1. Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση

ΘΕΩΡΙΑ 1 ***Όταν ένα σύστημα κάνει γ.α.τ. να αποδείξετε τη σχέση:***

$$\mathbf{F = -D \cdot x}$$

Απόδειξη

Αντικαθιστώντας τη σχέση της επιτάχυνσης $\alpha = -\omega^2 \cdot x$

στο Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής $F = m \cdot \alpha$

παίρνουμε: $F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$

Η ποσότητα $m \cdot \omega^2$ είναι σταθερή, χαρακτηριστική για κάθε ταλαντωτή συμβολίζεται δε D και λέγεται σταθερά της ταλάντωσης ή σταθερά επαναφοράς.

Άρα η παραπάνω εξίσωση γράφεται: $F = -D \cdot x$

Το πρόσημο (–) δείχνει ότι η φορά της συνισταμένης δύναμης είναι *αντίθετη* από τη φορά της απομάκρυνσης, δηλαδή έχει φορά προς τη θέση ισορροπίας γι΄ αυτό λέγεται και *δύναμη επαναφοράς*.

ΘΕΩΡΙΑ 2 ***Σε σύστημα που κάνει γ.α.τ. να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την περίοδο ταλάντωσής του.***

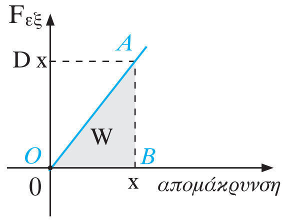
Απόδειξη

Από τις σχέσεις $D = m \cdot \omega^2$ και $\omega = 2\pi / T$ παίρνουμε $D = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$ η οποία λύνεται ως προς T που είναι η περίοδος του απλού ταλαντωτή. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$

ΘΕΩΡΙΑ 3 ***Σε σύστημα που κάνει γ.α.τ. να αποδείξετε τη σχέση*** $\mathbf{U = \frac{1}{2}Dx^2}$ ***που δίνει την δυναμική ενέργεια της ταλάντωσής του.***

Απόδειξη

Για να εκτρέψουμε ένα ταλαντωτή από τη Θ.Ι. του πρέπει να ασκήσουμε δύναμη $F_{εξωτ}$ αντίθετη της δύναμης επαναφοράς, δηλαδή της μορφής: $F_{εξωτ}=D{\cdot}x$



Η δύναμη αυτή είναι μεταβλητού μέτρου άρα το έργο της υπολογίζεται γραφικά από το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου τμήματος του διαγράμματος $F_{εξωτ}=f(x)$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

$$W = (OAB) = \frac{1}{2}Dx \cdot x = \frac{1}{2}Dx^2$$

Μέσω του έργου W της δύναμης $F_{εξωτ}$ μεταφέρεται ενέργεια από τον εξωτερικό παράγοντα στο σύστημα η οποία αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια.

ΘΕΩΡΙΑ 4 ***Σε σύστημα που κάνει γ.α.τ. να δικαιολογήσετε ότι:***

$$\mathbf{K + U = σταθ.}$$

Απόδειξη

Αν λάβουμε υπόψη μας ότι:

$$x=A{\cdot}ημ(ωt+φ_0) \quad και \quad υ=ω{\cdot}A{\cdot}συν(ωt+φ_0)$$

οι σχέσεις $K=\frac{1}{2}m\cdot υ^2$ και $U=\frac{1}{2}D{\cdot}x^2$ γράφονται:

$$K=\frac{1}{2}m\cdot ω^2\cdot A^2\cdot συν^2(ωt+φ_0) \quad και \quad U=\frac{1}{2}D{\cdot}A^2{\cdot}ημ^2(ωt+φ_0)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπ’ όψη ότι: $D=m{\cdot}ω^2$ και $συν^2(ωt+φ_0)+ημ^2(ωt+φ_0)=1$ προκύπτει ότι:

$$K+U = \frac{1}{2}D{\cdot}x^2 = E_{ολ}$$

ΘΕΩΡΙΑ 5 ***Να αποδείξετε ότι η ταχύτητα του ταλαντωτή σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας του, έχει αλγεβρική τιμή που δίνεται από την εξίσωση:***

$$υ = \pm\ ω\cdot\sqrt{A^2 - x^2}$$

Απόδειξη

i. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται με Α.Δ.Ε.Τ. $U+K=E_{ολ} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}D{\cdot}x^2 + \frac{1}{2}m{\cdot}υ^2=\frac{1}{2}D{\cdot}A^2 \Leftrightarrow m{\cdot}ω^2{\cdot}x^2+m{\cdot}υ^2=m{\cdot}ω^2{\cdot}A^2 \quad ή$$

$\omega^2 \cdot x^2 + \upsilon^2 = \omega^2 \cdot A^2 \Leftrightarrow \upsilon^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$

ii. Επίσης η σχέση αποδεικνύεται με τις εξισώσεις:

$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ και $\upsilon = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$

Υψώνουμε τις σχέσεις στο τετράγωνο και προσθέτουμε κατά μέλη.

