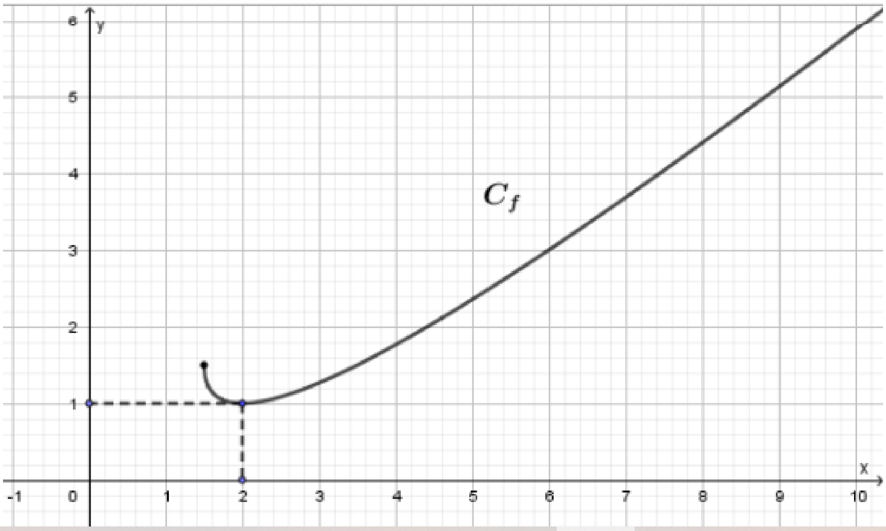
15437

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \sqrt{2x-3}$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

I. γνησίως φθίνουσα

(Μονάδες 5)

II. γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 5)

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει και αρκεί $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

β) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι:

Η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 1 και παρουσιάζεται όταν $x = 2$.

γ) Από την γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση f:

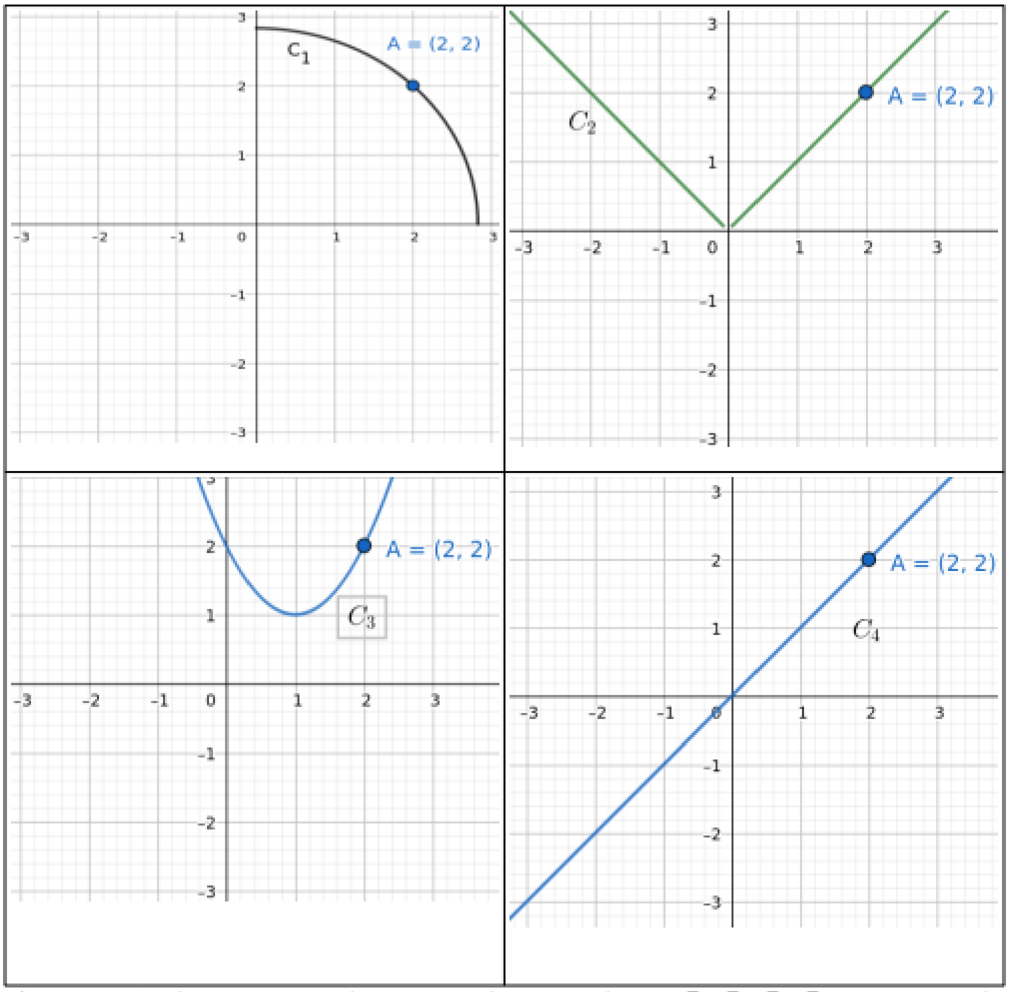
I. είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$,

II. είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$.

14976

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

(Μονάδες 12)

β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

α) Η C_1 δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης άρτιας ή περιττής, αφού ορίζεται μόνο για θετικούς αριθμούς.

Η C_2 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας άρτιας συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Η C_3 δεν μπορεί να είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση, αφού δεν μπορεί να είναι συμμετρική ούτε ως προς τον άξονα $y'y$, ούτε ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Η C_4 θα μπορούσε να αποτελεί γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης, αφού φαίνεται να έχει γραφική παράσταση συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Επομένως, εφόσον δίνεται ότι υπάρχουν μία άρτια και μία περιττή συνάρτηση, συμπεραίνουμε ότι η C_2 είναι η άρτια και C_4 είναι η περιττή.

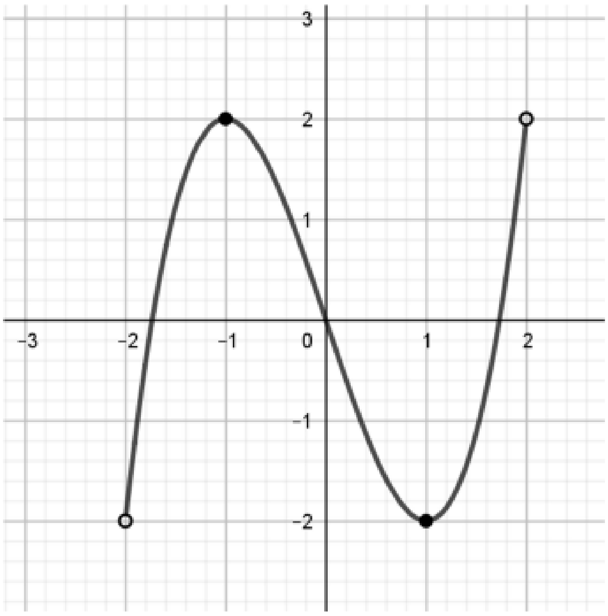
β) Αν η C_2 είναι άρτια, τότε $f(-2)=f(2)=2$, άρα $k=2$.

Αν η C_4 είναι περιττή, τότε $f(-2)=-f(2)=-2$, άρα $k=-2$.

15112

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2,2)$.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$.

β) Η συνάρτηση f για $x \in (-2,-1]$ και $x \in [1,2)$ είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Για $x=-1$ η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της $f(-1)=2$ και για $x=1$ η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της $f(1)=-2$.

15022

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3,3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου.

(Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f. Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ β. $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$ γ. $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ δ. $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Αφού $-2<-1$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ είναι $f(-2)>f(-1)$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-2)=f(2)$. Συνεπώς $f(-1)<f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, οπότε $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$, οπότε $f(-3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[0,3]$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-3)=f(3)$.

Συνεπώς $f(3)\geq f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$.

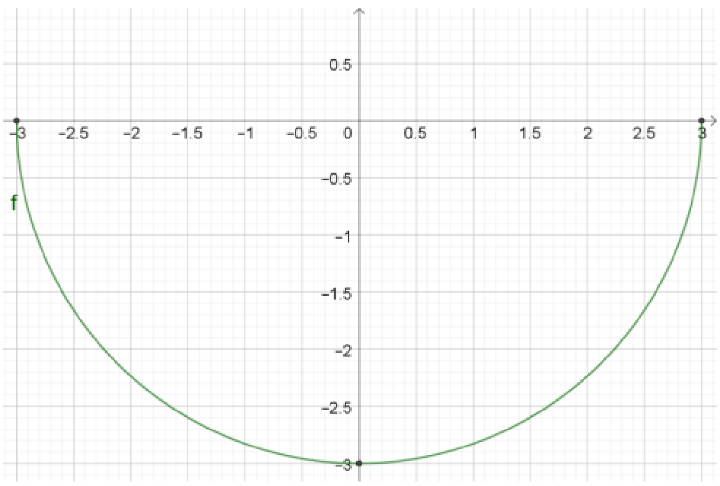
γ) Αφού $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)>f(0)$ για κάθε $x\in[-3,0)\cup(0,3]$.

Αφού $f(x)\leq f(3)$ για κάθε $x\in[-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3)=f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x)<f(3)$ για κάθε $x\in(-3,3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $[-3,3]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0)>f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=-\sqrt{9-x^2}$.



15114

ΘΕΜΑ 2

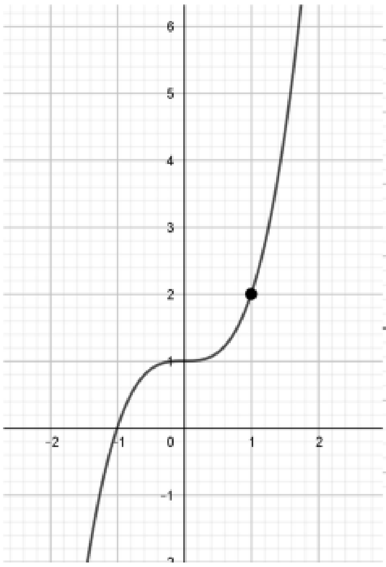
Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(1,2)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $\mathrm{B}(2,9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

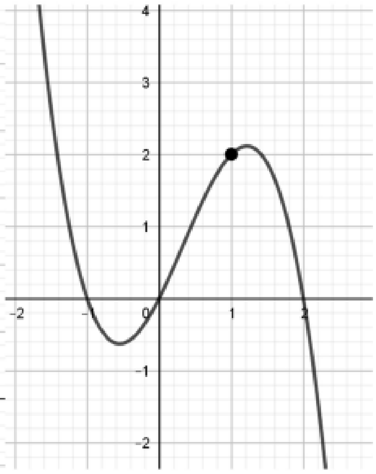
(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

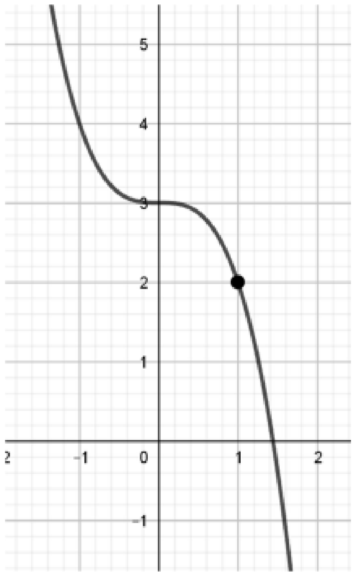
i.



ii.



iii.



