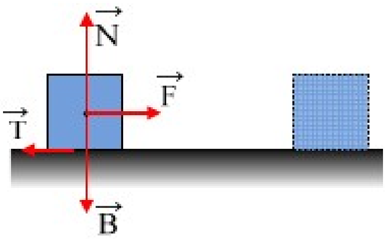
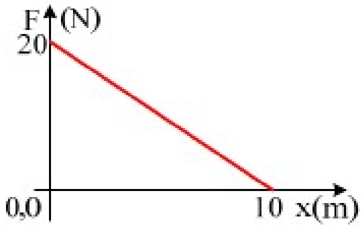
ΕΡΓΟ – ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα σώμα μάζας m=2kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται όπως στο σχήμα.





Στη θέση που μηδενίζεται η δύναμη, το σώμα έχει ταχύτητα υ=6m/s. Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου. $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα από την αρχική θέση μέχρι τη θέση x=10m.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_B + W_N + W_T \ (1)$$

Αλλά $W_B = W_T = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση.

$$ΣF_y=0 \text{ ή } N=mg, \text{ συνεπώς } T=μN= μmg.$$

Το έργο της δύναμης F είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του σχηματιζόμενου χωρίου της γραφικής παράστασης, δηλαδή:

$$W_F= ½\ 10·20J= 100J$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$½\ mυ^2 – 0 = W_F - μmg·x \text{ από όπου}$$

$$μ= (2W_F- mυ^2)/2mgx = (2·100-2·36)/(2·2·10·10)= 0,32.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή περνά από μια θέση Α, με ταχύτητα $υ_1$=4m/s, ενώ δέχεται την επίδραση μιας σταθερής δύναμης μέτρου F=5N, μέχρι να φτάσει στην θέση Β. Η απόσταση (ΑΒ) είναι ίση με 4m.

Να υπολογίσετε:

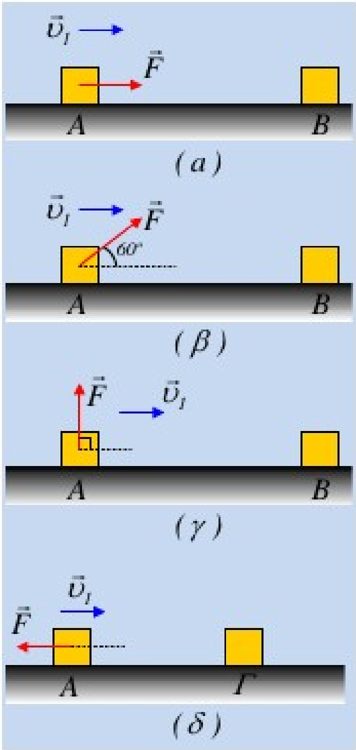
i) Το έργο της δύναμης για την μετακίνηση από το Α στο Β.

ii) Την κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση Β.

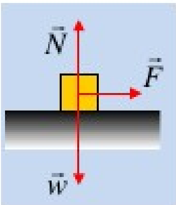
iii) Την ταχύτητα του σώματος στη θέση Β.

για τις τέσσερις περιπτώσεις που εμφανίζονται στο διπλανό σχήμα, όπου στο τελευταίο σχήμα η απόσταση είναι (ΑΓ)=3m.

Δίνονται συν60°= ½ , συν90°=0 και συν180°=-1.



Απάντηση:



Στο σώμα εκτός από την παραπάνω δύναμη F, ασκούνται το βάρος και η δύναμη στήριξης (κάθετη αντίδραση) από το επίπεδο, όπως στο σχήμα.

Αλλά σε όλες τις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε τόσο το βάρος όσο και η Ν, είναι κάθετες στη μετατόπιση, συνεπώς δεν παράγουν έργο. Συνεπώς η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι η δύναμη F. Εξάλλου το σώμα στη θέση Α έχει κινητική ενέργεια:

$$K_1 = \frac{1}{2} m υ_1^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 4^2\, J = 16\, J \;. \;(1)$$

Α) στο πρώτο σχήμα:

i) Το έργο της δύναμης είναι ίσο:

$$W = F \cdot Δx \cdot συνα = 5 \cdot 4 \cdot 1 J = 20 J.$$

ii) Το σώμα στη θέση Α έχει κινητική ενέργεια 16J, ενώ μέσω του έργου τη δύναμης πήρε ενέργεια 20J, συνεπώς στη θέση Β, θα έχει κινητική ενέργεια K_2=16J+20J=36J.

Σχόλιο:

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε εφαρμόζοντας το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (Θ.Μ.Κ.Ε.) ή το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F + W_w + W_N \rightarrow$$

$$K_B - K_A = W_F + 0 + 0 \rightarrow$$

$$K_B = K_A + W_F = 16J + 20J = 36J.$$

iii) Η κινητική ενέργεια στη θέση Β δίνεται από την εξίσωση:

$$K_2 = \frac{1}{2} m \upsilon_2^2 \rightarrow \quad \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} \quad (2)$$

Και με αντικατάσταση $\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36}{2}} m/s = 6m/s$.

Β) στο δεύτερο σχήμα, με την ίδια συλλογιστική παίρνουμε:

i) Το έργο της δύναμης είναι ίσο:

$$W = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} J = 10J.$$

ii) Το σώμα στη θέση Α έχει κινητική ενέργεια 16J, ενώ μέσω του έργου τη δύναμης πήρε ενέργεια 10J, συνεπώς στη θέση Β, θα έχει κινητική ενέργεια K_2=16J+10J=26J.

iii) Η ταχύτητα θα υπολογιστεί εξάλλου με αντικατάσταση στην (2):

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 26}{2}} m/s \approx 5{,}1 m/s.$$

Γ) στο τρίτο σχήμα, με την ίδια συλλογιστική παίρνουμε:

i) Το έργο της δύναμης είναι ίσο:

$$W = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 5 \cdot 4 \cdot 0 J = 0$$

Πράγμα που το περιμέναμε, αφού η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση, οπότε δεν παράγει έργο.

ii) Το σώμα στη θέση Α έχει κινητική ενέργεια 16J, ενώ δεν πήρε ενέργεια μέσω της δύναμης, συνεπώς στη θέση Β, θα έχει επίσης κινητική ενέργεια K_2=16J.

iii) Η ταχύτητα θα υπολογιστεί εξάλλου με αντικατάσταση στην (2):

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2}} m/s = 4m/s.$$

Πράξη που δεν είναι απαραίτητη, αφού η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη και ομαλή. Ας μην ξεχνάμε τον 1^{o} νόμο του Νεύτωνα!!!

