. Αν $\vec{\alpha}=(3,5)$ και $\vec{\beta}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right)$ τότε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$. Σ Λ

7. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε είναι πάντα $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{2}$. Σ Λ

8. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{i}+\vec{j}$ και $\vec{\beta}=-\vec{i}+\vec{j}$ είναι κάθετα. Σ Λ

9. Τα αντίθετα διανύσματα έχουν ίσα εσωτερικά γινόμενα. Σ Λ

10. Αν είναι $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})>\frac{\pi}{2}$ τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}<0$. Σ Λ

11. Όταν οι συντελεστές δυο διανυσμάτων είναι αντίστροφοι αριθμοί τότε τα διανύσματα είναι κάθετα. Σ Λ

12. Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ τότε είναι $\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. Σ Λ

13. Υπάρχουν $x\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x+1,3)$ και $\vec{\beta}=(x,1)$ να είναι κάθετα. Σ Λ

14. Υπάρχουν $\theta\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\frac{1}{\text{συν}\theta},\frac{1}{\text{ημ}\theta}\right)$ και $\vec{\beta}=(\text{ημ}\theta,\text{συν}\theta)$ να είναι κάθετα. Σ Λ

15. Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\delta}}\vec{\alpha}$. Σ Λ

16. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\left(\lambda,\frac{1}{\lambda}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(-1,\frac{8}{\lambda}\right)$ είναι κάθετα με:

Α. $\lambda=-1$ **Β.** $\lambda=0$ **Γ.** $\lambda=1$
Δ. $\lambda=2$ **Ε.** $\lambda=8$

17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-2)$, $\vec{\beta}=(1,-1)$ και $\vec{\gamma}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Σωστή είναι η σχέση:

Α. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ **Β.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\beta}$ **Γ.** $\vec{\alpha}//\vec{\beta}//\vec{\gamma}$
Δ. $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$ **Ε.** $\vec{\alpha}=\vec{\beta}-2\vec{\gamma}$

18. Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 4)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 4, 1)$ είναι κάθετα. Ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με:

Α. 0 **Β.** - 2 **Γ.** 2 **Δ.** 4 **Ε.** $\frac{1}{4}$

19. Αν $|\vec{\kappa}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$, $\vec{\kappa} \cdot \vec{v} = -3$ και $0 < \theta = (\widehat{\vec{\kappa}, \vec{v}}) < \pi$, τότε η γωνία θ ισούται με:

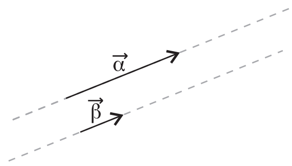
Α. 0° **Β.** 30° **Γ.** 60° **Δ.** 120° **Ε.** 150°

20. Είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Από τις παρακάτω σχέσεις δεν μπορεί να ισχύει:

Α. $\vec{\alpha} = 0$ **Β.** $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **Γ.** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{2}$,

Δ. $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{4}$ **Ε.** $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$

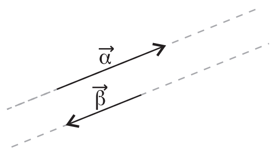
21. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:



Α. $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Β.** $-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Γ.** 0

Δ. $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

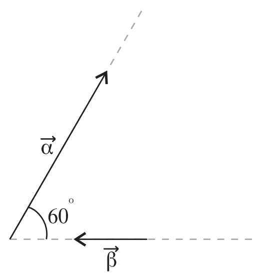
22. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:



Α. 0 **Β.** $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Γ.** $-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Δ. $\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

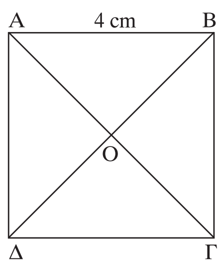
23. Σύμφωνα με το σχήμα, το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ισούται με:



Α. $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Β.** $\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Γ.** $\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

Δ. $-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ **Ε.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

24. Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4 cm. Ποια από τις παρακάτω ισότητες είναι λανθασμένη;



Α. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} = 0$ **Β.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 8$

Γ. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 16$ **Δ.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -16$

Ε. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = 8$

25. Αν $\vec{\alpha}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα και $\vec{\beta}$ ένα οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα, τότε το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ ισούται με:

Α. $\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ **Β.** $\vec{\alpha}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ **Γ.** $\vec{\beta}\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$

Δ. $|\vec{\alpha}|\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$ **Ε.** $|\vec{\beta}|\cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$

26. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά. Το συν$(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta})$ ισούται με:

Α. $\dfrac{|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|}{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$ **Β.** $\dfrac{\vec{\alpha}|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|\cdot\vec{\beta}}$ **Γ.** $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ **Δ.** $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$ **Ε.** $\dfrac{|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$

Ομάδα Β

1. Αν $\vec{\alpha}=(-1,3)$ και $\vec{\beta}=(2,5)$, τότε

(i) Να βρείτε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, $(2\vec{\alpha})\cdot(-3\vec{\beta})$ και $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\cdot(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$

(ii) Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}$ να είναι ίσο με μηδέν. Ποια η σχέση όλων των διανυσμάτων $\vec{u}$ στην περίπτωση αυτή;

2. Αν $\vec{u}=(1,2)$, $\vec{v}=(4,2)$ και $\vec{w}=(6,0)$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\vec{u}\cdot(7\vec{v}+\vec{w})$, $|\vec{u}|(\vec{v}\cdot\vec{w})$, $|(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}|$ και $(|\vec{u}|\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}$.

3. Να υπολογιστεί το γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{6}$

β) $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{2}$, και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=75^\circ$

γ) $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{3}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{12}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=135^\circ$.

4. Αν $\vec{\alpha}=(1,0)$ και $\vec{\beta}=(1,1)$, να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε:

(i) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα

(ii) Τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

5. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε τον $\kappa\in\mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u}=3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{6}$. Αν $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$ και $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ να βρεθούν:

α) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

β) $\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2$

γ) $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2$

δ) $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$

ε) $\left(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\right)\cdot\left(4\vec{\alpha}-5\vec{\beta}\right)$.

