

2007

68^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ο “ΘΑΛΗΣ”

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ
68^{ον} ΘΑΛΗΣ
24 Νοεμβρίου 2007

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

$$\begin{aligned}
 1. A &= (200 : 8 + 12 \cdot 100) + [200 : (8+2) + 762] \cdot \left[(-1)^{13} + (-1)^{12} + (-1)^{2007} \right]^2 \\
 &= (25 + 1200) + (200 : 10 + 762) \cdot [(-1) + 1 + (-1)]^2 \\
 &= 1225 + (20 + 762) \cdot (-1)^2 \\
 &= 1225 + 782 \cdot 1 = 2007.
 \end{aligned}$$

2. Αν ω είναι ο αριθμός των μαθητών του Γυμνασίου, τότε ο ω είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 6, 8 και 10. Επειδή $EKP[6,8,10] = 120$, έπειτα ότι $\omega \in \{120, 240, 360, 480, \dots\}$ και αφού $300 < \omega < 400$, θα είναι $\omega = 360$.

Αν x, y, z είναι ο αριθμός των μαθητών της Α', Β' και Γ' τάξης, αντίστοιχα, τότε θα έχουμε

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \lambda \quad \text{και} \quad x + y + z = 360.$$

Άρα είναι

$$\begin{aligned}
 x &= 5\lambda, y = 4\lambda, z = 3\lambda \\
 \text{και } 5\lambda + 4\lambda + 3\lambda &= 360 \Leftrightarrow 12\lambda = 360 \Leftrightarrow \lambda = 30.
 \end{aligned}$$

Άρα είναι: $x = 5 \cdot 30 = 150$, $y = 4 \cdot 30 = 120$, $z = 3 \cdot 30 = 90$.

3. Ο έμπορος πλήρωσε για την αγορά $200 \cdot 3 = 600$ ευρώ.

Η απώλεια του σε κιλά ήταν $200 \cdot \frac{10}{100} = 20$ κιλά, οπότε του έμειναν $200 - 20 = 180$ κιλά.

Για να έχει κέρδος 20% επί της τιμής αγοράς πρέπει να εισπράξει

$$600 + 600 \cdot \frac{20}{100} = 720 \text{ ευρώ.}$$

Άρα πρέπει να πουλήσει το κιλό $720 : 180 = 4$ ευρώ.

4. (α) Αν $x = BG$, $y = AD$ και $AE = v$, τότε $x = 2y$ και

$$\frac{(x+y)v}{2} = E = (AB\Gamma\Delta) \Leftrightarrow 3y \cdot v = 2E \Leftrightarrow y \cdot v = \frac{2E}{3} \Leftrightarrow y \cdot v = 200 \text{ cm}^2.$$

Άρα έχουμε

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2} y \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 200 \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2.$$

$$(β) (ABK\Gamma) = 2(AB\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot v = 2(y \cdot v) = 2 \cdot 200 = 400 \text{ cm}^2.$$

Διαφορετικά

Το τετράπλευρο ΑΒΚΓ έχει καθέτους διαγώνιους, οπότε έχει εμβαδόν

$$(\text{ΑΒΚΓ}) = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΓ} \cdot \text{ΑΚ} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 2v = 2(y \cdot v) = 2 \cdot 200 = 400 \text{cm}^2.$$

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1.

$$\begin{aligned}
 A &= -\left[(-2)^8 : (-4)^2 + (-4)^2 \right] : (-2)^4 = -\left[2^8 : 4^2 + 4^2 \right] : 2^4 \\
 &= -\left[2^8 : (2^2)^2 + 4^2 \right] : 2^4 = -\left(2^8 : 2^4 + 4^2 \right) : 2^4 \\
 &= -(2^4 + 4^2) : 2^4 = -32 : 16 = -2. \\
 B &= -(x-3) - 3(y-4) - [x(y-2) - y(x+3)] \\
 &= -x + 3 - 3y + 12 - (xy - 2x - yx - 3y) \\
 &= -x - 3y + 15 - xy + 2x + xy + 3y = x + 15. \\
 A > B &\Leftrightarrow -2 > x + 15 \Leftrightarrow -x > 17 \Leftrightarrow x < -17.
 \end{aligned}$$

2. (α) $Z\hat{\Gamma}x = A\hat{Z}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ στις παράλληλες $B\Gamma$ και ε).

Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της $A\Gamma$ το τρίγωνο $A\Gamma Z$ είναι ισοσκελές με $Z\hat{\Gamma}A = Z\hat{A}\Gamma$. Όμως, από την παραλληλία των ευθειών ε και $B\Gamma$ προκύπτει ότι $Z\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma}$. Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 40^\circ$ προκύπτει ότι

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ.$$

Άρα έχουμε

$$Z\hat{\Gamma}A = Z\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 70^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\begin{aligned}
 A\hat{Z}\Gamma &= 180^\circ - 2 \cdot 70^\circ = 40^\circ \\
 \Rightarrow Z\hat{A}x &= 40^\circ.
 \end{aligned}$$

(β) Επειδή η δ είναι μεσοκάθετη της $A\Gamma$, το τρίγωνο $KA\Gamma$ είναι ισοσκελές με $KA = K\Gamma$, οπότε η KE είναι η διχοτόμος της γωνίας $AK\Gamma$. Άρα έχουμε

$$A\hat{K}Z = \Gamma\hat{K}Z.$$

Επειδή είναι $\varepsilon \parallel B\Gamma$ θα έχουμε

$$A\hat{Z}K = \Gamma\hat{K}Z,$$

οπότε θα είναι και

$$A\hat{K}Z = A\hat{Z}K,$$

οπότε το τρίγωνο KAZ είναι ισοσκελές με $KA = AZ$.

3. (α) Από τον κανόνα πολλαπλασιασμού δύο φυσικών αριθμών έπεται ότι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των ψηφίων των μονάδων τους. Θεωρώντας τα τετράγωνα των μονοψήφιων φυσικών αριθμών διαπιστώνουμε ότι αυτά λήγουν σε 0, 1, 4, 5, 6, 9, οπότε το τελευταίο ψηφίο κάθε τετραγώνου φυσικού αριθμού ανήκει στο σύνολο $\Sigma = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

(β) Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα θα πρέπει $b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ και αφού ο αριθμός είναι περιττός πρέπει $b \in \{1, 5, 9\}$.

Επειδή ο A διαιρείται με το 9 πρέπει να ισχύει ότι:

$$3a + 2b = \text{πολλαπλάσιο του } 9. \quad (1)$$

- Για $b=1$ λαμβάνουμε $3a+2=\pi\alpha\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=5$ λαμβάνουμε $3a+10=\pi\alpha\lambda.9$, αδύνατο.
- Για $b=9$ λαμβάνουμε $3a+18=\pi\alpha\lambda.9$, οπότε προκύπτει ότι $a \in \{3, 6, 9\}$. Άρα είναι $A = 33399$ ή $A = 66699$ ή $A = 99999$.

4. (α) Παρατηρούμε ότι $B\hat{\Omega}G = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο OBG είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = BG = \alpha$. Επιπλέον $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Άρα είναι $A\hat{\Omega}G = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ$, οπότε θα έχουμε

$$E_{\kappa.\text{τομέα}}(OAE\Gamma) = \pi\alpha^2 \cdot \frac{150^\circ}{360^\circ} = \frac{5\pi\alpha^2}{12}.$$

(β) Επειδή είναι $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{\Gamma} = 75^\circ$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες $A\Delta$ και $B\Gamma$ με τέμνουσα την $A\Gamma$) και $A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ - O\hat{\Gamma}A = 90^\circ - O\hat{\Delta}A = \Delta\hat{A}\Gamma = 75^\circ$, τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.

(γ) Επειδή είναι $OA \perp AD$ και $AD \parallel BG$ θα είναι και $OA \perp BG$, οπότε η OA περνάει από το μέσο M της πλευράς BG . Από το τρίγωνο OMG έχουμε $OM^2 = OG^2 - MG^2 \Leftrightarrow OM^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Leftrightarrow OM^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \Leftrightarrow OM = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Άρα είναι $AM = AO + OM = \alpha \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\alpha^2(2 + \sqrt{3})}{4}.$$

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\begin{cases} xy = (x-50)(y+40) \\ xy = (x+100)(y-20) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x - 50y = 2000 \\ -20x + 100y = 2000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 20 \end{cases}.$$

