

1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες 1/5

Βασική αρχή της απαρίθμησης σελίδα 35

1. Θέλουμε να φτιάξουμε συμβολοσειρές που να αποτελούνται από 3 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Το πρώτο και το τρίτο πρέπει να είναι φωνήεν, ενώ το δεύτερο πρέπει να είναι σύμφωνο. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα δύο φορές. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούμε να φτιάξουμε;
2. Δήμητρα πήγε να αγοράσει αυτοκίνητο και έχει καταλήξει σε δύο διαφορετικά μοντέλα μιας μάρκας. Το κάθε μοντέλο διατίθεται με 3 διαφορετικούς κινητήρες και 5 διαφορετικά χρώματα. Πόσες επιλογές έχει;
3. Οι πινακίδες των αυτοκινήτων στην Καβάλα σχηματίζονται με τρία γράμματα και 4 αριθμούς.
Το πρώτο γράμμα είναι Κ, το δεύτερο γράμμα μπορεί να είναι ένα από τα {B,Z,M,N,P,T,X} και το τρίτο γράμμα μπορεί να είναι οποιοδήποτε φωνήεν. Ο αριθμός τώρα μπορεί να είναι οποιοσδήποτε 4ψήφιος (το πρώτο του ψηφίο δεν μπορεί να είναι 0).
Α. Πόσες διαφορετικές πινακίδες αυτοκινήτων μπορούν να σχηματιστούν με αυτόν τον τρόπο;

							Σύνολο

- Β. Σε ένα τροχαίο ενεπλάκη ένα αυτοκίνητο με αριθμό κυκλοφορίας που ήταν από την Καβάλα και τα δύο τελευταία του ψηφία ήταν 5 και 2. Πόσα αυτοκίνητα έχουν πινακίδα που ικανοποιεί αυτά τα κριτήρια;

							Σύνολο

- Γ. Ένας αυτόπτης μάρτυρας που εμφανίστηκε τελευταία στιγμή έδωσε την πληροφορία ότι τα γράμματα της πινακίδας ήταν ΚΒΑ. Στα πόσα αυτοκίνητα περιορίστηκε η έρευνα της αστυνομίας;

							Σύνολο

- Δ. Αν η αστυνομία κάνει προλαβαίνει να ελέγξει 40 αυτοκίνητα τη μέρα, σε πόσες μέρες το αργότερο θα βρουν τον ένοχο;

4. Μια παρέα παίζει Scrabble. Μέσα στο σακουλάκι υπάρχουν λίγα γράμματα: {A, A, A, Δ, Η, Κ, Κ, Κ, Κ, Μ}. Η Μαίρη θα πάρει 3 γράμματα.

i. Πόσες τριάδες μπορούν να σχηματιστούν;

--	--	--

ii. Αν θέλει τα γράμματα A, Κ και Η για να κερδίσει, ποια η πιθανότητα να το καταφέρει;

--	--	--

Ασκήσεις A1/39 και A4/40 και A6/40

1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες 2/5

Ασκήσεις στην συνδυαστική (Διατάξεις - Μεταθέσεις)

Διατάξεις με επανάληψη (Διάταξη n ανά k)

1. Θέλουμε να φτιάξουμε συμβολοσειρές που να αποτελούνται από 4 γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορούμε να φτιάξουμε;
2. Ένας καθηγητής ζητάει από τους 10 μαθητές του να γράψουν σε ένα χαρτί την ημέρα της γέννησής τους. Πόσες πιθανές 10άδες μπορεί να σχηματιστούν;
3. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορώ να σχηματίσω με τους αριθμούς $\{1,3,5,7\}$ χρησιμοποιώντας το κάθε ψηφίο όσες φορές θέλουμε;

n παραγοντικό $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Υπολόγισε το $3!$

Υπολόγισε το $5!$

Διατάξεις: $\Delta_k^n = (n)_k = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Υπολόγισε τις διατάξεις 5 ανά 2 χωρίς επανατοποθέτηση: $(5)_2$

Υπολόγισε τις διατάξεις 4 ανά 3 χωρίς επανατοποθέτηση: $(4)_3$

Υπολόγισε τις διατάξεις 10 ανά 8 χωρίς επανατοποθέτηση: $(10)_8$

1. Έχουμε τα γράμματα $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ μέσα σε ένα αδιαφανές σακουλάκι.
 1. Βγάζουμε τυχαία ένα από αυτά το καταγράφουμε και το ξαναβάζουμε μέσα στο σακουλάκι (κάνουμε επανατοποθέτηση) στη συνέχεια βγάζουμε ένα ακόμη. Πόσες είναι όλες οι δυάδες γραμμάτων που μπορούμε να βγάλουμε.