7. Αν $\vec{\alpha}=(\kappa,1)$ και $\vec{\beta}=(4,3)$, να βρείτε τον $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

(i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ (ii) $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{4}$ (iii) $\vec{\alpha}\,//\,\vec{\beta}$.

8. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά, να αποδείξετε ότι:

$\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow \text{συν}(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$.

9. Να αποδείξετε ότι για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{\beta}^2\cdot\vec{\alpha}-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$.

10. Δίνονται τα σημεία $A(3,-2)$, $B(6,-4)$, $\Gamma(1,5)$ και $\Delta(-1,2)$. Να υπολογίσετε:

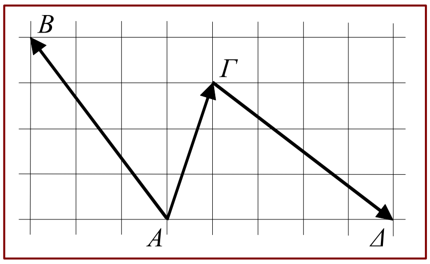
(i) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

(ii) Τι συμπεραίνετε για τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(2,-4)$ και $\vec{\beta}=(-8,5)$. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

12. Να υπολογίσετε τα μήκη των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται με τα διανύσματα $5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, αν $|\vec{\alpha}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=3$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=45^0$.

13. Για τα διανύσματα του διπλανού σχήματος να υπολογίσετε την παράσταση $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



14. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\frac{\pi}{4}$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\gamma}|=2$.

15. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων: $\vec{\alpha}=(-1,4)$ $\vec{\beta}=(1,-2)$.

16. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{4}$ να βρείτε τη γωνία $\left(\vec{\beta}-\vec{\alpha},\widehat{\ }\vec{\alpha}\right)$.

17. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία διανύσματα και θ η μεταξύ τους γωνία, να αποδείξετε ότι: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=2\left|\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}\right|$.

18. Αν $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=1$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{2\pi}{3}$ να υπολογιστεί η γωνία των διανυσμάτων: $\vec{u}=2\vec{\alpha}+4\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

19. Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\perp\left(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}\right)$ και $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2$, δείξτε ότι $\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{3}$ και $\left|\vec{\beta}\right|=1$.

20. Αν $\vec{u}=(-3-\sqrt{3},-1-\sqrt{3})$ και $\vec{v}=(-1-\sqrt{3},-1-\sqrt{3})$ και $0<(\widehat{\vec{u},\vec{v}})<\pi$ να αποδείξετε ότι $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\dfrac{\pi}{12}$.

21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(-2,3)$ και $\vec{v}=(4,-3)$. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{w}$ ώστε να είναι $\vec{w}\perp(3\vec{v}-5\vec{u})$.

22. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\dfrac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x}//(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ και $\vec{\beta}\perp(\vec{\alpha}+\vec{x})$.

23. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(3,-4)$ και $\vec{\beta}=(5,10)$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το $\vec{\alpha}$.

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,3)$, $\vec{\beta}=(3,-1)$ και $\vec{\gamma}=(-1,0)$. Να βρείτε όλα τα διανύσματα $\vec{v}$ με $\left|\vec{v}\right|=10$, $\vec{v}\perp\vec{\gamma}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

25. Αν $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2)$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=\left|\vec{\beta}\right|=2$ και $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=4$ ή $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=-4$.

26. Αν $\vec{x}+(\vec{x}\cdot\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}$ (1) με $1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq 0$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\vec{x}\cdot\vec{\alpha}=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}}{1+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}$.

ii. Να λυθεί ως προς x η εξίσωση (1), θεωρώντας ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι γνωστά και μη μηδενικά.

27. α) Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right|\leq\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|$.

β) Χρησιμοποιώντας το (α) ερώτημα και γνωρίζοντας ότι $x^2+y^2=36$, να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A=6x-8y$.

γ) με τη βοήθεια του (α) ερωτήματος δείξτε ότι: $|6ημx-8συνx|\le 10$.

28. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

29. Αν $\vec{\alpha}=\left(\sqrt{3}\cdot(x-1),2x\right)$ και $\vec{\beta}=(-\sqrt{3},1)$ να βρείτε το x, ώστε $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$.

30. Αν $\vec{\alpha}=(2,3)$ και $\vec{\beta}=(-1,4)$, να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$.

31. Να αποδείξετε ότι η γωνία θ που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου με διαδοχικές πλευρές $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισούται με τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

32. Αν είναι $|\vec{\alpha}|=5$, $|\vec{\beta}|=8$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\frac{\pi}{3}$, να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και να δοθεί η γεωμετρική ερμηνεία της γωνίας.

33. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}=\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{x}}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}-\vec{x}$ είναι κάθετο στο $\vec{\beta}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{x}$.

34. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν τα διανύσματα που δίνονται είναι κάθετα μεταξύ τους.

α) $\vec{\beta}-\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\beta}^2}$ και $\vec{\beta}$, β) $\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\gamma}-\vec{\gamma}\cdot\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)$ και $\vec{\alpha}$

γ) $\vec{\beta}-\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2}$ και $\vec{\alpha}$.

35. Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(3,4)$, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

α) $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$, β) $\vec{p}//\vec{\alpha}$, γ) $\vec{q}\perp\vec{\beta}$

36. Αν $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ και $\vec{\alpha}=\vec{p}+\vec{q}$ με $\vec{p}//\vec{\beta}$ και $\vec{q}\perp\vec{\beta}$ να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) $\vec{p}=\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}$, β) $\vec{q}=\vec{\alpha}-\frac{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)}{\vec{\beta}^2}\cdot\vec{\beta}$.

37. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια ώστε να είναι:

$\left(\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}\right)\perp\left(\kappa\vec{\alpha}+2\lambda\vec{\beta}\right)$ για κάθε $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

β) Να βρεθεί το $|\vec{\beta}|$ στην περίπτωση που είναι $|\vec{\alpha}|=2$.

38. Αν ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τότε να δείξετε ότι $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\sqrt{3}$.

39. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$ και $|\vec{\gamma}|=5$, υπολογίστε το: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

40. Θεωρούμε τα συνεπίπεδα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$. Να δείξετε ότι η σχέση $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}+\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{\gamma}|}+\dfrac{\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}}{|\vec{\gamma}|\cdot|\vec{\alpha}|}=-1$ συνεπάγεται ότι δύο από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ είναι αντίρροπα.

41. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}|=3$, $|\vec{\beta}|=6$. Να οριστεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε τα διανύσματα $3\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $3\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

42. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν ίσα μέτρα και είναι κάθετα να αποδείξετε ότι τότε και τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα.

43. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|$, δείξτε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

44. Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δυο μη μηδενικά διανύσματα και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\theta$, δείξτε ότι $\eta\mu\theta=\dfrac{|\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})|}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$.

45. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ με $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ και $|\vec{\beta}|\neq|\vec{\gamma}|$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\left(\vec{\alpha}+x\vec{\beta}\right)\cdot\left(x\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right)\geq 0$, να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.

46. Έστω η εξίσωση $(E):\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{v_1}=(\beta,2\alpha)$ και $\overrightarrow{v_2}=(2\gamma,\beta)$.

i. Δείξτε ότι αν $\det(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})=0$, η εξίσωση έχει δυο ρίζες ίσες. Το αντίστροφο ισχύει;

ii. Να βρεθούν τα α,β,γ ώστε $\overrightarrow{v_1}\perp\overrightarrow{v_2}$.

iii. Για $\beta=0$ και $\gamma=-\alpha$ να λύσετε την εξίσωση (Ε) και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi=\left(\overrightarrow{v_1}+x_1\cdot\overrightarrow{v_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{v_2}+x_2\cdot\overrightarrow{v_1}\right)$, όπου x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (Ε) με $x_1<x_2$.

Ομάδα Γ

1. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά. Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ισχύει:

$\lambda^2\vec{\alpha}^2+2\lambda\mu\cdot(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})+\mu^2\vec{\beta}^2\geq 0$. Πότε ισχύει το "=";

2. Να αποδείξετε ότι:

(i) $|\vec{u}+\vec{v}|^2+|\vec{u}-\vec{v}|^2=2|\vec{u}|^2+2|\vec{v}|^2$ (iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{4}|\vec{u}+\vec{v}|^2-\frac{1}{4}|\vec{u}-\vec{v}|^2$.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

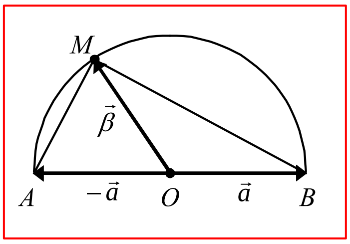
(ii) Ο φορέας του διανύσματος $\vec{v}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

4. Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$, $|\vec{\gamma}|=3$ και $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

5. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa,\lambda)$ και $\vec{\beta}=(\mu,\nu)$ είναι κάθετα και έχουν μέτρα ίσα με τη μονάδα, να δείξετε ότι $(\kappa\nu-\lambda\mu)^2=1$.

6. Να αποδείξετε ότι $-1\leq\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}\leq 1$.

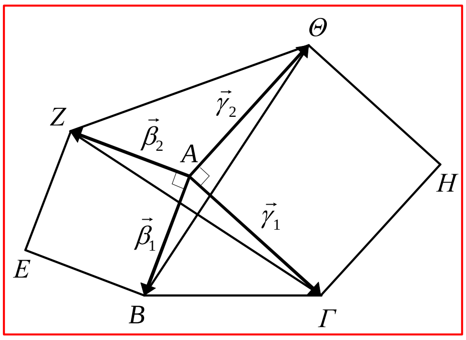
7. Σε ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και κέντρου Ο παίρνουμε σημείο Μ.



(i) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(ii) Να βρείτε το γινόμενο $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$. Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$; Ποια πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αποδειχτεί;

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικώς αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Theta}$ και $\overrightarrow{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2$ και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Theta}\cdot\overrightarrow{Z\Gamma}$. Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα ΒΘ και ΓΖ;



10. Έστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με $|\overrightarrow{OA}|=3$. Ποια γραμμή γράφουν τα σημεία Μ του επιπέδου για τα οποία είναι $\overrightarrow{OM}\cdot(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$;

11. Δίνονται δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$, τέτοιος, ώστε $|\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}|=1$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου ΟΑΓΒ με $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ είναι μικρότερο ή ίσο του $|\vec{\beta}|$.

12. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ικανοποιούν τη σχέση $(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}+\vec{x}$.

(i) Να αποδείξετε ότι $(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-1)(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})=\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

(ii) Αν $\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}\neq 1$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

13. Να αποδείξετε ότι τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά, αν και μόνον αν ισχύει $\begin{vmatrix} \vec{\alpha}^2 & \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} & \vec{\beta}^2 \end{vmatrix}=0$.

14. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$, να αποδείξετε ότι:

i. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2\left|\text{συν}\dfrac{(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})}{2}\right|$, ii. $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\left|\text{ημ}\dfrac{(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})}{2}\right|$.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $f(M)=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{M\Gamma}\cdot\overrightarrow{AB}$ είναι ανεξάρτητη από τη θέση του σημείου Μ.

16. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Να αποδειχθεί ότι $\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2$.

17. Αν $\alpha,\beta,\kappa,\lambda,x,y$ πραγματικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}+\sqrt{(x-\kappa)^2+(y-\lambda)^2}\geq\sqrt{(\alpha-\kappa)^2+(\beta-\lambda)^2}$.

18. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ και $|\vec{\gamma}|=1$. Αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός λ, για τον οποίο να ισχύει η σχέση: $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}=\lambda\cdot\vec{\gamma}$, να δείξετε ότι:

i. $\lambda=\sqrt{\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2}$

ii. Αν $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=\theta$, να δείξετε με τη βοήθεια του $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$ ότι

$$\text{συν}\theta=\frac{|\vec{\alpha}|}{\sqrt{\vec{\alpha}^2+4\vec{\beta}^2}}.$$

Υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο

Άσκηση 1η

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1,2)$ και $\vec{\beta}=(4,3)$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\lambda\neq 0$, ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Λύση

Ξέρουμε ότι τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ είναι κάθετα όταν ισχύει ……………. = 0 $\Leftrightarrow$ $\lambda\vec{\alpha}^2$ + ………… = 0 (Ε). Όμως $|\vec{\alpha}|^2$ = ………….. = 5 και $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$ = ……………………..………… = 2, άρα η (Ε) γράφεται:

………………………………………………………………………………………..

