22132

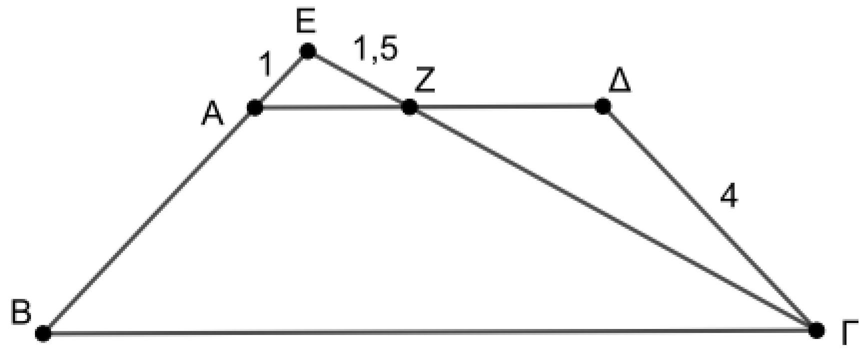
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB = \Gamma\Delta = 4$ και με βάσεις ΑΔ και ΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $EA = 1$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ζ και $EZ = 1{,}5$.

α) Να αποδείξετε ότι $Z\Gamma = 1{,}5AB$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΓ. (Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΖ του τριγώνου ΕΑΖ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Οι βάσεις ΑΔ και ΒΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες, άρα σύμφωνα με το πόρισμα του θεωρήματος του Θαλή η ΑΔ χωρίζει σε μέρη ανάλογα τις πλευρές ΕΒ και ΕΓ του τριγώνου ΕΒΓ τις οποίες τέμνει. Επομένως:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΖ} = \frac{ΑΒ}{ΖΓ}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη ΕΑ = 1 και ΕΖ = 1,5 έχουμε:

$$\frac{1}{1,5} = \frac{ΑΒ}{ΖΓ} \text{ ή } ΖΓ = 1,5 \cdot ΑΒ$$

β) Έχουμε ΑΒ = 4. Επομένως, από το α) $ΖΓ = 1,5 \cdot 4 = 6$.

γ) Η ΑΖ είναι παράλληλη στην ΒΓ, γιατί το Ζ είναι σημείο της βάσης ΑΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από εφαρμογή του θεωρήματος του Θαλή το τρίγωνο ΕΒΓ που ορίζεται από τις προεκτάσεις των πλευρών ΕΑ και ΕΖ του τριγώνου ΕΑΖ και την παράλληλη ΒΓ στην ΑΖ έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του ΕΑΖ, άρα:

$$\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΕΖ}{ΕΓ} = \frac{ΑΖ}{ΒΓ}$$

Όμως ΕΒ = ΕΑ + ΑΒ = 1 + 4 = 5 και ΒΓ = 10. Αντικαθιστώντας στη σχέση $\frac{ΕΑ}{ΕΒ} = \frac{ΑΖ}{ΒΓ}$ έχουμε:

$$\frac{1}{5} = \frac{ΑΖ}{10} \text{ ή } 5 \cdot ΑΖ = 10 \text{ ή } ΑΖ = 2$$

21987

ΘΕΜΑ 2

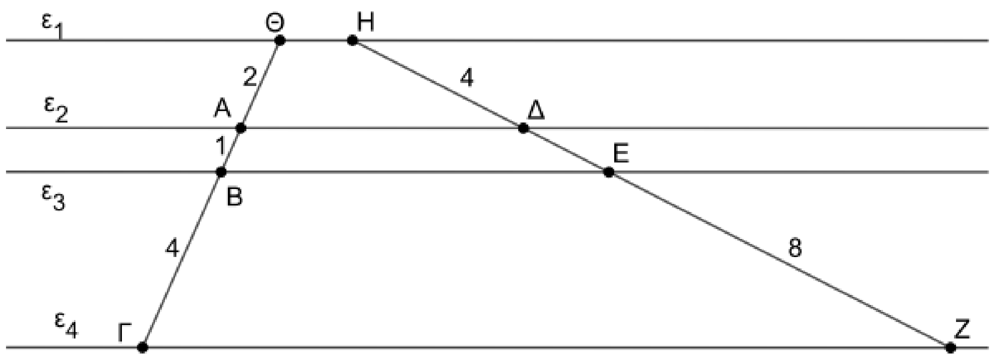
Οι ευθείες ΓΘ και ΖΗ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ στα σημεία Θ, Α, Β και Η, Δ, Ε αντίστοιχα και την ευθεία $ε_4$ στα σημεία Γ και Ζ όπως στο παρακάτω σχήμα.

