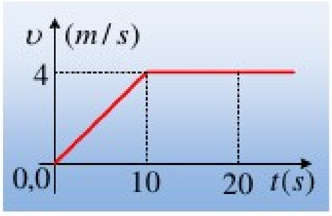
<u>ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ</u>

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

Ένα σώμα μάζας 5kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή δέχεται την επίδραση οριζόντιας δύναμης F, με αποτέλεσμα το σώμα να κινηθεί και στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητά του σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Να περιγράψετε την κίνηση του σώματος στα χρονικά διαστήματα από 0-10s και από 10s-20s.

ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος μέχρι τη στιγμή t=20s.

iii) Να υπολογίστε την ασκούμενη στο σώμα οριζόντια δύναμη F, στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

iv) Πότε παρουσιάζει μεγαλύτερη αδράνεια το σώμα, τη στιγμή t_1=5s ή τη στιγμή t_2=15s;

v) Να υπολογιστεί η μετατόπιση του σώματος από t_1 έως t_2.

Απάντηση:

i) Από 0-10s το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση, αφού η κλίση στο διάγραμμα υ-t παραμένει σταθερή. Η κίνηση λοιπόν θα είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Από τη στιγμή t=10s και μετά, η ταχύτητα του σώματος παραμένει σταθερή, συνεπώς η κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλή.

ii) Από 0-10s έχουμε:

$$a = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \frac{4-0}{10-0} m/s^2 = 0{,}4 m/s^2$$

Από 10s έως 20s προφανώς α=0.

iii) Από το θεμελιώδη νόμο της δυναμικής έχουμε για το πρώτο χρονικό διάστημα:

$$\vec{F} = m\vec{a} \ \rightarrow \ F = ma = 5 \cdot 0{,}4N = 2N$$

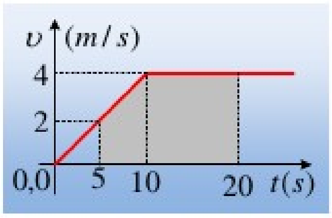
Ενώ μετά τη στιγμή t=10s, το σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα, οπότε η δύναμη μηδενίζεται (F=0).

iv) Μέτρο της αδράνειας του σώματος είναι η μάζα του. Αλλά η μάζα του σώματος είναι σταθερή, είτε ασκείται δύναμη στο σώμα είτε όχι. Κατά συνέπεια το σώμα παρουσιάζει την ίδια αδράνεια και τις δύο στιγμές.

v) Η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή t_1=5s είναι ίση:

$\upsilon_1 = \alpha t_1 = 0{,}4 \cdot 5 m/s = 2 m/s$.

Αλλά τότε η μετατόπιση του σώματος από τη στιγμή t_1=5s, μέχρι τη στιγμή t_2=15s μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν του γκρι χωρίου στο διπλανό διάγραμμα.



$$\Delta x = \frac{4+2}{2} 5m + 4 \cdot 5m = 35m$$

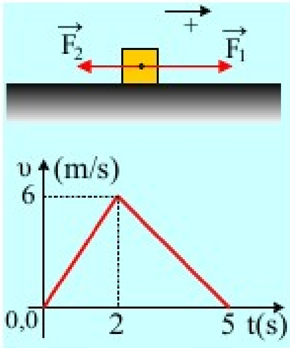
Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη μετατόπιση από τις εξισώσεις κίνησης:

$$\Delta x = \Delta x_{5\to 10} + \Delta x_{10\to 15} \to$$

$$\Delta x = \left(\upsilon_5 \cdot \Delta t_1 + \frac{1}{2} a (\Delta t_1)^2\right) + \upsilon_{10} \cdot \Delta t_2 \to$$

$$\Delta x = 2 \cdot 5m + \frac{1}{2} 0{,}4 \cdot 5^2 m + 4 \cdot 5m = 35m$$

ΑΣΚΗΣΗ 2



Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται ένα σώμα με την επίδραση δύο οριζοντίων δυνάμεων F_1 και F_2, όπως στο σχήμα. Αν η F_2 έχει σταθερό μέτρο F_2=40N, ενώ από 0-2s το μέτρο της F_1 είναι 70N και στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητα του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, ζητούνται:

i) Η μάζα του σώματος.

ii) Το μέτρο της δύναμης F_1 από 2s-5s.

iii) Τα έργα των δυνάμεων από 0-5s.