$\Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{5}{2}$.

Άσκηση 2η

α) Να αποδείξετε τη σχέση $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=2\left(|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2\right)$.

β) Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Λύση

α) Επειδή η σχέση που μας ζητούν να αποδείξουμε περιέχει μέτρα, εφαρμόζοντας τη γνωστή σχέση $|\vec{\alpha}|^2=\vec{\alpha}^2$, έχουμε:

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2+|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2$ = $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2+(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2$ = …………………………………………….. =

……………………………………….…… .

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A\Gamma}|=|\overrightarrow{B\Gamma}|$ (1).

Όμως $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O....}-\overrightarrow{O....}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O....}-\overrightarrow{O....}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O....}-\overrightarrow{O....}$ οπότε $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{....}-\overrightarrow{....}$, $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{....}-\overrightarrow{....}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{....}-\overrightarrow{....}$, άρα η αποδεικτέα σχέση (1) μετασχηματίζεται στη $|\overrightarrow{....}-\overrightarrow{.....}|$ = $|\overrightarrow{....}-\overrightarrow{.....}|$ = $|\overrightarrow{....}-\overrightarrow{.....}|$.

Από το α ερώτημα έχουμε: $|\vec{\beta}+\vec{\alpha}|^2$ + $|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|^2$ = $2|\vec{\beta}|^2$ + $2|\vec{\alpha}|^2$ (2), όμως $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow \vec{\beta}+\vec{\alpha}=-\vec{\gamma}$ άρα η (2) μετασχηματίζεται $|-\vec{\gamma}|^2$ + $|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|^2$ = $2|\vec{\beta}|^2$ + $2|\vec{\alpha}|^2$ $\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………………………………. $\Leftrightarrow$ $|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$.

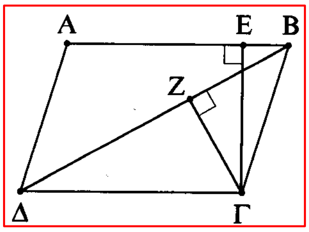
Όμοια εργαζόμενοι δείχνουμε ότι $\left|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\gamma}-\vec{\beta}\right| = \sqrt{3}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 3η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και $\Gamma E \perp AB$, $\Gamma Z \perp B\Delta$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{B\Gamma}^2$ (1).

Λύση

Παρατηρούμε ότι τα τμήματα ΒΕ και ΓΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές της πλευράς …… επάνω στα ……. και ……… αντίστοιχα. Επομένως έχουμε:



$\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BZ}=\overrightarrow{\ldots\ldots}\cdot\overrightarrow{\ldots\ldots}$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{\ldots\ldots}\cdot\overrightarrow{\ldots\ldots}$.

Οπότε $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=$ ……. + …… = $\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\left(\overrightarrow{\ldots\ldots}+\overrightarrow{\ldots\ldots}\right)=\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\left(\overrightarrow{\ldots\ldots}+\overrightarrow{\ldots\ldots}\right)=$

$\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=$ …… · ……. = $\overrightarrow{B\Gamma}^2$.

Άσκηση 4η

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$. Αν ισχύουν $\left|\vec{V}_1\right|=\left|\vec{V}_2\right|=\left|\vec{V}_3\right|=1$ και $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2+\vec{V}_2\cdot\vec{V}_3=-2$, να αποδείξετε ότι:

1. Τα διανύσματα $\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3$ είναι συγγραμμικά.
2. $\vec{V}_1=\vec{V}_3$.

Λύση

1. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και καλώντας θ τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ και φ τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{V}_2,\vec{V}_3$ έχουμε:

$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2+\vec{V}_2\cdot\vec{V}_3=-2 \Leftrightarrow$ ………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………… $\Leftrightarrow$
$\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\phi=-2 \Leftrightarrow$ …….. = ….. και …….. = ….. $\Leftrightarrow$ θ =….. και φ = ….. οπότε
…………………………………………..………………………………………… .

2. Από το 1ο ερώτημα έχουμε θ =….. , οπότε $\overrightarrow{\ldots\ldots}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\ldots\ldots}$ και φ = ….. , οπότε $\overrightarrow{\ldots\ldots}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\ldots\ldots}$, άρα $\vec{V}_1\uparrow\uparrow\vec{V}_3$ και επειδή $\left|\vec{V}_1\right|=\left|\vec{V}_3\right|=1$, έχουμε $\vec{V}_1=\vec{V}_3$.

Εργασία

Θέμα 1ον

Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις.

i) Αν ΑΒΓΔ ρόμβος με (ΒΔ) = 2 και (ΑΓ) = 4, τότε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Delta}$ είναι ίσο μ

☐ Α: 1 ☐ Β: 0 ☐ Γ: 2 ☐ Δ: -2

ii) Αν ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς λ, τότε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι ίσο με:

☐ Α: λ^2 ☐ Β: $-\lambda^2$ ☐ Γ: $\dfrac{\lambda^2}{2}$ ☐ Δ: $-\dfrac{\lambda^2}{2}$

iii) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα, η τιμή της παράστασης $\dfrac{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|^2}-2\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}-\left(\dfrac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right)^2$ είναι:

☐ Α: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2$ ☐ Β: $\vec{\beta}^2$ ☐ Γ: $\left(\dfrac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}}\right)^2$ ☐ Δ: $\left(\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}\right)^2$

iv) Αν $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, και $\vec{\beta}\neq\vec{0}$, τότε η τιμή της παράστασης $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ είναι:

☐ Α: 1 ☐ Β: -1 ☐ Γ: 1 ή -1 ☐ Δ: $|\lambda|$ ☐ Ε: $\dfrac{1}{|\lambda|}$

v) Αν για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=0$, τότε η γωνία $\widehat{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}$ είναι:

☐ Α: $\dfrac{\pi}{6}$ ☐ Β: $\dfrac{\pi}{3}$ ☐ Γ: $\dfrac{2\pi}{3}$ ☐ Δ: 0

vi) Η ισότητα $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ισχύει:

☐ Α: μόνο όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία

☐ Β: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

☐ Γ: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με ίσα μέτρα

☐ Δ: όταν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

vii) Η ισότητα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ισχύει:

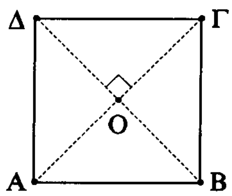
☐ Α: μόνο όταν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$ ☐ Β: για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

☐ Γ: μόνο όταν $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$ ☐ Δ: μόνο όταν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

☐ Ε: μόνο όταν $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$

Θέμα 2ον

Με τη βοήθεια του διπλανού τετραγώνου πλευράς 4 να αντιστοιχίσετε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α με τις αντίστοιχες τιμές τους της στήλης Β.



ΣΤΗΛΗ Α		ΣΤΗΛΗ Β
i) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$	• •	α) 0
ii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$	• •	β) 16
iii) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	• •	γ) -8
iv) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O\Delta}$	• •	δ) -16
v) $\overrightarrow{O\Delta}\cdot\overrightarrow{OB}$	• •	ε) 8
vi) $\overrightarrow{O\Gamma}\cdot\overrightarrow{O\Delta}$	• •	στ) 4
vii) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}$	• •	ζ) -4

Θέμα 3ον

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 2ΑΔ και έστω σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\Delta M} = 3\overrightarrow{M\Gamma}$. Αν είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$:

i) να εκφράσετε τα $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{BM}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$,

ii) να αποδείξετε ότι $A\Gamma \perp BM$.

Θέμα 4ον

i) Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα. Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{y}}\vec{x} = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|^2}\cdot\vec{y}$.

ii) Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 120°$, να συνδέσετε κάθε διάνυσμα της στήλης Α με το ίσο του στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1) $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$	α) $\vec{\alpha}$
2) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$	β) $\vec{\beta}$
3) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\alpha}$	γ) $\dfrac{1}{2}\vec{\alpha}$
4) $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(-\vec{\alpha})$	δ) $-\dfrac{1}{4}\vec{\alpha}$
5) $\text{προβ}_{(-\vec{\alpha})}\vec{\beta}$	ε) $2\vec{\beta}$
	στ) $-\vec{\beta}$

Θέμα 5ον

Καθεμία από τις γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ίση με 60°. Αν $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $|\vec{\gamma}| = 6$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{x} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$.

Να απαντηθεί το παρακάτω test

1. Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο, να αποδείξετε ότι
$$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{B\Gamma} + 5\overrightarrow{\Gamma\Delta} + 8\overrightarrow{\Delta A} + 3\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B}$$

2. i) Έστω $\vec{\alpha}$ μη μηδενικό διάνυσμα. Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $|x\vec{\alpha}| \geq |\vec{\alpha}|$ και $(x\vec{\alpha} + 3\vec{\alpha}) \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$.
   ii) Έστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δύο διανύσματα και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \cdot (\beta\vec{u} - \alpha\vec{v})$.
   β) Να εκφράσετε την παράσταση $A = |\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2$ ως συνάρτηση του $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   γ) Αν $A = 0$, τότε τα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ είναι ....

3. i) Να σημειώσετε το γράμμα της σωστής απάντησης σε καθεμία από τις παρακάτω ερωτήσεις.
   α) Έστω $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ μη μηδενικά και ανά δύο μη συγγραμμικά διανύσματα. Αν $\vec{\alpha} + \vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} + \vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha}$, τότε το $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ είναι ίσο με:
   ☐ Α: το $\vec{\gamma}$ ☐ Β: το $2\vec{\beta}$ ☐ Γ: το $\vec{\alpha}$ ☐ Δ: το $\vec{0}$
   β) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ μη μηδενικά διανύσματα τέτοια ώστε $\vec{\beta} = 5\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = -2\vec{\beta}$, τότε η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι:
   ☐ Α: 0 ☐ Β: $\frac{\pi}{2}$ ☐ Γ: π ☐ Δ: $\frac{\pi}{3}$

   ii) Να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη) σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις.
   α) Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$, τότε είναι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0$. Σ ☐ Λ ☐
   β) Αν για τα διαφορετικά σημεία Α, Β, Γ, Μ και Ν ισχύει $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MN}$, τότε το ΑΒΝΓ είναι παραλληλόγραμμο. Σ ☐ Λ ☐

4. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ.
   i) Να αποδείξετε ότι για κάθε σημείο Μ του επιπέδου του ισχύει $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} - \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MA}$.
   ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{M\Gamma}^2 = 0$.

5. Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 5)$ και $\Gamma(3, 4)$ και έστω $H(x, y)$ σημείο του επιπέδου.
   i) Να γράψετε τις διανυσματικές ακτίνες των σημείων αυτών, με αρχή το Ο, ως συνάρτηση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$.
   ii) Αν $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{A\Gamma}$, να βρείτε τα x και y.

Ομάδα Δ

1. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ,Λ των απέναντι πλευρών του ΑΒ και ΓΔ. Αν G είναι το μέσο του ΚΛ, να δείξετε ότι το G είναι το μοναδικό σημείο του επιπέδου για το οποίο: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}+\overrightarrow{G\Delta}=\vec{0}$. Στη συνέχεια δείξτε ότι τα τμήματα που ορίζονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών και των διαγωνίων του έχουν το ίδιο μέσο.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε σημείο Ρ του επιπέδου τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}+3\overrightarrow{\Gamma P}=\vec{0}$.

3. Να δείξετε ότι τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνο αν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$.

4. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και οι κάθετες χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Μ. Δείξτε ότι: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=2\overrightarrow{MK}$.

5. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύουν: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}|=4|\vec{\beta}|=12|\vec{\gamma}|$, δείξτε ότι είναι συγγραμμικά.

6. Έστω τα σημεία A,B,K,Λ,M. Αν $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{M\Lambda}-3\overrightarrow{\Lambda A}-\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ να δείξετε ότι τα σημεία K,Λ,M είναι συνευθειακά.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα K,Λ,M των πλευρών του. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν το ίδιο κέντρο βάρους.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και τα σημεία Δ,P,E που ορίζονται από τις σχέσεις: $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{8}\overrightarrow{A\Gamma}$. Δείξτε ότι τα σημεία Δ,P,E είναι συνευθειακά.

9. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία E,Z τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A\Delta}$. Δείξτε ότι:

α. Τα διανύσματα $\overrightarrow{B\Delta}$ και $\overrightarrow{EZ}$ δεν είναι συγγραμμικά.

β. Αν Ρ το σημείο που τέμνονται να βρεθούν $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\overrightarrow{EP}=\kappa\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{B\Delta}$.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος ΑΜ και το σημείο Δ τέτοιο ώστε: $\overrightarrow{ΑΔ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ΑΓ}$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x,y ώστε $\overrightarrow{ΒΔ}+(2x+y)\overrightarrow{ΑΜ}+(x+3)\overrightarrow{ΔΜ}+y\overrightarrow{ΒΓ}=4\overrightarrow{ΑΒ}+2\overrightarrow{ΑΓ}$.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(0,7), Β(-2,1) και Γ(4,3). Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Ρ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ΒΓ}=2\overrightarrow{ΓΡ}$ και του σημείου Σ της ευθείας ΑΓ για το οποίο είναι ΡΣ | | ΑΒ.

12. Αν για τα σημεία $Α,Β,Γ,Ο$ του επιπέδου ισχύουν οι σχέσεις: $2\overrightarrow{ΟΑ}+3\overrightarrow{ΟΒ}-5\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{0}$, $|\overrightarrow{ΟΑ}|=2$, $|\overrightarrow{ΟΒ}|=|\overrightarrow{ΟΓ}|=1$, να δείξετε ότι:

α. Τα σημεία $Α,Β,Γ$ είναι συνευθειακά.

β. $\overrightarrow{ΟΑ}\perp\overrightarrow{ΟΒ}$.

13. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ του επιπέδου ισχύει $4\vec{α}+2\vec{β}+\vec{γ}=\vec{0}$. Να δειχθεί ότι $\vec{β}^2-4\vec{α}\cdot\vec{γ}\geq 0$.

14. Αν $|\vec{α}|=1$, $|\vec{β}|=2$ και $|3\vec{α}+\vec{β}|=|\vec{α}-\vec{β}|$, τότε:

α. Να βρεθεί η γωνία $φ=(\widehat{\vec{α},\vec{β}})$.

β. Να βρεθεί ο $λ\in\mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{v_1}=\vec{α}+λ\vec{β}$ και $\vec{v_2}=\vec{α}+2\vec{β}$ να είναι κάθετα.

15. **α.** Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α},\vec{β}$, να δειχθεί ότι $|\vec{α}+\vec{β}|^2-|\vec{α}-\vec{β}|^2=4\vec{α}\cdot\vec{β}$.

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ που έχει για διάμεσο την ΑΔ, είναι $|\overrightarrow{ΒΓ}|=2$ και $|\overrightarrow{ΑΔ}|=4$. Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{ΑΒ}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}=15$.

16. Έστω η εξίσωση $x^2-2|\vec{α}-\vec{β}|x+1-\vec{α}\cdot\vec{β}=0$, όπου $\vec{α},\vec{β}$ μοναδιαία διανύσματα.

α. Δείξτε ότι η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές.

β. Αν $ρ_1,ρ_2$ οι δυο ρίζες της εξίσωσης και ισχύει $ρ_1^2+ρ_2^2=6$, δείξτε ότι $\vec{α}\perp\vec{β}$.

17. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $2\overrightarrow{ΑΓ}^2+\overrightarrow{ΒΓ}^2=3\overrightarrow{ΑΓ}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}$. Να δείξετε ότι αν ΑΜ η διάμεσος του ΑΒΓ τότε $\overrightarrow{ΑΜ}\perp\overrightarrow{ΑΒ}$.

$\boxed{14}$ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (2,6), Β (-4,2) και Γ (8,-2).Αν ΑΜ η διάμεσος και Δ σημείο τέτοιο ώστε $\overrightarrow{\mathbf{A\Delta}} = 3\overrightarrow{\mathbf{\Delta M}}$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής Ρ των ΑΓ και ΒΔ.

$\boxed{15}$ Αν είναι $\vec{\mathbf{a}}$ (συν3t , ημ3t) ,$\vec{\mathbf{b}}$ (συν2t , ημ2t) και $\vec{\mathbf{c}}$ (συνt , ημt) να δειχτεί ότι τα διανύσματα $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{b}}$ είναι παράλληλα . Πότε είναι: $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{c}} \uparrow\uparrow \vec{\mathbf{b}}$

$\boxed{16}$ Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μη μηδε-νικά και μη παρράλληλα ανά δύο και ισχύει : $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}+\vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}+\vec{\alpha}$ να δείξετε ότι και $\vec{\gamma} \parallel \vec{\beta}+\vec{\gamma}$

$\boxed{17}$ Στο επίπεδο οχψ δίνονται τα σημεία Α (3,2) Β (1,0) και Γ (0,4). Αν η ΑΓ τέμνει τον άξονα των χ στο Δ και η ΑΒ τον άξονα των ψ στο Ε

α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Δ,Ε

β) Να δειχτεί ότι τα μέσα Κ,Λ,Μ των τμημάτων ΟΔ ,ΒΓ και ΔΕ είναι σημεία συνευθειακά

$\boxed{18}$ Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Α (0,0) Β (3,0) , Δ (1,4) και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια

ώστε $\overrightarrow{\mathbf{\Delta E}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathbf{\Delta\Gamma}}$ και $\overrightarrow{\mathbf{BZ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\overrightarrow{\mathbf{B\Gamma}}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες τουΓ

β) Αν Θ το σημείο τομής των ΑΓκαι ΕΖ ναβρείτε τις συντεταγμένες του Θ .

