

# ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο Αλγεβρικές Παραστάσεις

### A. 1. 1

1. Τι ονομάζετε δύναμη  $\alpha^v$  με βάση τον πραγματικό  $\alpha$  και εκθέτη το φυσικό  $v > 1$ ;
- ◆ Ονομάζεται δύναμη  $\alpha^v$  με βάση τον αριθμό  $\alpha$  και εκθέτη το φυσικό  $v > 1$ , το γινόμενο από  $v$  παράγοντες ίσους με  $\alpha$ .

$$\text{Δηλαδή, } \alpha^v = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \cdot \alpha}_{v \text{ παράγοντες}}$$

- ◆ Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \text{ με } \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-v} = \frac{1}{\alpha^v} \text{ με } \alpha \neq 0 \text{ και } v = 1, 2, 3, \dots$$

2. Ποιες είναι οι ιδιότητές των δυνάμεων με βάση πραγματικό και εκθέτη ακέραιο ;

- ◆ Για δυνάμεις, με εκθέτες γενικά ακέραιους αριθμούς, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \text{α. } \alpha^\mu \cdot \alpha^\nu &= \alpha^{\mu+\nu} & \text{β. } \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} &= \alpha^{\mu-\nu} & \text{γ. } \alpha^\nu \cdot \beta^\nu &= (\alpha \cdot \beta)^\nu \\ \text{δ. } \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu &= \frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu} & \text{ε. } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} &= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu & \text{στ. } (\alpha^\mu)^\nu &= \alpha^{\mu \cdot \nu} \end{aligned}$$

- ◆ Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

3. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού  $\alpha$ ;

- ◆ Ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού  $\alpha$  και συμβολίζεται με  $\sqrt{\alpha}$  ο θετικός αριθμός  $x$  που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό  $\alpha$ .

Επομένως :  $\sqrt{\alpha} = x$  αν και μόνο αν  $x^2 = \alpha$   $x, \alpha > 0$

Ορίζουμε ακόμη  $\sqrt{0} = 0$

4. Ποιες είναι οι ιδιότητές των ριζών;

- ◆ Από τον ορισμό τις τετραγωνικής ρίζας ενός αριθμού  $\alpha \geq 0$  έχουμε  $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

♦ Για κάθε πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει  $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

♦ Άν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta \geq 0$ , τότε  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

♦ Άν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta \geq 0$ , τότε  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

**5. Άν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta \geq 0$  να αποδείξετε ότι,  $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$**

### Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$ .

Έτσι:

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha\beta})^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{\alpha})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \alpha\beta \text{ που ισχύει.}$$

**6. Άν  $\alpha \geq 0$  και  $\beta > 0$  να αποδείξετε ότι,  $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$**

### Απόδειξη

Είναι γνωστό ότι αν οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι μη αρνητικοί αριθμοί τότε  $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2$ ,

Έτσι:

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left( \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \right)^2 = \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left( \sqrt{\alpha} \right)^2}{\left( \sqrt{\beta} \right)^2} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ που ισχύει.}$$

## A. 1. 2

**7. Τι ονομάζεται αλγεβρική παράσταση;**

♦ Ονομάζεται αλγεβρική παράσταση κάθε έκφραση που συνδυάζει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών.

**8. Τι ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης;**

♦ Ονομάζεται αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης ο αριθμός που θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές της με αριθμούς και εκτελέσουμε τις πράξεις.

**9. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ακέραια;**

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

**10. Τι ονομάζεται μονώνυμο και πια τα μέρη από τα οποία αποτελείται;**

- ◆ Ονομάζεται μονώνυμο μια αλγεβρική παράσταση στην οποία σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ αριθμού και μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.
- ◆ Σε ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας που γράφεται πρώτος ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών ονομάζεται κύριο μέρος του μονωνύμου.

**11. Ποια μονώνυμα ονομάζονται όμοια;**

- ◆ Ονομάζονται όμοια δύο ή περισσότερα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.

**12. Ποια μονώνυμα ονομάζονται ίσα και ποια αντίθετα;**

- ◆ Ονομάζονται ίσα δύο μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.
- ◆ Ονομάζονται αντίθετα δύο μονώνυμα που έχουν αντίθετο συντελεστή και το ίδιο κύριο μέρος.

**13. Τι ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;**

- ◆ Ονομάζεται βαθμός μονωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής.

**14. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό μονώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;**

- ◆ Ονομάζουμε σταθερό μονωνύμο κάθε αριθμό και μηδενικό μονώνυμο τον αριθμό 0.
- ◆ Το μηδενικό μονώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

**15. Πως ορίζεται το άθροισμα ομοίων μονωνύμων;**

- ◆ Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο όμοιο με αυτά που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.

**16. Τι ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων;**

- ◆ Ονομάζεται αναγωγή ομοίων όρων η πρόσθεση ομοίων μονωνύμων.

**17. Πως ορίζεται το γινόμενο μονωνύμων;**

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και κύριο μέρος γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής **το άθροισμα των** εκθετών της.

**A. 1. 3**

**18. Τι ονομάζεται πολυώνυμο;**

- ◆ Ονομάζεται πολυώνυμο ένα άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια.

**19. Τι ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του;**

- ◆ Ονομάζεται βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία μεταβλητή του ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του ως προς την μεταβλητή αυτή.

**20. Τι ονομάζουμε σταθερό και τι μηδενικό πολυώνυμο και ποιος ο βαθμός τους;**

- ◆ Ονομάζουμε σταθερό πολυώνυμο κάθε αριθμό και μηδενικό πολυώνυμο τον αριθμό 0.

- ◆ Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό ενώ όλα τα άλλα σταθερά πολυώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

#### A. 1. 4

##### 21. Πως πολλαπλασιάζουμε:

- Μονώνυμο με πολυώνυμο ;**
- Πολυώνυμο με πολυώνυμο ;**

Για να πολλαπλασιάσουμε:

- Μονώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.
- Πολυώνυμο με πολυώνυμο πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου και στη συνέχεια κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

#### A. 1. 5

##### 22. Τι ονομάζεται ταυτότητα;

- Ονομάζεται ταυτότητα κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για κάθε τιμή των μεταβλητών αυτών.