Απάντηση:

i) Η επιτάχυνση του σώματος από 0-2s είναι: $a_1 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{6-0}{2-0} m/s^2 = 3m/s^2$.

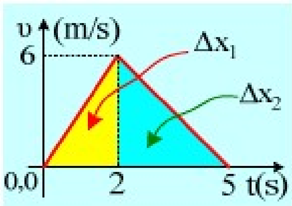
Οπότε με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F = m\alpha_1 \rightarrow F_1 - F_2 = m\cdot\alpha_1 \rightarrow m = \frac{F_1 - F_2}{a_1} = \frac{70-40}{3} kg = 10kg$$

ii) Βρίσκουμε την επιτάχυνση από 2s-5s: $a_2 = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \dfrac{0-6}{5-2} m/s^2 = -2m/s^2$, οπότε:

$$\Sigma F = m\alpha_2 \rightarrow F_1 - F_2 = m\cdot\alpha_2 \rightarrow F_1 = F_2 + m\cdot\alpha_2 = 40N + 10\cdot(-2)N = 20N.$$

Το αποτέλεσμα μας λέει ότι η δύναμη F_1 έχει κατεύθυνση επίσης προς τα δεξιά.



iii) Από 0-2s το σώμα μετατοπίζεται κατά Δx_1, όπου η μετατόπιση αυτή είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του τριγώνου με κίτρινο χρώμα στο διάγραμμα υ-t.

$$\Delta x_1 = ½\ \beta\upsilon = ½\ 2\cdot 6m = 6m.$$

Όμοια από 2s-5s η αντίστοιχη μετατόπιση θα είναι ίση αριθμητικά με το εμβαδόν του διπλανού τριγώνου (μπλε χρώμα): $\Delta x_2 = ½\ \beta\upsilon = ½\ 3\cdot 6m = 9m$. Οπότε:

$$W_{F1} = W_{0\rightarrow 2} + W_{2\rightarrow 5} = F_1\cdot\Delta x_1 + F_1'\cdot\Delta x_2 = 70\cdot 6J + 20\cdot 9J = 600J.$$

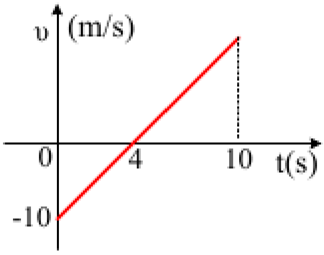
$$W_{F2} = F_2\cdot\Delta x\cdot\text{συν}180° = 40\cdot 15\cdot(-1)J = -600J.$$

Σχόλια:

1) Οι τιμές της επιτάχυνσης, θα μπορούσαν να υπολογιστούν και από την κλίση της ταχύτητας στο διάγραμμα υ-t.

2) Τα έργα των δύο δυνάμεων είναι αντίθετα, αφού τελικά το σώμα έχει μηδενική κινητική ενέργεια, οπότε όση ενέργεια προσφέρεται στο σώμα, μέσω του έργου της F_1, τόση αφαιρείται μέσω του έργου της F_2.

ΑΣΚΗΣΗ 3



Ένα σώμα μάζας 2kg, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στο διάγραμμα δίνεται η μεταβολή της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο.

i) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας του σώματος τη στιγμή που μηδενίζεται η ταχύτητά του.

ii) Να γίνει το διάγραμμα της ασκούμενης συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο σώμα σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Να παρασταθεί γραφικά η μετατόπιση του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, μέχρι τη χρονική στιγμή t_1=10s.