Δ) στην περίπτωση της κίνησης που περιγράφεται από το τελευταίο σχήμα, έχουμε:

i) Το έργο της δύναμης είναι ίσο:

$$W = F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 5 \cdot 3 \cdot (-1)\ J = -15J.$$

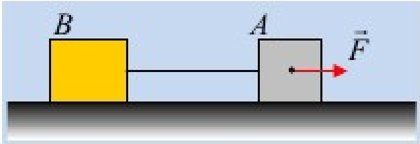
ii) Το σώμα στη θέση Α έχει κινητική ενέργεια 16J, ενώ μέσω του έργου τη δύναμης δεν πήρε, αλλά του **αφαιρέθηκε** ενέργεια 15J, συνεπώς στη θέση Γ, θα έχει κινητική ενέργεια K_2=16J-15J=1J.

iii) Η ταχύτητα θα υπολογιστεί επίσης με αντικατάσταση στην (2):

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{2}} m/s = 1m/s.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ένα σύστημα δύο σωμάτων Α και Β που συνδέονται με ένα μη ελαστικό νήμα, σύρονται με την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης **F**, μέτρου F=4N. Σε μια στιγμή το σώμα Α, μάζας Μ=4kg, έχει ταχύτητα $υ_1$=1,5m/s, ενώ μετά από μετατόπιση x_1=2m η ταχύτητά του έχει αυξηθεί στην τιμή $υ_2$=2m/s.



i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στο Α σώμα μέσω του έργου της δύναμης **F**.

ii) Πόσο μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του Α σώματος κατά την παραπάνω μετακίνηση;

iii) Να υπολογιστεί το έργο της τάσης του νήματος που ασκήθηκε στο Α σώμα.

iv) Η κινητική ενέργεια του Β σώματος έχει:

α) παραμείνει σταθερή.

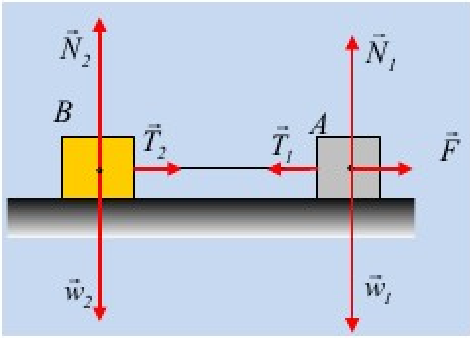
β) αυξηθεί κατά 3,5J.

γ) αυξηθεί κατά 4,5J.

δ) μειωθεί κατά 4,5J.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα, όπου T_1, T_2 η τάση του νήματος, η δύναμη δηλαδή που ασκεί το νήμα στα δυο σώματα ίσου μέτρου.



i) Η ενέργεια που μεταφέρεται στο Α σώμα (από αυτόν που ασκεί τη δύναμη F), είναι ίση με το έργο της δύναμης F:

$$W_F=F\cdot x\cdot συν0°=F\cdot x_1=4\cdot 2J=8J.$$

ii) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του Α σώματος είναι ίση:

$$\Delta K_A=K_{A,2}-K_{A,1}=\frac{1}{2}Mυ_2^2-\frac{1}{2}Mυ_1^2\rightarrow$$

$$\Delta K_A=\frac{1}{2}Mυ_2^2-\frac{1}{2}Mυ_1^2=\frac{1}{2}4\cdot 2^2J-\frac{1}{2}4\cdot 1{,}5^2J=3{,}5J$$

iii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας για την παραπάνω μετακίνηση του Α σώματος και παίρνουμε:

$$K_{A,2}-K_{A,1}=W_F+W_{T1}+W_{w1}+W_{N1}\rightarrow$$

Αλλά $W_{w1}=W_{N1}=0$, αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στην μετατόπιση και η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$3{,}5J=8J+W_{T1}+0+0\rightarrow$$

$$W_{T1}=-4{,}5J.$$

iv) Στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι W_{T1}=-4,5J. Ποια είναι η φυσική σημασία του παραπάνω αποτελέσματος; Μέσω του έργου της τάσης του νήματος αφαιρείται ενέργεια από το Α σώμα ίση με 4,5J. Να αλλά τι θα απογίνει η ενέργεια αυτή;

Μα, αν υπολογίσουμε το έργο της T_2, θα βρούμε ότι $W_{T2}=T_2 \cdot x_1=4{,}5J$, πράγμα που σημαίνει ότι το νήμα προσφέρει ενέργεια στο Β σώμα ίση με 4,5J!

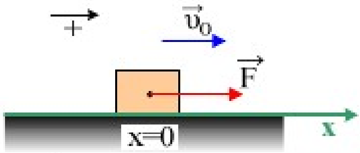
Να το πούμε με άλλα λόγια. Το νήμα, σταθερού μήκους, δεν θα κρατήσει καθόλου ενέργεια, απλά θα μεταφέρει την ενέργεια που αφαιρεί από το ένα σώμα, στο άλλο.

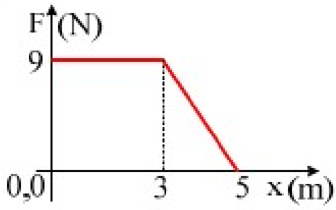
Αλλά τότε το Β σώμα πήρε ενέργεια ίση με 4,5J, συνεπώς η κινητική του ενέργεια θα αυξηθεί επίσης κατά 4,5J.

Σωστή η γ) πρόταση.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα σώμα μάζας 2kg κινείται σ' οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή περνά από μια θέση x=0 έχοντας ταχύτητα $υ_0$=5m/s. Στο σώμα ασκείται μια οριζόντια δύναμη F, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα. Το αποτέλεσμα είναι το σώμα να διατηρεί σταθερή ταχύτητα μέχρι τη θέση x_1=3m.





i) Να σχεδιάστε ένα σχήμα που να εμφανίζονται όλες οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα τη στιγμή που περνά από τη θέση x=1m. Να υπολογίστε τα μέτρα των δυνάμεων αυτών.

ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος στις θέσεις:

α) x_2=4m και β) x_3= 5m.

iii) Η κίνηση μεταξύ των θέσεων x_1=3m και x_3=5m είναι:

α) Ευθύγραμμη ομαλή.

β) Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

γ) Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη.

δ) Ευθύγραμμη επιβραδυνόμενη.

iv) Για την κίνηση από την αρχική θέση x_0=0, μέχρι τη θέση x_3=5m να βρεθούν:

α) Το έργο της F.

β) Το έργο της τριβής.

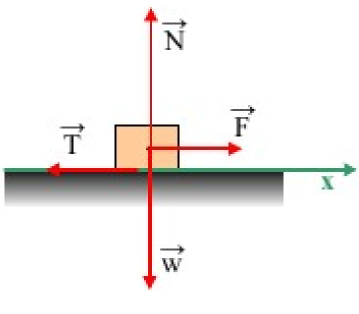
γ) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σώματος.

v) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που περνά από τη θέση x_3=5m.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα στη θέση x=1m. Αφού μεταξύ των θέσεων x=0 και x=3m η ταχύτητα παραμένει σταθερή, το σώμα ισορροπεί και ΣF=0. Άρα

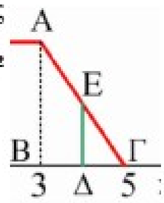


$$ΣF_y=0 \rightarrow N\text{-}w=0 \rightarrow N= mg = 20N$$

$$ΣF_x=0 \rightarrow F\text{-}T=0 \rightarrow T=F=9N$$

ii) Αφού η δύναμη μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ των θέσεων 3m και 5m, στο μέσον της απόστασης (x=4m) θα έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέγιστου, δηλαδή F=4,5N.

(Με βάση τη Γεωμετρία, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά του και ισούται με το μισό της. (ΔΕ)= ½ (ΑΒ).)



Έτσι από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής, παίρνουμε ΣF=m·α :

α) Για την θέση x_2=4m

$$a = \frac{F - T}{m} = \frac{4,5 - 9}{2} m/s^2 = -2,25 m/s^2$$

β) Για x_3=5m ομοίως: $$a = \frac{F - T}{m} = \frac{0 - 9}{2} m/s^2 = -4,50 m/s^2$$

iii) Η κίνηση μεταξύ των θέσεων x_1=3m και x_3=5m είναι επιβραδυνόμενη, αφού (προσέξτε τα προηγούμενα ερωτήματα) το σώμα έχει αρνητική επιτάχυνση με θετική ταχύτητα. Η επιτάχυνση όμως αυτή δεν είναι σταθερή, αφού η δύναμη μειώνεται συνεχώς, οπότε το μέτρο της επιτάχυνσης αυξάνεται.

iv) α)Το έργο της δύναμης είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της δύναμης και του άξονα x, δηλαδή:

$$W_F = \frac{3+5}{2} 9J = 36J\ .$$

β) Για την τριβή $W_T = T \cdot \Delta x \cdot$ συν$180° = -9N \cdot 5m = -45J$.

γ) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. από 0-5m παίρνουμε:

$$\Delta K = W_w + W_N + W_F + W_T$$

Αλλά $W_w = W_N = 0$, αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση και κατά συνέπεια:

$$\Delta K = 36J - 45J = -9J.$$

Η αρνητική τιμή που προέκυψε, μας δείχνει ότι η κινητική ενέργεια του σώματος μειώνεται.

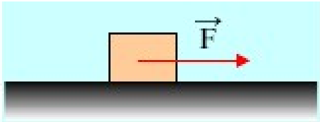
v) Επιστρέφοντας στο Θ.Μ.Κ.Ε. παίρνουμε:

$$\Delta K = -9J \rightarrow \tfrac{1}{2} m\upsilon^2 - \tfrac{1}{2} m\upsilon_0^2 = -9J \rightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\, 2 \cdot \upsilon^2 - \tfrac{1}{2}\, 2 \cdot 5^2 = -9 \rightarrow$$

$$\upsilon = 4 m/s$$

ΑΣΚΗΣΗ 5

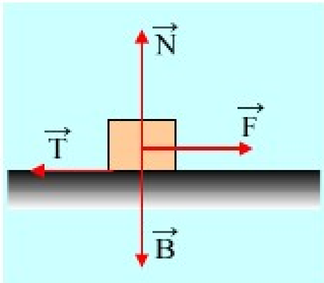


Ένα σώμα ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση μιας οριζόντιας μεταβλητής δύναμης της μορφής F=6-0,4x (μονάδες στο S.I.) όπου x η μετατόπιση του σώματος. Αν κατά τη διάρκεια της κίνησης ασκείται στο σώμα τριβή μέτρου T=4N, ζητούνται:

i) Η μέγιστη κινητική ενέργεια του σώματος.

ii) Η κινητική ενέργεια του σώματος μετά από μετατόπιση κατά 10m.

Απάντηση:



i) Για όσο διάστημα η δύναμη F είναι μεγαλύτερη από την τριβή, το σώμα επιταχύνεται και η κινητική του ενέργεια αυξάνεται. Αντίθετα αν η τριβή γίνει μεγαλύτερη της δύναμης η κινητική ενέργεια θα ελαττώνεται. Άρα η κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη στη θέση όπου:

$$F=T \quad ή$$

$$6-0,4x = 4 \text{ ή}$$

$$0,4x= 2 \text{ ή}$$

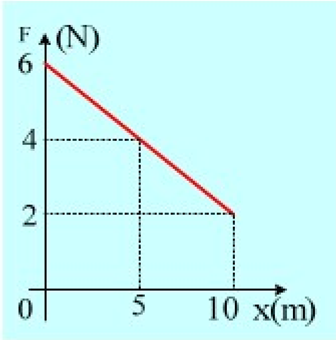
$$x=5m$$

Παίρνουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα από την θέση x=0 έως τη θέση x_1=5m και παίρνουμε:

$$K_{τελ}- K_{αρχ} = W_F+W_B+W_N+W_T \quad (1)$$

Αλλά $K_{αρχ}=0$, $W_B=W_N=0$, αφού είναι κάθετες στη μετατόπιση.

