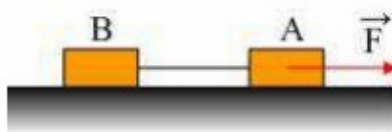


## ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

### ΑΣΚΗΣΗ 1

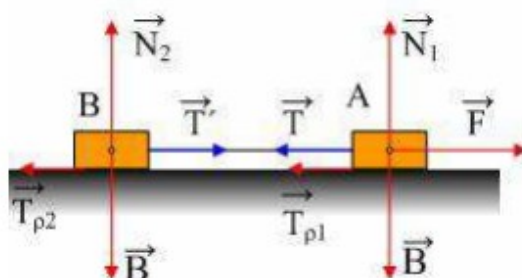


Τα σώματα A και B του σχήματος έχουν ίσες μάζες  $m_1=m_2=2\text{kg}$  και ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζουν συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu=0,2$ , δεμένα στα άκρα τεντωμένου νήματος μήκους  $L=1\text{m}$ . Για  $t=0$  ασκούμε στο A σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου  $F=12\text{N}$ . Τη χρονική στιγμή  $t_1=3\text{s}$  το νήμα που συνδέει τα δύο σώματα κόβεται ενώ η δύναμη  $F$  συνεχίζει να ασκείται στο σώμα A.

- Ποια η ταχύτητα των δύο σωμάτων τη στιγμή  $t_1$ ;
- Πόσο απέχουν τα δύο σώματα τη χρονική στιγμή  $t_2=8\text{s}$ ;

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

Απάντηση:



- Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα φαίνονται στο σχήμα, όπου αφού το νήμα είναι αβαρές  $T=T'$ , ενώ επειδή τα σώματα ισορροπούν στον κατακόρυφο άξονα  $\Sigma F_y=0$ , οπότε  $N_1=N_2=mg = 20\text{N}$ .

Σε κάθε σώμα ασκείται τριβή με μέτρο  $T_p=\mu N=4\text{N}$ .

Για το A σώμα:

$$\Sigma F_x=m_1 \cdot a \rightarrow F-T-T_{p1}=m_1 \cdot a \quad (1)$$

Για το σώμα B:

$$\Sigma F_x=m_2 \cdot a \rightarrow T'-T_{p2}=m_2 \cdot a \quad (2)$$

Αφού τα δύο σώματα κινούνται μαζί, έχουν την ίδια επιτάχυνση.

Με πρόσθεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$F-2T_p=(m_1+m_2)a \rightarrow a = \frac{F-2T_p}{m_1+m_2} = \frac{12-8}{4} \text{m/s}^2 = 1\text{m/s}^2$$

Η ταχύτητα για  $t=3\text{s}$  είναι:

$$v=a \cdot t_1 = 1 \cdot 3 \text{m/s} = 3\text{m/s}.$$

- Μόλις κοπεί το νήμα το A σώμα αποκτά επιτάχυνση

$$a_1 = \frac{F-T_{p1}}{m_1} = \frac{12-4}{2} \text{m/s}^2 = 4\text{m/s}^2$$

και μέχρι τη στιγμή  $t_2$  διανύει απόσταση:

$$\Delta x_1 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_1 \cdot \Delta t^2 = 3 \cdot 5\text{m} + \frac{1}{2} 4 \cdot 5^2\text{m} = 15\text{m} + 50\text{m} = 65\text{m}.$$

Το σώμα Β αποκτά επιτάχυνση:

$$-T_{\rho 2} = m_2 \cdot a_2 \rightarrow a_2 = -4/2 \text{ m/s}^2 = -2\text{m/s}^2$$

Το σώμα Β επιβραδύνεται. Μήπως σταμάτησε πριν την χρονική στιγμή  $t_2$ ;

Παίρνουμε τις εξισώσεις για την κίνηση του Β:

$$v = v_0 - a_2 \cdot \Delta t \quad (3) \text{ και}$$

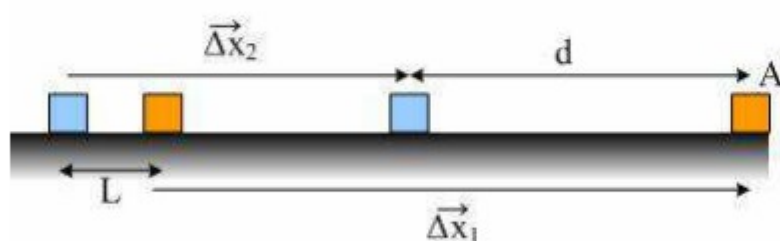
$$\Delta x_2 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_2 \cdot \Delta t^2 \quad (4)$$

