§1.2: ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Μια διαφορετική προσέγγιση στα μη γραμμικά συστήματα της Άλγεβρας Β Λυκείου. Ένα σύντομο οδοιπορικό με διαφορετικές μορφές ασκήσεων και περίτεχνες λύσεις. Το φυλλάδιο δίνεται ως προέκταση του σχολικού βιβλίου και για κανένα λόγο δεν αντικαθιστά το σχολικό βιβλίο. Δείτε διαφορετικές μορφές ασκήσεων με ακέραιες λύσεις, άρρητες λύσεις και παραμετρικά συστήματα. Επίσης στο τέλος δίνονται απλά προβλήματα για την κατανόηση των συστημάτων.

Αθήνα 2016 - 17

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

2016 – 17

Έκδοση: 26/9/2016

Επιμέλεια:
Μάκης Χατζόπουλος
Ανδρέας Κουλούρης
Θεόδωρος Παγώνης
Δημήτρης Παπαμικρούλης
Πάνος Γκριμπαβιώτης
Νίκος Σπλήνης

Μέλη της lisari team

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ 2 ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Ορισμός: Μη γραμμικό σύστημα καλείται το σύστημα στο οποίο η μια ή και οι δύο εξισώσεις δεν είναι γραμμικές, δηλαδή δεν είναι της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$.

Οι λύσεις (x, y) ενός μη γραμμικού συστήματος μπορεί να είναι παραπάνω από μία.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ:

$1^{ο}$ Βήμα: Λύνουμε τη γραμμική εξίσωση (ΑΝ ΥΠΑΡΧΕΙ) ως προς τον έναν άγνωστο και την αντικαθιστούμε στη μη γραμμική εξίσωση.

$2^{ο}$ Βήμα: Για την κάθε τιμή του αγνώστου που βρήκαμε, κάνουμε αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε την τιμή ή τις τιμές του άλλου αγνώστου.

Εδώ βρίσκεται και η πρόκληση! Αν μπορούμε με απλά τεχνάσματα να δημιουργούμε μια γραμμική εξίσωση για να δουλέψουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. (Βλ. μορφή $2^{η}$ ή 7η)

Β. Λυμένα παραδείγματα

Μορφή $1^{η}$

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\begin{cases} x+y=6 \\ xy=8 \end{cases} \quad \beta)\begin{cases} x+y=\sqrt{3} \\ xy=6 \end{cases} \quad \gamma)\begin{cases} x+y=2\alpha \\ xy=\alpha^2-\beta^2 \end{cases}, \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Γενική μέθοδος

Προφανώς η λύση με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι ορθή. Η πιο γρήγορη και ενδεδειγμένη λύση είναι να παρατηρήσουμε ότι είναι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\omega^2 - S\omega + P = 0$, όπου $S = x + y$ και $P = xy$ δηλαδή,

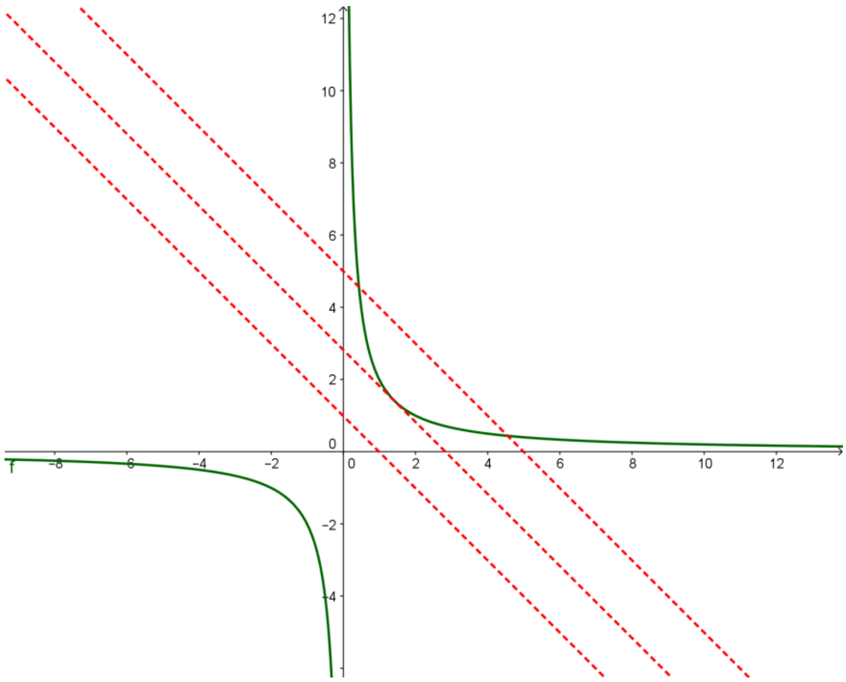
α) $\omega^2 - 6\omega + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 4$ άρα $y = 4$ ή $y = 2$

