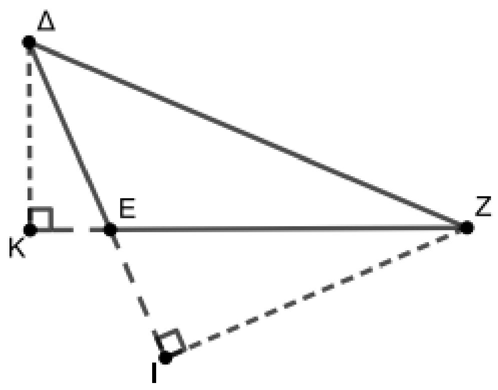
17354

ΘΕΜΑ 2

Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.



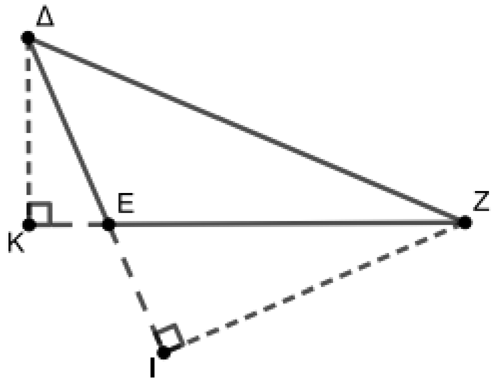
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….
ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα …….
iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….
iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..
v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + ... + 2 \cdot ΕΖ \cdot ...$
vi. $ΕΖ^2 = ... + ΔΖ^2 - 2 \cdot ... \cdot ΔΙ$ (Μονάδες 15)

β) Αν ΔΕ = 2, ΕΖ = 4 και ΔΖ = 5, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ



α)

i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΕ**

ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα **ΚΖ**

iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΔΖ** στην πλευρά **ΔΕ**

iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς **ΕΖ** στην πλευρά **ΔΕ**

v. $ΔΖ^2 = ΔΕ^2 + \mathbf{ΕΖ^2} + 2\cdot ΕΖ\cdot \mathbf{ΚΕ}$

vi. $ΕΖ^2 = \mathbf{ΔΕ^2} + ΔΖ^2 - 2\cdot \mathbf{ΔΕ}\cdot ΔΙ$

β) Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΔΕ.

Η γωνία $Ε\widehat{Δ}Ζ$ είναι οξεία γιατί ανήκει στο ίδιο τρίγωνο με τη γωνία $Δ\widehat{Ε}Ζ$, η οποία είναι αμβλεία, αφού τα ύψη ΖΙ και ΔΚ που αντιστοιχούν στις πλευρές της ΔΕ και ΕΖ αντίστοιχα, βρίσκονται εκτός του τριγώνου. Επομένως, εφαρμόζουμε το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΔΕΖ για την πλευρά ΕΖ και έχουμε:

$ΕΖ^2 = ΔΕ^2 + ΔΖ^2 - 2\cdot ΔΕ\cdot ΔΙ$ ή $16=4+25-2\cdot 2\cdot ΔΙ$ ή $4ΔΙ=13$ ή $ΔΙ = \frac{13}{4}$.

16804

ΘΕΜΑ 2

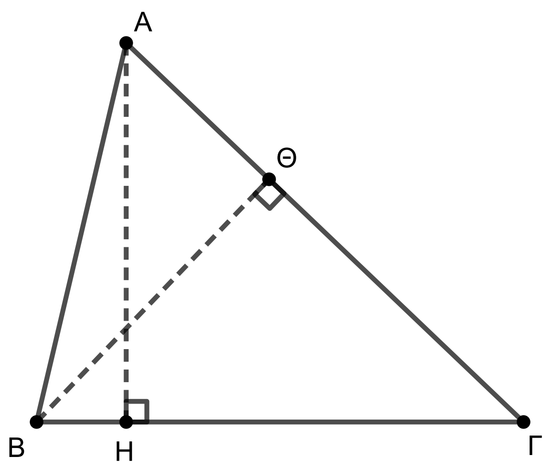
Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη του ΑΗ και ΒΘ.