##### 23. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

#### Απόδειξη

- $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \underline{\alpha\beta} + \underline{\beta\alpha} + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \underline{\alpha\beta} - \underline{\beta\alpha} + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^2 \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha + \beta) =$   
 $= \alpha^3 + \underline{2\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} + \underline{\beta\alpha^2} + \underline{2\alpha\beta^2} + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta)^2 \cdot (\alpha - \beta) = (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \cdot (\alpha - \beta) =$   
 $= \alpha^3 - \underline{2\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} - \underline{\beta\alpha^2} + \underline{2\alpha\beta^2} - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2$
- $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \underline{\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} - \underline{\beta\alpha^2} - \underline{\beta^3} = \alpha^3 - \beta^3$
- $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \underline{\alpha^2\beta} + \underline{\alpha\beta^2} + \underline{\beta\alpha^2} - \underline{\beta^3} = \alpha^3 + \beta^3$

#### A. 1. 6

#### 24. Τι ονομάζεται παραγοντοποίηση;

- ♦ Ονομάζεται παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου ή γενικότερα μιας αλγεβρικής παράστασης η διαδικασία μετατροπής της παράστασης σε γινόμενο.

#### 25. Ποιες είναι οι χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης;

##### κοινός παράγοντας

Όταν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha\delta = \alpha(\beta + \gamma - \delta)$$

##### ομαδοποίηση

Όταν όλοι οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \alpha\gamma - \delta\beta - \delta\gamma &= \\ \alpha(\beta + \gamma) - \delta(\beta + \gamma) &= \\ (\beta + \gamma)(\alpha - \delta) \end{aligned}$$

- ♦ Κάθε ομάδα που δημιουργούμε να έχει κοινό παράγοντα,
- ♦ Οι παραστάσεις που μένουν μετά την εξαγωγή του κοινού παράγοντα να είναι ίδιες

##### διαφορά τετραγώνων

Η μέθοδος αυτή παραγοντοποίησης στηρίζεται στην ταυτότητα  $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ , στην οποία αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε μια διαφορά δύο **τελείων τετραγώνων** σε γινόμενο.

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

##### άθροισμα ή διαφορά κύβων

Η παραγοντοποίηση του αθροίσματος ή της διαφοράς δύο κύβων βασίζεται στις δύο γνωστές μας ταυτότητες:

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha^3 - \beta^3 \\ (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha^3 + \beta^3 \end{aligned}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Σε κάθε μια από τις οποίες αν εναλλάξουμε τα μέλη μετατρέπουμε τη διαφορά ή το άθροισμα δύο **κύβων** σε γινόμενο.

##### ανάπτυγμα τετραγώνου

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2,$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

τότε θα γίνει αντίστοιχα

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 \quad \text{ή} \quad (\alpha - \beta)^2,$$

που είναι γινόμενα παραγόντων αφού :

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) \text{ και } (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)$$

**Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής  $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$**

Αν το πολυώνυμο είναι τριώνυμο και έχει τη μορφή  $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$  έχουμε:

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta =$$

$$\underline{x^2} + \underline{x\alpha} + \underline{x\beta} + \underline{\alpha\beta} = \quad \text{Ομαδοποίηση}$$

$$x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) = \quad \text{Κοινός παράγοντας}$$

$$(x + \alpha)(x + \beta)$$

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha) \cdot (x + \beta)$$

### A. 1. 7

**26. Πώς ορίζεται η διαιρεση δύο Πολυωνύμων;**

Η διαιρεση δύο Πολυωνύμων είναι η διαδικασία εκείνη κατά την οποία μας δίνονται δύο πολυώνυμα  $\Delta(x)$  (**διαιρετέος**) και  $\delta(x)$  (**διαιρέτης**) με  $\delta(x) \neq 0$  και βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων  $\pi(x)$  (**πηλίκο**) και  $v(x)$  (**υπόλοιπο**), για τα οποία ισχύει:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + v(x) \quad (\text{Ταυτότητα Ευκλείδειας διαιρεσης})$$

Το  $v(x)$  είναι ίσο με μηδέν οπότε η διαιρεση λέγεται **τέλεια** και το  $\delta(x)$  είναι παράγοντας του  $\Delta(x)$  ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του  $\delta(x)$ .

### A. 1. 8

**27. Τι ονομάζεται Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) και τι Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων;**

**Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.)** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

**Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.)** δύο ή περισσοτέρων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

### A. 1. 9

**28. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή;**

Μια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται ρητή όταν είναι κλάσμα με όρους πολυώνυμα.

**29. Πότε μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται;**

Μια αλγεβρική παράσταση ορίζεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών που περιέχει εκτός απ' αυτές που μηδενίζουν τον παρανομαστή αφού όπως γνωρίζουμε δεν ορίζεται κλάσμα με παρανομαστή μηδέν.

**30. Πότε μια ρητή αλγεβρική παράσταση μπορεί να απλοποιηθεί;**

Όπως μια αριθμητική παράσταση, έτσι και μια ρητή παράσταση, μπορεί να απλοποιηθεί, αν ο αριθμητής και ο παρανομαστής της είναι γινόμενα και έχουν κοινό παράγοντα.

## A. 1. 10

31. Πως κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις;

Για να κάνουμε πράξεις με ρητές αλγεβρικές παραστάσεις ακολουθούμε τους κανόνες που ισχύουν για τις πράξεις των κλασμάτων.

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} &= \frac{\alpha + \gamma}{\beta} && \text{και} & \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} &= \frac{\alpha - \gamma}{\beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta} && \text{και} & \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta} \quad \beta\delta \neq 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta} && \text{και} & \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} \quad \beta\gamma\delta \neq 0 \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha}{\beta} ; \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} && \beta\gamma\delta \neq 0\end{aligned}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο Εξισώσεις Ανισώσεις

### A. 2. 1

32. Τι ονομάζεται εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού με έναν άγνωστο;

- ◆ Ονομάζεται εξίσωση 1<sup>ου</sup> βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής  $\alpha x + \beta = 0$  με  $\alpha \neq 0$ .
- ◆ Ο α λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο β σταθερός ( ή γνωστός ) όρος.
- ◆ Ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που αν αντικαταστήσει τον χ στην εξίσωση προκύπτει ισότητα που αληθεύει.
- ◆ Επίλυση μιας εξίσωσης πρώτου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τη λύση της.

33. Πότε η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  έχει μία λύση πότε είναι αδύνατη και πότε αόριστη;

- ◆ Αν  $\alpha \neq 0$ , η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  έχει μοναδική λύση την  $x = -\frac{\beta}{\alpha}$
- ◆ Αν  $\alpha = 0$ , και  $\beta \neq 0$  η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  γράφεται  $0 \cdot x = -\beta$  και δεν έχει λύση (**αδύνατη**),
- ◆ Αν  $\alpha = 0$ , και  $\beta = 0$ , η εξίσωση  $\alpha x + \beta = 0$  γράφεται  $0 \cdot x = 0$  οπότε κάθε αριθμός είναι λύση της (**ταντότητα ή αόριστη**).