ΛΥΣΗ

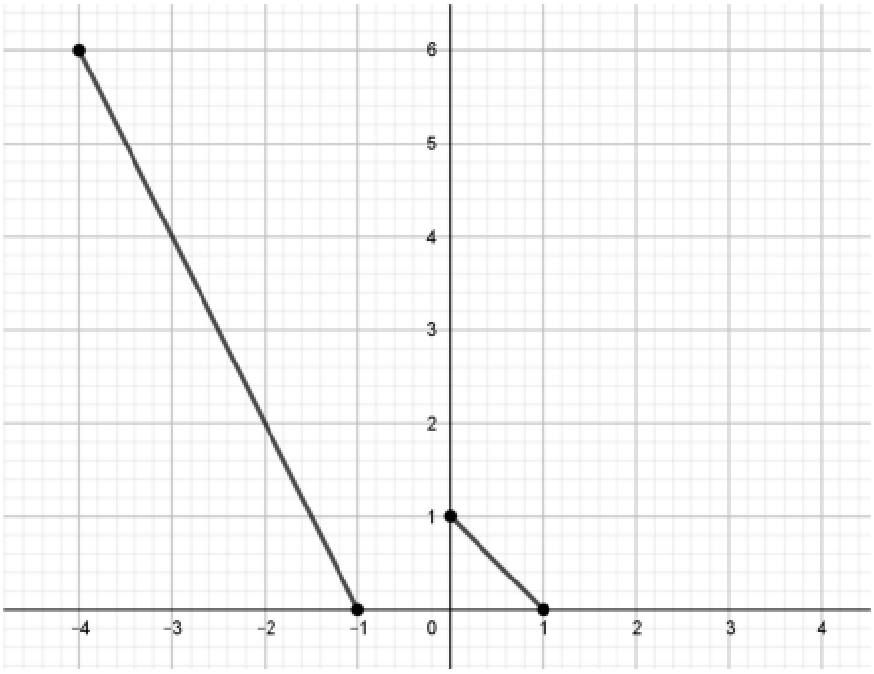
α) Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το $A(1,2)$ και θα μπορούσε να διέρχεται και από το σημείο $B(2,9)$, διότι η f έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $1<2 \Rightarrow f(1)<f(2)$, αφού $f(1)=2$ και $f(2)=9$.

β) Η γραφική παράσταση της f θα μπορούσε να είναι η i. διότι ενώ όλες διέρχονται από το σημείο $(1,2)$, η i. είναι γραφική παράσταση γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

15116

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4,4]$.



α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

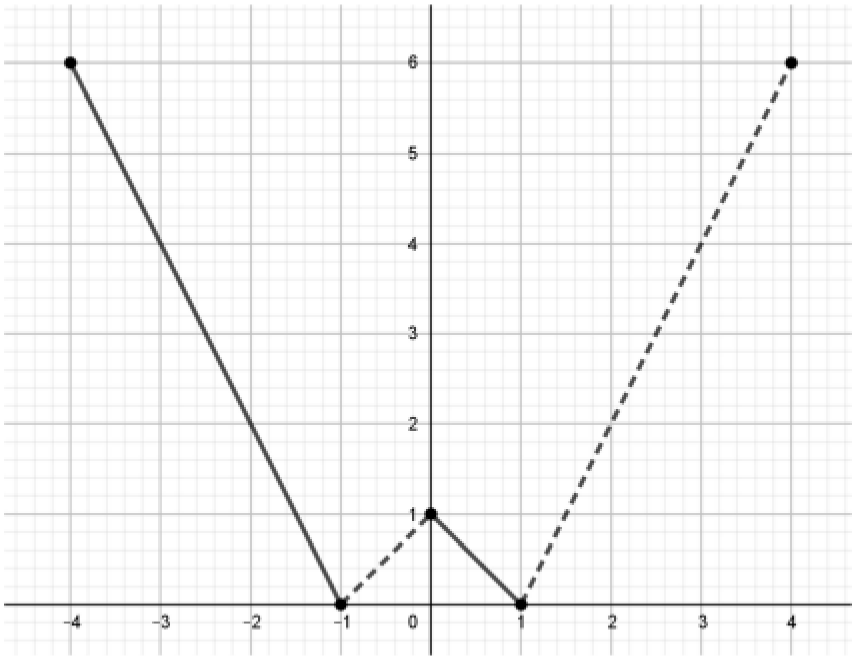
(Μονάδες 8)

