

Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 1/6

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Ο πίνακας των τριγωνομετρικών σελ.56

Ασκήσεις

A1/58,A2/58,B1/59,B3/59

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 2/6

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $[0^\circ, 360^\circ]$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360° και αρνητικών γωνιών

Τύποι σελ. 52

Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

750° , 1860° , -300° .

Ασκήσεις

A6/58

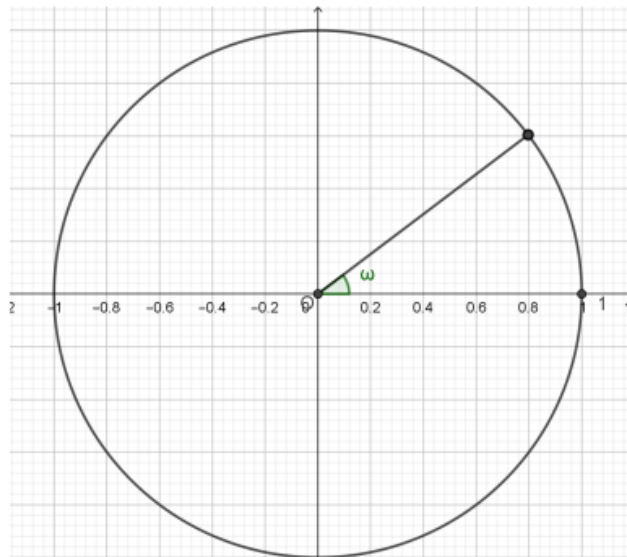
3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 3/6

Τριγωνομετρικός κύκλος

$-1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$ $-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$

Bank 15193

1. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.



α. με τη βοήθεια του σχήματος να υπολογίσετε το $\text{συν}\omega$.

β. να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0,2\pi]$ που έχουν συνημίτονο ίσο με $-0,8$.

γ. ποια η σχέση των γωνιών αυτών με τη γωνία ω .

Ενδεικτική δραστηριότητα 1 :

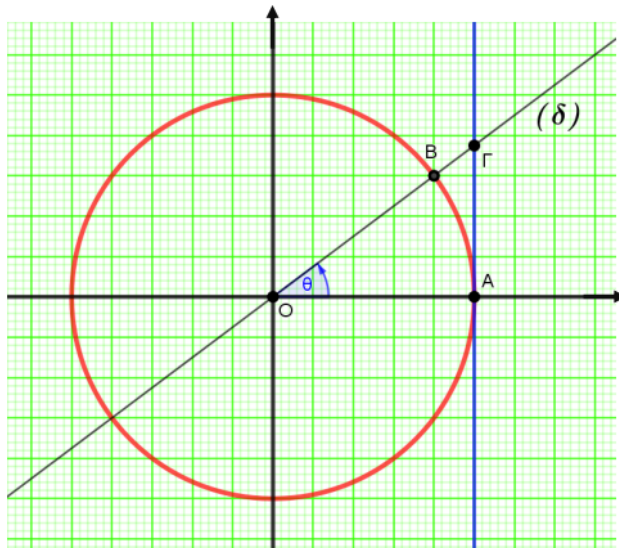
α) Δίνεται γωνία, με $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$.

Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = -\frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Ο άξονας των εφαπτομένων

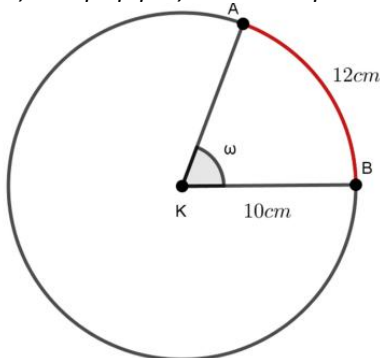
Ο κύκλος που ακολουθεί είναι τριγωνομετρικός. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.



3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 4/6

Το ακτίνο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10 cm. Επίσης δίνεται το τόξο \widehat{AB} με μήκος 12 cm και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .



Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω σε rad και να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω είναι οξεία.

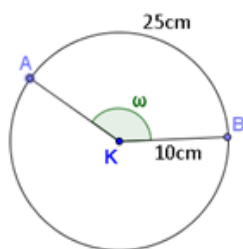
Ενδεικτική δραστηριότητα :

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο Κ και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο AB με μήκος 25

cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α) Να βρείτε το μέτρο της ω σε rad.

β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας ω είναι αρνητικό.