Επίσης δίνονται τα μήκη $ΘA = 2$, $AB = 1$, $BΓ = HΔ = 4$ και $EZ = 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $ΔE = 2$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $ε_4$ είναι παράλληλη στις ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$. (Μονάδες 05)

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει την ευθεία $ε_2$ στο Κ και την ευθεία $ε_3$ στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{ΛZ}{KΛ}$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$ και $ε_3$ τέμνουν τις ευθείες ΓΘ και ΖΗ, σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{ΘΑ}{ΗΔ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά μήκη έχουμε:

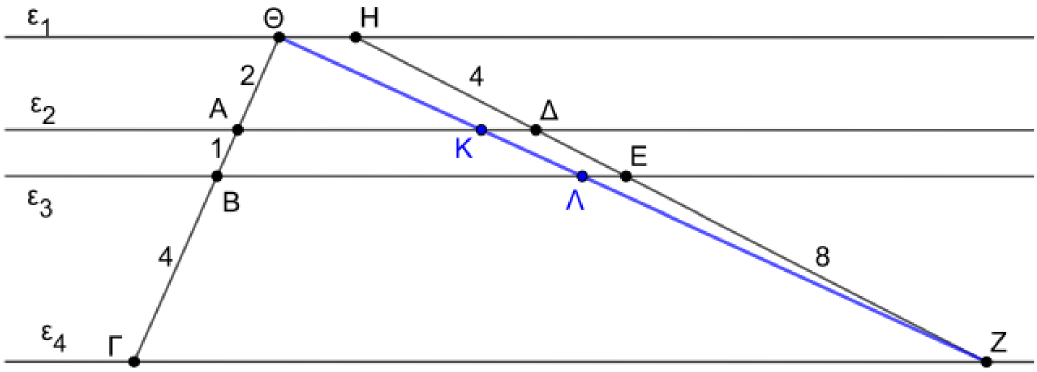
$$\frac{2}{4}=\frac{1}{ΔΕ} \text{ ή } \frac{ΔΕ}{1}=\frac{4}{2} \text{ ή } ΔΕ=2$$

β) Οι ευθείες ΘΓ και ΗΖ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες $ε_2$ και $ε_3$ στα σημεία Α, Β και Δ, Ε αντίστοιχα και τα σημεία Γ και Ζ είναι σημεία των ευθειών ΘΓ και ΗΖ αντίστοιχα, ώστε $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{1}{4}$ και $\frac{ΔΕ}{ΕΖ}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Άρα $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{ΔΕ}{ΕΖ}$. Σύμφωνα με το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή η ευθεία ΓΖ ή $ε_4$ είναι παράλληλη προς τις ευθείες $ε_2$ και $ε_3$, άρα και προς την $ε_1$.

γ) Σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει τις $ε_2$ και $ε_3$ στα Κ και Λ αντίστοιχα. Σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή, εφόσον οι ευθείες $ε_2$, $ε_3$ και $ε_4$ τέμνουν τις ευθείες ΘΓ και ΘΖ ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. Επομένως:

$$\frac{ΑΒ}{ΚΛ}=\frac{ΒΓ}{ΛΖ}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε $\frac{1}{ΚΛ}=\frac{4}{ΛΖ}$ ή $\frac{ΛΖ}{ΚΛ}=4$.