Θέτοντας στην (3)  $v=0$  παίρνουμε:

$$0 = 3 - 2\Delta t \rightarrow \Delta t = 1,5\text{s},$$

δηλαδή το σώμα Β σταμάτησε να κινείται τη χρονική στιγμή  $t_3=4,5\text{s}$ . Η συνολική μετατόπισή του είναι:

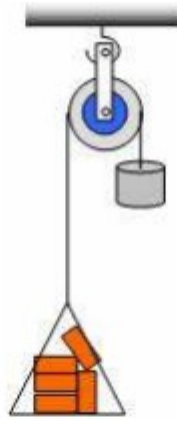
$$\Delta x_2 = 3\text{m/s} \cdot 1,5\text{s} + \frac{1}{2}(-2\text{m/s}^2) \cdot 1,5^2 \text{ s}^2 = 2,25\text{m}$$



Άρα τη χρονική στιγμή  $t_2=8\text{s}$  η απόσταση των δύο σωμάτων είναι:

$$d = \Delta x_1 - \Delta x_2 + L = 65\text{m} - 2,25\text{m} + 1\text{m} = 63,75\text{m}.$$

## ΑΣΚΗΣΗ 2

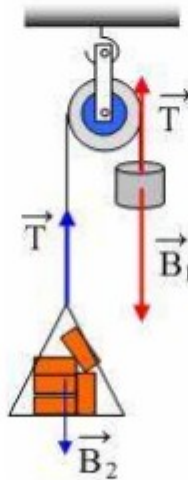


Θέλουμε να ανεβάσουμε ένα φορτίο από τούβλα μάζας 8kg. Για το σκοπό αυτό το δένουμε στο ένα άκρο νήματος, το οποίο αφού το περάσουμε από τροχαλία, δένουμε στο άλλο του άκρο ένα αντίβαρο μάζας 12kg. Αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί. Με δεδομένο ότι η μάζα της τροχαλίας θεωρείται αμελητέα, σε σχέση με τις μάζες των άλλων σωμάτων, να υπολογιστούν:

- i) Η επιτάχυνση της κίνησης.
- ii) Η τάση του νήματος που συνδέει τα 2 σώματα.

Δίνεται:  $g=10\text{m/s}^2$ .

Απάντηση:



Στο αντίβαρο ασκούνται οι δυνάμεις: Το βάρος του και η τάση  $T$  του νήματος. Επειδή το νήμα είναι αβαρές όπως και η τροχαλία η ίδια τάση του νήματος ασκείται και στο φορτίο από τούβλα. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για κάθε σώμα χωριστά και έχουμε (θεωρούμε για το αντίβαρο θετική τη φορά προς τα κάτω, ενώ για το σάκο την προς τα πάνω)

$$B_1 - T = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$T - B_2 = m_2 \cdot a \quad (2)$$

- i) Αφού τα σώματα είναι δεμένα στα άκρα του ίδιου νήματος κινούνται μαζί και έχουν

την ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση.

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$B_1 - B_2 = m_1 a + m_2 a \text{ ή}$$

$$(m_1 - m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a \text{ ή}$$

$$a = (m_1 - m_2)g / (m_1 + m_2) \text{ οπότε}$$

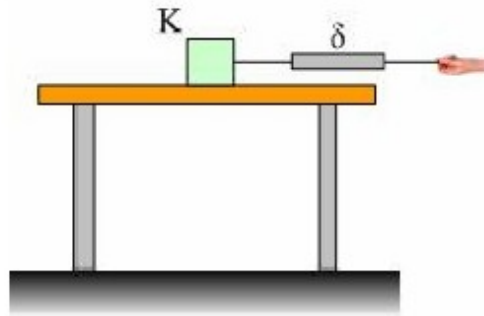
$$a = (12 - 8) \cdot 10 / (12 + 8) \text{ m/s}^2 = 2 \text{ m/s}^2.$$

ii) Με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$T = m_2 g + m_2 a = (8 \cdot 10 + 8 \cdot 2) \text{ N} = 96 \text{ N}$$

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Πάνω σε ένα τραπέζι ηρεμεί ένα κιβώτιο μάζας  $0,5\text{kg}$ . Ασκούμε πάνω του, μέσω ενός δυναμομέτρου δύναμη μέτρου  $1\text{N}$  και το κιβώτιο δεν μετακινείται.