α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

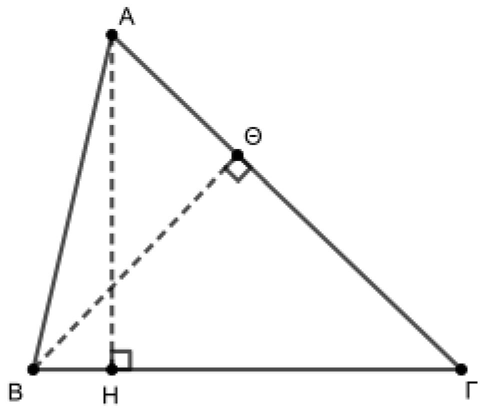
i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα …….
ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα ......
iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς …….. στην πλευρά …….
iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ……… στην πλευρά ……..
v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ... - 2 \cdot ΒΓ \cdot ...$
vi. $ΒΓ^2 = ... + ΑΓ^2 - 2 \cdot ... \cdot ΑΘ$ (Μονάδες 15)

β) Αν ΑΒ = 4, ΒΓ=5 και ΑΓ = 6, να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΘ.

(Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α)

i. Η προβολή της πλευράς ΒΓ στην πλευρά ΑΓ είναι το τμήμα **ΘΓ**
ii. Η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΒΓ είναι το τμήμα **ΒΗ**
iii. Το τμήμα ΗΓ είναι η προβολή της πλευράς **ΑΓ** στην πλευρά **ΒΓ**
iv. Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς **ΑΒ** στην πλευρά **ΑΓ**
v. $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + \mathbf{ΒΓ^2} - 2 \cdot ΒΓ \cdot \mathbf{ΒΗ}$
vi. $ΒΓ^2 = \mathbf{ΑΒ^2} + ΑΓ^2 - \mathbf{2ΑΓ} \cdot ΑΘ$

β) Το τμήμα ΑΘ είναι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ΑΓ, οπότε εφαρμόζοντας Γενικευμένο Πυθαγόρειο για την πλευρά ΒΓ έχουμε:

i. $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΓ \cdot ΑΘ$ ή $25=16+36-2 \cdot 6 \cdot ΑΘ$ ή $12ΑΘ=27$, άρα $ΑΘ = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$.

22514

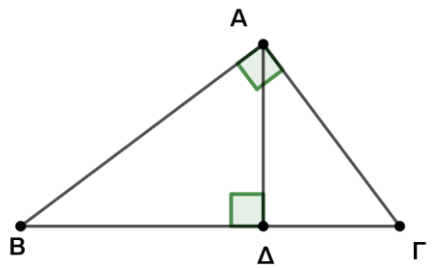
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 5 και ΑΒ = 4. Να υπολογίσετε:

α) την πλευρά ΑΓ. (Μονάδες 9)

β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ. (Μονάδες 8)

γ) το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε

$A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, άρα $A\Gamma = 3$.

β) Έχουμε $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$, οπότε $B\Delta = \dfrac{AB^2}{B\Gamma} = \dfrac{16}{5}$.

γ) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$, οπότε

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 4^2 - \frac{16^2}{5^2} = 16 - \frac{16 \cdot 16}{25} = \frac{16 \cdot 25 - 16 \cdot 16}{25} =$$

$$\frac{16 \cdot (25-16)}{25} = \frac{16 \cdot 9}{25}$$, άρα $B\Delta = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = \dfrac{12}{5}$.

22400

ΘΕΜΑ 4

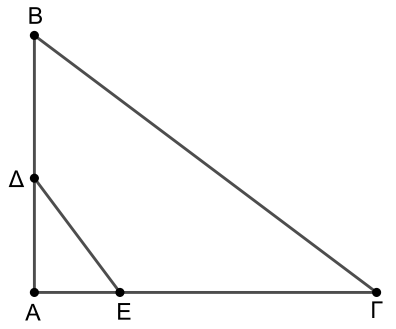
Τα Δ και E είναι σημεία των πλευρών AB και $\mathrm{A\Gamma}$ αντίστοιχα, ενός τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Δίνεται ότι $\mathrm{AB} = 9$, $\mathrm{A\Gamma} = 12$, $\mathrm{A\Delta} = 4$ και $\mathrm{AE} = 3$.