Το έργο της δύναμης είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου, μέχρι τη θέση x=5m:



$$W_F=(6+4)\cdot 5/2J=25J,$$

$$\text{ενώ } W_T= - Tx=-20J.$$

Οπότε η (1) δίνει:

$$K_{max}= 25J-20J= 5J.$$

ii) Παίρνουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα από την θέση x=0 έως τη θέση x_2=10m και παίρνουμε:

$$K_{τελ}- K_{αρχ} = W_F+W_B+W_N+W_T \quad (2)$$

Αλλά $K_{αρχ}$ =0 , W_B=W_N=0, αφού είναι κάθετες στη μετατόπιση.
Το έργο της δύναμης είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου, μέχρι τη θέση x=10m:

$$W_F=(6+2)\cdot 10/2J=40J,$$

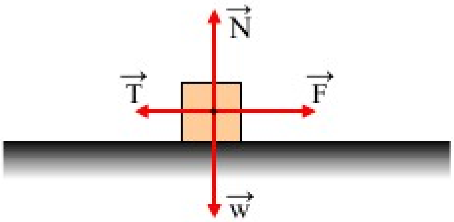
$$\text{ενώ } W_T= - Tx=-40J.$$

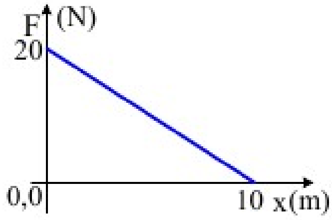
Οπότε η (2) δίνει:

$$K_{τελ} = 40J - 40J=0$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Ένα σώμα μάζας m=2kg ηρεμεί, στη θέση x=0, ενός οριζοντίου επιπέδου, με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής μ=0,5. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας μεταβλητής δύναμης F, το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται σε συνάρτηση με τη θέση x, όπως στο διάγραμμα. Δίνεται $g=10m/s^2$.





i) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

α) Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

β) Κατά τη μετακίνηση του σώματος το έργο της δύναμης F αυξάνεται.

γ) Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση $W_F=F\cdot x\cdot συν0°$.

δ) Το έργο της τριβής υπολογίζεται από τη σχέση $W_T= T\cdot x\cdot συν180°$.

ε) Η ταχύτητα του σώματος συνεχώς αυξάνεται.

στ) Η ταχύτητα του σώματος συνεχώς μειώνεται.

ζ) Το σώμα αποκτά μέγιστη ταχύτητα στη θέση όπου F=T.

ii) Να υπολογιστεί το έργο της δύναμης μέχρι τη θέση x=10m.

iii) Ποια η ταχύτητα του σώματος στη θέση x=10m;

iv) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

Απάντηση:

i) Το σώμα ισορροπεί στον άξονα y, συνεπώς $ΣF_y=0$ ή N=mg=20N, οπότε η τριβή ολίσθησης έχει μέτρο T=μ·N=10N. Από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τον άξονα x παίρνουμε:

$$ΣF_x=m\cdot α \quad ή \quad F- T = m\cdot α$$

Αφού η δύναμη είναι μεταβλητή, θα μεταβάλλεται και η επιτάχυνση του σώματος. Για όσο διάστημα η δύναμη F είναι μεγαλύτερη από την τριβή, δηλαδή μέχρι τη θέση x=5m, το σώμα έχει επιτάχυνση προς τα δεξιά, συνεπώς επιταχύνεται και η ταχύτητά του αυξάνεται. Όταν η τριβή είναι μεγαλύτερη από την F, η επιτάχυνση έχει φορά προς τα αριστερά και το σώμα επιβραδύνεται.

Εξάλλου το έργο της δύναμης θα υπολογίζεται από το εμβαδόν στο διάγραμμα F-x και καθώς μεγαλώνει το x, θα παράγεται και περισσότερο έργο. Έτσι με βάση αυτά οι απαντήσεις είναι:

α) Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. **Λ.**

β) Κατά τη μετακίνηση του σώματος το έργο της δύναμης F αυξάνεται. **Σ.**

γ) Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από τη σχέση $W_F=F\cdot x\cdot συν0°$. **Λ.**

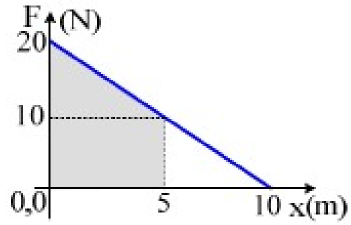
δ) Το έργο της τριβής υπολογίζεται από τη σχέση $W_T= T\cdot x\cdot συν180°$. **Σ.**

ε) Η ταχύτητα του σώματος συνεχώς αυξάνεται. **Λ.**

στ) Η ταχύτητα του σώματος συνεχώς μειώνεται. **Λ.**

ζ) Το σώμα αποκτά μέγιστη ταχύτητα στη θέση όπου F=T. **Σ.**

ii) Το έργο της δύναμης ισούται αριθμητικά με το εμβαδόν του τριγώνου στο παραπάνω διάγραμμα:



$$W_F = ½\ 10·20J = 100J.$$

iii) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση x=0 μέχρι τη θέση x=10m.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_N + W_F + W_T$$

Αλλά $W_B = W_N = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, ενώ $W_T = T·x·συν180° = -T·x = -100J$, οπότε η σχέση (1) μας δίνει:

$$½\ 2·υ^2 - 0 = 100 – 100 \quad (S.I.) \rightarrow υ=0m/s.$$

iv) Το σώμα έχει τη μέγιστη ταχύτητα στη θέση που σταματά να επιταχύνεται, πριν αρχίσει να επιβραδύνεται, δηλαδή στη θέση όπου F=T=10N. Αλλά αυτό συμβαίνει στη θέση x=5m και με βάση το διπλανό σχήμα, το έργο της δύναμης είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του γκρι τραπεζίου:

$$W_F = \frac{20+10}{2}5J = 75J$$

Εφαρμόζουμε ξανά το Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση x=0 μέχρι τη θέση x=5m.

