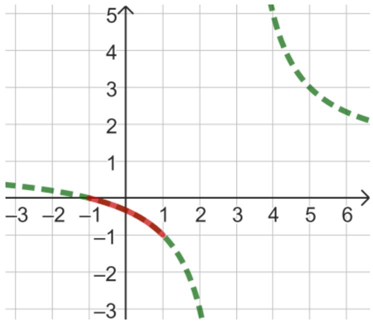
Σύνολο τιμών δύο ασκήσεις :



$f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ με $x\in[-1,1)$

Να βρεθεί το σύνολο τιμών.

- Σ.Τ είναι το σύνολο των y για τα οποία

(A) η $y=\frac{x+1}{x-3}$ έχει λύση

(B) και η λύση αυτή ανήκει στο A.

(A) $y=\frac{x+1}{x-3} \iff$

$(x-3)y=x+1 \iff$

$yx-3y=x+1 \iff$

$yx-x=3y+1 \iff$

$(y-1)x=3y+1$ για $y=1$ $0x=1$ αδύνατη

για $y\neq 1$

$x=\frac{3y+1}{y-1}$ Οπότε ο πρώτος περιορισμός είναι $y\neq 1$.

(B) $-1\le x<1 \iff$

$-1\le \frac{3y+1}{y-1}<1$

αν $y-1>0 \iff \underline{y>1}$

$\underbrace{-y+1\le 3y+1}<y-1$, $3y+1\underbrace{<y-1}$

$0\le 4y$ κ $2y<-2$

$0\le y$ κ $y<-1$

Δεν συμβαίνουν ταυτόχρονα, δεν έχουμε περιορισμό.

αν $y-1<0 \iff y<1$

$\underbrace{-y+1\ge 3y+1}>y-1$, $3y+1\underbrace{>y-1}$

$0\ge 4y$ κ $2y>-2$

$0\ge y$ κ $y>-1$

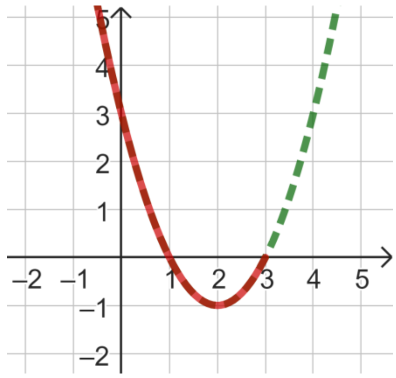
$-1<y\le 0$

Οπότε ο δεύτερος περιορισμός είναι $-1<y\le 0$

Συνεπώς το Σ.Τ. θα προκύψει από

$\begin{cases} y\neq 1 \\ -1<y\le 0 \end{cases}$ δηλ. $f(A)=(-1,0]$

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ με $x \in [-1,3)$



Σύνολο τιμών είναι το σύνολο των y για τα οποία:

(A) η εξίσωση $y = x^2 - 4x + 3$ έχει λύση

(B) η λύση ανήκει στο $[1,3)$

(A) $y = x^2 - 4x + 3 \iff$

$0 = x^2 - 4x + 3 - y$

$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot(3-y)$

$= 16 - 12 + 4y$

$= 4 + 4y$

$= 4(1+y)$ Για να έχει λύση πρέπει

$\Delta \ge 0 \iff 4(1+y) \ge 0 \iff \boxed{y \ge -1}$

(B) η λύση είναι

$x = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{1+y}}{2}$ → $x_1 = 2+\sqrt{1+y}$ ή $x_2 = 2-\sqrt{1+y}$

Θέλω να ανήκει στο $[-1,3)$ δηλ. $-1 \le x < 3$

$-1 \le 2+\sqrt{1+y} < 3$ ή $-1 \le 2-\sqrt{1+y} < 3$

$\overset{-2}{\iff} \underbrace{-3 \le \sqrt{1+y}}_{\text{ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ}} < 1$ ή $\overset{-2}{\iff} -3 \le -\sqrt{1+y} < 1$

$\overset{\cdot(-1)}{\iff} 3 \ge \underbrace{\sqrt{1+y} > -1}_{\text{ΙΣΧΥΕΙ ΠΑΝΤΑ}}$

$\wedge 2 \quad \sqrt{1+y}^2 < 1^2$

$\iff 1+y < 1$ $\quad \wedge 2 \quad 9 \ge 1+y$

$\iff \boxed{y < 0 \quad \text{ή} \quad 8 \ge y}$

Οπότε, συνολικά

$y \ge -1$ και $y<0$ ή $y \le 8$ }

$f(A) = [-1, 8)$