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\mathrm{B\Gamma} = 15$, (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι: Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

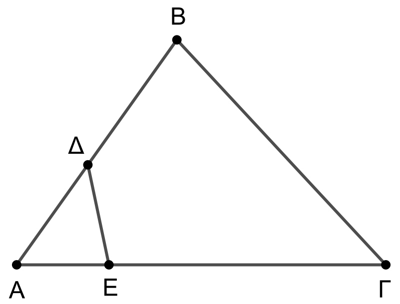
$\Delta\mathrm{E} = 5$. (Μονάδες 6)

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ είναι $\mathrm{B\Gamma} = 10$, (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι: Το τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

$\Delta\mathrm{E} = \frac{10}{3}$. (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΛΥΣΗ

α)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{AB}=9$, $\mathrm{A\Gamma}=12$ και $\mathrm{B\Gamma}=15$, άρα έχουμε

$\mathrm{B\Gamma}^2=15^2=225$ και $\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2=9^2+12^2=81+144=225$,

άρα $\mathrm{B\Gamma}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{A\Gamma}^2$.

Επομένως από το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος είναι $\widehat{\mathrm{A}}=90°$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

ii. Επειδή $\widehat{\mathrm{A}}=90°$, το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ορθογώνιο, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\Delta\mathrm{E}^2=\mathrm{A}\Delta^2+\mathrm{AE}^2$ ή $\Delta\mathrm{E}^2=4^2+3^2$ ή $\Delta\mathrm{E}^2=25$ ή $\Delta\mathrm{E}^2=5^2$ ή $\Delta\mathrm{E}=5$.

β)

i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mathrm{AB}=9$, $\mathrm{A\Gamma}=12$ και $\mathrm{B\Gamma}=10$, άρα έχουμε

$\mathrm{A\Gamma}^2=12^2=144$ και $\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2=9^2+10^2=81+100=181$

άρα $\mathrm{A\Gamma}^2<\mathrm{AB}^2+\mathrm{B\Gamma}^2$, οπότε $\widehat{\mathrm{B}}<90°$. Η οξεία γωνία $\widehat{\mathrm{B}}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ αφού βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά την ΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο και όχι ορθογώνιο.

ii. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ έχουν

$\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ και τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ κοινή,

άρα έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες ίσες, οπότε είναι όμοια.

Άρα τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΓΒ θα έχουν και τις τρίτες πλευρές ανάλογες με λόγο $\frac{1}{3}$.

Επομένως $\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{1}{3}$ ή $\frac{\Delta\mathrm{E}}{10}=\frac{1}{3}$ ή $\Delta\mathrm{E}=\frac{10}{3}$.

22130

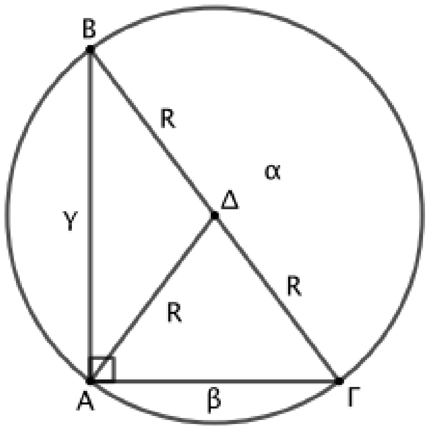
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90^o$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $ΒΓ = α$, $ΑΓ = β$ και $ΑΒ = γ$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $α = 2R$. (Μονάδες 12)