### A. 2. 2

34. Τι ονομάζεται εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού, με έναν άγνωστο ;

- ◆ Ονομάζεται εξίσωση δευτέρου βαθμού με έναν άγνωστο κάθε ισότητα της μορφής

- ◆  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικούς αριθμούς και  $\alpha \neq 0$ .
- ◆ Οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  ονομάζονται συντελεστές του δευτεροβαθμίου και πρωτοβαθμίου όρου αντίστοιχα και ο αριθμός  $\gamma$  σταθερός όρος.
- ◆ Επίλυση μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού λέγεται η διαδικασία εκείνη με την οποία βρίσκουμε τις τιμές του  $x$  που την επαληθεύουν.

**35. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης**

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \text{ με } \alpha, \beta, \gamma \text{ πραγματικούς αριθμούς και } \alpha \neq 0.$$

### Απόδειξη

- ◆ Για την απόδειξη του τύπου αυτού θα εφαρμόσουμε την μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» Για την εξίσωση λοιπόν  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικούς αριθμούς και  $\alpha \neq 0$  έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0 \quad [\text{Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με } 4\alpha]$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma \quad [\text{Μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο } \beta' \text{ μέλος}]$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad [\text{Προσθέτουμε και στα δύο μέλη της ισότητας το } \beta^2]$$

$$(2\alpha x)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot \beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma \quad [\text{Στο } \alpha' \text{ μέλος έχουμε το ανάπτυγμα του } (2\alpha x + \beta)^2]$$

$$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

Την παράσταση  $\beta^2 - 4\alpha\gamma$  ονομάζουμε διακρίνουσα και την συμβολίζουμε με  $\Delta$  οπότε η εξίσωση  $(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$  γράφεται  $(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$  (i)

Αν  $\Delta \geq 0$  από την (i) έχουμε:  $(2\alpha x + \beta)^2 = (\sqrt{\Delta})^2$

$$2\alpha x + \beta = \pm \sqrt{\Delta}$$

$$2\alpha x = -\beta \pm \sqrt{\Delta}$$

$$x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Αν  $\Delta < 0$  ή εξίσωση είναι αδύνατη αφού είναι αδύνατον να ισχύει η εξίσωση (I)

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικούς αριθμούς

και  $\alpha \neq 0$  δίδονται από τον τύπο  $x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$  και υπάρχουν μόνο εφ' όσον  $\Delta \geq 0$

**36. Πότε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού:**

- έχει δύο άνισες ρίζες;
- έχει μια διπλή ρίζα ;
- δεν έχει ρίζες;

Η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha, \beta, \gamma$  πραγματικούς αριθμούς,  $\alpha \neq 0$  και διακρίνουσα

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma:$$

**a.** έχει δύο ρίζες άνισες που δίνονται από τον τύπο  $x = \frac{\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ , όταν  $\Delta > 0$

**β.** έχει δύο ρίζες ίσες που δίνονται από τον τύπο  $x = \frac{-\beta}{2\alpha}$ , όταν  $\Delta = 0$

**γ.** δεν έχει ρίζες, όταν  $\Delta < 0$

**37. Πως παραγοντοποιείται το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  όταν η εξίσωση  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$**

με  $\alpha \neq 0$  έχει λύσεις τις  $\rho_1, \rho_2$ ;

- ◆ Αν  $\rho_1, \rho_2$  είναι λύσεις της εξίσωσης  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$  με  $\alpha \neq 0$  το τριώνυμο  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2)$$

#### A. 2. 4

**38. Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζεται αυτή;**

Ονομάζεται κλασματική εξίσωση, κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρανομαστή.

Για να ορίζεται μια κλασματική εξίσωση, πρέπει οι παρανομαστές των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

#### A. 2. 5

**39. Πως συγκρίνουμε( διατάσουμε) δύο πραγματικούς αριθμούς;**

- ◆ Αν οι  $\alpha$  και  $\beta$  είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε:
  - ◆ Λέμε ότι ο  $\alpha$  είναι μεγαλύτερος του  $\beta$  και το συμβολίζουμε  $\alpha > \beta$ , όταν  $\alpha - \beta > 0$ .
  - ◆ Λέμε ότι ο  $\alpha$  είναι μικρότερος του  $\beta$  και το συμβολίζουμε  $\alpha < \beta$ , όταν  $\alpha - \beta < 0$ .
  - ◆ Λέμε ότι ο  $\alpha$  είναι ίσος με τον  $\beta$  και το συμβολίζουμε  $\alpha = \beta$ , όταν  $\alpha - \beta = 0$ .

#### Αντίστροφα

- ◆ Αν  $\alpha - \beta > 0$ , τότε ο  $\alpha$  είναι μεγαλύτερος του  $\beta$ .
- ◆ Αν  $\alpha - \beta < 0$ , τότε ο  $\alpha$  είναι μικρότερο του  $\beta$ .
- ◆ Αν  $\alpha - \beta = 0$ , τότε ο  $\alpha$  είναι ίσος με τον  $\beta$ .

**40. Τι ονομάζεται ανισότητα και ποια τα χαρακτηριστικά της;**

- ◆ Η σχέση της μορφής  $\alpha > \beta$  ( ή  $\alpha < \beta$  ) ονομάζεται ανισότητα με μέλη, πρώτο και δεύτερο, τα  $\alpha$  και  $\beta$  ( ή τα  $\beta$  και  $\alpha$  ) αντίστοιχα.
- ◆ Οι ανισότητες  $\alpha < \beta$  και  $\gamma < \delta$  ( ή  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  ) λέγονται ομοιόστροφες ( έχουν την ίδια φορά )
- ◆ Οι ανισότητες  $\alpha < \beta$  και  $\gamma > \delta$  ( ή  $\alpha > \beta$  και  $\gamma < \delta$  ) λέγονται ετερόστροφες ( έχουν αντίθετη φορά )
- ◆ Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός  $\alpha$  είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερος του  $x$  και μικρότερος του  $y$ , γράφουμε τη « διπλή » ανισότητα  $x < \alpha < y$ .

- ◆ Για να δηλώσουμε ότι ένας αριθμός  $x$  είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό  $a$ , γράφουμε  $x \geq a$ .