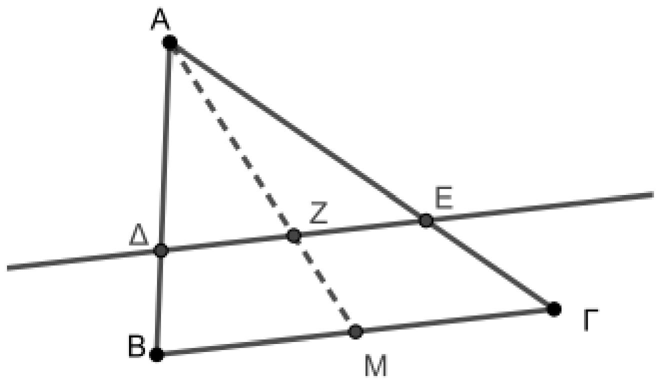


14534

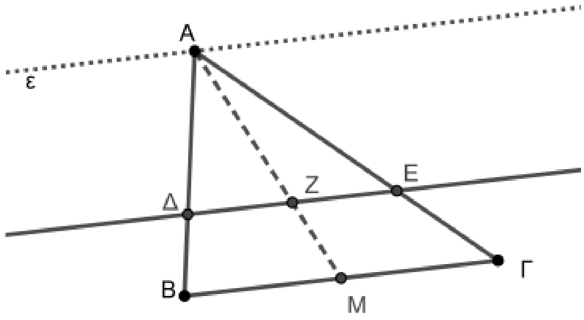
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6 και ΑΓ=9. ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο Ζ εσωτερικό στην ΑΜ ώστε να σχηματίζει λόγο $\frac{ΑΖ}{ΑΜ} = \frac{2}{3}$. Από το σημείο Ζ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = 2$. (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΕΓ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Θεωρούμε υποθετική ευθεία ε από το σημείο Α παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ. Τότε ε//ΔΕ//ΒΓ και οι ΑΒ, ΑΜ είναι τέμνουσες των ευθειών αυτών. Από το Θεώρημα του Θαλή έχουμε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΖ}{ΑΜ}$, οπότε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ (1). Από το θεώρημα του Θαλή για τις τέμνουσες ΑΜ και ΑΓ έχουμε ότι $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΖ}{ΑΜ} = \frac{2}{3}$ (2). Από ιδιότητες αναλογιών $\frac{ΑΕ}{ΑΓ-ΑΕ} = \frac{2}{3-2}$, δηλαδή $\frac{ΑΕ}{ΕΓ} = 2$.

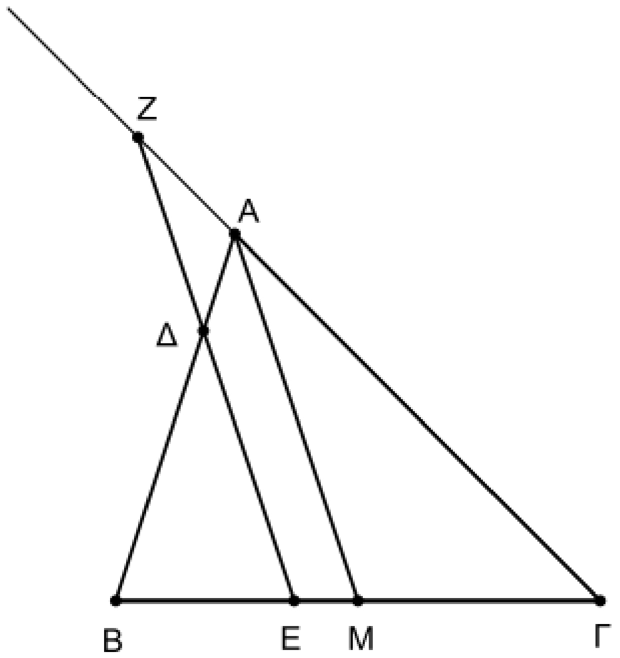
β) Από τη σχέση (1) του ερωτήματος α) έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{2}{3}$ ή $ΑΔ = \frac{2}{3} \cdot ΑΒ = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Αντίστοιχα από τη σχέση (2) έχουμε $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{2}{3}$ ή $ΑΕ = \frac{2}{3} \cdot ΑΓ = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$. Οπότε, ΕΓ = ΑΓ – ΑΕ = = 9 – 6 = 3.

14499

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



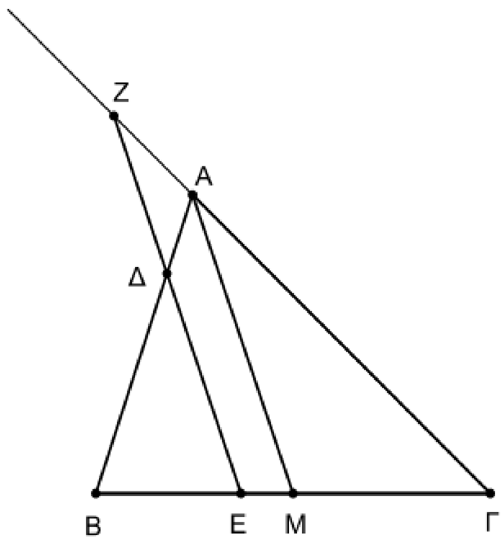
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i. $\frac{\text{ΔΕ}}{\cdots} = \frac{\cdots}{\text{ΒΜ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\cdots}$

ii. $\frac{\cdots}{\text{ΑΜ}} = \frac{\text{ΓΕ}}{\cdots} = \frac{\cdots}{\text{ΓΑ}}$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι ΔΕ + ΕΖ = 2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ. (Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ