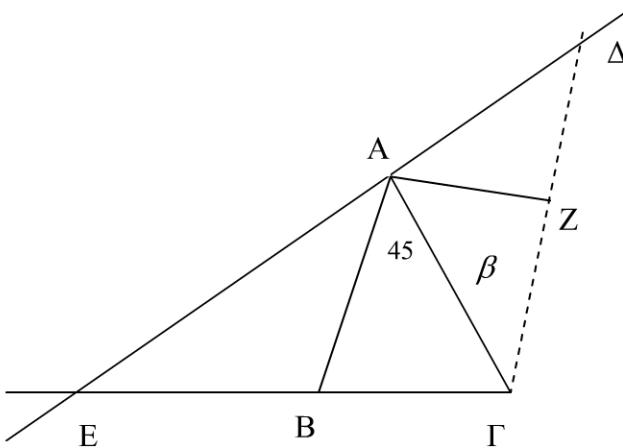
2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0,$$

οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\beta - \gamma)(\alpha^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\gamma - \alpha)(\beta^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} + \frac{(\alpha - \beta)(\gamma^2 - 1)}{-(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)\alpha^2 + (\gamma - \alpha)\beta^2 + (\alpha - \beta)\gamma^2 + (\beta - \gamma + \gamma - \alpha + \alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)\alpha^2 + \beta\gamma(\beta - \gamma) - \alpha(\beta^2 - \gamma^2)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = \\ &= -\frac{(\beta - \gamma)(\alpha^2 + \beta\gamma - \alpha(\beta + \gamma))}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)} = -\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

3.



(a) Το τρίγωνο $\Delta \Gamma A$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{A}\Gamma\Delta = 45^\circ$. Άρα είναι $\hat{A}\Gamma\Delta = 45^\circ = \hat{B}\Gamma\Delta$, οπότε $AB \parallel \Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την $A\Gamma$ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με βάσεις $AB = \beta$, $\Gamma\Delta = \sqrt{\beta^2 + \beta^2} = \beta\sqrt{2}$ και ύψος

$$AZ = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \frac{\beta\sqrt{2}}{2}. \text{ Άρα έχει εμβαδόν}$$

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\beta + \beta\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\beta\sqrt{2}}{2} = \frac{\beta^2(2 + \sqrt{2})}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα EAB και $E\Delta\Gamma$ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x + \beta \Leftrightarrow x(\sqrt{2}-1) = \beta \Leftrightarrow \\ x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta(\sqrt{2}+1).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4}_{(x^3+y^2)^2} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$(x^3+y^2)^2 + 3(x^3+y^2) + 2 = 42$$

$$(x^3+y^2+1) \cdot (x^3+y^2+2) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως x^3+y^2+1 και x^3+y^2+2 , είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3+y^2+1 < x^3+y^2+2$ και γινόμενο

$$42 = 1 \cdot 41 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις (1),(2),(3) είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x=1 \text{ και } y=2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x=1$ και $y=2$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Ισοδύναμα από την δεδομένη ισότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \underbrace{x^6 - 2x^3 + 1}_{\Leftrightarrow (x^3 - 1)^2} + \underbrace{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}_{\Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2} + \underbrace{y^4 - 2y^2 + 1}_{\Leftrightarrow (y^2 - 1)^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 1 = 0 \text{ και } x^2 - y^2 = 0 \text{ και } y^2 - 1 = 0) . \\ & \Leftrightarrow (x = 1 \text{ και } y = 1) \text{ ή } (x = 1 \text{ και } y = -1) \end{aligned}$$

2. Για να έχει η εξίσωση διπλή λύση, πρέπει η διακρίνουσά της να είναι μηδέν.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\kappa\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 4\kappa\mu .$$

$$\text{Στη περίπτωση αυτή η διπλή λύση είναι: } x_1 = x_2 = \frac{-\lambda}{2\kappa}$$

Ο αριθμός $4\kappa\mu$ είναι άρτιος. Άρα και ο λ^2 είναι άρτιος, οπότε ο λ είναι άρτιος.

Οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο λ (δεδομένου ότι είναι μονογήφιος θετικός ακέραιος) είναι: $\lambda = 2$ ή $\lambda = 4$ ή $\lambda = 6$ ή $\lambda = 8$.