#### **41. Ποιες είναι οι ιδιότητες της διάταξης;**

- ◆ Αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δηλαδή αν  $\alpha > \beta$ , τότε  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ .
  - ◆ Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.
- Δηλαδή αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$ , τότε  $\alpha + \gamma > \beta + \delta$ .
- ◆ Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς.

Δηλαδή αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > 0$ , τότε  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$  και  $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ .

- ◆ Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς.
- Δηλαδή αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma < 0$ , τότε  $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$  και  $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$ .
- ◆ Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.
- Δηλαδή αν  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  θετικοί πραγματικοί αριθμοί με  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$  τότε  $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων**

### **A. 3. 1**

#### **42. Τι ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους και τι λύση της;**

- ◆ Ονομάζεται γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους κάθε εξίσωση της μορφής  $\alpha x + \beta y = \gamma$ .
- ◆ Λύση της γραμμική εξίσωση  $\alpha x + \beta y = \gamma$  ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  που την επαληθεύει.

#### **43. Πως παριστάνεται γραφικά κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$**

**και τι ισχύει γι' αυτή;**

Κάθε εξίσωση της μορφής  $\alpha x + \beta y = \gamma$  με  $\alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$  παριστάνεται γραφικά με μια ευθεία είτε ωστε:

- ◆ Αν ένα σημείο ανήκει στην ευθεία,  $\varepsilon$  οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση  $\alpha x + \beta y = \gamma$ .
- ◆ Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση  $\alpha x + \beta y = \gamma$  το σημείο ανήκει στην ευθεία  $\varepsilon$ .

**44. Τι παριστάνουν οι εξισώσεις;**

**a.  $y = k$  με  $k \neq 0$**

**β.  $y = 0$**

**γ.  $x = k$  με  $k \neq 0$**

**δ.  $x = 0$**

**α.** Η εξισωση  $y = k$  με  $k \neq 0$  παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'$

και τέμνει τον άξονα  $y'$  στο σημείο  $(0, k)$

**β.** Η εξισωση  $y = 0$  παριστάνει τον άξονα  $x'$ .

**γ.** Η εξισωση  $x = k$  με  $k \neq 0$  παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y'$

και τέμνει τον άξονα  $x'$  στο σημείο  $(k, 0)$

**δ.** Η εξισωση  $x = 0$  παριστάνει τον άξονα  $y'$ .

**45. Πως βρίσκουμε τις τομές μιας ευθείας  $\alpha x + \beta y = \gamma$  με  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$  με τους άξονες**

**$x'$  και  $y'$ ;**

Κάθε σημείο του  $x'$  έχει τεταγμένη 0, οπότε και το A, σημείο τομής της  $\alpha x + \beta y = \gamma$  με τον

$x'$ , θα έχει τεταγμένη  $y = 0$  και τετμημένη  $x$  με  $\alpha x + \beta \cdot 0 = \gamma$  ή  $\alpha x = \gamma$  ή  $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ . Άρα  $A(\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$

Κάθε σημείο του  $y'$  έχει τετμημένη 0, οπότε και το B, σημείο τομής της  $\alpha x + \beta y = \gamma$  με τον

$y'$ , θα έχει τετμημένη  $x = 0$  και τεταγμένη  $y$  με  $\alpha \cdot 0 + \beta y = \gamma$  ή  $\beta y = \gamma$  ή  $y = \frac{\gamma}{\beta}$ . Άρα  $B(0, \frac{\gamma}{\beta})$

**A. 3. 2**

**46. Τι ονομάζεται;**

**α. Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$ ;**

**β. Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$ ;**

**γ. Επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$ ;**

**α.** Ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ένα σύστημα της

μορφής,  $\begin{cases} \alpha x + \alpha y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$  με ένα τουλάχιστον από τα  $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ .

**β.** Ονομάζεται λύση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  κάθε ζεύγος  $(x_0, y_0)$  που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

**γ.** Ονομάζεται επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε κάθε ζεύγος  $(x_0, y_0)$  που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

**47. Πως γίνεται η γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο**

**αγνώστους  $x$  και  $y$  και πότε αυτό έχει μία λύση, είναι αδύνατο, είναι αόριστο;**

Για τη γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες που παριστάνουν τις εξισώσεις του συστήματος και:

- ◆ αν τέμνονται το σύστημα έχει **μία λύση** τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου.
- ◆ αν είναι παράλληλες δεν έχουν κοινό σημείο, οπότε το σύστημα δεν έχει λύση και λέμε ότι είναι **αδύνατο**.
- ◆ Αν **συμπίπτουν (ταντίζονται)** έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** και λέμε ότι είναι **αόριστο**.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο Συναρτήσεις

### A. 4. 1

**48. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση  $y = ax^2$  με  $a > 0$ ;**

- ◆ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$  με  $a > 0$  είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- ◆ Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$  με  $a > 0$  έχει **κορυφή** το σημείο  $O(0, 0)$  και βρίσκεται από τον άξονα  $x$  και πάνω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $x$  ισχύει  $y \geq 0$ .
- ◆ Η συνάρτηση  $y = ax^2$  με  $a > 0$  παίρνει **ελάχιστη τιμή**  $y = 0$ , όταν  $x = 0$ ,
- ◆ Για αντίθετες τιμές του  $x$  αντιστοιχεί η ίδια τιμή του  $y$ , που σημαίνει ότι η παραβολή  $y = ax^2$  με  $a > 0$  έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα  $y$ .
- ◆ Όταν η τιμή του  $a$  αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολής «κλείνει».

### A. 4. 1

**49. Τι γνωρίζεται για την συνάρτηση  $y = ax^2$  με  $a < 0$ ;**

- ◆ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$  με  $a < 0$  είναι μια καμπύλη που ονομάζεται **παραβολή**.
- ◆ Η παραβολή που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2$  με  $a < 0$  έχει **κορυφή** το σημείο  $O(0, 0)$  και βρίσκεται από τον άξονα  $x$  και κάτω, που σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τιμή του  $x$  ισχύει  $y \leq 0$ .
- ◆ Η συνάρτηση  $y = ax^2$  με  $a > 0$  παίρνει **μέγιστη τιμή**  $y = 0$ , όταν  $x = 0$ ,

- ◆ Για αντίθετες τιμές του  $x$  αντιστοιχεί η ίδια τιμή του  $y$ , που σημαίνει ότι η παραβολή  $y = ax^2$  με  $a < 0$  έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα  $y'$ .
- ◆ Όταν η απόλυτη τιμή του  $a$  αυξάνεται, τότε το «άνοιγμα» της παραβολής «κλείνεται».