α)

i. Οι πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΕΔ ανήκουν στις πλευρές ΒΜ και ΒΑ αντίστοιχα, του τριγώνου ΒΜΑ και επιπλέον η τρίτη του πλευρά ΔΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά ΑΜ του τριγώνου ΒΜΑ. Οπότε οι πλευρές του τριγώνου ΒΕΔ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΒΜΑ.

   Δηλαδή ισχύει: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{B\Delta}{BA}$ (1).

ii. Ομοίως οι πλευρές ΓΖ και ΓΕ του τριγώνου ΓΖΕ βρίσκονται στους φορείς των πλευρών ΓΑ και ΓΜ του τριγώνου ΓΑΜ και οι τρίτες τους πλευρές ΕΖ και ΑΜ είναι παράλληλες. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει: $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M}$. Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τα τμήματα ΒΜ και ΓΜ είναι ίσα, οπότε οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{BM}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$\frac{\Delta E}{AM} + \frac{EZ}{AM} = \frac{BE}{BM} + \frac{\Gamma E}{BM}$ ή $\frac{\Delta E + EZ}{AM} = \frac{BE + \Gamma E}{BM}$, δηλαδή $\frac{\Delta E + EZ}{AM} = \frac{B\Gamma}{BM} \Leftrightarrow \frac{\Delta E + EZ}{AM} = \frac{2 \cdot BM}{BM} = 2$.

Άρα $\frac{\Delta E + EZ}{AM} = 2$ ή ΔΕ+ΕΖ=2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

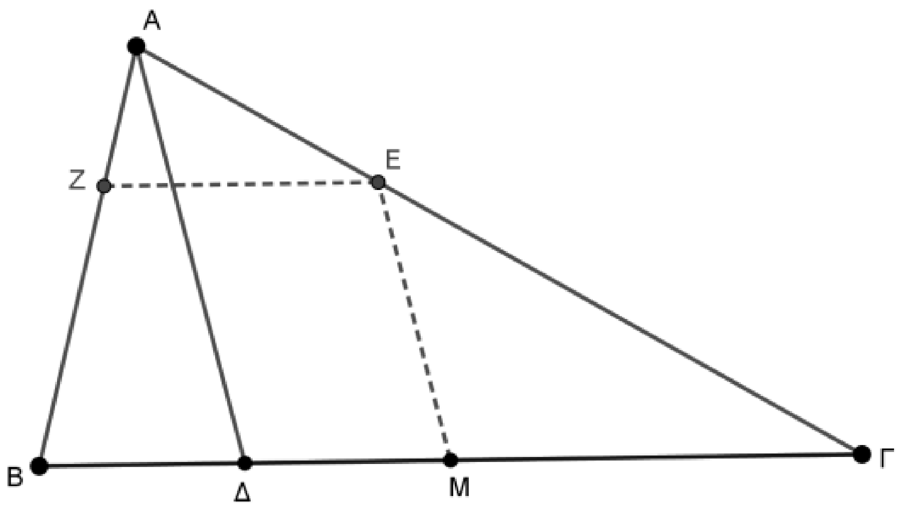
15831

ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 15)

β) $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα, το Δ να είναι το μέσο του ΒΜ και το Μ μέσο της ΒΓ.

Άρα $ΜΔ = \frac{1}{2} ΜΒ = \frac{1}{2} ΜΓ$ (1).

Επίσης η ΜΕ // ΑΔ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{ΜΔ}{ΜΓ}$.

Η τελευταία ισότητα λόγω της (1) γράφεται: $\frac{ΕΑ}{ΕΓ} = \frac{\frac{1}{2}ΜΓ}{ΜΓ} = \frac{1}{2}$.

β) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{ΕΑ}{ΕΓ}$.