β) $\omega^2 - \sqrt{3}\omega + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$ ή $x = \sqrt{3}$ άρα $y = \sqrt{3}$ ή $y = 2\sqrt{3}$

γ) $\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha + \beta$ ή $x = \alpha - \beta$ άρα $y = \alpha - \beta$ ή $y = \alpha + \beta$

Γεωμετρική ερμηνεία

Τα συστήματα της παραπάνω μορφής εκφράζουν τις σχετικές θέσεις της υπερβολής $(xy = \alpha)$ με την ευθεία $(\alpha x + \beta y = \gamma)$. Άρα οι πιθανές λύσεις είναι είτε καμία, είτε μία είτε δύο, όπως φαίνεται στο σχήμα



Σημείωση

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις των (x,y) είναι συμμετρικές δηλαδή αν το $(1,5)$ είναι λύση του συστήματος τότε και το $(5,1)$ είναι λύση. Είναι τυχαίο;; Όχι! Αν το σύστημα που δίνεται είναι συμμετρικό, δηλαδή αν στη θέση του x βάλουμε y και στη θέση του y βάλουμε x (κυκλική εναλλαγή των x, y) και προκύπτει το ίδιο σύστημα τότε το σύστημα λέγεται συμμετρικό. Έτσι γλιτώνουμε τις αντικαταστάσεις αν έχουμε υπολογίσει τον έναν άγνωστο…

Μορφή 2$^{\eta}$

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\ \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases} \quad \beta)\ \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ xy=\sqrt{3} \end{cases} \quad \gamma)\ \begin{cases} x^2+y^2=5\lambda^2 \\ xy=2\lambda^2 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Γενική μέθοδος επίλυσης

α) Παρατηρούμε ότι αν «συνδέσουμε» τις δύο εξισώσεις κατάλληλα θα βγει μια ταυτότητα, δηλαδή

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2xy=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2xy+y^2=49 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=49 \\ xy=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x+y=-7 \\ xy=12 \end{cases}$$

οπότε τα x,y θα είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2-7\omega+12=0$ ή της $\omega^2+7\omega+12=0$ άρα σύμφωνα με την πρώτη μορφή έχουμε:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-3 \\ y=-4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$$