Ασκήσεις:

A4/58, A5/58

3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες1/3

Αποδείξεις : 1,2, 3 όχι 4

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{1}{4}$ και $\sigma\upsilon\upsilon\omega = \frac{3}{4}$;

β) Υπάρχει γωνία ω με $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\upsilon\omega = -\frac{4}{5}$;

Αν όχι, αιτιολογήστε. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ 0° και 360° υπάρχουν;

3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες2/3

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1/62

Ασκήσεις:

A1,A2,A4,A5,A6/63

3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες3/3

Εφαρμογή 2 /62

Ασκήσεις:

A10/63, A11/64

3.3 Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο1/3

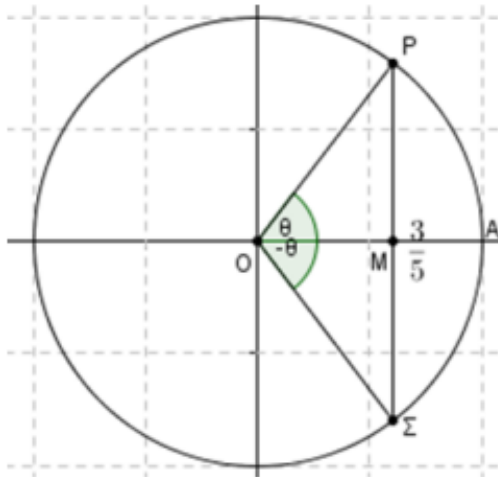
Συμπλήρωση του κύκλου

3.3 Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο2/3

A1,A2,A3,A4,A5,A6

3.3 Αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο3/3

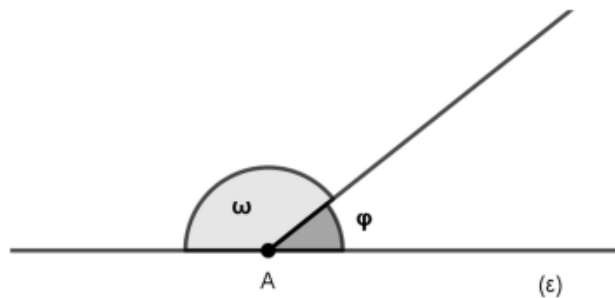
1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.



Να δικαιολογήσετε γιατί $\sin\theta = \frac{3}{5}$ και $\sin(-\theta) = -\frac{3}{5}$.

Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών θ και $-\theta$.

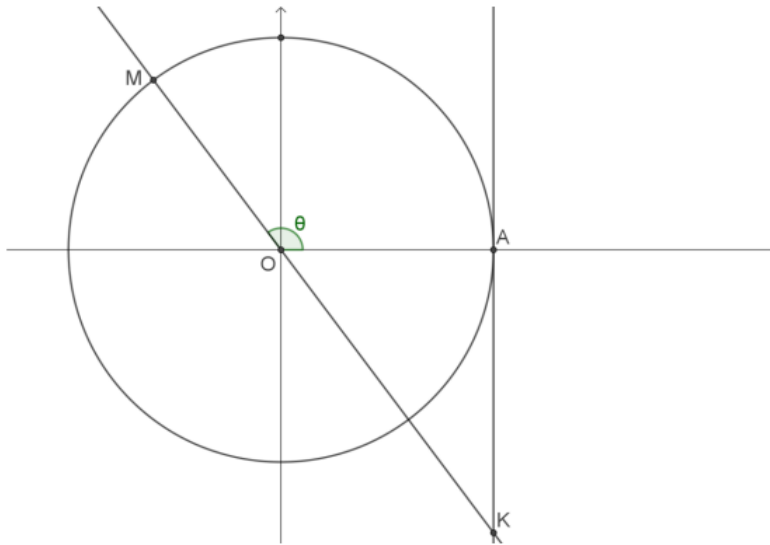
2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ότι $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$.



Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της φ .

Να υπολογίσετε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

3. Στο παρακάτω σχήμα $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.



4. και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu(x)$

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 1/5

Γενικά για περιοδικές συναρτήσεις
Ειδικότερα $\eta\mu$ $\sigma\upsilon\nu$ $\epsilon\phi$ $\sigma\phi$

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 2/5

Η συνάρτηση $\eta\mu$
Η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu$
Παράδειγμα 1.

Ασκήσεις :
A1/81 A2/81

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 3/5

Η συνάρτηση $\epsilon\phi$
Παράδειγμα 2, Παράδειγμα 3

Ασκήσεις :
A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 4/5

Η $f(x) = \sin x$ είναι άρτια ή περιττή.