Αν $\lambda = 2$ τότε: $4 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 1$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$\kappa = 1 \text{ και } \mu = 1 .$$

Αν $\lambda = 4$ τότε: $16 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 4$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa = 1 \text{ και } \mu = 4) \text{ ή } (\kappa = 4 \text{ και } \mu = 1) \text{ ή } (\kappa = 2 \text{ και } \mu = 2) .$$

Αν $\lambda = 6$ τότε: $36 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 9$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa = 1 \text{ και } \mu = 9) \text{ ή } (\kappa = 9 \text{ και } \mu = 1) \text{ ή } (\kappa = 3 \text{ και } \mu = 3) .$$

Αν $\lambda = 8$ τότε: $64 = 4\kappa\mu \Leftrightarrow \kappa\mu = 16$, οπότε οι δυνατές τιμές για τα κ και μ είναι

$$(\kappa = 2 \text{ και } \mu = 8) \text{ ή } (\kappa = 8 \text{ και } \mu = 2) \text{ ή } (\kappa = 4 \text{ και } \mu = 4) .$$

Άρα οι δυνατές τιμές για τη διατεταγμένη τριάδα (κ, λ, μ) είναι:

$$(1, 2, 1), (1, 4, 4), (2, 4, 2), (1, 6, 9), (3, 6, 3), (2, 8, 8), (4, 8, 4) .$$

Οι άλλες περιπτώσεις απορρίπτονται, διότι δεν δίνουν ακέραια λύση.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν, με την αντίστοιχη διπλή λύση είναι:

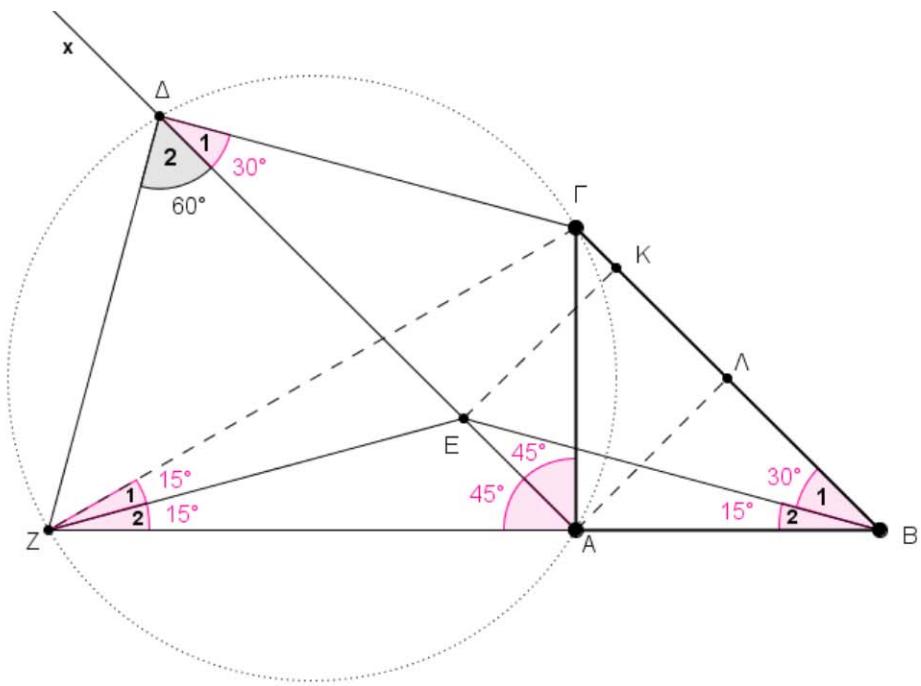
$$x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ με διπλή λύση } x_1 = x_2 = -1 ,$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ με διπλή λύση } x_1 = x_2 = -2 ,$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \text{ με διπλή λύση } x_1 = x_2 = -3 .$$

3. (α) Εφόσον το ΒΓΔΕ είναι ρόμβος, θα ισχύουν οι ισότητες:

$$\text{ΒΓ} = \Gamma\Delta = \Delta\text{Ε} = \text{ΒΕ} \quad (1)$$



Θεωρούμε $\Delta\Lambda$ και EK κάθετες στη $B\Gamma$.

Τότε $\Delta\Lambda = EK$ (διότι $\Delta\Lambda EK$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

Η $\Delta\Lambda$ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, οπότε $\Delta\Lambda = \frac{B\Gamma}{2}$.

Άρα $\Delta\Lambda = EK = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{BE}{2}$. Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο BEK ,

έχουμε:

$$EK = \frac{BE}{2} \text{ οπότε } \hat{B}_1 = 30^\circ.$$

Από το ρόμβο $B\Gamma\Delta E$ έχουμε $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$ και επειδή $\Gamma\hat{\Delta}Z = 90^\circ$ έχουμε τελικά ότι:

$$\boxed{\hat{\Delta}_2 = 60^\circ} \quad (2)$$

Το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta Z$ είναι εγγράψιμο (διότι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) και η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}Z$. Άρα το Δ είναι μέσο του τόξου ΓZ , οπότε

$$\boxed{\Delta\Gamma = \Delta Z = \Delta E} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.