Σημείωση: Επίσης το προηγούμενο σύστημα λύνεται πιο απλά με την ταυτότητα

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

β) Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε

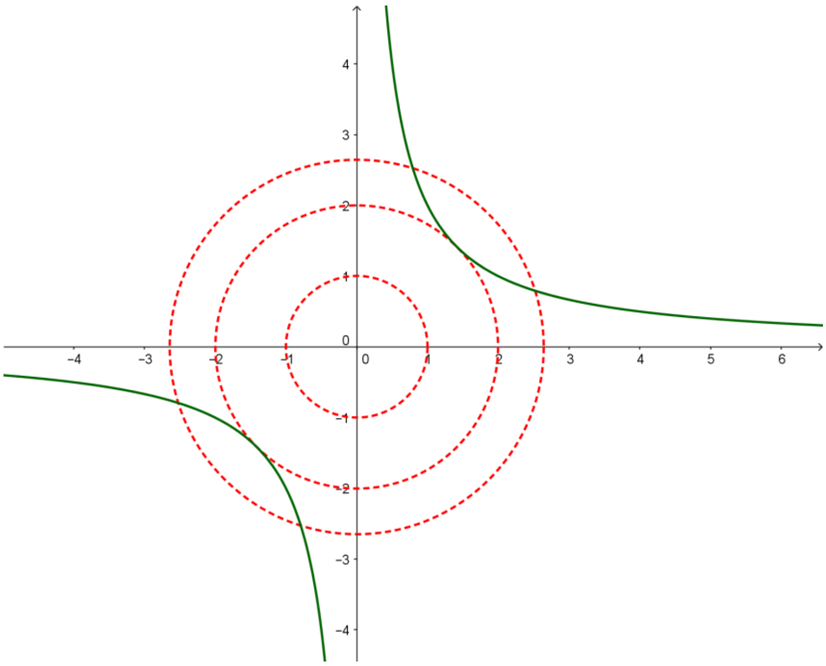
$$\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-1 \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$$

γ) Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε

$$\begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=-\lambda \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=-\lambda \\ y=-2\lambda \end{cases}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Τα συστήματα της παραπάνω μορφής εκφράζουν τις σχετικές θέσεις του κύκλος $\left(x^2+y^2=\alpha^2\right)$ με την παραβολή $(xy=\alpha)$. Άρα οι πιθανές λύσεις είναι μέχρι τέσσερις όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Σημείωση

Πολύ συχνά βλέπουμε να γράφουν οι μαθητές

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2xy=24 \end{cases}$$

άρα με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$x^2+2xy+y^2=49 \Leftrightarrow (x+y)^2=49 \Leftrightarrow x+y=7 \text{ ή } x+y=-7 \text{ κ.τ.λ.}$$

Όταν προσθέσαμε κατά μέλη έχουμε «σπάσει» την ισοδυναμία, άρα τις λύσεις που θα βρούμε πρέπει να τις επαληθεύσουμε. Την ίδια περίπτωση παρατηρούμε και όταν λύνουμε γραμμικό σύστημα με αντίθετους συντελεστές, για παράδειγμα το σύστημα

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$$

γίνεται με πρόσθεση κατά μέλη:

$$2x=2 \Leftrightarrow x=1 \text{ άρα } y=1$$

Η σωστή γραφή θα ήταν:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Δηλαδή κρατάμε πάντα δύο εξισώσεις και μία από αυτές την αντικαθιστούμε με την ισοδύναμή της. Δεν είναι σωστό να ξεκινάμε με δύο εξισώσεις και να καταλήγουμε σε μία, παρόλο που για τα δεδομένα του σχολικού βιβλίου θεωρείται σωστή αυτή η γραφή.

Μορφή 3η

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\ \begin{cases} x^3+y^3=2 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \beta)\ \begin{cases} x^3+y^3=4 \\ x+y=\sqrt[3]{3}+1 \end{cases} \quad \gamma)\ \begin{cases} x^3+y^3=\lambda^3+1 \\ x+y=\lambda+1 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

Γενική μέθοδος επίλυσης

Πρέπει να θυμηθούμε την ταυτότητα: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ άρα

α) $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8-6xy=2 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

και καταλήγουμε στην 1η μορφή…

β) $\begin{cases} x^3+y^3=4 \\ x+y=\sqrt[3]{3}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=4 \\ x+y=\sqrt[3]{3}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[3]{3}+1\right)^3-3xy\left(\sqrt[3]{3}+1\right)=4 \\ x+y=\sqrt[3]{3}+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\sqrt[3]{3} \\ x+y=\sqrt[3]{3}+1 \end{cases}$

και καταλήγουμε στην 1η μορφή…

γ) $\begin{cases} x^3+y^3=\lambda^3+1 \\ x+y=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3-3xy(x+y)=\lambda^3+1 \\ x+y=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)^3-3xy(\lambda+1)=\lambda^3+1 \\ x+y=\lambda+1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} xy=\lambda \\ x+y=\lambda+1 \end{cases}$