$\boxed{19}$ Αν είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}| = 2$ να βρεθούν τα : $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$

$\boxed{20}$ Αν είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\mathbf{6}}$ να βρείτε το $|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$

$\boxed{21}$ Αν είναι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και για τα διανύσματα

$\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\delta} = \vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ είναι $\widehat{(\vec{\gamma},\vec{\delta})} = \frac{2\pi}{3}$ να

$\wedge$

βρεθεί η γωνία $(\vec{\alpha},\vec{\beta})$

22 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}_0 = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}_0 = \frac{1}{|\vec{\beta}|}\vec{\beta}$ όπου $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ γνωστά και μη μηδενικά διανύσματα. Δείξτε ότι :

α) τα διανύσματα $\vec{\alpha}_0 + \vec{\beta}_0$, $\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_0$ είναι κάθετα

β) το διάνυσμα $\vec{\alpha}_0 + \vec{\beta}_0$ είναι παρράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ και το διάνυσμα $\vec{\alpha}_0 - \vec{\beta}_0$ είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της παραπληρωματικής γωνίας της $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

γ) αν $\vec{\alpha}$ (3,-4) , $\vec{\beta}$ (-12,9) να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\delta}$ με $|\vec{\delta}| = \sqrt{2}$ το οποίο είναι παράλληλο προς τη διχοτόμο της γωνίας $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$.

23 Στο επίπεδο οχψ δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α (4,5), Β (1,2) και Γ (4, κ) οπου $\kappa \in (-\infty, 5)$.

α) Να υπολογισθεί η γωνία Α του τριγώνου

β) Να βρεθεί το κ ώστε : $B = \frac{\pi}{3}$

24 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Αν οι διάμεσοί του ΒΜ και ΓΛ τέμνονται κάθετα , Να δείξετε ότι συν Α = $\frac{4}{5}$

25 Δείξτε ότι : $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\,\vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}$ και να βρεθεί η $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ αν $\vec{\alpha} = (1 , -1)$ και $\vec{\beta} = (2 , 4)$

26 Στο επίπεδο οχψ δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\overrightarrow{AB}$ (3 , 4) , $\overrightarrow{B\Gamma} = (2 , 1)$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = (5 , 5)$. Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ,να εκφραστεί το $\overrightarrow{A\Delta}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και να βρεθεί το μέτρο του.

27 Ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{10}$ αναλύθηκε σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{p}$ και $\vec{q}$. Αν είναι $\vec{q} = (4,2)$ να προσδιοριστεί το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

28 Αν $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=1$ και $(\vec{\alpha},\vec{\beta})=\frac{2\pi}{3}$, να προσδιοριστεί το $\lambda\in R$,ώστε : $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})=-2\vec{\beta}$

29 Να δείξετε ότι αν ένα τρίγωνο έχει δύο διαμέσους ίσες , τότε είναι ισοσκελές .

30 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Να δείξετε ότι :

α) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}^2$ β) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{\Gamma A}^2$

γ) $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ δ) $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}$

δ) $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

31 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και οι προβολές Ε ,Ζ του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι : $\overrightarrow{A\Gamma}\cdot\overrightarrow{AZ}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A\Delta}^2$

32 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ . Αν Ε ,Ζ οι προβολέςτου Δ στις ΑΒ και ΑΓ , δείξτε ότι : $AM\perp EZ$.

33 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ , το ύψος του ΑΔ και τα μέσα Κ ,Λ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ Δείξτε οτι $K\Delta\perp\Delta\Lambda$.

34 Εστω ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο (ΑΒ = ΑΓ),η διάμεσός του Μ και η προβολή Δ του Μ στην ΑΓ . Αν Κ το μέσο του ΜΔ ,δείξτε ότι : $AK\perp B\Delta$.

35 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και το ορθόκεντρό του Η .Να δείξετε ότι :

α) $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

β) $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$

γ) $\overrightarrow{\Delta H}\cdot\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$

36 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε. Δείξτε ότι: $\frac{A\Delta}{AB}=\frac{AE}{A\Gamma}$

37 Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\neq-1$ να λυθεί η εξίσωση:

$(\vec{\alpha}\cdot\vec{x})\cdot\vec{\beta}=\vec{\gamma}-\vec{x}$.

Υποδειγματικό μάθημα στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Άσκηση 1η

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,2)$ και $\vec{\beta} = (4,3)$. Να βρείτε το πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$, ώστε τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Λύση

Ξέρουμε ότι τα διανύσματα $\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ είναι κάθετα όταν ισχύει …… . ………… = 0 $\Leftrightarrow$ $\lambda\vec{\alpha}^2$ + …………. = 0 (Ε). Όμως $\left|\vec{\alpha}\right|^2$ = ……….. = 5 και $\vec{\alpha}.\vec{\beta}$ = ………………….……………… = 2, άρα η (Ε) γράφεται ……………………………………………………………………………… $\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{5}{2}$.

Άσκηση 2η

α) Να αποδείξετε τη σχέση $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = 2\left(\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2\right)$.

β) Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ όπου $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| = \left|\vec{\gamma}\right| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Λύση

α) Επειδή η σχέση που μας ζητούν να αποδείξουμε περιέχει μέτρα, εφαρμόζοντας τη γνωστή σχέση $\left|\vec{\alpha}\right|^2 = \vec{\alpha}^2$ έχουμε: $\left|\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right|^2 + \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right)^2 + \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2$ = …………………………………….. =

………………………… .

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|$ (1). Όμως $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O....} - \overrightarrow{O....}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O....} - \overrightarrow{O....}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O....} - \overrightarrow{O....}$ οπότε $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta} - \overrightarrow{....}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\gamma} - \overrightarrow{....}$ και $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma} - \overrightarrow{....}$, άρα η (1) μετασχηματίζεται στη $\left|\vec{\beta} - \overrightarrow{.....}\right| = \left|\vec{\gamma} - \overrightarrow{.....}\right| = \left|\vec{\gamma} - \overrightarrow{.....}\right|$ (αποδεικτέα).