(β) Προφανώς η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{\Delta}Z$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ZE είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{Z}A$.

Εφόσον το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο, θα ισχύει $EZ = EB$ και επειδή

$\hat{B}_2 = 15^\circ$, θα ισχύει:

$$\hat{Z}_2 = 15^\circ \quad (4)$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΓΔΖ έχουμε $\hat{\text{ΑΖΓ}} = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\text{Ζ}}_1 = 15^\circ$.

4. Για $xyz \neq 0$ το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\frac{3xy}{z} + \frac{2yz}{x} = 70, \quad \frac{7yz}{x} + \frac{4zx}{y} = 256, \quad \frac{5zx}{y} + \frac{6xy}{z} = 52,$$

το οποίο, αν θέσουμε

$$\frac{xy}{z} = u, \quad \frac{yz}{x} = v, \quad \frac{zx}{y} = w$$

γίνεται

$$\left. \begin{array}{l} 3u + 2v = 70 \\ 7v + 4w = 256 \\ 5w + 6u = 52 \end{array} \right\}. \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων λαμβάνουμε

$$9(u + v + w) = 378 \Leftrightarrow .$$

$$u + v + w = 42. \quad (4)$$

Λόγω της (4) η εξίσωση (2) γίνεται

$$7v + 4(42 - u - v) = 256$$

$$\Leftrightarrow -4u + 3v = 88. \quad (5)$$

Από τις (1) και (5) λαμβάνουμε $u = 2$, $v = 32$, οπότε από την (4) προκύπτει ότι $w = 8$. Άρα έχουμε το σύστημα

$$\frac{xy}{z} = 2, \quad \frac{yz}{x} = 32, \quad \frac{zx}{y} = 8 \quad (6)$$

από το οποίο με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των τριών εξισώσεων έχουμε

$$xyz = 2 \cdot 8 \cdot 32. \quad (7)$$

Από τις (6) και (7) λαμβάνουμε

$$\left. \begin{array}{l} 32x^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 8y^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \\ 2z^2 = 2 \cdot 8 \cdot 32 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 = 16 \\ y^2 = 64 \\ z^2 = 256 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = \pm 4 \\ y = \pm 8 \\ z = \pm 16 \end{array} \right\},$$

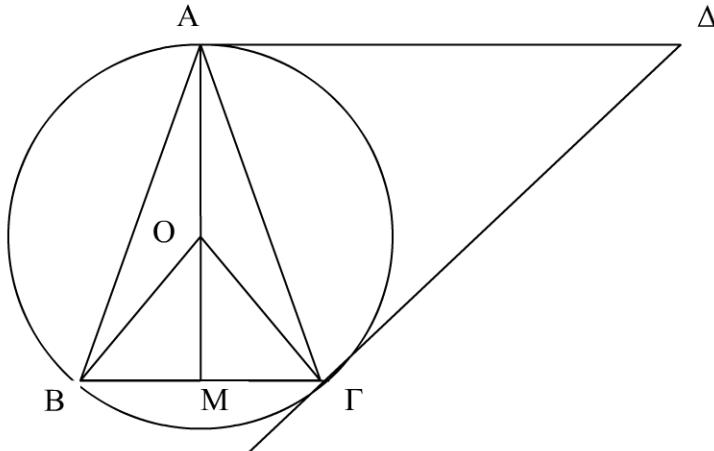
οπότε προκύπτουν συνολικά 8 τριάδες που είναι λύσεις του συστήματος:

$$(x, y, z) = (4, 8, 16) \text{ ή } (-4, -8, -16) \text{ ή } (4, 8, -16) \text{ ή } (-4, -8, 16)$$

$$\text{ή } (4, -8, -16) \text{ ή } (-4, 8, 16) \text{ ή } (4, -8, 16) \text{ ή } (-4, 8, -16).$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

1.



(α) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελή ($\Delta A = \Delta \Gamma$, ως εφαπτόμενες από το Δ στον περιγεγραμμένο κύκλο) και έχουν $\hat{\Gamma} = \Gamma \hat{A} \Delta$, ως εντός εναλλάξ. Άρα είναι όμοια.