Απάντηση:

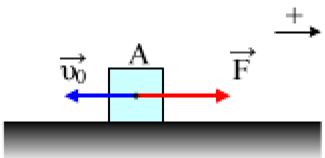
i) Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι η επιτάχυνση του σώματος, η οποία στη διάρκεια της κίνησης παραμένει σταθερή, αφού είναι αριθμητικά ίση με την κλίση της ευθείας.

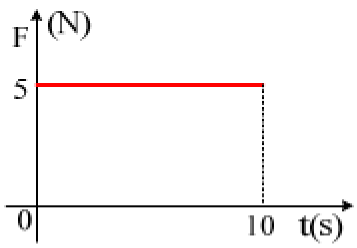
$$\alpha=\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}=\frac{0-(-10)}{4-0}m/s^2=2{,}5m/s^2$$

ii) Από τον 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F=m\cdot a \rightarrow \Sigma F=2\cdot 2{,}5N=5N$$

Στο σώμα δηλαδή ασκείται σταθερή δύναμη με μέτρο 5N και με φορά προς την θετική κατεύθυνση, όπως στο σχήμα:





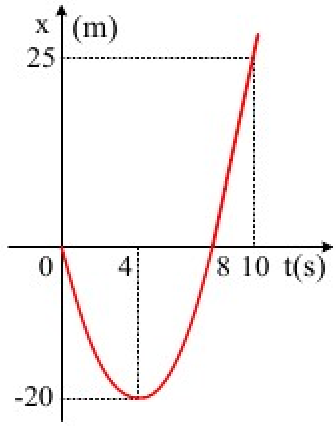
iii) Για t=4s η μετατόπιση είναι:

$$x=\upsilon_0 t+\tfrac{1}{2}\alpha t^2=-10\cdot 4+\tfrac{1}{2}\,2{,}5\cdot 4^2=-40+20=-20m.$$

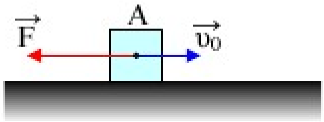
Ενώ για t=10s έχουμε:

$$x=\upsilon_0 t+\tfrac{1}{2}\alpha t^2=-10\cdot 10+\tfrac{1}{2}\,2{,}5\cdot 10^2=-100+125=25m.$$

Η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.



ΑΣΚΗΣΗ 4



Ένα σώμα μάζας 2kg για t=0 περνά από το σημείο Α έχοντας ταχύτητα υ_0=10m/s, ενώ πάνω του ασκείται οριζόντια δύναμη F=4N, όπως στο σχήμα. Το επίπεδο είναι λείο.

i) Βρείτε την επιτάχυνση του σώματος και την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή t_1=2s.

ii) Ποια χρονική στιγμή η ταχύτητα του σώματος είναι 2m/s με φορά προς τα δεξιά;

iii) Ποια χρονική στιγμή το σώμα κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου 4m/s; Πόσο απέχει τη στιγμή αυτή το σώμα από την αρχική θέση Α;

iv) Ποια χρονική στιγμή το σώμα θα ξαναπεράσει από το σημείο Α;

Απάντηση:

i) Θεωρώντας θετική την προς τα δεξιά κατεύθυνση και την αρχική θέση στο Α σαν x_A=0, υπολογίζουμε την επιτάχυνση του σώματος:

$$\Sigma F = m\cdot a \rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-4N}{2kg} = -2m/s^2$$

Οπότε η κίνηση του σώματος περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 + \alpha\cdot t \ \ (1) \text{ και } x = \upsilon_0\cdot t + ½\, a\cdot t^2 \ \ (2).$$

Για t_1=2s με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 + \alpha\cdot t = 10 + (-2)\cdot 2 = 6m/s.$$

ii) Θέτοντας στην (1) υ=2m/s έχουμε:

$$2 = 10 + (-2)\cdot t_2 \text{ ή } 2 - 10 = -2t_2 \rightarrow t_2 = 4s.$$

iii) Με αντικατάσταση στην (1) υ=-4m/s, παίρνουμε:

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 + \alpha\cdot t_3 \rightarrow$$

$$-4 = 10 - 2t_3 \rightarrow 2t_3 = 14 \rightarrow t_3 = 7s.$$

Και από την (2):

$$x = \upsilon_0\cdot t + ½\, a\cdot t^2 = 10\cdot 7 + ½\,(-2)\cdot 49 = 70 - 49 = 21m.$$

Δηλαδή το σώμα βρίσκεται δεξιά του σημείου Α σε απόσταση 21m.

iv) Τη στιγμή που το σώμα επιστρέφει στο σημείο Α έχουμε, x=0 και με αντικατάσταση στην (2) παίρνουμε:

$$x = \upsilon_0\cdot t + ½\, a\cdot t^2 \ \rightarrow$$

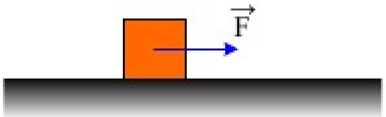
$$0=10\cdot t + \tfrac{1}{2}(-2)\cdot t^2 \rightarrow$$

$$0=t(10-t) \rightarrow$$

$$\text{ή } t=0 \ (3) \ \text{ ή } \ t_4=10s. \ (4)$$

Η λύση (3) αντιστοιχεί στην αρχική στιγμή, ενώ η (4) στη στιγμή της επιστροφής.

ΑΣΚΗΣΗ 5



Σε σώμα μάζας 2kg που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, ενεργεί σταθερή οριζόντια δύναμη F επί 4s. Το σώμα σε 10 δευτερόλεπτα μετατοπίζεται κατά 160m. Ποιο το μέτρο της δύναμης F;

Απάντηση:

Για όσο χρόνο στο σώμα ασκείται η δύναμη, αυτό επιταχύνεται με επιτάχυνση:

$$\Sigma F=m\cdot\alpha \ (1) \rightarrow$$

$$\alpha=\frac{F}{m}$$

Οπότε η κίνησή του είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη για την οποία ισχύουν:

$$\upsilon=\alpha\cdot t_1 \ \text{ και } \Delta x_1= \tfrac{1}{2}\,\alpha\cdot t_1^{\,2}$$

$$\text{όπου } t_1=4s.$$

Μετά η δύναμη καταργείται οπότε το σώμα συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα (ίση με αυτή που απέκτησε κατά την επιταχυνόμενη κίνηση) και μετατοπίζεται κατά:

$$\Delta x_2=\upsilon\cdot\Delta t_2= \alpha\cdot t_1\cdot\Delta t_2$$

$$\text{Όπου } \Delta t_2= 10s-4s=6s.$$

Όμως $\Delta x_1+\Delta x_2= \Delta x_{ολ} \rightarrow$

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha\cdot 4^2 + \alpha\cdot 4\cdot 6= 160 \text{ ή}$$

$$8\alpha+ 24\,\alpha = 160 \text{ ή}$$

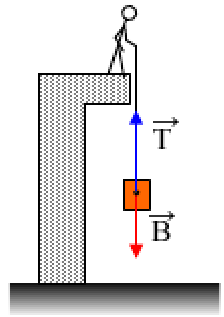
$$32\alpha= 160 \text{ ή}$$

$$\alpha=5 \ m/s^2.$$

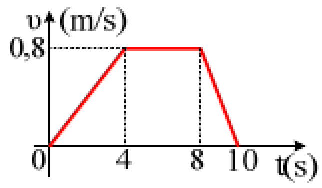
Οπότε από την σχέση (1) παίρνουμε:

$$F=m\alpha=2\cdot 5N=10N.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6



Ένας άνθρωπος ανεβάζει μέσω νήματος ένα σώμα βάρους 50N (μάζας 5kg), όπως στο σχήμα. Η ταχύτητα του σώματος μεταβάλλεται όπως στο παρακάτω διάγραμμα.



i) Να κάνετε το διάγραμμα της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

ii) Σε πόσο ύψος από το έδαφος ανυψώθηκε το σώμα;