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_B + W_N + W_F + W_T$$

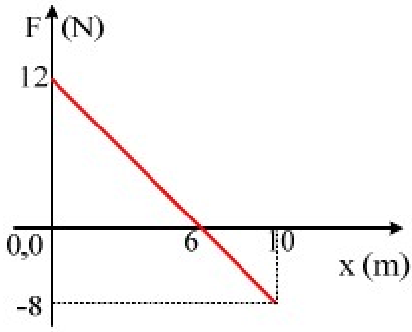
Όπου $W_T = T·x·συν180° = -10·5J = -50J$

Οπότε:

$$½\ 2·υ^2 - 0 = 75 – 50 \quad (S.I.) \rightarrow υ=5m/s.$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα μάζας m=2kg. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας μεταβλητής δύναμης, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται όπως στο σχήμα.



i) Ποια η αρχική επιτάχυνση του σώματος;

ii) Σε ποια θέση το σώμα θα έχει μέγιστη ταχύτητα;

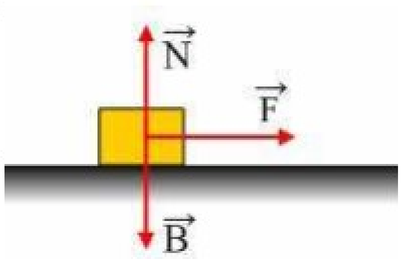
iii) Να βρεθεί η μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

iv) Πόση η κινητική ενέργεια του σώματος στη θέση x=10m.

Απάντηση:

i) Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. ΣFy=0 ή N=mg.

Η αρχική επιτάχυνση είναι $α=F/m= 12/2\ m/s^2= 6\ m/s^2$.



ii) Το σώμα επιταχύνεται μέχρι τη θέση x=6m, γιατί μετά αλλάζει φορά η δύναμη και το σώμα αρχίζει να επιβραδύνεται.

iii) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε από τη θέση x=0, μέχρι x=6m.

$$K_{τελ}-K_{αρχ}= W_B+W_N+ W_F \quad (1)$$

Αλλά $W_B=W_N=0$ ενώ το έργο της F είναι αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου, δηλαδή:

$$W= ½\ 6·12J = 36J.$$

Από την (1) έχουμε: $½\ mυ_1^2 = W_F$ ή

$$½\ 2·υ_1^2 = 36 \text{ ή } υ_1=6m/s.$$

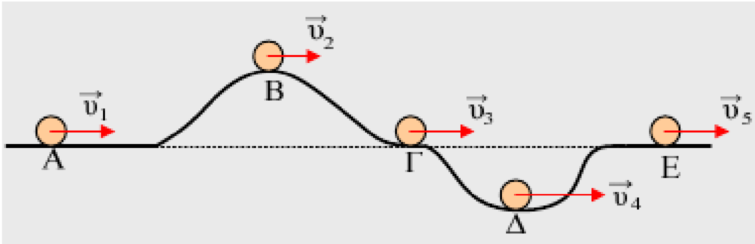
iv) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε από τη θέση x=0, μέχρι x=10m.

$$K_{τελ}-K_{αρχ}= W_B+W_N+ W_F \quad (2)$$

Όπου $W_F= 36J – ½ ·8·4J= 20J$

Και από την (2) $K_{τελ}= 20J$.

ΑΣΚΗΣΗ 8



Μια σφαίρα μάζας 2 kg ξεκινά από τη θέση Α και κινείται περνώντας διαδοχικά από τις θέσεις του σχήματος, όπου η υψομετρική διαφορά μεταξύ των θέσεων Ν και Γ είναι 3,2m ενώ μεταξύ των Γ και Δ 2,2m αντίστοιχα. Τα σημεία Α, Γ και Ε βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο.

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας για την ταχύτητα υ, δυναμική ενέργεια U, κινητική ενέργεια Κ και μηχανική ενέργεια Ε. Τριβές δεν υπάρχουν.

Θέση	υ(m/s)	U (J)	K (J)	E (J)
Α		0		100
Β				
Γ				
Δ				
Ε				

Απάντηση:

Στη θέση Α το σώμα έχει:

$$E=K+U \rightarrow$$

$$K=100J$$

Αλλά:

$$K=\tfrac{1}{2} m\upsilon_1^2 \rightarrow \upsilon_1=\sqrt{\frac{2K}{m}}=10m/s$$

Εξάλλου στη θέση Β έχει δυναμική ενέργεια U=mgh=64J και εφόσον η μηχανική ενέργεια παραμένει παντού σταθερή και ίση με 100J (αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος μια συντηρητική δύναμη) η κινητική ενέργεια θα είναι 36J.

Με την ίδια λογική στη θέση Δ έχει δυναμική ενέργεια U_Δ= mgh΄= 2kg·10m/s^2·(-2,2m) = - 44J, συνεπώς:

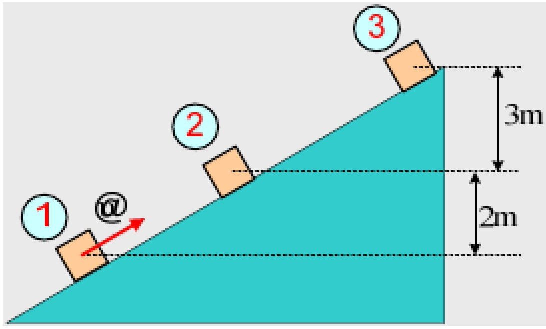
$$K=E-U= 144J$$

Έτσι ο πίνακας συμπληρωμένος είναι ο παρακάτω:

Θέση	υ(m/s)	U (J)	K (J)	E (J)
Α	10	0	100	100
Β	6	64	36	100
Γ	10	0	100	100
Δ	12	-44	144	100
Ε	10	0	100	100

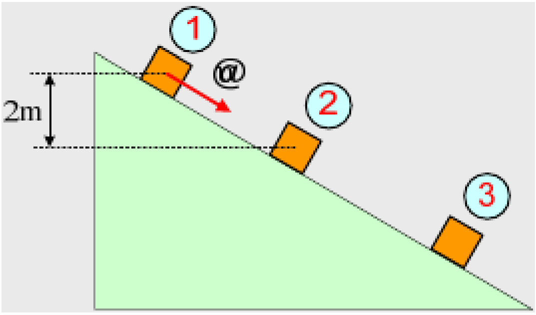
<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

1) Ένα σώμα μάζας 2kg ανεβαίνει κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου του σχήματος. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, για τη δυναμική, κινητική και μηχανική ενέργεια, καθώς και για το έργο του βάρους. Δίνεται $g=10m/s^2$.