(β) Παρατηρούμε ότι $B\hat{O}\Gamma = 2\hat{A} = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο $OB\Gamma$ είναι ισόπλευρο και ισχύει ότι $R = BG = \alpha$.

Έστω η AO τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο M . Επειδή είναι $OA = OB$ και $AB = AG$ η OA είναι η μεσοκάθετη της $B\Gamma$. Άρα είναι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο.

Επιπλέον από το τρίγωνο $AM\Gamma$ έχουμε $AM = \alpha \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και

$$A\Gamma^2 = \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} \Leftrightarrow A\Gamma = \alpha\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Επειδή τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια ($\hat{\Gamma} = \Gamma \hat{A} \Delta$), θα έχουμε

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{BG} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{A\Gamma^2}{BG} \Leftrightarrow A\Delta = \alpha(2 + \sqrt{3}).$$

Άρα είναι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{\alpha + \alpha(2 + \sqrt{3})}{2} \cdot \frac{\alpha(2 + \sqrt{3})}{2} = \frac{\alpha^2(9 + 5\sqrt{3})}{4}$$

2. (α) Για να είναι το 2 κοινή ρίζα των δύο εξισώσεων πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} 8\lambda - 2(\mu + 4) - 2 = 0 \\ 4\mu - 4 \cdot 2 - \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 3 \end{cases}.$$

(β) Για $\lambda=2$ και $\mu=3$ η δεδομένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{2x^3 - 7x - 2}{3x^2 - 4x - 4} = \frac{17}{8}.$$

Όμως έχουμε τις παραγοντοποιήσεις

$$2x^3 - 7x - 2 = (x - 2)(2x^2 + 4x + 1)$$

$$3x^2 - 4x - 4 = (x - 2)(3x + 2).$$

οπότε η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{2x^2 + 4x + 1}{3x + 2} = \frac{17}{8}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ 2, -\frac{2}{3} \right\}.$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 19x - 26 = 0, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ 2, -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -\frac{13}{16}, \quad x \in \mathbb{R} - \left\{ 2, -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{13}{16}.$$

3. Για $x = y = 0$ από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f(0) - f(0)) &= f(f(0)) - 0 \\ \Leftrightarrow f(0) &= f(f(0)) \end{aligned} \tag{2}$$

Από τη δοσμένη συναρτησιακή σχέση (1) θέτοντας όπου y το $f(x)$ έχουμε:

$$f(f(x) - f(f(x))) = f(f(x)) - f(x) \tag{3}$$

Αν τώρα στη (3) θέσουμε $x = 0$ έχουμε:

$$f(f(0) - f(f(0))) = f(f(0)) - f(0)$$

και σε συνδυασμό με την (2) καταλήγουμε $f(f(0)) = f(0) = 0$.

Θέτοντας στην (1) όπου $x = 0$, έχουμε:

$f(f(0) - f(y)) = f(f(0)) - y$ και δεδομένου ότι $f(f(0)) = f(0) = 0$, καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-f(y)) = -y. \tag{4}$$

Θέτοντας στην (1) όπου y το x έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f(x) - f(x)) &= f(f(x)) - x \Leftrightarrow f(0) = f(f(x)) - x \Leftrightarrow \\ f(f(x)) &= x \end{aligned} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας στην (4) όπου y το $f(x)$, έχουμε:

$$f(-f(f(x))) = -f(x)$$

και σε συνδυασμό με την (5), καταλήγουμε στη σχέση

$$f(-x) = -f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η f είναι περιττή.

4. Αν θέσουμε $x = \frac{a+b}{a-b}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{a}{b} = \frac{x+1}{x-1} \tag{1}$$

(είναι $x \neq 1$, αφού $b \neq 0$). Ομοίως, αν θέσουμε $y = \frac{b+c}{b-c}$, $z = \frac{c+a}{c-a}$, τότε λαμβάνουμε

$$\frac{b}{c} = \frac{y+1}{y-1} \quad (2)$$

$$\text{και } \frac{c}{a} = \frac{z+1}{z-1}. \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\frac{(x+1)(y+1)(z+1)}{(x-1)(y-1)(z-1)} = \frac{abc}{bca} = 1 \Rightarrow xy + yz + zx = -1.$$

Όμως έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 - 2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2. \end{aligned}$$