και καταλήγουμε στην 1η μορφή…

Μορφή 4η

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\begin{cases} x-y=2 \\ xy=-3 \end{cases} \quad \beta)\begin{cases} x-y=\sqrt{3} \\ xy=6 \end{cases} \quad \gamma)\begin{cases} x-y=2\beta \\ xy=\alpha^2-\beta^2 \end{cases},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Γενική μέθοδος

Η παραπάνω μορφή είναι η 1η μορφή, απλά αντί για άθροισμα $x+y$ έχουμε διαφορά δηλαδή $x-y$. Σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε όπου $y=-\omega$ και αναγόμαστε στην 1η μορφή, δηλαδή

$$\begin{cases} x-y=2 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+(-y)=2 \\ -xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+(-y)=2 \\ x(-y)=3 \end{cases} \overset{\omega=-y}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+\omega=2 \\ x\omega=3 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

κ.τ.λ.

Μορφή 5η

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\ \begin{cases} x^3-y^3=2 \\ x-y=2 \end{cases} \quad \beta)\ \begin{cases} x^3-y^3=4 \\ x-y=\sqrt[3]{3}+1 \end{cases} \quad \gamma)\ \begin{cases} x^3-y^3=\lambda^3+1 \\ x-y=\lambda+1 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1\}$$

Γενική μέθοδος επίλυσης

Η παραπάνω μορφή είναι η 3η μορφή, απλά αντί για άθροισμα έχουμε διαφορά.

Σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε όπου $y=-\omega$ και αναγόμαστε στην 3η μορφή, δηλαδή:

$$\begin{cases} x^3-y^3=2 \\ x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+(-y)^3=2 \\ x+(-y)=2 \end{cases} \overset{-y=\omega}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^3+\omega^3=2 \\ x+\omega=2 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots$$

Μορφή 6η

Να λύσετε τα συστήματα

$$\alpha)\ \begin{cases} x^4-y^4=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \beta)\ \begin{cases} x^4-y^4=2 \\ x^2+y^2=\sqrt[2]{3}+1 \end{cases} \quad \gamma)\ \begin{cases} x^4-y^4=\lambda^4-1 \\ x^2+y^2=\lambda+1 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Γενική μέθοδος επίλυσης

Πρέπει να θυμηθούμε την ταυτότητα

$$x^4-y^4=\left(x^2-y^2\right)\left(x^2+y^2\right)$$

άρα το (α) ερώτημα γίνεται:

$$\begin{cases} x^4-y^4=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)(x^2+y^2)=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ή } \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Μορφή 7η

Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18 \\ x^2-y^2+x-y=6 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=9 \\ 3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}=18 \end{cases}$

Γενική μέθοδος επίλυσης

α) Εδώ η επίλυση ως προς έναν άγνωστο δεν είναι δυνατή. Παρατηρώντας το σύστημα βλέπουμε ότι εμφανίζονται και στις δυο εξισώσεις οι παραστάσεις x^2+x και y^2+y. Γράφουμε το σύστημα ως εξής:

$$\begin{cases} x^2+x+y^2+y=18 \\ x^2+x-(y^2+y)=6 \end{cases}$$

Θέτουμε $\alpha=x^2+x$ και $\beta=y^2+y$, τότε το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \alpha+\beta=18 \\ \alpha-\beta=6 \end{cases}$$

το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα και λύνετε εύκολα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών και βρίσκουμε $\alpha=12$ και $\beta=6$.

Οπότε:

$$\alpha=12 \Leftrightarrow x^2+x=12 \Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-4$$

$$\beta=6 \Leftrightarrow y^2+y=6 \Leftrightarrow y^2+y-6=0 \Leftrightarrow y=2 \text{ ή } y=-3$$

Τελικά οι λύσεις του συστήματος είναι όλοι οι συνδυασμοί των x και y που βρήκαμε, δηλαδή:

$$(x,y)=\{(3,2),(3,-3),(-4,2),(-4,-3)\}$$

β) Αρχικά για να ορίζονται οι εξισώσεις του συστήματος πρέπει να ισχύει: $x\geq 0$ και $y\geq 0$.