Χρησιμοποιώντας το α ερώτημα που αποδείξαμε έχουμε:

$\left|\vec{\beta} + \vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right|^2 = 2\left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\left|\vec{\alpha}\right|^2$, όμως $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\alpha} = -\vec{\gamma}$ άρα …………………………

……………………………………………………………………………………………………..

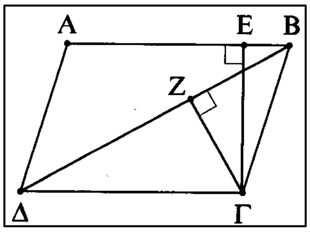
$\left|\vec{\beta} - \vec{\alpha}\right| = \sqrt{3}$. Όμοια εργαζόμενοι δείχνουμε ότι $\left|\vec{\gamma} - \vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\gamma} - \vec{\beta}\right| = \sqrt{3}$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

Άσκηση 3η

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ΓΕ $\perp$ ΑΒ, ΓΖ $\perp$ ΒΔ. Να αποδείξετε ότι

$\overrightarrow{B\Delta} \cdot \overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{B\Gamma}^2$ (1).

Λύση



Παρατηρούμε ότι τα τμήματα ΒΕ και ΓΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές της πλευράς …… επάνω στα ……. και ……… αντίστοιχα. Επομένως έχουμε:

$\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BZ} = \ldots\ldots\cdot\ldots\ldots$ και $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} = \ldots\ldots\cdot\ldots\ldots$.

Οπότε $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{BZ} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE} = \ldots\ldots + \ldots\ldots = \overrightarrow{B\Gamma}\cdot\left(\overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{\ldots\ldots}\right) = \overrightarrow{B\Gamma}\cdot\left(\overrightarrow{\ldots\ldots} + \overrightarrow{\ldots\ldots}\right) =$

$= \overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{A\Delta} = \ldots\ldots \quad \ldots\ldots = \overrightarrow{B\Gamma}^2$.

Άσκηση 4η

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$. Αν ισχύουν $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = |\vec{V}_3| = 1$ και $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 + \vec{V}_2\cdot\vec{V}_3 = -2$, να αποδείξετε ότι:

1. Τα διανύσματα $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ είναι συγγραμμικά.
2. $\vec{V}_1 = \vec{V}_3$.

Λύση

1. $\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2 + \vec{V}_2\cdot\vec{V}_3 = -2 \Leftrightarrow$ (εφαρμόζοντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε τα εξής:)

…………………………………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………….

$\Leftrightarrow$ συν$\left(\widehat{\vec{V}_1,\vec{V}_2}\right)$ + συν$\left(\widehat{\vec{V}_2,\vec{V}_3}\right)$ = -2 $\Leftrightarrow$ ……………… = …….. και ……………. = ……….

$\Leftrightarrow$ $\left(\widehat{\vec{V}_1,\vec{V}_2}\right)$ = ……… και $\left(\widehat{\vec{V}_2,\vec{V}_3}\right)$ = ……… οπότε ……………………………………..

………………………………………………………………………………………………….

2. Από το 1ο ερώτημα έχουμε ……………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

Άσκηση 5η

Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha \neq 0$, (Ε) και τα διανύσματα $\vec{v}_1 = (\beta, 2\alpha)$ και $\vec{v}_2 = (2\gamma, \beta)$.

i) Αν $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$, η εξίσωση (Ε) έχει δύο ρίζες ίσες. Το αντίστροφο ισχύει;

ii) Να βρείτε τα α, β και γ ώστε $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$.

iii) Για $\beta = 0$ και $\gamma = -\alpha$ να λύσετε την εξίσωση (Ε) και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = (\vec{v}_1 + x_1\vec{v}_2)\cdot(\vec{v}_2 + x_2\vec{v}_1)$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (Ε) με $x_1 < x_2$.

Λύση

i) …………………………………………………………………………………………………
…

…………………………………………………………………………………………………..

ii) …………………………………………………………………………………………………

……….

………..

iii) ……………………………………………………………………………………………..

……….

………

………..

Άσκηση 6η

Να σημειώσετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις.

i) Αν ΑΒΓΔ ρόμβος με (ΒΔ) = 2 και (ΑΓ) = 4, τότε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Delta}$ είναι ίσο μ

☐ Α: 1 ☐ Β: 0 ☐ Γ: 2 ☐ Δ: -2

ii) Αν ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς λ, τότε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ είναι ίσο με:

☐ Α: λ^2 ☐ Β: $-\lambda^2$ ☐ Γ: $\frac{\lambda^2}{2}$ ☐ Δ: $-\frac{\lambda^2}{2}$

iii) Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ μη μηδενικά διανύσματα, η τιμή της παράστασης $\frac{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2}{|\vec{\alpha}|^2} - 2\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2} - \left(\frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|}\right)^2$ είναι:

☐ Α: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2$ ☐ Β: $\vec{\beta}^2$ ☐ Γ: $\left(\frac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}}\right)^2$ ☐ Δ: $\left(\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}\right)^2$

iv) Αν $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε η τιμή της παράστασης $\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ είναι:

☐ Α: 1 ☐ Β: -1 ☐ Γ: 1 ή -1 ☐ Δ: $|\lambda|$ ☐ Ε: $\frac{1}{|\lambda|}$

v) Αν για τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει $2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 0$, τότε η γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$ είναι:

☐ Α: $\frac{\pi}{6}$ ☐ Β: $\frac{\pi}{3}$ ☐ Γ: $\frac{2\pi}{3}$ ☐ Δ: 0

vi) Η ισότητα $|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ισχύει:

☐ Α: μόνο όταν τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία

☐ Β: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

☐ Γ: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με ίσα μέτρα

☐ Δ: όταν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

vii) Η ισότητα $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ ισχύει:

☐ Α: μόνο όταν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ ☐ Β: για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

☐ Γ: μόνο όταν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ ☐ Δ: μόνο όταν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$

☐ Ε: μόνο όταν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$