Η $g(x) = \sin^2 x + 2\sin x + 1$ είναι άρτια ή περιττή.

Να βρεις ακρότατα και περίοδο στις παρακάτω συναρτήσεις:

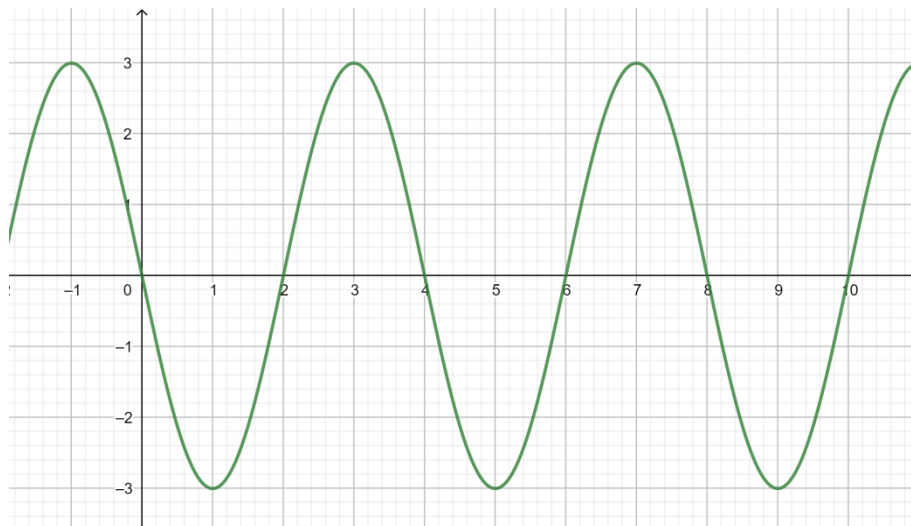
$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x, f(x) = -3\sin 2x, f(x) = -3\sin x, f(x) = \sqrt{2}\sin x$$

$$, f(x) = 2\eta\mu x + 1, h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right), h(t) = 2\eta\mu\left(\frac{\pi t}{4}\right) + 13, h(t) = -8\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right) + 4$$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \sin(\omega x)$. Να βρεθούν οι τιμές των ρ και ω αν ξέρεις ότι :
 - α. για $x = 0$ έχει την μέγιστη τιμή της και είναι ίση με 3, καθώς και η περίοδος είναι π .
 - β. για $x = 0$ έχει την ελάχιστη τιμή της και είναι ίση με -5, καθώς και η περίοδος είναι 12π .
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$. Να βρεθούν οι τιμές των ρ και ω αν ξέρεις ότι έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:

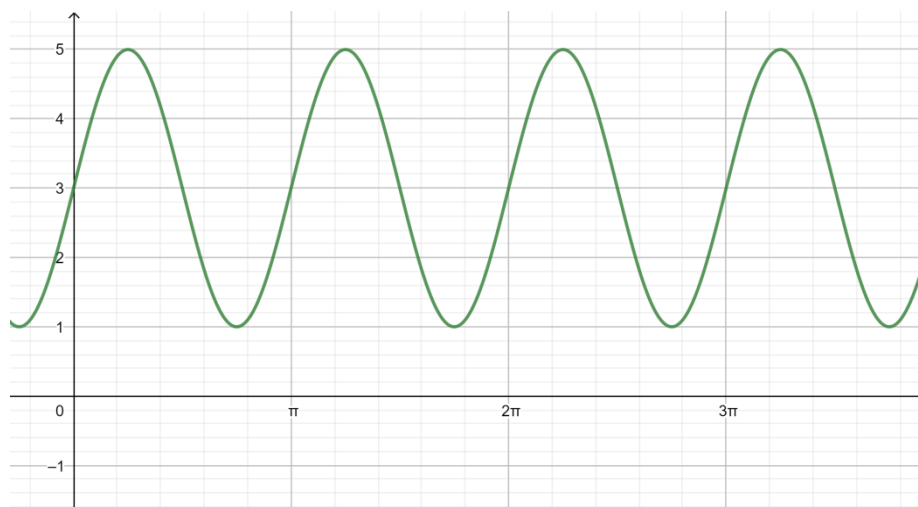


3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$. Να βρεθούν οι τιμές των ρ και ω αν ξέρεις ότι έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + \kappa$.