#### A. 4. 2

##### 50. Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;

Ονομάζεται τετραγωνική κάθε συνάρτηση της μορφής  $y = ax^2 + bx + c$  με  $a \neq 0$ .

##### 51. Τι γνωρίζεται για τη συνάρτηση $y = ax^2 + bx + c$ με $a \neq 0$ ;

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax^2 + bx + c$  με  $a \neq 0$  είναι παραβολή με:

- ◆ Κορυφή το σημείο  $K\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$  όπου  $\Delta = b^2 - 4ac$
- ◆ Άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή  $K$  και έχει εξίσωση  $x = -\frac{b}{2a}$
- ◆ Αν  $a > 0$ , η συνάρτηση  $y = ax^2 + bx + c$  παίρνει ελάχιστη τιμή  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  όταν  $x = -\frac{b}{2a}$
- ◆ Αν  $a < 0$ , η συνάρτηση  $y = ax^2 + bx + c$  παίρνει μέγιστη τιμή  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  όταν  $x = -\frac{b}{2a}$

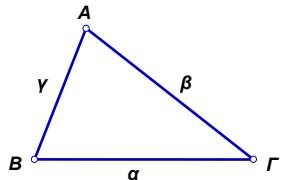
## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΛΗ ΤΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ -ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ)

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο Γεωμετρία

#### B. 1. 1

**52. Τι ονομάζεται Τρίγωνο και ποια τα κύρια στοιχεία του;**

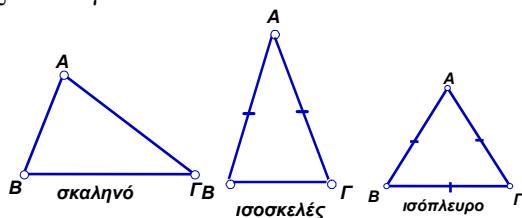
- ◆ Ονομάζεται **τρίγωνο** το επίπεδο σχήμα που ορίζεται από τρία μη συνευθειακά σημεία τα οποία συνδέονται με ευθύγραμμα τμήματα.
- ◆ Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι, οι πλευρές του και οι γωνίες του
- ◆ **Πλευρές** του τριγώνου ονομάζονται τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του.
- ◆ **Γωνίες** του τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του.



**53. Ποια είναι τα είδη των τριγώνων ως προς τις πλευρές, και ως προς τις γωνίες τους;**

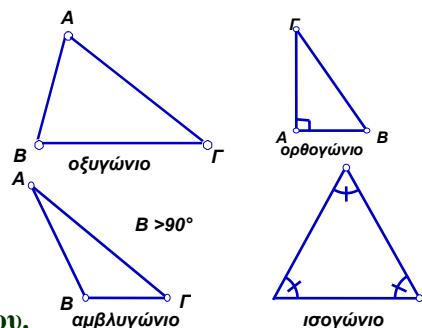
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις πλευρές του λέγεται:

- ◆ **σκαληνό**, αν οι πλευρές του είναι άνισες,
- ◆ **ισοσκελές**, αν δύο πλευρές του είναι ίσες,
- ◆ **ισόπλευρο**, αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες.



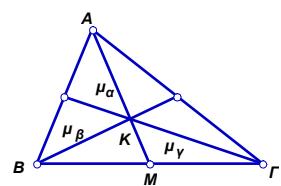
Ένα τρίγωνο που εξετάζεται ως προς τις γωνίες του λέγεται:

- ◆ **οξυγώνιο**, αν όλες του οι γωνίες είναι οξείες,
- ◆ **ορθογώνιο**, αν μία γωνία του είναι ορθή,
- ◆ **αμβλυγώνιο**, αν μία γωνία του είναι αμβλεία.
- ◆ **Ισογώνιο** αν όλες οι γωνίες του είναι ίσες

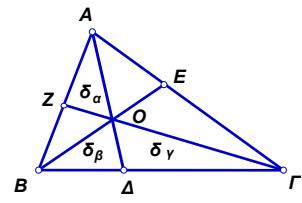


**54. Τι ονομάζεται διάμεσος, διχοτόμος, ύψος, τριγώνου.**

- ◆ **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μια κορυφή του με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχει τρεις διάμεσους που συμβολίζονται  $\mu_\alpha$ ,  $\mu_\beta$ ,  $\mu_\gamma$  αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



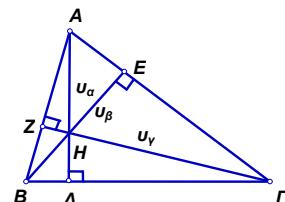
- ◆ **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει την κορυφή της γωνίας με την απέναντι πλευρά και διχοτομεί τη γωνία αυτή.



Κάθε τρίγωνο  $\Delta ABC$  έχει τρεις διχοτόμους που συμβολίζονται  $\delta_\alpha$ ,  $\delta_\beta$ ,  $\delta_\gamma$  αντίστοιχα και διέρχονται από το ίδιο σημείο.

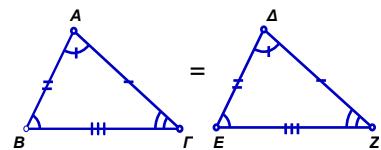
- ◆ **Υψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μια κορυφή του κάθετο προς την ευθεία της απέναντι πλευράς.

Κάθε τρίγωνο  $\Delta ABC$  έχει τρία ύψη που συμβολίζονται  $v_\alpha$ ,  $v_\beta$ ,  $v_\gamma$  αντίστοιχα και διέρχονται το ίδιο σημείο.



### 55. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται ίσα;

Δύο τρίγωνα λέγονται ίσα, όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες και τις ομόλογες πλευρές τους ( πλευρές απέναντι από ίσες γωνίες ) ίσες μία προς μία.