Απάντηση:

i) Από 0-4s:

$$\Sigma F = m \cdot a \rightarrow$$

$$T - B = m \cdot a \rightarrow$$

$$T = B + ma \rightarrow$$

$$T = B + m \cdot \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 50 + 5 \cdot \frac{0{,}8 - 0}{4 - 0} = 51N$$

Από 4s-8s:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow T = B = 50N$$

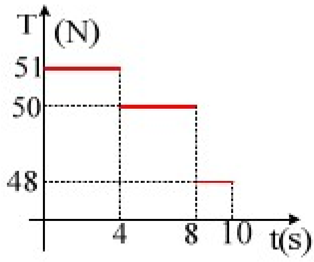
Από 8s-10s:

$$T - B = m \cdot a \rightarrow$$

$$T = B + ma \rightarrow$$

$$T = B + m \cdot \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = 50 + 5 \cdot \frac{0 - 0{,}8}{10 - 8} = (50 - 2)N = 48N$$

Έτσι το διάγραμμα T=f(t) είναι:

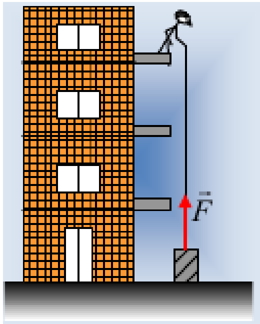


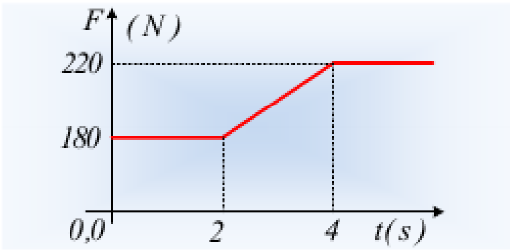
ii) Το ύψος είναι ίσο με την μετατόπιση του σώματος, η οποία είναι αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου στο διάγραμμα υ-t:

$$\text{Άρα } h = \Delta x = \frac{10+4}{2}0{,}8m = 5{,}6m$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Ο Γιάννης, συγκάτοικος στον 3ο όροφο, αφού δεν έχει «λεφτά για πετρέλαιο», αγόρασε ξύλα για το τζάκι, τα οποία ανεβάζει τοποθετώντας τα σε κιβώτιο και τραβώντας με ένα σχοινί, ασκώντας με τον τρόπο αυτό μια κατακόρυφη δύναμη **F** στο κιβώτιο, το οποίο έχει μάζα 20kg. Στο διάγραμμα δίνεται η μεταβολή του μέτρου της δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο.





i) Στο χρονικό διάστημα 0-2s το κιβώτιο:

α) ηρεμεί β) ανεβαίνει με σταθερή ταχύτητα γ) ανεβαίνει με σταθερή επιτάχυνση.

ii) Να υπολογίστε τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στο κιβώτιο τη χρονική στιγμή t_1=1s.

iii) Ποια χρονική στιγμή το κιβώτιο εγκαταλείπει το έδαφος και αρχίζει να ανέρχεται;

iv) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κιβωτίου τη στιγμή t_4=4s.

v) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του κιβωτίου σε συνάρτηση με το χρόνο. Τι ταχύτητα έχει αποκτήσει το κιβώτιο τη στιγμή t_4;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

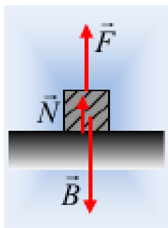
Απάντηση:

i) Στο χρονικό διάστημα 0-2s το σώμα ηρεμεί (σωστό το α)). Το βάρος του κιβωτίου είναι ίσο με:

$$B=mg=20\cdot 10N=200N$$

Συνεπώς δεν είναι δυνατόν ασκώντας πάνω του δύναμη μέτρου 180N να το ανασηκώσουμε.