β) $α^2 + β^2 + γ^2 = 8R^2$. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α) Στο σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αφού η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{A}$ είναι ορθή, τότε θα βαίνει σε ημικύκλιο. Επομένως, η υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. Άρα $B\Gamma = \alpha = 2R$.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Οπότε:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = 2\alpha^2 = 2 \cdot (2R)^2 = 2 \cdot 4R^2 = 8R^2$$

21185

ΘΕΜΑ 4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση λ%, να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάστε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές 10α, 8β και 6γ.
(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Αφού τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, τότε έχουμε την αναλογία:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}$$

Αν ονομάσουμε τους ίσους λόγους κ (κ > 0), τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{4}=\frac{\gamma}{3}=\kappa \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\frac{\alpha}{5}=\kappa\\ \frac{\beta}{4}=\kappa\\ \frac{\gamma}{3}=\kappa\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha=5\kappa\\ \beta=4\kappa\\ \gamma=3\kappa\end{matrix}\right\}$$

Αφού κ > 0 το μεγαλύτερο μήκος είναι εκείνο που έχει μέτρο 5κ, τότε:

$$\alpha^2=(5\kappa)^2=25\kappa^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=(4\kappa)^2+(3\kappa)^2=16\kappa^2+9\kappa^2=25\kappa^2$$

συγκρίνοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, δηλαδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχηματίζουν τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α.

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ σχεδιαστούν πάνω σε ένα χαρτί που φωτοτυπηθεί με μεγέθυνση λ%, τότε τα μέτρα αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων θα πολλαπλασιαστούν επί $\frac{\lambda}{100}$ (λ>100). Έτσι προκύπτουν νέα ευθύγραμμα τμήματα με μήκη που έχουν μέτρα:

$$\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha,\ \frac{\lambda}{100}\cdot\beta \text{ και } \frac{\lambda}{100}\cdot\gamma.$$

Για τα νέα ευθύγραμμα τμήματα ισχύει:

$$\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\beta\right)^2+\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\gamma\right)^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\beta^2+\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\gamma^2=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2(\beta^2+\gamma^2)=\left(\frac{\lambda}{100}\right)^2\cdot\alpha^2=\left(\frac{\lambda}{100}\cdot\alpha\right)^2$$

δηλαδή ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, συνεπώς σχηματίζουν πάλι νέο ορθογώνιο τρίγωνο.

γ) Επειδή τα τρία ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα, έχουμε από το (α) ερώτημα ότι:

$$\alpha=5\kappa,\ \beta=4\kappa \text{ και } \gamma=3\kappa$$

Έστω ότι σχηματίζεται τρίγωνο με τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μήκη με μέτρα 10α, 8β και 6γ, τότε ισχύει η τριγωνική ανισότητα και θα έχουμε:

$$10\alpha<8\beta+6\gamma \Leftrightarrow 10\cdot5\kappa<8\cdot4\kappa+6\cdot3\kappa$$

$$\Leftrightarrow 50\kappa<32\kappa+18\kappa$$

$$\Leftrightarrow 50\kappa<50\kappa,\quad \text{άτοπο}$$

επομένως δεν σχηματίζεται τέτοιο τρίγωνο.

21302

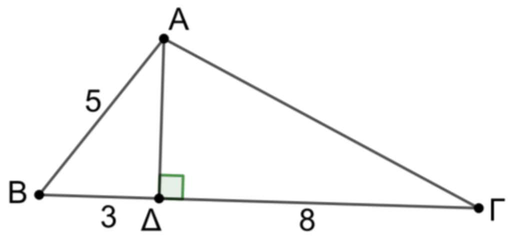
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5 και ΑΔ το ύψος του από την κορυφή Α. Αν ΒΔ = 3 και ΓΔ = 8 να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A}\Delta = 4$. (Μονάδες 07)

β) $\mathrm{A}\Gamma = \sqrt{80}$. (Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^o$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$A B^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2$ ή $A\Delta^2 = 5^2 - 3^2$ ή $A\Delta^2 = 16$ ή $A\Delta = 4$.

β) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο με $\Delta = 90^o$ οπότε εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$A\Gamma^2 = A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2$ ή $A\Gamma^2 = 4^2 + 8^2$ ή $A\Gamma^2 = 16 + 64$ ή $A\Gamma^2 = 80$ ή $A\Gamma = \sqrt{80}$.

γ) Για τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ έχουμε:

$AB = 5$, $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = 3 + 8 = 11$ και $A\Gamma = \sqrt{80}$. Επίσης $B\Gamma^2 = 121$ και $A\Gamma^2 = (\sqrt{80})^2 = 80$.

Η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ είναι η ΒΓ, εφόσον $B\Gamma^2 > A\Gamma^2$.

Συνεπώς η $\hat{A}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, εφόσον βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του ΒΓ.

Επιπλέον $AB^2 + A\Gamma^2 = 25 + 80 = 105$ και $B\Gamma^2 = 121$ οπότε είναι $B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2$, άρα η γωνία $\hat{A} > 90^o$ επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

21149

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $B\widehat{A}\Gamma = 30^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $B\Gamma = 2$, τότε:

α) Να υπολογίσετε:

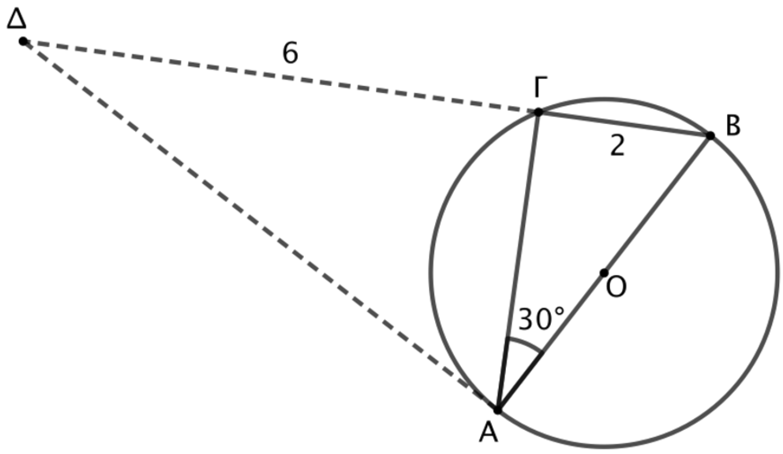
i. Την ακτίνα R.

ii. Το μήκος της πλευράς ΑΓ.

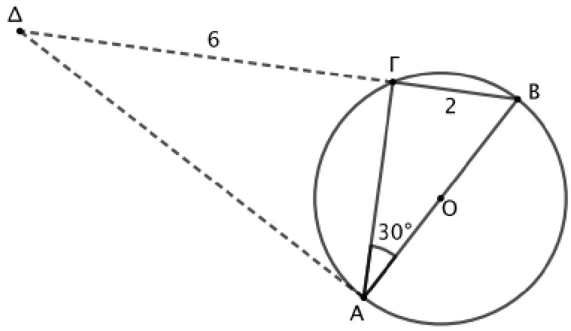
(Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



ΛΥΣΗ



α)

i. Η γωνία $B\hat{\Gamma}A$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο ημικύκλιο ΑΒ, οπότε είναι ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $B\hat{A}\Gamma = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ θα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΑΒ, δηλαδή

$$B\Gamma = \frac{AB}{2} \text{ ή } 2 = \frac{2R}{2} \text{ ή } R = 2$$

ii. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = AB^2 - B\Gamma^2$$
$$A\Gamma^2 = 4^2 - 2^2$$
$$A\Gamma^2 = 16 - 4$$
$$A\Gamma^2 = 12$$
$$A\Gamma = \sqrt{12}$$