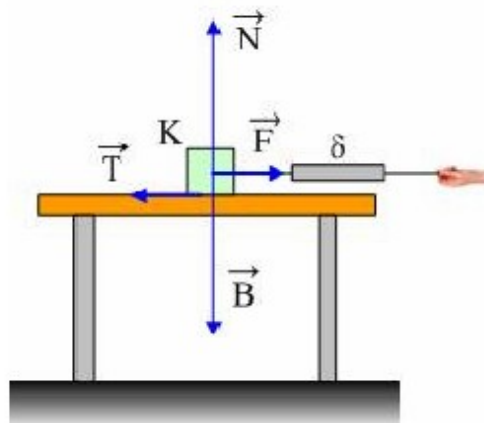


- 1) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.
- 2) Το κιβώτιο ασκεί στο τραπέζι:
  - i. Το βάρος του.
  - ii. Δύναμη κατακόρυφη ίση κατά μέτρο με το βάρος του.
  - iii. Πλάγια δύναμη μέτρου μεγαλύτερη του βάρους του.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- 3) Τραβώντας με μεγαλύτερη δύναμη  $F_1=2\text{N}$ , μετακινούμε το κιβώτιο κατά  $50\text{cm}$  σε  $1\text{s}$ . Να υπολογιστεί το μέτρο της τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και τραπεζιού.

Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.



- 1) Το κιβώτιο ισορροπεί:

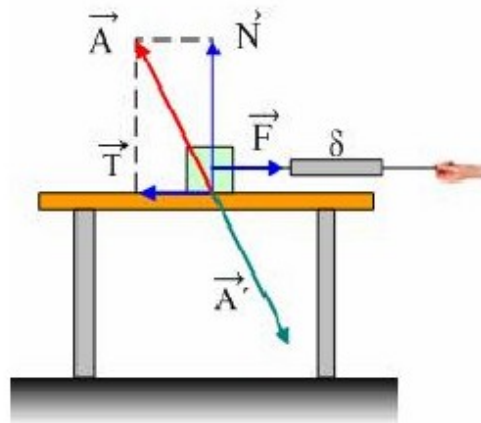
$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \text{ ή}$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow T = F = 1\text{N}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = B = mg = 5\text{N}$$

- 2) Σωστή πρόταση είναι η iii. Το κιβώτιο δέχεται από το τραπέζι τη συνισταμένη  $\mathbf{A}$ , των  $\mathbf{N}$  και  $\mathbf{T}$ , η οποία

έχει μεγαλύτερο μέτρο από την  $\mathbf{N}$  (η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από την κάθετη) και άρα ασκεί στο τραπέζι την αντίδραση της  $\mathbf{A}$ , την  $\mathbf{A}'$ .



3) Στον οριζόντιο άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_x = ma \text{ ή } F_1 - T = m \cdot a \quad (1)$$

Το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση για την οποία:

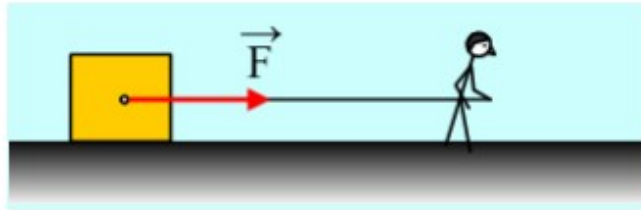
$$\Delta x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow a = 2\Delta x / t^2 = 2 \cdot 0,5 / 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m/s}^2.$$

Οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$T = F_1 - m \cdot a = 2\text{N} - 0,5 \cdot 1\text{N} = 1,5 \text{ N}.$$

#### ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα κιβώτιο μάζας 40kg σύρεται από έναν άνθρωπο σε οριζόντιο έδαφος, με την επίδραση μιας σταθερής οριζόντιας δύναμης  $F$ .

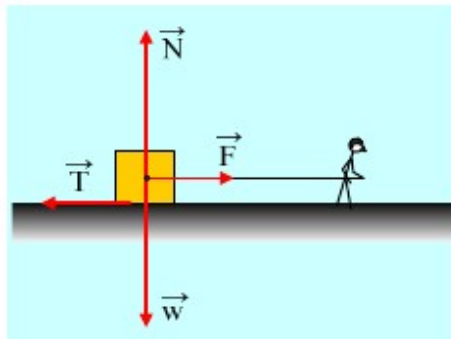


Σε μια στιγμή που θεωρούμε  $t=0$ , περνά από ένα σημείο A, ενώ το μέτρο της δύναμης είναι  $F_1=100\text{N}$  και η ταχύτητα παραμένει σταθερή, με τιμή  $v_1=3\text{m/s}$  μέχρι τη στιγμή  $t_1=5\text{s}$ . Τη στιγμή αυτή το μέτρο της δύναμης μειώνεται στην τιμή  $F_2=40\text{N}$ .

- Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και εδάφους.
  - Ποια χρονική στιγμή θα σταματήσει η κίνηση του κιβωτίου;
  - Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις, σε συνάρτηση με το χρόνο και μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_3=10\text{s}$ :
    - της ταχύτητας του κιβωτίου.
    - της απόστασής του από το σημείο A.
    - της τριβής που ασκείται στο κιβώτιο.
- Δίνεται  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο κιβώτιο.



- i) Αφού το κιβώτιο κινείται με σταθερή ταχύτητα  $\Sigma F=0$  συνεπώς:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N=B=mg =400\text{N} \text{ και}$$

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F=T= 100\text{N}.$$

$$\text{Αλλά } T=\mu \cdot N \text{ ή}$$

$$\mu = \frac{T}{N} = \frac{100\text{N}}{400\text{N}} = 0,25$$

- ii) Μόλις μειωθεί το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή  $F_2=40\text{N}$ , το κιβώτιο παύει να ισορροπεί και θα αποκτήσει επιτάχυνση, η οποία υπολογίζεται από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F_x=m \cdot a \text{ ή}$$

$$F_2 - T = m \cdot a \text{ ή}$$

$$a = \frac{F_2 - T}{m} = \frac{40N - 100N}{40kg} = -1,5m/s^2$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το μέτρο της ασκούμενης τριβής δεν άλλαξε, αφού δεν εξαρτάται από την ασκούμενη δύναμη, αλλά ούτε και από την ταχύτητα του σώματος, ενώ η αρνητική τιμή της επιτάχυνσης, μας λέει ότι έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητα (προς τ' αριστερά) συνεπώς το κιβώτιο επιβραδύνεται.

Για την κίνηση του κιβωτίου ισχύουν:

$$v = v_1 + a \cdot \Delta t \quad (1) \quad \text{και}$$

$$\Delta x = v_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \quad (2)$$

Το κιβώτιο σταματά την κίνησή του τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του, συνεπώς από την (1) έχουμε:

$$\Delta t = -\frac{v_1}{a} = -\frac{3m/s}{-1,5m/s^2} = 2s$$

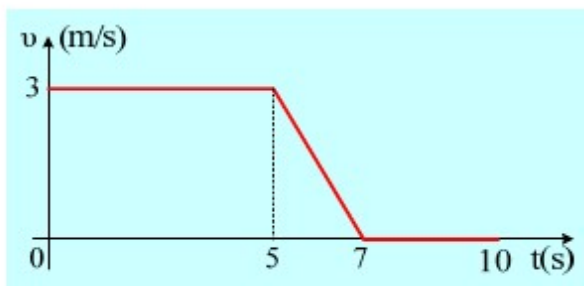
Άρα το κιβώτιο σταματά τη χρονική στιγμή  $t_2 = t_1 + \Delta t = 7s$ .

Στο μεταξύ έχει μετακινηθεί κατά:

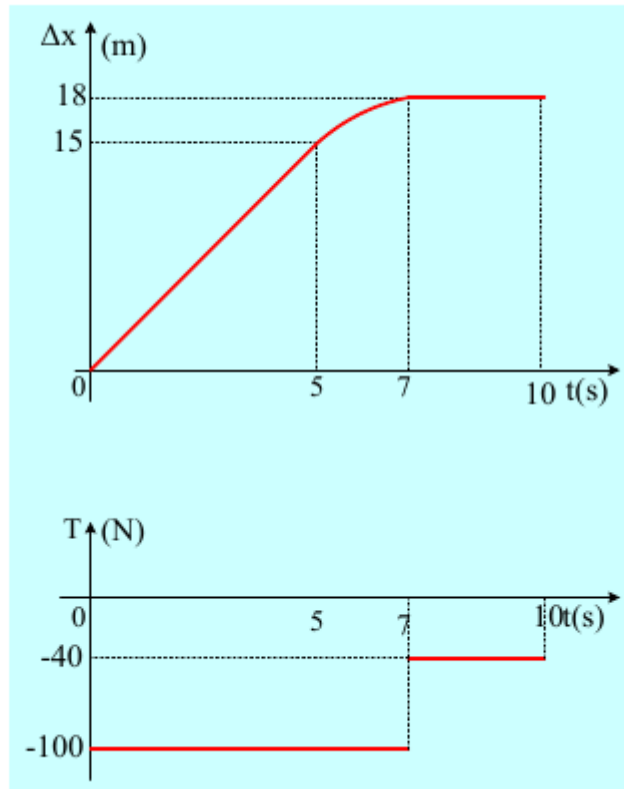
$$\Delta x_1 = v_1 \cdot t_1 = 3m/s \cdot 5s = 15m \text{ κατά την ευθύγραμμη ομαλή κίνησή του και}$$