Έτσι αν τα τρίγωνα  $\Delta ABC$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα τότε:

$$\left. \begin{array}{l} A = \Delta \\ B = E \\ \hat{\Gamma} = Z \end{array} \right\} \text{Γωνίες} \quad \left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \\ BG = EZ \\ AG = \Delta Z \end{array} \right\} \text{Ομόλογες πλευρές}$$

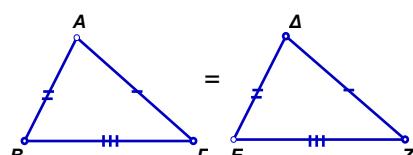
### 56. Πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα;

(Κριτήρια ισότητας τριγώνων)

#### Κριτήριο (Π. Π. Π.)

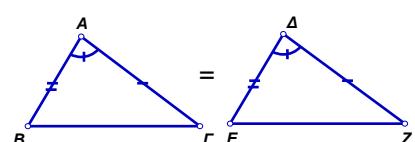
- ◆ Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι τρεις πλευρές του ενός είναι ίσες με τις τρεις πλευρές του άλλου μία προς μία.
- ◆ Τα τρίγωνα  $\Delta ABC$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \\ BG = EZ \\ AG = \Delta Z \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \overset{\Delta}{ABG} = \overset{\Delta}{EZA}$$



#### ◆ Κριτήριο (Π. Γ. Π.)

- ◆ Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν οι δύο πλευρές και η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του ενός είναι ίσες με τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη σ' αυτές γωνία του άλλου αντίστοιχα.



- ◆ Τα τρίγωνα  $\Delta ABG$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

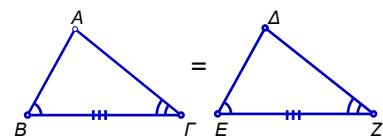
$$\left. \begin{array}{l} AB = \Delta E \\ AG = \Delta Z \\ A = \Delta \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \overset{\Delta}{ABG} = \overset{\Delta}{EZ}$$

- ◆ **Κριτήριο (Π. Γ. Γ.)**

- ◆ Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία πλευρά και οι προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του ενός είναι ίσες με την μία πλευρά και τις προσκείμενες σ' αυτήν γωνίες του άλλου αντίστοιχα.

- ◆ Τα τρίγωνα  $\Delta ABG$  και  $\Delta EZ$  έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} BG = EZ \\ B = E \\ \hat{G} = Z \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \overset{\Delta}{ABG} = \overset{\Delta}{EZ}$$

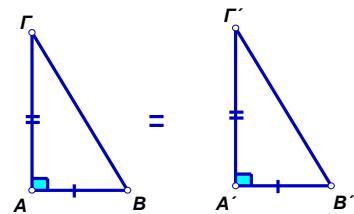


**57. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;**

(Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων)

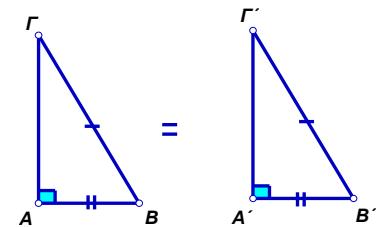
- ◆ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν οι δύο κάθετες πλευρές του ενός είναι ίσες με τις δύο κάθετες πλευρές του άλλου.
- ◆ Τα τρίγωνα  $\Delta ABG$  και  $\Delta A'B'T'$  έχουν :

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ AG = AT' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \overset{\Delta}{ABG} = \overset{\Delta}{A'B'T'}$$

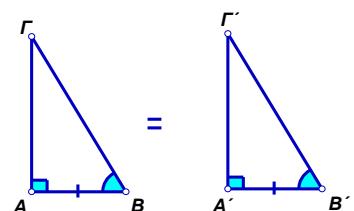


- ◆ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά του άλλου.
- ◆ Τα τρίγωνα  $\Delta ABG$  και  $\Delta A'B'T'$  έχουν :

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ BG = BT' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \overset{\Delta}{ABG} = \overset{\Delta}{A'B'T'}$$



- ◆ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η προσκείμενη της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με τη μία κάθετη πλευρά και την προσκείμενη της οξεία γωνία του άλλου.

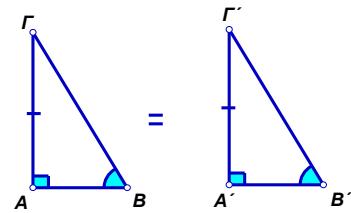


- ◆ Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ AB = A'B' \\ B = B' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$

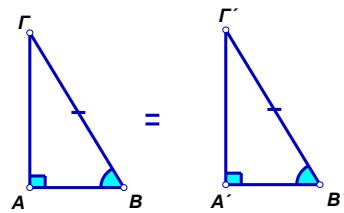
- ◆ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η μία κάθετη πλευρά και η απέναντι της οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την μία κάθετη πλευρά και την απέναντι της οξεία γωνία του άλλου.
- ◆ Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ B = B' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$



- ◆ Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του ενός είναι ίσες με την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του άλλου.
- ◆ Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν:

$$\left. \begin{array}{l} A = A' = 90^\circ \\ B\Gamma = B'\Gamma' \\ B = B' \end{array} \right\} \text{οπότε είναι } \triangle AB\Gamma = \triangle A'B'\Gamma'$$



### 58. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος;

- ◆ Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- ◆ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος.

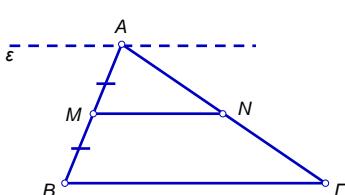
### 59. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

- ◆ Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- ◆ Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

### 60. Να αποδείξετε ότι αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, αυτή διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς.

#### Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το σημείο  $M$  μέσο της πλευράς του  $AB$ . Από το  $M$  φέρουμε παράλ-



ληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ν. Θα δείξουμε ότι  $AN = NG$ .

Από το σημείο Α φέρνουμε μια βοηθητική ευθεία  $\varepsilon // BG$ . Οι παράλληλες ευθείες  $\varepsilon$ ,  $MN$  και  $BG$  ορίζουν ίσα τμήματα στην  $AB$ , άρα θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην  $AG$ . Επομένως  $AN = NG$ .

### B. 1. 2

#### 61. Τι ονομάζεται λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων και με τι ισούται;

- ◆ Λόγος ενός ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$  προς το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , που συμβολίζεται  $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$ , ονομάζεται ο αριθμός  $\lambda$  για τον οποίο ισχύει  $\Gamma\Delta = \lambda \cdot AB$ .
- ◆ Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με το λόγο των μηκών τους εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης.

#### 62. Πότε τα ευθύγραμμα τμήματα $\alpha, \gamma$ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα $\beta, \delta$ ;

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha, \gamma$  είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα  $\beta, \delta$  όταν ισχύει  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Η ισότητα  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$  ονομάζεται **αναλογία** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha, \delta$  ονομάζονται **άκροι όροι**, ενώ τα ευθύγραμμα τμήματα  $\beta, \gamma$  ονομάζονται **μέσοι όροι** της αναλογίας.