Να βρεθούν οι τιμές των ρ και ω και κ , αν ξέρεις ότι έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



B1/82

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 5/5

B2,B3,B4/83

3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις 1/5

Βασικές

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

που ικανοποιεί τις σχέσεις:

α) Δίνεται γωνία ω (σε rad), με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ και

$\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0 \leq \varphi < 2\pi$ που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

γ) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ με $x \in \mathbb{R}$.

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 2/5

Τύποι $\eta\mu$, $\sigma\upsilon\nu$, $\epsilon\varphi$, $\sigma\varphi$

Παράδειγμα 1/84

Παράδειγμα 1,2/86

Παράδειγμα 1,2/87

Ασκήσεις:

A1,A2,A3,A4/88

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 3/5

Ασκήσεις:
A5,A6,A7,A8,A9/88

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 4/5

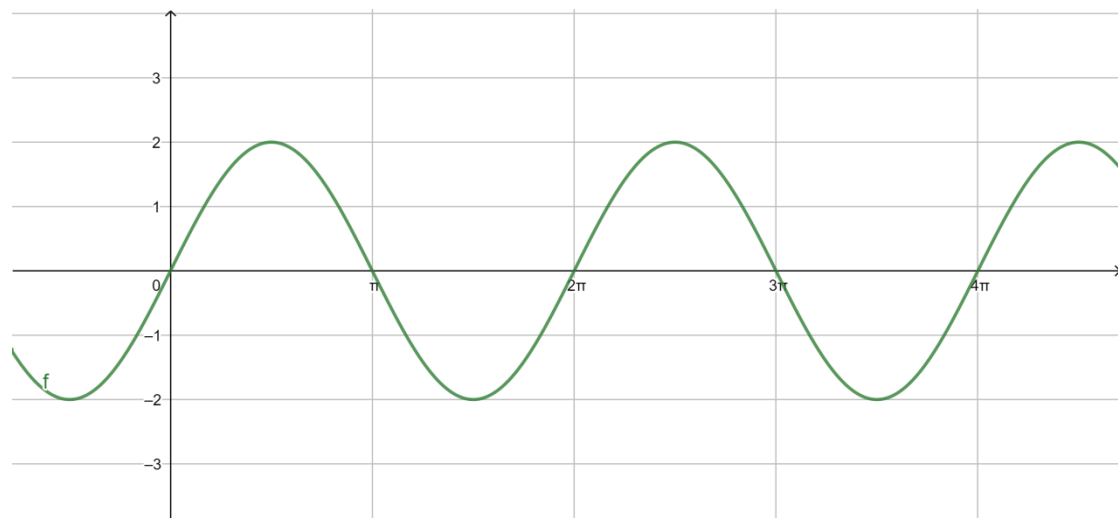
Ασκήσεις:
A10,A11,A12,A13/88,89

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 5/5

Ασκήσεις :
B1,B2,B3,B4/89

Γενικά quiz

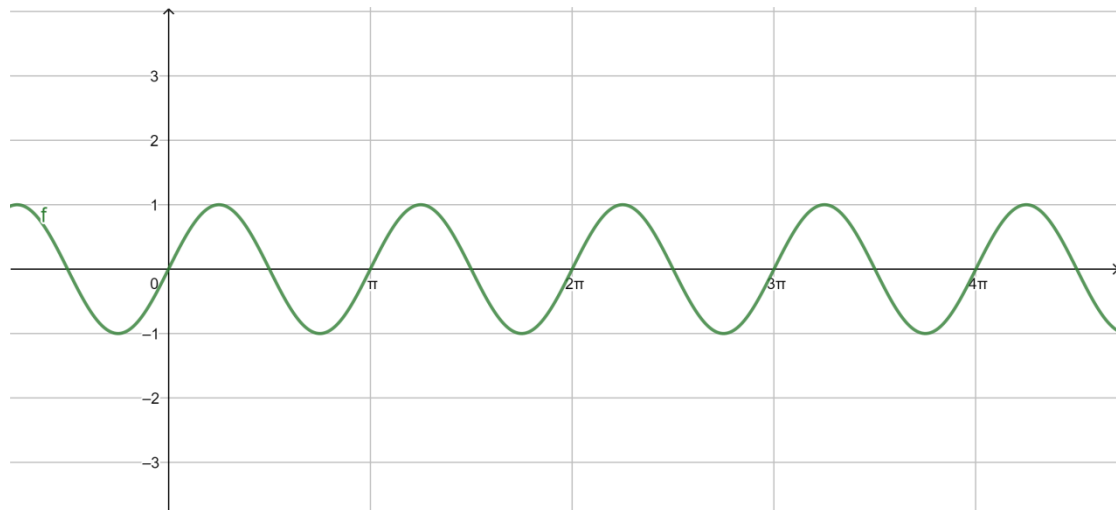
1.