Υπολόγισε τις διατάξεις 4 ανά 2 με επανατοποθέτηση:

2. Βγάζουμε τυχαία ένα από αυτά το καταγράφουμε και δεν το ξαναβάζουμε μέσα στο σακουλάκι (χωρίς επανατοποθέτηση) στη συνέχεια βγάζουμε ένα ακόμη. Πόσες είναι όλες οι δυάδες γραμμάτων που μπορούμε να βγάλουμε.

Υπολόγισε τις διατάξεις 4 ανά 2 χωρίς επανατοποθέτηση: $(4)_2$

Διατάξεις χωρίς επανάληψη (Διάταξη n ανά k χωρίς επανάληψη)

1. Έχουμε τα γράμματα $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ μέσα σε ένα αδιαφανές σακουλάκι.

α. Βγάζουμε τυχαία ένα γράμμα από το σακουλάκι και το καταγράφουμε. Στη συνέχεια βγάζουμε ένα ακόμη και το καταγράφουμε. Πόσες είναι οι διαφορετικές 2-άδες που μπορούμε να σχηματίσουμε;

Υπολόγισε τις διατάξεις 4 ανά 2 χωρίς επανατοποθέτηση : $(4)_2$

β. Κάνουμε το ίδιο πείραμα (χωρίς επανατοποθέτηση) βγάζοντας 3 γράμματα. Πόσες είναι οι διαφορετικές 3άδες που μπορούμε να σχηματίσουμε;

Υπολόγισε τις διατάξεις 4 ανά 3 χωρίς επανατοποθέτηση : $(4)_3$

2. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορώ να σχηματίσω με τους αριθμούς $\{1, 3, 5, 7\}$ χρησιμοποιώντας το κάθε ψηφίο μία φορά;

Υπολόγισε τις διατάξεις 4 ανά 3 χωρίς επανατοποθέτηση : $(4)_3$

3. Ετοιμάζεται μια διαστημική αποστολή η οποία θα απαρτίζεται από 2 άτομα, τον κυβερνήτη και τον συγκυβερνήτη. Μετά από πολλές δύσκολες δοκιμασίες επιλέχθηκαν 9 άτομα που ικανοποιούν όλα τα κριτήρια. Πόσες διαφορετικές συνθέσεις πληρώματος μπορούν να δημιουργηθούν;



Υπολόγισε το 9 ανά 2 $(9)_2 = \frac{9!}{(9-2)!}$

4. Έχουμε 20 άτομα και τέσσερις μόνο καρέκλες να κάτσουν. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να τους βάλω να κάτσουν;

Υπολόγισε το 20 ανά 4 $(20)_4 = \frac{20!}{(20-4)!}$

5. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή; (ή ισοδύναμα Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 4 θέσεις από 6, όταν μας ενδιαφέρει η σειρά που θα τις επιλέξουμε;)



Υπολόγισε το 6 ανά 4 $(6)_4 = \frac{6!}{(6-4)!}$

1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες 3/5

Μεταθέσεις n παραγοντικό $n!$

1. Σε ένα συνέδριο μαθηματικών υπάρχουν 5 επίσημοι προσκεκλημένοι. Αυτοί θα μιλήσουν με κάποια σειρά. Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά;

Υπολόγισε το $5!$

2. Έχουμε σε ένα τραπέζι με 8 καλεσμένους. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τους βάλουμε να κάτσουν;

Υπολόγισε το $8!$

3. Τρεις συμμαθητές πηγαίνουν σινεμά, μεταξύ τους είναι ο Βησσαρίων και η Αλίκη. Ο Βησσαρίων θέλει να κάνει πρόταση στην Αλίκη να γίνουν ζευγάρι και για αυτό θέλει οπωσδήποτε να κάτσει δίπλα της.