Τελικά παίρνουμε: $$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 \cdot A^2} = \eta\mu^2(\omega t + \varphi_0) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \varphi_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 \cdot A^2} = 1 \Leftrightarrow \upsilon^2 = \omega^2 \cdot (A^2 - x^2)$$

ΘΕΩΡΙΑ 6 ***Η περίοδος μιας φθίνουσας ταλάντωσης είναι Τ και το πλάτος της ακολουθεί τον νόμο:*** $A_n = A_0 e^{-\Lambda t}$, ***t=NT.***

α. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών του πλάτους της ταλάντωσης είναι σταθερός: $\mathbf{\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\Lambda T} = \sigma\tau\alpha\theta.}$

β. Να δείξετε ότι ο λόγος δύο διαδοχικών τιμών της ενέργειας της ταλάντωσης είναι σταθερός: $\mathbf{\frac{E_n}{E_{n+1}} = e^{2\Lambda T} = \sigma\tau\alpha\theta.}$

Απόδειξη

α. $$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\Lambda nT}}{A_0 e^{-\Lambda(n+1)T}} \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{-\Lambda nT + \Lambda(n+1)T} \Leftrightarrow \frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\Lambda T}$$

β. $$\frac{E_n}{E_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}DA_n^2}{\frac{1}{2}DA_{n+1}^2} \Leftrightarrow \frac{E_n}{E_{n+1}} = \left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{E_n}{E_{n+1}} = \left(e^{\Lambda T}\right)^2 = e^{2\Lambda T}$$

ΘΕΩΡΙΑ 7 ***Να βρείτε την εξίσωση της σύνθετης κίνησης που κάνει ένα σώμα, το οποίο εκτελεί ταυτόχρονα δύο γ.α.τ. με εξισώσεις:***

$x_1 = A \cdot \eta\mu\omega_1 t$ ***και*** $x_2 = A \cdot \eta\mu\omega_1 t$

Ποια είναι η συχνότητα της σύνθετης κίνησης;

Απόδειξη

Η απομάκρυνση x της συνισταμένης κίνησης είναι:

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow x = A \cdot (\eta\mu\omega_1 t + \eta\mu\omega_2 t) \qquad (1)$$

Από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι: $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2}$

Άρα: $$\etaμω_1 t + \etaμω_2 t = 2συν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)\cdot \etaμ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right) \quad (2)$$

Επομένως η σχέση (1) λόγω της (2) γράφεται:

$$x = 2A\cdot συν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)\cdot \etaμ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right) \quad (3)$$

Τον παράγοντα $2A\cdot συν\left(\frac{ω_1 - ω_2}{2}t\right)$ μπορούμε να τον επιλέξουμε ως πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης και η εξίσωση (3) να γραφεί:

$$x = A'\cdot \etaμ\left(\frac{ω_1 + ω_2}{2}t\right) \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) περιγράφει περιοδική κίνηση, όχι γραμμική αρμονική, που έχει συχνότητα που είναι σχεδόν ίση με τις συχνότητες των συνιστωσών ταλα-ντώσεων. Συγκεκριμένα είναι ο μέσος όρος των συνιστωσών ταλαντώσεων.

Δηλαδή: $$\overline{ω} = \frac{ω_1 + ω_2}{2} \simeq ω_1 \simeq ω_2$$

ΘΕΩΡΙΑ 8 ***Τι ονομάζουμε περίοδο διακροτήματος; Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει την περίοδο του διακροτήματος.***

Απόδειξη

Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών (ή μεγίστων τιμών) του πλάτους, λέγεται περίοδος του διακροτήματος και συμβολίζουμε με $T_δ$.

Από τη σχέση (4) γίνεται το πλάτος $A'=0$ όταν:

$$συν\frac{ω_1 - ω_2}{2}t = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{|ω_1 - ω_2|t}{2} = (2k+1)\frac{π}{2}$$

Οι δύο πρώτες λύσεις για $κ = 0$ και $κ = 1$ είναι:

$$\frac{|ω_1 - ω_2|}{2}t_1 = \frac{π}{2} \quad \text{και} \quad \frac{|ω_1 - ω_2|}{2}t_2 = \frac{3π}{2}$$

Η περίοδος $T_δ$ του διακροτήματος είναι:

$$T_δ = Δt = t_2 - t_1 = \frac{2π}{|ω_1 - ω_2|} \Leftrightarrow T_δ = \frac{1}{|f_1 - f_2|}$$