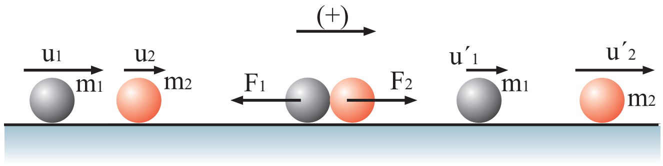
1. Κρούσεις

ΘΕΩΡΙΑ 1 ***Σε κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με μάζες m_1 και m_2 να υπολογίσετε τις ταχύτητες $\vec{u}_1'$ και $\vec{u}_2'$ των σφαιρών μετά την σύγκρουση, αν γνωρίζετε τις αρχικές τους ταχύτητες και τις μάζες τους.***

Απόδειξη



πριν τη κρούση *κρούση* *μετά τη κρούση*

Ας ορίσουμε σαν θετική τη φορά προς τα δεξιά, όπως δείχνει το σχήμα.
Για την κρούση επειδή είναι ελαστική, θα ισχύουν η ΑΔΟ και η αρχή διατήρησης της ενέργειας (ΑΔΚΕ) πριν και μετά την κρούση.

Α.Δ.Ο.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \Rightarrow m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1' + m_2 \cdot \vec{u}_2' \Rightarrow$$

$$m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1' + m_2 \cdot u_2' \Rightarrow m_1\left(u_1 - u_1'\right) = m_2\left(u_2' - u_2\right) \qquad (1)$$

Α.Δ.Κ.Ε.

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 \cdot u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \cdot u_2'^2 \Rightarrow$$

$$m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2 = m_1 \cdot u_1'^2 + m_2 \cdot u_2'^2 \Rightarrow m_1\left(u_1^2 - u_1'^2\right) = m_2\left(u_2'^2 - u_2^2\right) \Rightarrow$$

$$m_1\left(u_1 - u_1'\right)\left(u_1 + u_1'\right) = m_2\left(u_2' - u_2\right)\left(u_2 + u_2'\right) \qquad (2)$$

Αν είναι: $u_1 \neq u_1'$ και $u_2 \neq u_2'$

από (1) και (2) διαιρώντας κατά μέλη (2):(1) παίρνουμε:

$$u_1 + u_1' = u_2' + u_2 \qquad (3)$$

Οι σχέσεις (1) και (3) δίνουν: $$u_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}u_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \qquad (4)$$

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}u_2 \qquad (5)$$

ΘΕΩΡΙΑ 2 ***Σε κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με μάζες $m_1 = m_2$ να δείξετε ότι οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες μετά την κρούση.***

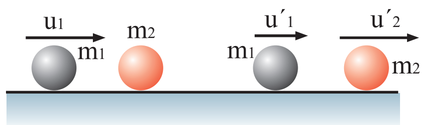
Απόδειξη

Εάν $m_1 = m_2 = m$ τότε οι σχέσεις (4) και (5) γίνονται:

$$u_2' = \frac{2m}{2m}u_2 + \frac{m-m}{2m}u_1 \Rightarrow u_2' = u_1 \qquad \text{και}$$

$$u_2' = \frac{2m}{2m}u_1 + \frac{m-m}{2m}u_2 \Rightarrow u_2' = u_1$$

ΘΕΩΡΙΑ 3 ***Σε κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με μάζες m_1 και m_2, με*** $u_2=0$, ***να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.***



Απόδειξη

Αν $u_2=0$ από τις γενικές σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$$u_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\cdot 0 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \Rightarrow u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \qquad (6)$$

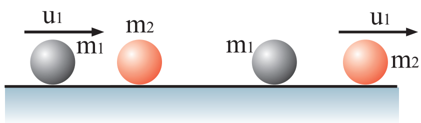
$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\cdot 0 \Rightarrow u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 \quad (7)$$

ΘΕΩΡΙΑ 4 ***Σε κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών με μάζες m_1 και m_2, $u_2=0$ να βρείτε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση, στις περιπτώσεις:***

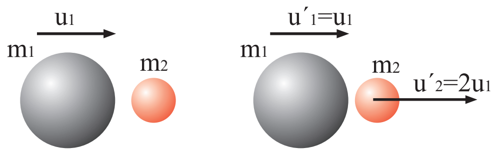
ι. $m_1 = m_2$ ιι. $m_1 >> m_2$ ιιι. $m_1 << m_2$

Απόδειξη

i. Αν $m_1 = m_2$ από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε: $u_1' = 0$ $u_2' = u_1$