Η συνάρτηση του σχήματος έχει :

Μέγιστη τιμή το :	1	2	-1	-2
Ελάχιστη τιμή το:	1	2	-1	-2
Η περίοδος της είναι:	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	4π
Η συνάρτηση έχει τύπο :	$f(x) = 2\eta\mu(x)$	$f(x) = -2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = 2\eta\mu(2x)$

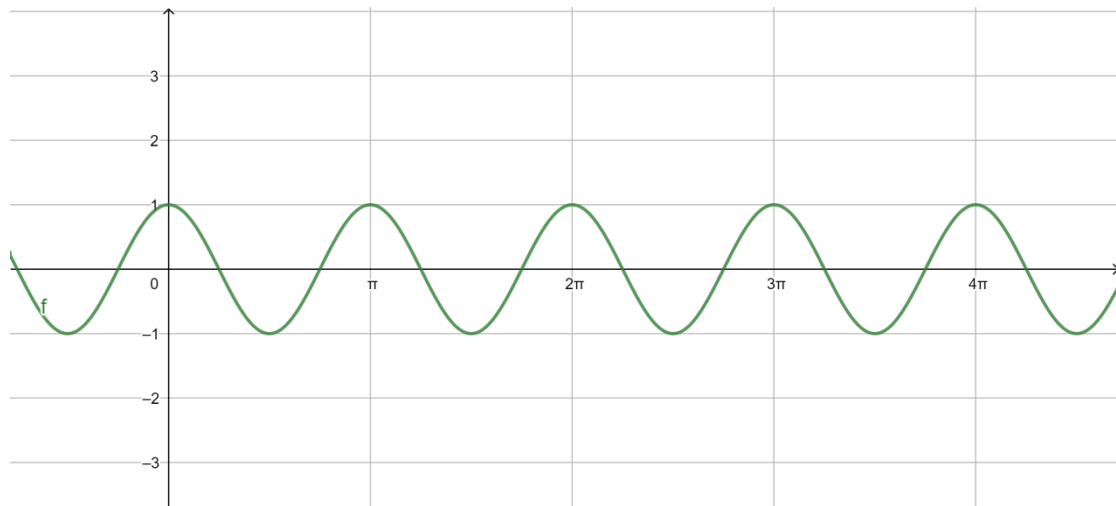
2.



Η συνάρτηση του σχήματος έχει :

Μέγιστη τιμή το :	1	2	-1	-2
Ελάχιστη τιμή το:	1	2	-1	-2
Η περίοδος της είναι:	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	4π
Η συνάρτηση έχει τύπο :	$f(x) = \eta\mu(x)$	$f(x) = -\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = \eta\mu(2x)$

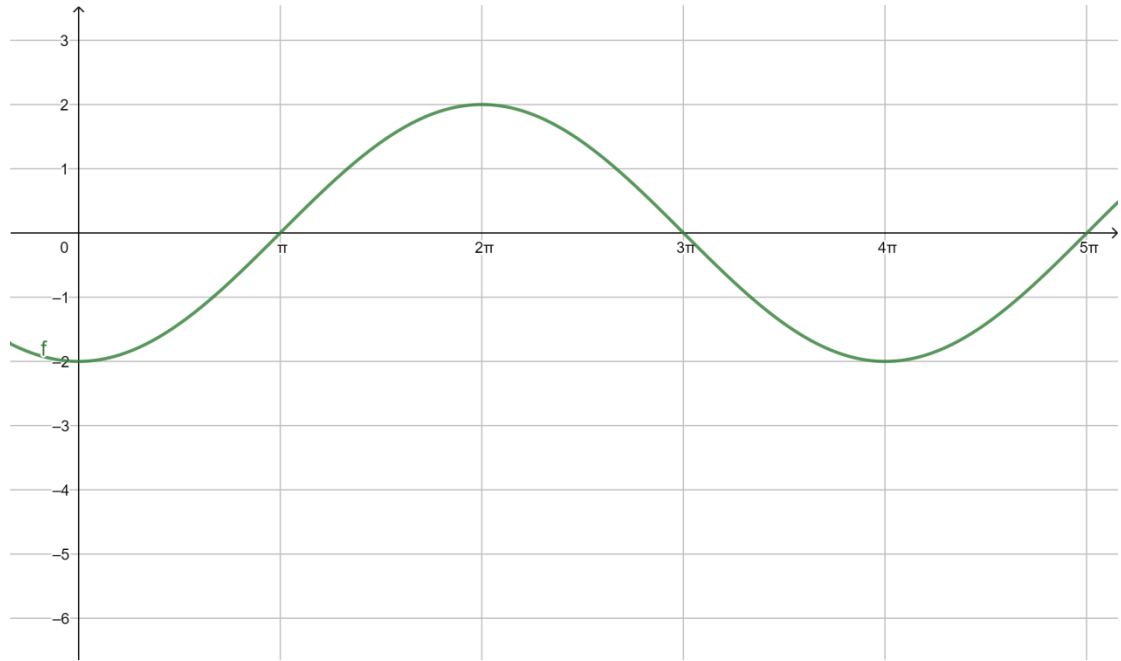
3.