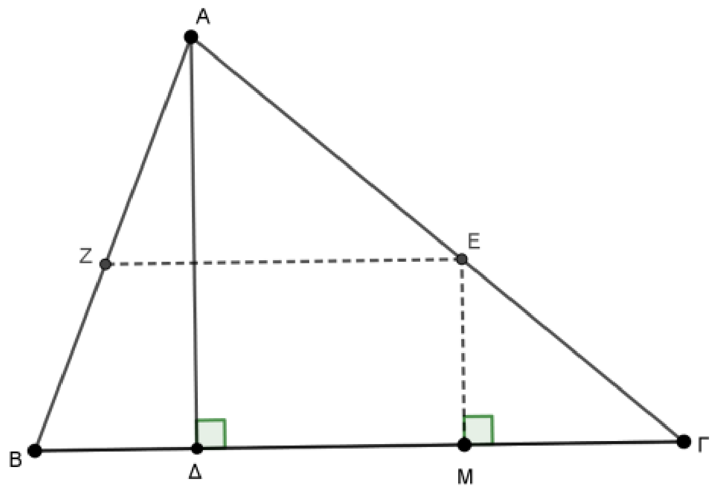
Η τελευταία ισότητα λόγω του ερωτήματος (α) δίνει: $\frac{ΖΑ}{ΖΒ} = \frac{1}{2}$.

15830

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{ZA}{ZB}=\frac{EA}{E\Gamma}$. (Μονάδες 10)

β) $\frac{ZA}{ZB}=\frac{M\Delta}{M\Gamma}$. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα η ΖΕ // ΒΓ, οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{ZA}{ZB}=\frac{EA}{E\Gamma}$.

β) Είναι ΜΕ // ΑΔ (από τα δεδομένα είναι κάθετα στην ίδια ευθεία ΒΓ),

οπότε από το Θ. Θαλή θα είναι: $\frac{M\Delta}{M\Gamma}=\frac{EA}{E\Gamma}$.

Από την τελευταία ισότητα και την ισότητα που δείξαμε στο ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι: $\frac{ZA}{ZB}=\frac{M\Delta}{M\Gamma}$.

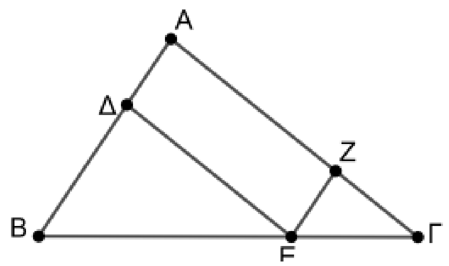
14579

ΘΕΜΑ 2

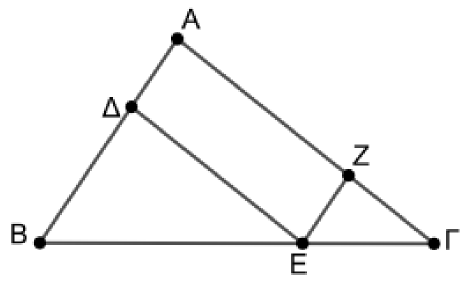
Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε και Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα, ώστε η ΔΕ να είναι παράλληλη στην ΑΓ. Επίσης ΑΒ = 3ΑΔ.

α) Να βρείτε τους λόγους $\frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΔ}}$ και $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΓ}}$. (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι ΑΓ = 3,9 και ΓΖ = 1,3 να αποδείξετε ότι η ΖΕ είναι παράλληλη της ΑΒ. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ



α) Εφόσον ΑΒ = 3ΑΔ είναι ΒΔ + ΑΔ = 3ΑΔ ή ΒΔ = 2ΑΔ. Άρα $\frac{B\Delta}{A\Delta} = 2$.

Η ευθεία ΔΕ που είναι φορέας του ΔΕ είναι παράλληλη στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, άρα χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου ΑΒ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα. Επομένως $\frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{BE}{E\Gamma}$, άρα $\frac{BE}{E\Gamma} = 2$.

β) Από το α) έχουμε ότι το σημείο Ε διαιρεί το τμήμα ΒΓ σε τμήματα με λόγο 2.

Εφόσον ΑΓ = 3,9, τότε ΑΖ + ΓΖ = 3,9. Όμως ΓΖ = 1,3, άρα ΑΖ + 1,3 = 3,9 ή ΑΖ = 2,6.

Επομένως $\frac{AZ}{\Gamma Z} = \frac{2,6}{1,3} = 2$. Άρα το σημείο Ζ διαιρεί το τμήμα ΑΓ σε τμήματα με λόγο 2.

Εφόσον η ευθεία ΖΕ χωρίζει τις πλευρές του τριγώνου ΑΓ και ΒΓ σε μέρη ανάλογα με λόγο 2, η ΖΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά του τριγώνου, την ΑΒ.