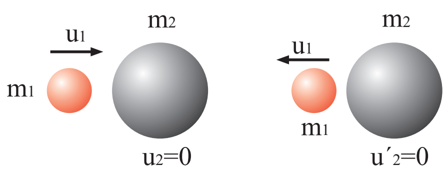
ii. Αν $m_1 >> m_2$ από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{m_2}{m_1} \rightarrow 0$ έχουμε:



$$u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 = \frac{\frac{m_1}{m_1}-\frac{m_2}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}u_1 = \frac{1-\frac{m_2}{m_1}}{1+\frac{m_2}{m_1}}u_1 = \frac{1-0}{1+0}u_1 \Rightarrow u_1' = u_1$$

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1 = \frac{2\frac{m_1}{m_1}}{\frac{m_1}{m_1}+\frac{m_2}{m_1}}u_1 = \frac{2}{1+\frac{m_2}{m_1}}u_1 = \frac{2}{1+0}u_1 \Rightarrow u_2' = 2u_1$$

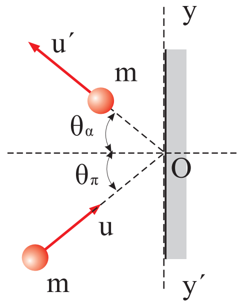
iii. Αν $m_1 << m_2$ από τις σχέσεις (6) και (7) λαμβάνοντας υπόψην ότι $\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0$ έχουμε:



$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}} u_1 = \frac{\frac{m_2}{m_1} - 1}{\frac{m_2}{m_1} + 1} u_1 = \frac{0-1}{0+1} u_1 \Rightarrow u_1' = -u_1$$

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_2}} u_1 = \frac{2 \cdot 0}{0+1} u_1 = 0 \cdot u_1 \Rightarrow u_2' = 0$$

ΘΕΩΡΙΑ 5 ***Στην περίπτωση που η σφαίρα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε τοίχο με γωνία πρόσπτωσης θ_π τότε θα ανακλαστεί με γωνία θ_α όπου θα ισχύει ότι $\theta_\pi = \theta_\alpha$.***

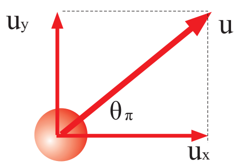


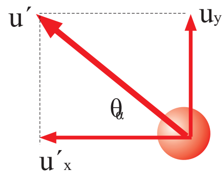
Απόδειξη

Από αναλύσεις των ταχυτήτων θα έχουμε:

$$\eta\mu\theta_\pi = \frac{u_y}{u} \Rightarrow u_y = u \cdot \eta\mu\theta_\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_\pi = \frac{u_x}{u} \Rightarrow u_x = u \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_\pi$$





$$\eta\mu\theta_\alpha = \frac{u'_y}{u} \Rightarrow u'_y = u' \cdot \eta\mu\theta_\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta_\alpha = \frac{u'_x}{u} \Rightarrow u'_x = u' \cdot \sigma\upsilon\nu\theta_\alpha$$

Από Αρχή Διατήρησης της κινητικής ενέργειας θα πρέπει :

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mu'^2 \Rightarrow u^2 = u'^2 \Rightarrow u = u' \quad (1)$$

Α.Δ.Ο στον άξονα y΄O y, επειδή δεν γίνεται κρούση, θα πρέπει:

$$p_y = p'_y \Rightarrow mu_y = mu'_y \Rightarrow u\eta\mu\theta_\pi = u'\eta\mu\theta_\alpha \xrightarrow{(1)}$$

$$\eta\mu\theta_\pi = \eta\mu\theta_\alpha \Rightarrow \theta_\pi = \theta_\alpha$$

ΘΕΩΡΙΑ 6 ***Να γράψετε τη γενική σχέση στο φαινόμενο Doppler. Να εξηγήσετε πως βάζουμε τα πρόσημα.***

$$f_A = \frac{\upsilon \pm \upsilon_A}{\upsilon \pm \upsilon_s} f_s$$

Τα πρόσημα στον αριθμητή και στον παρανομαστή μπαίνουν ως εξής:

- ✔ Όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή παίρνουμε (-) στον παρανομαστή.
- ✔ Όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή παίρνουμε (+) στον παρανομαστή.
- ✔ Όταν ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή παίρνουμε (+) στον αριθμητή.
- ✔ Όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή παίρνουμε (-) στον αριθμητή.

Παρατήρηση

Οι ταχύτητες στην παραπάνω σχέση έχουν τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει την πηγή με τον παρατηρητή. Αν η κίνηση της πηγής ή του παρατηρητή γίνεται σε άλλη διεύθυνση, ως ταχύτητα θα θεωρήσουμε τη συνιστώσα της στη διεύθυνση πηγή-παρατηρητής.