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε η γραφική της παράσταση θα είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα. Στο παρακάτω σχήμα είναι χαραγμένα και τα υπόλοιπα τμήματα με διακεκομμένη γραμμή.



β)

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα είναι τα $[-4,-1]$ και $[0,1]$, γιατί στα διαστήματα αυτά όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x, μικραίνουν οι αντίστοιχες τιμές του y.

ii. Η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 6 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -4 και 4, δηλαδή

$$\max f(x) = f(-4) = f(4) = 6$$

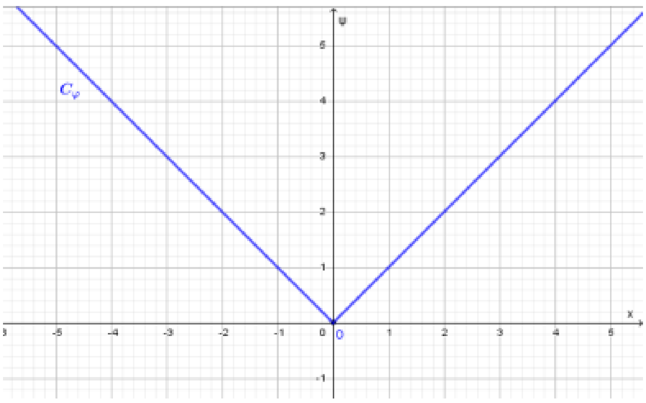
και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 0 και παρουσιάζεται όταν το x πάρει τις τιμές -1 και 1, δηλαδή

$$\min f(x) = f(-1) = f(1) = 0.$$

14972

ΘΕΜΑ 2

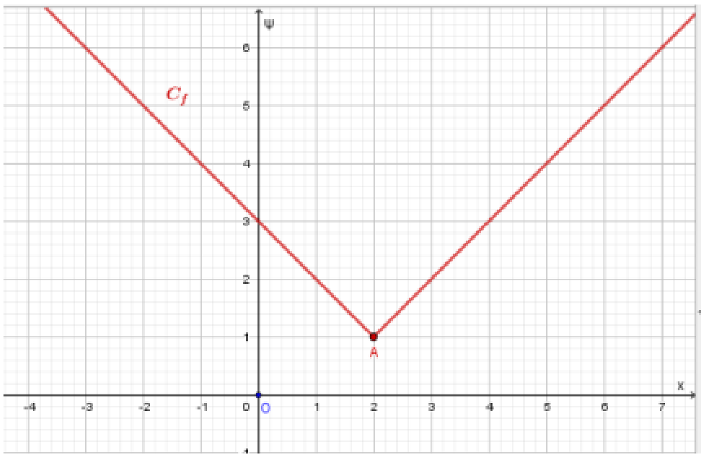
Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|,\ x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x-2|,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x-2| + 1,\ x \in \mathbb{R}$.



α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ.