<table>
<tr><th>Θέση</th><th>U (J)</th><th>K (J)</th><th>W (J)</th><th>E_{MHX} (J)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">(1)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">110</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$W_{1\to2}=$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(2)</td><td rowspan="2">60</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$W_{2\to3}=$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(3)</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

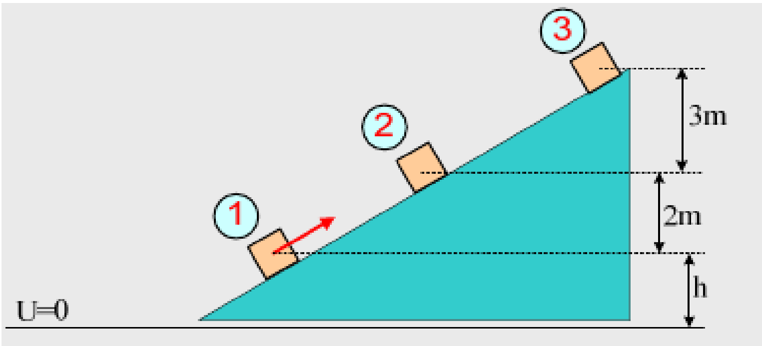
2) Ένα σώμα μάζας 4kg κατεβαίνει κατά μήκος του λείου κεκλιμένου επιπέδου του σχήματος. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, για τη δυναμική, κινητική και μηχανική ενέργεια, καθώς και για το έργο του βάρους. Δίνεται $g=10m/s^2$.



Θέση	U (J)	K (J)	W (J)	E_{MHX} (J)
(1)		10		
			$W_{1\to2}$=	
(2)	0			
			$W_{2\to3}$= 120	
(3)				

Απάντηση:

1) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η θέση όπου η δυναμική ενέργεια θεωρείται μηδενική και η οποία έστω ότι είναι κατά h χαμηλότερα της θέσης (1).



Έχουμε:

$$U_2=mg(h+2m)$$
$$U_1=mgh$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε:

$$U_2\text{-}U_1\text{=}mgh_{12}$$

Όπου h_{12}=2m η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων.

Άρα:

$$\mathbf{U_2=U_1 + mgh_{12}}$$

Δηλαδή σε κάθε θέση, μπορούμε να βρούμε τη δυναμική ενέργεια, παίρνοντας τη δυναμική ενέργεια σε μια χαμηλότερη θέση και προσθέτοντας mgh όπου h η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο θέσεων.

Συνεπώς η δυναμική ενέργεια στη θέση (1) θα είναι μικρότερη κατά mgh=40J από την θέση (2), ενώ στη θέση (3) μεγαλύτερη κατά mgh_{23}=60J από τη (2).

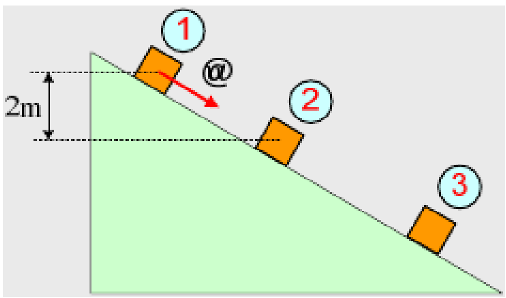
Εξάλλου το έργο του βάρους υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{W_{1\to2}= U_1\text{-}U_2}$$

Οπότε με βάση τα παραπάνω οι ζητούμενες τιμές είναι αυτές του παρακάτω πίνακα.

Θέση	U (J)	K (J)	W (J)	E_{MHX} (J)
(1)	20	110		130
			$W_{1\to2}$= - 40	
(2)	60	70		130
			$W_{2\to3}$= -60	
(3)	120	10		130

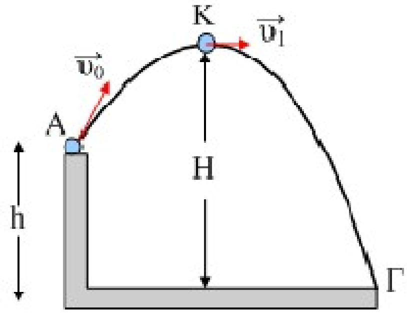
2) Με βάση τα προηγούμενα και δεδομένου ότι εδώ η δυναμική ενέργεια είναι μηδενική στη θέση (2), οι ζητούμενες τιμές είναι όπως στον παρακάτω πίνακα.



Θέση	U (J)	K (J)	W (J)	E_{MHX} (J)
(1)	80	10		90
			$W_{1\to2}$=	
(2)	0	90		90
			$W_{2\to3}$= 120	
(3)	-120	210		90

ΑΣΚΗΣΗ 10

Μια μπάλα μάζας m=0,4kg εκτοξεύεται πλάγια με αρχική ταχύτητα υ_0=10m/s, από το σημείο Α σε ύψος από το έδαφος h=15m, όπως στο σχήμα. Μετά από λίγο φτάνει με ταχύτητα υ_1=6m/s στο σημείο Κ της τροχιάς του.



i) Πόσο απέχει από το έδαφος το σημείο Κ.

ii) Πόσο είναι το έργο του βάρους στη διαδρομή ΑΚ;

iii) Με ποια ταχύτητα φτάνει η μπάλα στο έδαφος;

iv) Αν από το σημείο Α εκτοξευόταν η μπάλα κατακόρυφα προς τα πάνω με την ίδια αρχική ταχύτητα, με ποια ταχύτητα θα έφτανε στο έδαφος;

Δίνεται g=10m/s^2 ενώ η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

Απάντηση:

i) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ των σημείων Α και Κ:

$$K_A+U_A=K_K+U_K \text{ ή}$$

$$½\, m\upsilon_0^2 + mgh = ½\, m\upsilon_1^2 + mgH \text{ ή}$$

$$\upsilon_0^2 + 2gh = \upsilon_1^2 + 2gH \text{ από όπου}$$

$$H= (10^2 + 2\cdot10\cdot15\text{-}6^2)/20\text{m} = 364/20 \text{ m} =18{,}2\text{m}$$

ii) Το βάρος είναι διατηρητική (συντηρητική) δύναμη και το έργο του δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, αλλά από τη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του σώματος:

$$W_{AK}= U_A\text{-}U_K = mgh – mgH = 0{,}4\cdot10(15\text{-}18{,}2)\text{J}= \text{-}12{,}8\text{J}$$

iii) Εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ μεταξύ της θέσης Α και της θέσης πριν κτυπήσει στο έδαφος.

$$K_A+U_A=K_\tau +U_\tau \text{ ή}$$

$$½\, m\upsilon_0^2 + mgh = ½\, m\upsilon_\tau^2 \text{ ή}$$

$$\upsilon_\tau^2 = \upsilon_0^2+ 2gh = 100+2\cdot10\cdot15 = 400 \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ ή } \upsilon_\tau= 20\text{m/s}.$$

iv) Προφανώς με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα, αφού αν εφαρμόζαμε ξανά την ΑΔΜΕ θα είχαμε τις ίδιες τιμές.

