

Τράπεζα θεμάτων συστήματα

15011

ΘΕΜΑ 2

Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

α)

i. Δίνονται οι εξισώσεις:

1. $y = 15 - x$

2. $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €.

Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3. $50y - 20x = 480$

4. $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αi) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

(Μονάδες 11)

Τράπεζα Θεμάτων συστήματα

ΛΥΣΗ

α)

i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.

ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20 € έχουν αξία $20x$ €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50 € έχουν αξία $50y$ €. Η συνολική αξία είναι 480 €, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x + 50y = 480$.

β) Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = 480 - 750 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 9 \end{cases}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x = 9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20 € και $y = 6$ τα χαρτονομίσματα των 50 €.

Τράπεζα θεμάτων συστήματα

15849

ΘΕΜΑ 2

Σε μια συνεστιάση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

$$\text{Α. } \begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

$$\text{Β. } \begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

$$\text{Γ. } \begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$$

$$\text{Δ. } \begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

(Μονάδες 15)

Τράπεζα θεμάτων συστήματα

ΛΥΣΗ

α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1).

Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2)

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ, δηλαδή $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

β) Λύνουμε το σύστημα Γ των δύο εξισώσεων (1) και (2) του πρώτου ερωτήματος.

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) προκύπτει

$12x + 6(x + 5) = 300 \Leftrightarrow 12x + 6x + 30 = 300 \Leftrightarrow 18x = 270 \Leftrightarrow x = 15$ και το y προκύπτει αν στην (1) αντικαταστήσουμε το x , δηλαδή $y = 15 + 5 = 20$.

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

Τράπεζα θεμάτων συστήματα

15006

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$.

(Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2: 5x - 10y = 3$;

(Μονάδες 12)

Λύση

α) Η ορίζουσα του συστήματος είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -10 \end{vmatrix} = 2(-10) - 5(-4) = -20 + 20 = 0.$$

Άρα, το σύστημα είναι ή αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ 5(2y - 1) - 10y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 1 \\ -5 = 3 \end{cases}.$$

Άρα, είναι αδύνατο.

β) Από το ερώτημα α), το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$ είναι αδύνατο, οπότε συμπεραίνουμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Άρα, είναι παράλληλες.

Τράπεζα θεμάτων συστήματα

15195

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): 5x - y = -1$ και $(\varepsilon_2): 3x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

ΛΥΣΗ

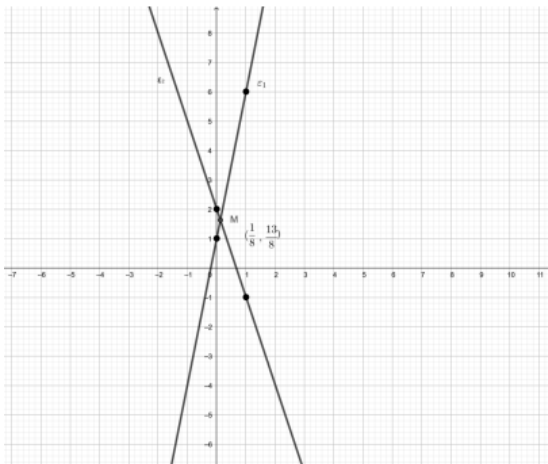
α) Είναι $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$. Έχουμε $D = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8 \neq 0$, ακόμα $D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1$ και $D_y = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13$, επομένως $x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{8}$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{13}{8}$, δηλαδή λύση είναι η $(x, y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{13}{8}\right)$.

β) Για την ευθεία $(\varepsilon_1): 5x - y = -1$ έχουμε

x	0	1
y	1	6

Για την ευθεία $(\varepsilon_2): 3x + y = 2$ έχουμε

x	0	1
y	2	-1



Οι δύο ευθείες έχουν ένα κοινό σημείο το $M\left(\frac{1}{8}, \frac{13}{8}\right)$ του οποίου οι συντεταγμένες είναι η μοναδική λύση του συστήματος του α) ερωτήματος.

Τράπεζα θεμάτων συστήματα

15016

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος $(0,4)$ δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1):3x+2y=8$ και $(\varepsilon_2):2x-y=3$.

(Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ

α) Το ζεύγος $(0,4)$ επαληθεύει μόνο την εξίσωση $3x+2y=8$ και όχι την εξίσωση $2x-y=3$, οπότε δεν αποτελεί λύση του συστήματος.

β) Από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $2x-y=3 \Leftrightarrow -y=-2x+3 \Leftrightarrow y=2x-3$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση $3x+2y=8$ έχουμε:

$$3x+2(2x-3)=8 \Leftrightarrow 3x+4x-6=8 \Leftrightarrow 7x=14 \Leftrightarrow x=2.$$

Για $x=2$ στην εξίσωση $2x-y=3$ έχουμε $y=1$.

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(2,1)$.

γ) Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ είναι η λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases}, \text{ δηλαδή το ζεύγος } (2,1).$$