A. Πόσοι είναι όλοι οι πιθανοί τρόποι να κάτσουν οι φίλοι στο σινεμά;



Υπολόγισε το $3!$

B. Σε πόσους από αυτούς η Αλίκη δεν θα κάτσει δίπλα στον Βησσαρίωνα.



Γ. Ποια η πιθανότητα να κάτσει ο Βησσαρίων δίπλα στην Αλίκη αν το αφήσει στην τύχη;

4. Τέσσερις συμμαθητές πηγαίνουν σινεμά, μεταξύ τους είναι ο Βησσαρίων και η Αλίκη. Ο Βησσαρίων θέλει να κάνει πρόταση στην Αλίκη να γίνουν ζευγάρι και για αυτό θέλει οπωσδήποτε να κάτσει δίπλα της.

1. Πόσοι είναι όλοι οι πιθανοί τρόποι να κάτσουν οι φίλοι στο σινεμά;



Υπολόγισε το $4!$

2. Σε πόσους από αυτούς η Αλίκη θα κάτσει δίπλα στον Βησσαρίωνα.



3. Ποια η πιθανότητα να κάτσει ο Βησσαρίων δίπλα στην Αλίκη αν το αφήσει στην τύχη;

5. Για το προεδρείο της τάξης ψηφίστηκαν 5 άτομα , ο Αλέκος , η Βιργινία , ο Γιώργος , η Δήμητρα και ο Ευτύχης.

Πρέπει να επιλέξουν 3 άτομα που θα πάρουν τις θέσεις :

Πρόεδρος, Γραμματέας Ταμίας.

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν οι τρεις από τους πέντε;

Πλήθος επιλογών για πρόεδρο	Πλήθος επιλογών για γραμματέα	Πλήθος επιλογών για ταμία	Συνολικές επιλογές

2. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί συμβούλιο που να έχει ως πρόεδρο την Βιργινία;

Πλήθος επιλογών για πρόεδρο	Πλήθος επιλογών για γραμματέα	Πλήθος επιλογών για ταμία	Συνολικές επιλογές

3. Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί η Βιργινία πρόεδρος;

1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες 4/5

Συνδυασμοί

Οι συνδυασμοί n ανά k δίνονται από τον τύπο

(δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, δεν έχουμε επανάθεση)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Υπολόγισε τα παρακάτω

Τους συνδυασμούς 5 ανά 2.

Τους συνδυασμούς 10 ανά 4.

Τους συνδυασμούς 20 ανά 3.

1. Στο παιχνίδι Λόττο επιλέγουμε 6 αριθμούς από 49 χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά με την οποία θα βγουν από την κληρωτίδα.
 - α. Πόσες είναι οι διαφορετικές 6-αδες που μπορούν να δημιουργηθούν;
 - β. Αν συμπληρώσω 1 δελτίο με μία εξάδα ποια η πιθανότητα να κερδίσω;
2. Στο παιχνίδι τζόκερ επιλέγουμε 5 αριθμούς από 45 (αντίστοιχα με το Λόττο) αλλά παράλληλα επιλέγουμε έναν αριθμό ακόμη από 20 ο οποίος είναι ο Τζόκερ.
 - α. Πόσες διαφορετικές 6-αδες μπορούν να δημιουργηθούν;
 - β. Αν συμπληρώσω 1 δελτίο με μία εξάδα ποια η πιθανότητα να κερδίσω;
3. Ποιο είναι πιθανότερο ;
Να κερδίσεις το τζόκερ αν έχεις παίξει ένα δελτίο ή να πάρεις τηλέφωνο σε έναν τηλεφωνικό αριθμό της περιφέρειας Ανατολικής Μακεδονίας και Θράκης στην τύχη και να μιλήσεις με ένα συμμαθητή σου;

Το τυπολόγιο που θα δοθεί στις εξετάσεις και στα διαγωνίσματα από το κεφάλαιο των πιθανοτήτων.

Πιθανότητες:

— $P(\Omega)=1, P(\emptyset)=0, 0 \leq P(A) \leq 1,$

— Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων:

$$P(A') = 1 - P(A),$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B),$$

Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A),$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

— Συνδυαστική:

Διατάξεις των n ανά k με επαναλήψεις: n^k

Διατάξεις των n ανά k χωρίς επαναλήψεις: $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Μεταθέσεις των n στοιχείων: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Συνδυασμοί των n ανά k : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Γενικά

Βασική αρχή της απαρίθμησης $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$

Διατάξεις: $\Delta_k^n = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Μεταθέσεις: $M_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Συνδυασμοί $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$