$$\Delta x_2 = v_1 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 = 3m/s \cdot 2s + \frac{1}{2} \cdot (-1,5m/s^2) \cdot 4s^2 = 3m.$$

- iii) Για  $t=7s$  η ταχύτητα του κιβωτίου μηδενίζεται. Τη στιγμή αυτή η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο 40N, οπότε και η τριβή που θα δέχεται από το έδαφος θα πάρει τιμή 40N, θα μετατραπεί δηλαδή σε στατική τριβή και το κιβώτιο θα παραμείνει πλέον ακίνητο. Έτσι οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις θα είναι:







### ΑΣΚΗΣΗ 5

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σ' οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε πάνω του μια μεταβλητή οριζόντια δύναμη της μορφής:

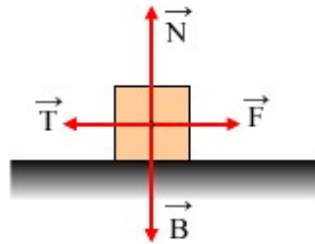
$$F=0,5t + 6 \text{ (S.I.)}$$

και παρατηρούμε ότι το σώμα αρχίζει να ολισθαίνει την χρονική στιγμή  $t_1=8s$ . Σταθεροποιούμε από κει και πέρα το μέτρο της δύναμης  $F$  (στην τιμή που είχε για  $t=8s$ ) και παρατηρούμε ότι την χρονική στιγμή  $t_2=12s$  το σώμα έχει μετατοπιστεί κατά 8m. Να βρεθούν οι συντελεστές στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης.

Δίνεται  $g=10m/s^2$ .

**Απάντηση:**

Στο σχήμα εμφανίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Το βάρος από τη Γη, η ασκούμενη δύναμη F και μια δύναμη από το επίπεδο, που αναλύεται στην κάθετη αντίδραση του επιπέδου N και την τριβή T.



Το σώμα ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t=8s$ , οπότε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης είναι:

$$F = 0,5t + 6 \text{ (N)} = (0,5 \cdot 8 + 6) \text{N} = 10 \text{N}$$

Μέχρι εκείνη τη στιγμή το σώμα ισορροπεί, συνεπώς:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ ή}$$

$$N - B = 0 \text{ ή}$$

$$N = mg = 20 \text{N}$$

$$\text{Και } \Sigma F_x = 0 \text{ ή}$$

$$F - T = 0 \text{ άρα}$$

$$T_s = F$$

Συνεπώς τη στιγμή  $t=8s$  το σώμα ξεκινά και το μέτρο της τριβής τη στιγμή αυτή είναι η μεγαλύτερη τιμή της στατικής τριβής, η οριακή τριβή. Έτσι:

$$T_{op} = 10 \text{N}$$

$$\text{Επομένως } T_{op} = \mu_s \cdot N \rightarrow$$

$$\mu_s = T_{op} / N = 10 \text{N} / 20 \text{N} = 0,5$$

Μόλις το σώμα ξεκινήσει, ολισθαίνει και η τριβή μετατρέπεται σε τριβή ολίσθησης, που έχει μικρότερο μέτρο από την οριακή. Το σώμα δηλαδή επιταχύνεται:

$$\Sigma F_x = m \cdot a \text{ ή } F - T = m \cdot a \text{ (1)}$$

Η κίνηση του σώματος είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a \cdot t^2 \rightarrow$$

$$a = 2\Delta x / t^2 = 2 \cdot 8 / 4^2 \text{ m/s}^2 = 1 \text{m/s}^2$$

Και από την εξίσωση (1) παίρνουμε:

$$F - T = m \cdot a \text{ ή}$$

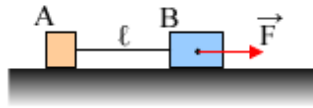
$$T = F - ma = 10 \text{N} - 2 \text{kg} \cdot 1 \text{m/s}^2 = 8 \text{N}$$