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f, η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

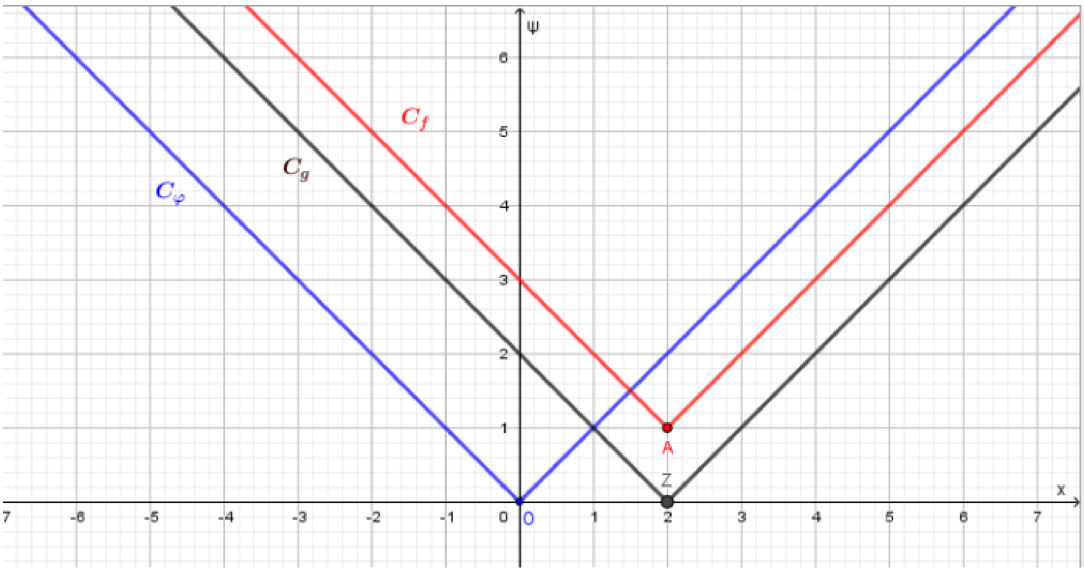
(Μονάδες 6)

ΛΥΣΗ

α) Οι γραφικές παραστάσεις των g και f προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ:

- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
- μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).

Έτσι προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις



β)

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 2$, ολικό ελάχιστο το $f(2) = 1$.

14973

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

(Μονάδες 7)

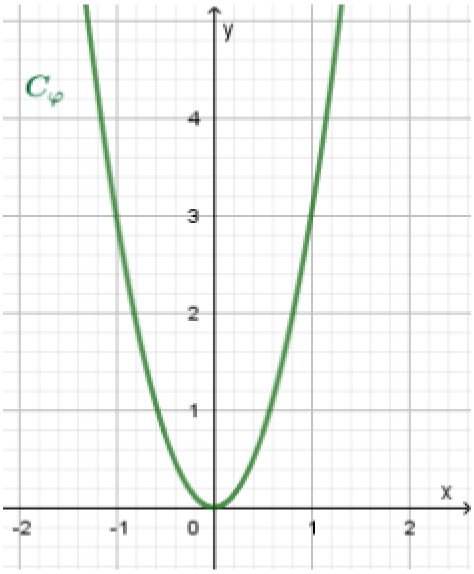
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$.

Επομένως είναι άρτια συνάρτηση.

Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω παραβολή.

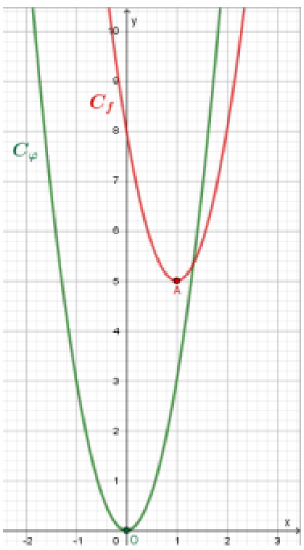


β) Είναι:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3}\right) = 3\left[(x-1)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

Επομένως $f(x) = 3(x-1)^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Έτσι, είναι:



γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$. Ως εκ τούτου,

i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x = 1$.

ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$.

iii. Είναι:

- Αν $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες
- Αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα
- Αν $\lambda < 5$ η εξίσωση είναι αδύνατη