#### 63. Ποιες είναι οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών;

Σε μια αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  εφαρμόζουμε τις ιδιότητες των αναλογιών που ισχύουν και στους αριθμούς χρησιμοποιώντας τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων. Οι σημαντικότερες από τις ιδιότητες αυτές είναι:

- ◆ Σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.
- ◆ Σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.
- ◆ Λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

$$Av \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τότε } \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

$$Av \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \quad \text{ή } \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$Av \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τότε } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}$$

### B. 1. 4

**64. Τι ονομάζεται ομοιόθετο ενός σημείου Α με κέντρο ομοιοθεσίας δοσμένο σημείο Ο και λόγο ομοιοθεσίας τον αριθμό  $\lambda$ ;**

Ονομάζεται ομοιόθετο ενός σημείου Α με κέντρο ομοιοθεσίας δοσμένο σημείο Ο και λόγο ομοιοθεσίας τον αριθμό  $\lambda$  το σημείο  $A'$  της ημιευθείας  $OA$  για το οποίο ισχύει  $OA' = \lambda \cdot OA$ .

**65. Ποιες είναι οι ιδιότητες δύο ομοιόθετων πολυγώνων  $\Pi$  και  $\Pi'$ ;**

- ◆ Δύο ομοιόθετα πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- ◆ Οι ανάλογες πλευρές δύο ομοιόθετων πολυγώνων που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία είναι παράλληλες.
- ◆ Αν το πολύγωνο  $\Pi'$  είναι ομοιόθετο του  $\Pi$  με λόγο  $\lambda$  τότε το  $\Pi'$  είναι:
  - μεγέθυνση του  $\Pi$ , όταν  $\lambda > 1$
  - σμίκρυνση του  $\Pi$ , όταν  $0 < \lambda < 1$  και
  - ίσο με το  $\Pi$ , όταν  $\lambda = 1$ .

**B. 1. 4**

**66. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;**

Δύο πολύγωνα λέγονται **όμοια**, όταν το ένα είναι **μεγέθυνση ή σμίκρυνση** του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις ομόλογες(αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες.

Έτσι τα πολύγωνα  $ABΓΔΕ$  και  $OKΛMN$  που έχουν,

$$A = O, B = K, \hat{\Gamma} = \Lambda, \Delta = M, E = N$$

$$\text{και } \frac{AB}{OK} = \frac{B\Gamma}{K\Lambda} = \frac{\Gamma\Delta}{\Lambda M} = \frac{\Delta E}{M N} = \frac{E\Lambda}{N O} \text{ είναι}$$

όμοια.

Το λ ονομάζεται λόγος ομοιότητας.

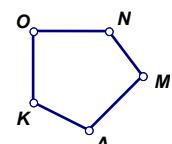
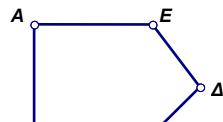
**67. Ποιες προτάσεις προκύπτουν από τον ορισμό της ομοιότητα δύο πολυγώνων;**

Από τον ορισμό της ομοιότητας δύο πολυγώνων προκύπτουν οι επόμενες προτάσεις.

- ◆ Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.
- ◆ Δύο ίσα πολύγωνα είναι και όμοια, με λόγο ομοιότητας 1.
- ◆ Κάθε πολύγωνο είναι όμοιο με τον εαυτό του.
- ◆ Δύο πολύγωνα όμοια προς τρίτο είναι και όμοια μεταξύ τους.

**68. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;**

- ◆ Δύο τρίγωνα λέγονται **όμοια** όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία και τις **ομόλογες** (αντίστοιχες) πλευρές τους ανάλογες. Δηλαδή



αν  $\triangle ABG \sim \triangle EZ$ , τότε  $A = \Delta$ ,  $B = E$ ,  $G = Z$

$$\text{και } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{BG}{EZ} = \frac{AG}{\Delta Z}$$

- ♦ Ο λόγος των αντιστοίχων (ομοιόγων) πλευρών τους ονομάζεται λόγος ομοιότητας και συμβολίζεται με  $\lambda$ .

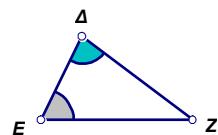
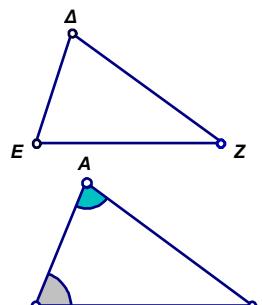
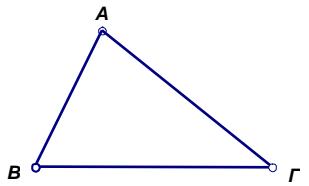
### 69. Πότε δύο τρίγωνα είναι όμοια;

(Κριτήριο ομοιότητας τριγώνων)

- Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία.  
Αν δηλαδή τα τρίγωνα  $ABG$  και  $\Delta EZ$  έχουν

$$A = \Delta, \quad B = E, \quad \text{τότε } \triangle ABG \sim \triangle EZ,$$

$$\text{και επομένως } \hat{G} = Z \text{ και } \frac{AB}{\Delta E} = \frac{BG}{EZ} = \frac{AG}{\Delta Z}$$



### B. 1. 5

### 70. Με τι ισούται ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων;

- ♦ Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους.

### B. 2. 1

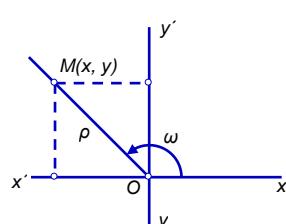
### 71. Πως ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οποιασδήποτε γωνίας;

- ♦ Έστω  $\omega$  ( $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$ ) η γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα  $Ox$ , όταν αυτός στραφεί κατά τη θετική φορά.
- ♦ Αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο  $M(x, y)$  με  $xOM = \omega$  και  $OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  τότε ορίζουμε:

$$\diamond \quad \eta \omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\diamond \quad \sigma \omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\diamond \quad \varepsilon \omega = \frac{y}{x}$$



- ♦ Το  $\eta \omega$  και  $\sigma \omega$  παίρνουν τιμές από το  $-1$  έως το  $+1$ .
- ♦ Είναι δηλαδή  $-1 \leq \eta \omega \leq 1$  και  $-1 \leq \sigma \omega \leq 1$
- ♦ Η  $\varepsilon \omega$  παίρνει οποιαδήποτε τιμή.
- ♦ Αν το  $M(x, y)$  βρίσκεται στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, τότε  $\eta \omega > 0$ ,  $\sigma \omega > 0$ ,  $\varepsilon \omega > 0$
- ♦ Αν το  $M(x, y)$  βρίσκεται στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο, τότε  $\eta \omega > 0$ ,  $\sigma \omega < 0$ ,  $\varepsilon \omega < 0$