β) Η γωνία $A\hat{\Gamma}\Delta$ είναι ορθή ως παραπληρωματική της ορθής γωνίας $B\hat{\Gamma}A$. Αρχικά, υπολογίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΔ. Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ. Έχουμε διαδοχικά:

$$A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$$
$$A\Delta^2 = \sqrt{12}^2 + 6^2$$
$$A\Delta^2 = 12 + 36$$
$$A\Delta^2 = 48$$
$$A\Delta = \sqrt{48}$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν εφαρμόζεται το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΔ με μήκη πλευρών $AB = 4$, $\Delta B = 8$, $A\Delta = \sqrt{48}$. Έχουμε:

$\Delta B^2 = 8^2 = 64$

$AB^2 + A\Delta^2 = 4^2 + \sqrt{48}^2 = 16 + 48 = 64$

Αφού είναι $\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2$, συμπεραίνουμε ότι $B\hat{A}\Delta = 90^o$. Επομένως, το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.

14549

ΘΕΜΑ 2

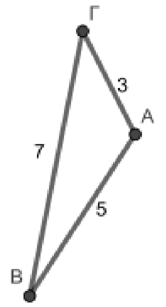
Τα μήκη των πλευρών α, β, γ του τριγώνου ΑΒΓ είναι : $\alpha=7$, $\beta=3$ και $\gamma=5$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

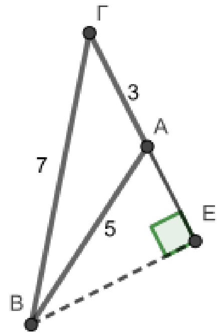
ΛΥΣΗ

Σχεδιάζουμε τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών ΑΒ = γ = 5, ΑΓ = β = 3 και ΒΓ = α =7. Συγκρίνουμε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του.



Παρατηρούμε ότι $\alpha^2 = 7^2 = 49$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με αμβλεία τη γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α , δηλαδή αμβλεία είναι η γωνία Α.

β)



Για να σχεδιάσουμε την προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ φέρουμε κάθετο τμήμα από την κορυφή Β προς το φορέα της πλευράς ΑΓ. Αν Ε είναι το σημείο τομής της καθέτου αυτής με το φορέα της ΑΓ, τότε η προβολή της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ. Από τη γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος για την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία έχουμε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\cdot\beta\cdot ΑΕ$ ή $7^2 = 3^2 + 5^2 + 2\cdot 3\cdot ΑΕ$ ή $49 = 34 + 6\cdot ΑΕ$ ή $49 - 34 = 6\cdot ΑΕ$ ή $15 = 6\cdot ΑΕ$ ή $ΑΕ = \frac{15}{6}$.

17348

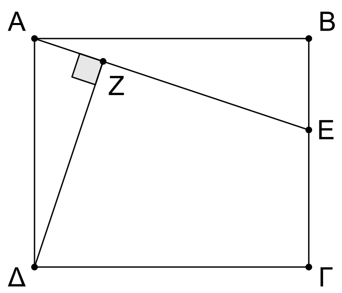
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\text{AB} = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $\text{BE} = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ.

α) Να αποδείξετε ότι $\text{AE} = 2\sqrt{10}$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν $\text{ΔZ} = \text{ZE}$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ. (Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ

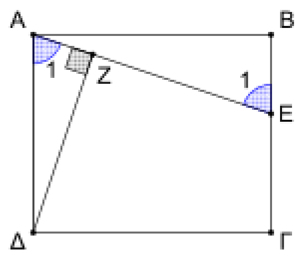
α) Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε ότι

$$ΑΕ^2 = ΑΒ^2 + ΒΕ^2.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $ΑΒ = 6$, $ΒΕ = 2$, οπότε

$$ΑΕ^2 = 6^2 + 2^2 \text{ ή } ΑΕ^2 = 40 \text{ ή } ΑΕ = 2\sqrt{10}.$$

β)



Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ έχουν:

- $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}_1$ ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΓ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που τέμνονται από την ΑΕ.
- $\hat{Β} = \hat{Ζ} = 90^\circ$, γιατί από την υπόθεση έχουμε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και η ΔΖ κάθετη στην ΑΕ.

Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια, γιατί έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία. Επομένως θα ισχύει

$$\frac{ΑΒ}{ΔΖ} = \frac{ΑΕ}{ΑΔ} = \frac{ΒΕ}{ΑΖ} \ (1).$$

γ) Είναι $ΑΒ = 6$, $ΒΕ = 2$ και $ΑΕ = 2\sqrt{10}$, οπότε η (1) γίνεται

$$\frac{6}{ΔΖ} = \frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ} = \frac{2}{ΑΖ} \ (2).$$

Από τα δεδομένα έχουμε ότι $ΔΖ = ΖΕ$, έτσι η ισότητα $\frac{6}{ΔΖ} = \frac{2}{ΑΖ}$ γίνεται $\frac{6}{ΖΕ} = \frac{2}{ΑΖ}$ και με ιδιότητα των αναλογιών προκύπτει ότι

$$\frac{6}{ΖΕ} = \frac{2}{ΑΖ} = \frac{6+2}{ΖΕ+ΑΖ} = \frac{8}{ΑΕ} = \frac{8}{2\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \ (3).$$

Από τις ισότητες (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{2\sqrt{10}}{ΑΔ} = \frac{4}{\sqrt{10}} \text{ ή } 4ΑΔ = 2(\sqrt{10})^2 \text{ ή } ΑΔ = 5.$$

17343

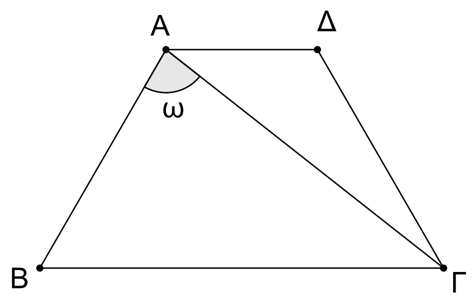
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος είναι $ΑΔ = 3$, $ΑΒ = ΓΔ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $\hat{Δ} = 120^o$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΑΓ = 7$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $συνω = \frac{1}{7}$, όπου ω είναι η γωνία $Β\hat{Α}Γ$. (Μονάδες 15)

Δίνεται ότι $συν120^o = -\frac{1}{2}$.



ΛΥΣΗ

α) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΓΔ ισχύει

$$ΑΓ^2 = ΑΔ^2 + ΓΔ^2 - 2ΑΔ \cdot ΓΔ \cdot συν\hat{Δ}.$$

Όμως $ΓΔ = 5$, $ΑΔ = 3$ και $\hat{Δ} = 120^o$, άρα $ΑΓ^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3συν120^o$ ή

$ΑΓ^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$ ή $ΑΓ^2 = 49$ ή $ΑΓ = 7$.

Β) Σύμφωνα με το νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 2ΑΒ \cdot ΑΓ \cdot συνω.$$

Όμως $ΑΒ = 5$, $ΒΓ = 8$ και $ΑΓ = 7$, άρα

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot συνω \quad ή \quad 64 = 74 - 70συνω \quad ή \quad 70συνω = 10$$

επομένως $συνω = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$.

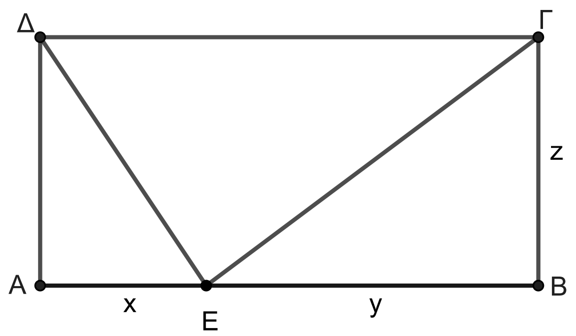
16805

ΘΕΜΑ 2

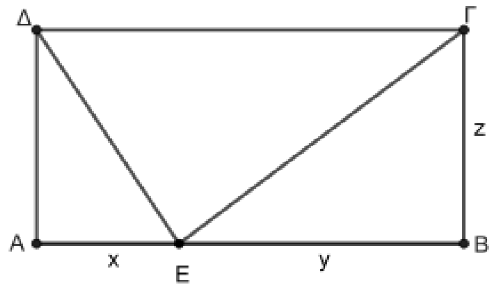
Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 8$, $y = 16$ και $z = 12$.(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.(Μονάδες 12)