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα, για όσο χρόνο βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος (συνεπώς και για t=1s). Το κιβώτιο ισορροπεί, οπότε:



$$\Sigma F=0 \rightarrow F+N=B \ \ (1)\rightarrow$$

$$N=B-F=200N-180N=20N.$$

Όπου N η δύναμη στήριξης από το έδαφος (η κάθετη αντίδραση του εδάφους), ενώ B=200N και F=180N.

iii) Μετά τη στιγμή t_2=2s που αρχίζει να αυξάνεται το μέτρο της δύναμης, κάποια στιγμή η δύναμη θα γίνει μεγαλύτερη του βάρους και το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται προς τα πάνω. Με άλλα λόγια, για όσο χρόνο το σώμα βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος, θα δέχεται δύναμη στήριξης (N) από αυτό. Μόλις N=0, μόλις δηλαδή το σώμα πάψει να δέχεται δύναμη στήριξης, θα αρχίσει να ανέρχεται. Αλλά τη στιγμή αυτή, η σχέση (1) δίνει:

$$F+N=B \rightarrow F=B=200N. \quad (1^{\alpha})$$

Αλλά ποια στιγμή συμβαίνει αυτό; Χρειαζόμαστε τη συνάρτηση της δύναμης με το χρόνο, στο χρονικό διάστημα 2s-4s. Ας την βρούμε:

Η δύναμη μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο (η γραφική παράσταση είναι πρώτου βαθμού) συνεπώς η σχέση θα είναι της μορφής:

$$F=\lambda t+\beta$$

Αντικαθιστώντας t=2s παίρνουμε: $180=\lambda\cdot 2+\beta$ (2)

Και αντίστοιχα για t=4s παίρνουμε: $220=\lambda\cdot 4+\beta$ (3)

Οι εξισώσεις (2) και (3) αποτελούν ένα σύστημα, η λύση του οποίου θα μας δώσει τις τιμές λ και β!

Πώς το λύνουμε; Ένας τρόπος είναι να αφαιρέσουμε τις (2) και (3) κατά μέλη:

$$180-220=2\lambda+\beta-4\lambda-\beta \text{ ή } -2\lambda=-40 \text{ ή } \lambda=20 \rightarrow$$

$$(2)\ \beta=180-2\lambda=180-2\cdot 20=140$$

Έτσι η συνάρτηση F-t παίρνει τη μορφή:

$\boldsymbol{F=20t+140}$ (μονάδες στο S.I.) και $2s \leq t \leq 4s$

Αλλά τότε επιστρέφοντας στην σχέση 1^{α} παίρνουμε:

$$20t+140=200 \rightarrow 20t=60 \text{ ή } t_3=3s.$$

Για $t \geq 3s$ το σώμα επιταχύνεται με την επίδραση της δύναμης F και του βάρους, οπότε ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα δίνει:

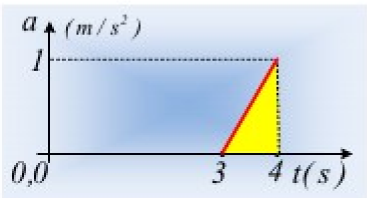
$$\Sigma F=m\cdot\alpha \rightarrow F-B=m\cdot\alpha \rightarrow$$

$$20t+140-200=20\,\alpha \rightarrow \alpha=t-3 \quad (4) \quad (S.I.) \text{ και } 3s \leq t \leq 4s$$

Συνεπώς για $t_4=4s$ παίρνουμε:

$$\alpha_4=t-3=4-3=1m/s^2.$$

Το διάγραμμα της σχέσης (4) είναι αυτό του διπλανού σχήματος. Αλλά τότε το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου στο διάγραμμα α-t, είναι αριθμητικά ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα. Δηλαδή:



$$\Delta\upsilon=\frac{1}{2}1\cdot 1m/s=0,5m/s$$

Αλλά $\Delta\upsilon=\upsilon_4-\upsilon_3$, όπου $\upsilon_3=0$, οπότε τελικά η ταχύτητα ανόδου τη στιγμή $t_4=4s$ έχει μέτρο $\upsilon_4=0,5m/s$.