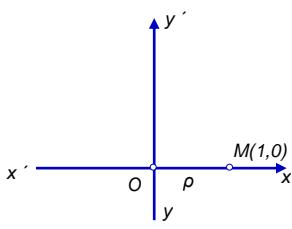
**72. Ποιοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας  $\omega = 0^\circ$  ή  $\omega = 90^\circ$  ή  $\omega = 180^\circ$ ;**

Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Ox π.χ. το M(1,0), τότε  $\omega = xOM = 0^\circ$  και  $\rho = OM = 1$  οπότε έχουμε:

$$\diamond \quad \eta\mu 0^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\diamond \quad \sigma\nu 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\diamond \quad \varepsilon\varphi 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

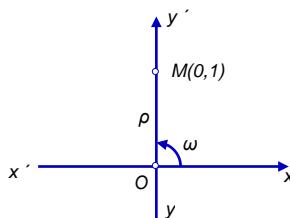


Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Oy π.χ. το M(0, 1), τότε  $\omega = xOM = 90^\circ$  και  $\rho = OM = 1$  οπότε έχουμε:

$$\diamond \quad \eta\mu 90^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\diamond \quad \sigma\nu 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\diamond \quad \varepsilon\varphi 90^\circ \text{ δεν ορίζεται, αφού } x = 0$$

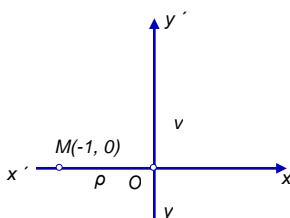


Αν το M είναι σημείο του ημιάξονα Ox' π.χ. το σημείο M(-1, 0), τότε  $\omega = xOM = 180^\circ$  και  $\rho = OM = 1$  οπότε έχουμε:

$$\diamond \quad \eta\mu 180^\circ = \frac{y}{\rho} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\diamond \quad \sigma\nu 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\diamond \quad \varepsilon\varphi 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$



**73. Ποιες σχέσεις συνδέουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς δύο παραπληρωματικών γωνιών;**

Για δύο παραπληρωματικές γωνίες  $\omega$  και  $180^\circ - \omega$  ισχύουν:

$$\diamond \quad \eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\diamond \quad \sigma\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\nu\omega$$

$$\diamond \quad \varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

**74. Να αποδείξετε ότι για μια οποιαδήποτε γωνία  $\omega$  ισχύουν οι τύποι:**

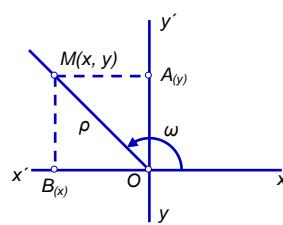
$$\alpha. \quad \eta\mu^2\omega + \sigma\nu^2\omega = 1 \quad \text{και} \quad \beta. \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\nu\omega}$$

**Απόδειξη α.**

$$\eta\mu^2\omega + \sigma v^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} =$$

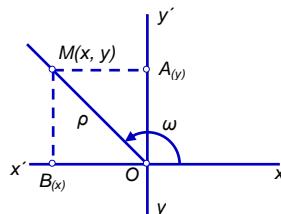
$$\frac{y^2 + x^2}{\rho^2} = \frac{|y|^2 + |x|^2}{\rho^2} = \frac{OA^2 + OB^2}{\rho^2}$$

$$\frac{OA^2 + AM^2}{\rho^2} = \frac{OM^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$



**Απόδειξη β.**

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma v\omega} = \frac{\frac{\rho}{x}}{\frac{y}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$



**75. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των ημιτόνων.**

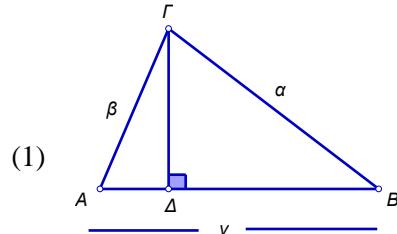
- ◆ Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$

**Απόδειξη**

- ◆ Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $\Gamma\Delta$  ( $\Gamma\Delta \perp AB$ )

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta A\Gamma$  ( $\Delta = 90^\circ$ ) έχουμε:

$$\eta\mu A = \frac{\Gamma\Delta}{\beta} \text{ οπότε } \Gamma\Delta = \beta \cdot \eta\mu A$$



Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  ( $\Delta = 90^\circ$ ) έχουμε:

$$\eta\mu B = \frac{\Gamma\Delta}{\alpha} \text{ οπότε } \Gamma\Delta = \alpha \cdot \eta\mu B \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει:

$$\beta \cdot \eta\mu A = \alpha \cdot \eta\mu B \text{ οπότε } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} \quad (3)$$

$$\text{Όμοια αποδεικνύουμε ότι } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \quad (4)$$

$$\text{Από τις σχέσεις (3), (4) προκύπτει } \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

**76. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τον νόμο των συνημιτόνων.**

Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν οι σχέσεις

- ◆  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin A$
- ◆  $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sin B$

♦  $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin\Gamma$

### Απόδειξη

♦ Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $\Gamma\Delta$  ( $\Gamma\Delta \perp AB$ )

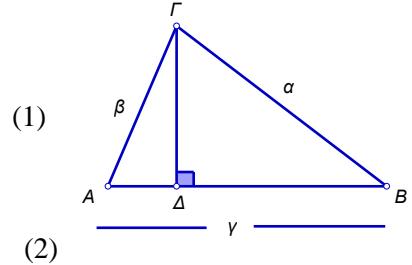
Θα δείξουμε ότι  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sin A$ .

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta A\Gamma$  ( $\Delta = 90^\circ$ ) έχουμε:

$$\sin A = \frac{A\Delta}{\beta} \text{ οπότε } A\Delta = \beta \cdot \sin A$$

και από το θεώρημα του Πυθαγόρα:

$$A\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2$$



(1)

(2)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $\Delta B\Gamma$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) από το

θεώρημα του Πυθαγόρα έχουμε:

$$\alpha^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 = A\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2 =$$

$$\underline{A\Gamma^2} + \underline{\gamma^2 - 2\gamma \cdot A\Delta + A\Delta^2} = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot A\Delta =$$

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma\beta\sin A$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sin B \text{ και } \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sin\Gamma$$

**Καλό διάβασμα και καλή επιτυχία !!!**