Η συνάρτηση του σχήματος έχει :

Μέγιστη τιμή το :	1	2	-1	-2
Ελάχιστη τιμή το:	1	2	-1	-2
Η περίοδος της είναι:	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	4π
Η συνάρτηση έχει τύπο :	$f(x) = \text{συν}(x)$	$f(x) = -\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = \text{συν}\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = \text{συν}(2x)$

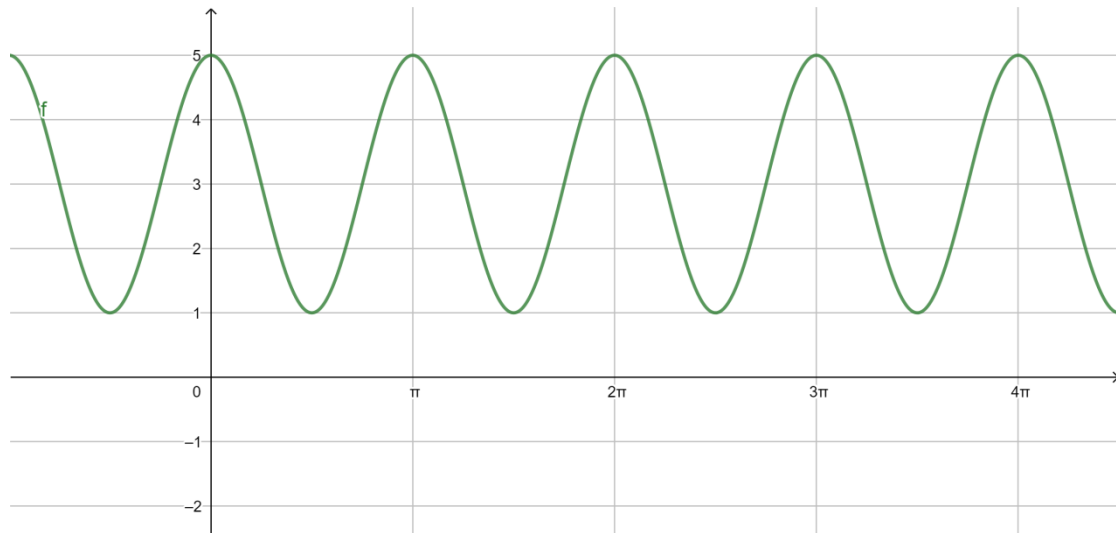
4.



Η συνάρτηση του σχήματος έχει :

Μέγιστη τιμή το :	1	2	-1	-2
Ελάχιστη τιμή το:	1	2	-1	-2
Η περίοδος της είναι:	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	4π
Η συνάρτηση έχει τύπο :	$f(x) = \sigma\upsilon\upsilon\upsilon(x)$	$f(x) = -\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = -2\sigma\upsilon\upsilon\upsilon\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = -2\sigma\upsilon\upsilon\upsilon(2x)$

5.



Η συνάρτηση του σχήματος έχει :

Μέγιστη τιμή το :	1	5	-5	3
Ελάχιστη τιμή το:	1	5	-5	3
Η περίοδος της είναι:	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	4π
Η συνάρτηση έχει τύπο :	$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(2x)$	$f(x) = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)$	$f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(2x) + 3$	$f(x) = 5\sigma\upsilon\nu(2x)$