Εξάλλου το έργο του βάρους, σαν συντηρητική δύναμη που είναι, δεν εξαρτάται από την διαδρομή, και ισούται με mgh, οπότε τόση θα είναι και η αύξηση της κινητικής ενέργειας του σώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα σώμα μάζας 2kg. Σε μια στιγμή (t=0) δέχεται την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης F=12N. Αν η ασκούμενη τριβή έχει μέτρο 8N να βρεθούν τη χρονική στιγμή t_1=4s:

i) Η ταχύτητα και η μετατόπιση του σώματος.

ii) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα μέσω της δύναμης, καθώς και η θερμότητα που παρήχθη εξαιτίας της τριβής.

iii) Η μέση ισχύς της δύναμης F και της τριβής.

iv) Για τη στιγμή t_2=3s να υπολογιστούν:

α) Η στιγμιαία ισχύς της δύναμης F.

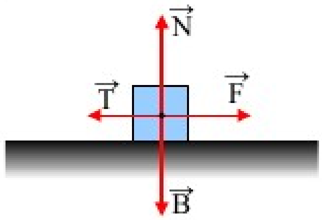
β) Η στιγμιαία ισχύς της τριβής.

v) Να συμπληρωθούν τα κενά στην παρακάτω πρόταση:

Τη στιγμή t_2 η δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα με ρυθμό ……….. ενώ η τριβή ………… ενέργεια με ρυθμό ……………. την οποία μετατρέπει σε ………………… Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι ίσος με ……………..

Απάντηση:

i) Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για το σώμα παίρνουμε $\Sigma F_x = m\cdot\alpha$ ή



$$\text{F-T=mα ή } \alpha = \frac{F-T}{m} = \frac{12N-8N}{2kg} = 2m/s^2$$

Το σώμα έχει σταθερή επιτάχυνση, συνεπώς εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη (επιταχυνόμενη) κίνηση για την οποία:

$$\upsilon = \alpha t \quad \text{και} \quad \Delta x = ½\, \alpha t^2$$

και με αντικατάσταση για t_1=4s παίρνουμε:

$$\upsilon = \alpha t = 2\cdot 4 m/s = 8m/s \text{ και } \Delta x = ½\, \alpha t^2 = ½\, 2\cdot 4^2 m = 16m$$

ii) Η ενέργεια που μεταφέρθηκε στο σώμα μέσω της δύναμης είναι ίση με το έργο της:

$$W_F = F\cdot\Delta x\cdot συν0° = 12\cdot 16\cdot 1J = 192J$$

Θερμότητα παράγεται εξαιτίας της τριβής και ισχύει:

$$Q = |W_T| = T\cdot\Delta x = 8\cdot 16J = 128J.$$

iii) Η μέση ισχύς ορίζεται $P_\mu = \frac{\Delta W}{\Delta t}$, οπότε:

$$P_{\mu F} = \frac{\Delta W_F}{\Delta t} = \frac{192J}{4s} = 48W \text{ και}$$

$$P_{\mu T} = \frac{\Delta W_T}{\Delta t} = \frac{-128J}{4s} = -32W$$

iv) Για την στιγμιαία ισχύ έχουμε P=F·υ·συνα, οπότε για t_2 =3s, όπου υ= αt = 2·3m/s=6m/s έχουμε:

$$P_F = F\cdot\upsilon\cdot συνα = 12\cdot 6\cdot 1W = 72W \text{ και}$$

$$P_T = T \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha' = 8 \cdot 6 \cdot (-1)\,W = -48\ W$$

v) Τη στιγμή t_2 η δύναμη προσφέρει ενέργεια στο σώμα με ρυθμό 72J/s ενώ η τριβή αφαιρεί ενέργεια με ρυθμό 48J/s. την οποία μετατρέπει σε θερμότητα Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος είναι ίσος με 24J/s.

Σχόλιο:

Από το Θ.Μ.Κ.Ε. έχουμε:

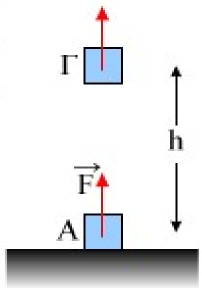
$$\Delta K = \Sigma W \text{ ή}$$

$$\Delta K = W_{\Sigma F} \text{ ή}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{\Sigma F}}{\Delta t} = \frac{\Sigma F \cdot \Delta x \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\Delta t} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \text{ ή}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = (F - T)\upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 0^\circ = (12 - 8) \cdot 6\text{J/s} = 24\text{J/s}$$

ΑΣΚΗΣΗ 12



Ένα σώμα μάζας 2kg βρίσκεται στο έδαφος (θέση Α) με μηδενική δυναμική ενέργεια. Σε μια στιγμή ασκούμε πάνω του μια κατακόρυφη δύναμη F=22N με αποτέλεσμα μετά από λίγο να βρίσκεται στη θέση Γ σε ύψος h=4,5m. Δίνεται $g=10m/s^2$. Για την παραπάνω μετακίνηση:

i) Να υπολογίσετε τα έργα:

W_F= ……………………………… W_B= ………………………………..

ii) Να συμπληρωθεί ο πίνακας για την Κινητική, Δυναμική και Μηχανική ενέργεια.

Θέση	K (J)	U (J)	E_{MHX} (J)
A			
Γ			

iii) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λάθος.

α) Στο σώμα δόθηκε ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης F.

β) Το έργο της δύναμης εκφράζει την αύξηση της δυναμικής ενέργειας.

γ) Το έργο του βάρους ισούται με την αύξηση της δυναμικής ενέργειας του σώματος.