Οπότε:

$$T = \mu \cdot N \rightarrow \mu = T / N = 0,4.$$

## ΑΣΚΗΣΗ 6

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B με μάζες  $m_1=1\text{kg}$  και  $m_2=3\text{kg}$  αντίστοιχα, δεμένα στα άκρα ενός οριζώντιου νήματος μήκους  $\ell=1\text{m}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

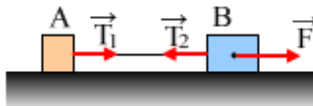


Κάποια στιγμή ασκούμε στο σώμα B μια οριζόντια δύναμη μέτρου  $F=12\text{N}$  και τα σώματα κινούνται προς τα δεξιά.

- Να βρεθεί η τάση του νήματος.
- Σε μια στιγμή το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα κόβεται. Ποια η απόσταση των δύο σωμάτων μετά από 2s από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα;

Απάντηση:

- Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, στη διεύθυνση της κίνησης, όπου  $T_1$  η δύναμη που ασκεί το νήμα στο A σώμα και  $T_2$  η αντίστοιχη στο B σώμα.



Να επισημάνουμε ότι ένα νήμα, το μόνο που μπορεί να κάνει είναι να «τραβά» και η δύναμη που ασκεί σε ένα σώμα ονομάζεται τάση του νήματος, αφού οι δυο παραπάνω δυνάμεις έχουν το ίδιο μέτρο, δηλαδή:  $T_1=T_2=T$ . Εξάλλου για όσο χρόνο υπάρχει το νήμα, τα δυο σώματα κινούνται μαζί, έχοντας κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα και την ίδια επιτάχυνση.

Εφαρμόζουμε για κάθε σώμα χωριστά το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα και έχουμε:

$$T_1 = m_1 \cdot a \text{ ή } T = m_1 \cdot a \quad (1)$$

$$F - T_2 = m_2 \cdot a \text{ ή } F - T = m_2 \cdot a \quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) παίρνουμε:

$$T + F - T = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a \text{ ή } F = (m_1 + m_2) a \text{ ή}$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{12\text{N}}{1\text{kg} + 3\text{kg}} = 3\text{m/s}^2$$

Επιστρέφοντας τώρα στη σχέση (1) παίρνουμε  $T = m_1 \cdot a = 1\text{kg} \cdot 3\text{m/s}^2 = 3\text{N}$ .

- Τη στιγμή που κόβεται το νήμα, τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα, ας την ονομάσουμε  $v_0$  και έστω  $t_0=0$  η στιγμή αυτή.

Το A σώμα δεν δέχεται καμιά δύναμη στη διεύθυνση της κίνησής του, συνεπώς συνεχίζει την κίνησή του με σταθερή ταχύτητα, οπότε μετά από χρονικό διάστημα  $t$  θα έχει μετατοπισθεί κατά:

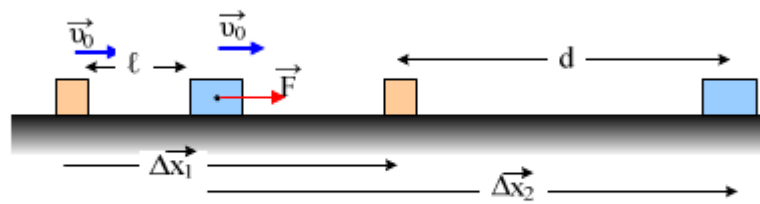
$$\Delta x_1 = v_0 \cdot t \quad (3)$$

Αντίθετα το B σώμα, δέχεται τη δύναμη  $F$  εξαιτίας της οποίας αποκτά επιτάχυνση:

$$F = m_2 \cdot a_2 \rightarrow a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{12\text{N}}{3\text{kg}} = 4\text{m/s}^2$$

Οπότε σε χρονικό διάστημα  $t$  μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad (4)$$



Αλλά με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\Delta x_1 + d = \ell + \Delta x_2 \quad \text{ή}$$

$$d = \ell + \Delta x_2 - \Delta x_1 = \ell + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a_2 t^2 - v_0 \cdot t = \ell + \frac{1}{2} a_2 \cdot t^2 = 1\text{m} + \frac{1}{2} 4 \cdot 2^2 \text{m} = 9\text{m}.$$