ΛΥΣΗ



α) Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 72. Οπότε 2 ΑΒ + 2 ΒΓ = 72 ή 2 (x + y) + 2 z = 72 ή x + y + z = 36. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα, άρα ισχύει $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{2+4+3} = \frac{36}{9} = 4$. Άρα x = 2·4 = 8, y = 4·4 = 16 και z = 3·4 = 12.

β) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΓΒΕ έχουμε $ΓΕ^2 = y^2 + z^2$ ή $ΓΕ^2 = 16^2 + 12^2$, οπότε $ΓΕ^2 = 400$ ή ΓΕ = 20. Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΔΑΕ για την υποτείνουσα ΔΕ έχουμε $ΔΕ^2 = ΑΕ^2 + ΔΑ^2$ ή $ΔΕ^2 = 8^2 + 12^2 = 208$, οπότε ΔΕ = $\sqrt{208}$ = $\sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$. Άρα η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΓ ισούται με : ΔΕ + ΕΓ + ΔΓ = $4\sqrt{13} + 20 + (8 + 16) = 44 + 4\sqrt{13}$.

16757

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, $AB = 6$ και $A\Gamma = 3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $A\Delta = 4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

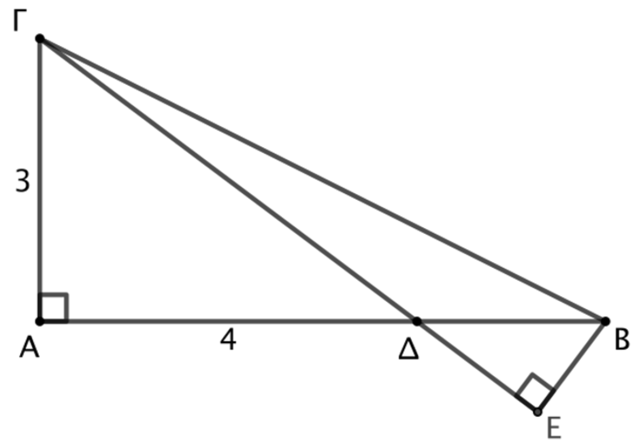
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

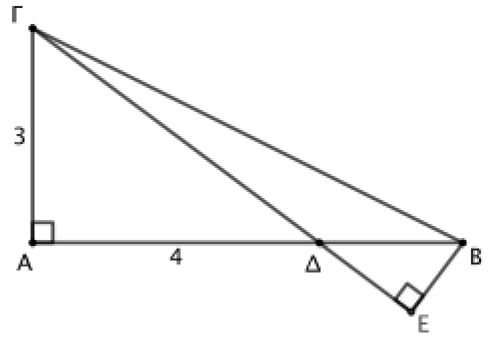
(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

(Μονάδες 8)



ΛΥΣΗ



α) Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$\Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 + A\Delta^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Άρα, $\Gamma\Delta = 5$.

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ έχουν $A\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Delta}B$ (ως κατακορυφήν) και $\hat{A} = \hat{E} = 90^o$. Αφού τα τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε θα είναι όμοια.

γ) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια, οπότε θα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες. Οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων σημειώνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	Ίσες γωνίες		
	$\hat{A} = \hat{E}$	$A\hat{\Delta}\Gamma = E\hat{\Delta}B$	$A\hat{\Gamma}\Delta = E\hat{B}\Delta$
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΑΔΓ	ΓΔ	ΑΓ	ΑΔ
Απέναντι πλευρά στο τρίγωνο ΕΔΒ	ΔΒ	ΕΒ	ΕΔ

Έτσι έχουμε:

$$\frac{A\Gamma}{EB} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} \text{ ή } \frac{3}{EB} = \frac{5}{2} \text{ ή } EB = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$