δ) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι αντίθετη του έργου του βάρους.

iv) Πόσο χρόνο διαρκεί η κίνηση από το Α στο Γ;

v) Να υπολογιστούν για την παραπάνω κίνηση:

α) Η μέση ισχύς της δύναμης

β) Η μέση ισχύς του βάρους.

γ) Ο μέσος ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας του σώματος.

δ) Ο μέσος ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας του σώματος.

vi) Για τη θέση Γ να βρεθούν:

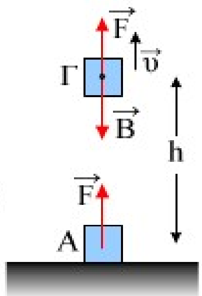
α) Η (στιγμιαία) ισχύς της δύναμης F.

β) Η (στιγμιαία) ισχύς του βάρους.

γ) Ο ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας του σώματος.

δ) Ο ρυθμός αύξησης της κινητικής ενέργειας του σώματος.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, το οποίο φτάνει με ταχύτητα υ στη θέση Γ.

i) $W_F=F\cdot\Delta x\cdot συν0° = F\cdot h=22\cdot 4,5J= 99J$

$W_B= B\cdot\Delta x\cdot συν180° = - mg\cdot h = - 2\cdot 10\cdot 4,5J = -90J$.

ii) Η δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση Γ είναι U=mgh= 90J, ενώ εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Α και Γ βρίσκουμε:

$$K_Γ-K_A= W_F + W_B \text{ ή } K_Γ= W_F + W_B = 99J-90J=9J,$$

συνεπώς οι τιμές του πίνακα είναι:

Θέση	K (J)	U (J)	E_{MHX} (J)
A	0	0	0
Γ	9	90	99

Παρατηρούμε ότι στο σώμα δίνεται ενέργεια μέσω τη δύναμης F, η οποία κατά μέρος μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια, μέσω του έργου του βάρους (W_B=-90J, U=90J !!) ενώ το υπόλοιπο εμφανίζεται με τη μορφή της κινητικής ενέργειας.

iii) Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι:

$\Delta U = U_\Gamma - U_A = U_\Gamma - 0 = mgh = -W_B$, οπότε οι απαντήσεις είναι:

α) Σ, β) Λ γ) Λ δ) Σ

iv) Από το 2° νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \rightarrow$$

$$\alpha = \frac{F - mg}{m} = \frac{22-20}{2} m/s^2 = 1m/s^2$$

$$\text{Αλλά } h = ½\,\alpha t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,5}{1}} s = 3s$$

v) Η **μέση** ισχύς υπολογίζεται από την σχέση P=W/t, οπότε:

$$P_{\mu F} = \frac{W_F}{t} = \frac{99J}{3s} = 33W$$

$$P_{\mu B} = \frac{W_B}{t} = \frac{-90J}{3s} = -30W$$

$$\left(\frac{\Delta U}{\Delta t}\right)_\mu = \frac{-W_B}{t} = \frac{-(-90J)}{3s} = 30J/s$$

$$\left(\frac{\Delta K}{\Delta t}\right)_\mu = \frac{W_F + W_B}{t} = \frac{99J - 90J}{3s} = 3J/s$$

vi) Η **στιγμιαία** ισχύς υπολογίζεται από την εξίσωση P=F·υ·συνα, οπότε λαμβάνοντας υπόψη μας ότι στη θέση Γ το σώμα έχει ταχύτητα υ=α·t = 3m/s έχουμε:

$$P_F = F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 0° = 22 \cdot 3 \cdot 1 W = 66W$$

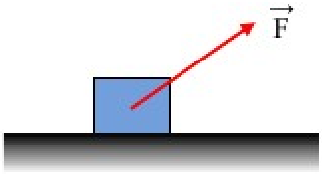
$$P_B = B \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 180° = -mg\upsilon = -60W$$

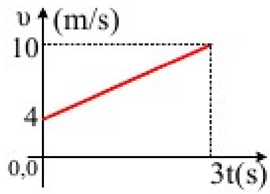
$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{-\Delta W_B}{\Delta t} = -(-mg\upsilon) = +60J/s$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\Delta W_{o\lambda}}{\Delta t} = \Sigma F \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 0° = ma \cdot \upsilon = 2 \cdot 1 \cdot 3J/s = 6J/s$$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα σώμα μάζας 2kg με την επίδραση δύναμης μέτρου F=8N, όπως στο σχήμα. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.





i) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος.

ii) Ποια η μετατόπιση του σώματος από 0-3s;

iii) Να βρεθεί το έργο της δύναμης στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

iv) Πόση είναι η στιγμιαία ισχύς της δύναμης την χρονική στιγμή t_1=1s.

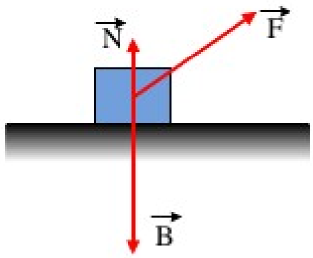
Απάντηση:

i) $\alpha = \Delta\upsilon/\Delta t = (10-4)/3\ m/s^2 = 2 m/s^2$.

ii) Η μετατόπιση είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του τραπεζίου.

$$x = (B+\beta)\upsilon/2 = (10+4)\cdot 3/2 m = 21m$$

iii) Οι δυνάμεις που ασκούντα στο σώμα φαίνονται στο σχήμα.



Εφαρμόζουμε για την κίνηση από 0-3s το Θ.Μ.Κ.Ε και παίρνουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi} = W_B+W_N+W_F.$$

Αλλά $W_B=W_N=0$ αφού είναι κάθετες στην μετατόπιση, οπότε:

$$W_F = ½\ m\upsilon^2 - ½\ m\upsilon_0^2 = ½\ 2\cdot 100J - ½\ 2\cdot 16J = 84J.$$

iv) Το έργο της δύναμης δίνεται και από την εξίσωση:

$$W = F\cdot x\cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

όπου θ η γωνία μεταξύ της δύναμης και της μετατόπισης.

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu\theta = W/Fx = 84/8\cdot 21 = 0{,}5.$$

Για t_1=1s έχουμε

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha t = (4+ 2\cdot 1)m/s = 6m/s$$

και η ισχύς της δύναμης είναι:

$$P = F\cdot \upsilon\cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 8\cdot 6\cdot 0{,}5W = 24W.$$