Θέτουμε: $\alpha=\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow \alpha^2=x$ και $\beta=\sqrt{y}\geq 0 \Rightarrow \beta^2=y$

Οπότε το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \alpha^3+\beta^3=9 \\ 3\alpha^2\beta+3\beta^2\alpha=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=27 \\ 3\alpha^2\beta+3\beta^2\alpha=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)^3=27 \\ 3\alpha\beta(\alpha+\beta)=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=3 \\ \alpha\beta=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=1 \end{cases} \text{ή } \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=2 \end{cases}$$

Επομένως αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{y}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$$

ή

$$\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=2\\ \sqrt{y}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=1\end{cases}$$

Άρα τελικά οι λύσεις του συστήματος είναι:

$$(x,y)=\{(1,4),(4,1)\}$$

Μορφή 8η

Να λύσετε τα συστήματα α) $\begin{cases}x(y+\omega)=8\\ \omega(x+y)=18\\ y(\omega+x)=14\end{cases}$ β) $\begin{cases}xy=3\\ yz=6\\ xz=2\end{cases}$

Γενική μέθοδος επίλυσης

Παρατηρούμε ότι και τα δύο συστήματα είναι κυκλικά (δηλαδή με κυκλική εναλλαγή των μεταβλητών x, y, ω παίρνουμε το ίδιο σύστημα. Η μέθοδος σε αυτά τα συστήματα είναι να τα ενώσουμε όλα μαζί είτε προσθέτοντας είτε πολλαπλασιάζοντας!

α) Εκτελώντας τους πολλαπλασιασμούς το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases}xy+x\omega=8 & (1)\\ x\omega+y\omega=18 & (2)\\ y\omega+xy=14 & (3)\end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι παραστάσεις $xy, x\omega, y\omega$ εμφανίζονται από μια φορά σε κάθε μια από τις τρείς εξισώσεις. Έτσι προσθέτοντας κατά μέλη και τις τρεις εξισώσεις έχουμε:

$2xy+2x\omega+2y\omega=40\Leftrightarrow xy+x\omega+y\omega=20\ (4)$

Από την (1) και (4) έχουμε: $8+y\omega=20\Leftrightarrow y\omega=12$

Από την (2) και (4) έχουμε: $18+xy=20\Leftrightarrow xy=2$

Από την (3) και (4) έχουμε: $14+x\omega=20\Leftrightarrow x\omega=6$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε:

$$x^2y^2\omega^2=144\Leftrightarrow(xy\omega)^2=144\Leftrightarrow xy\omega=12 \text{ ή } xy\omega=-12$$

- Έστω $xy\omega=12$ τότε

Από τη σχέση $y\omega=12$ έχουμε ότι: $12x=12\Leftrightarrow x=1$

Από τη σχέση $xy=2$ έχουμε ότι: $2\omega=12\Leftrightarrow\omega=6$

Από τη σχέση $x\omega = 6$ έχουμε ότι: $6y = 12 \Leftrightarrow y = 2$

Επομένως μια λύση του συστήματος είναι η: $(x, y, \omega) = (1, 2, 6)$

- Έστω $xy\omega = -12$ τότε

Από τη σχέση $y\omega = 12$ έχουμε ότι: $12x = -12 \Leftrightarrow x = -1$

Από τη σχέση $xy = 2$ έχουμε ότι: $2\omega = -12 \Leftrightarrow \omega = -6$

Από τη σχέση $x\omega = 6$ έχουμε ότι: $6y = -12 \Leftrightarrow y = -2$

Επομένως μια ακόμα λύση του συστήματος είναι η: $(x, y, \omega) = (-1, -2, -6)$

β) Αρχικά βλέπουμε ότι κανείς από τα x, y, z δεν μπορεί να ισούται με μηδέν. Έτσι πολλαπλασιάζοντας τις τρεις εξισώσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(xyz)^2 = 36 \Leftrightarrow xyz = 6 \text{ ή } xyz = -6$$

- Έστω $xyz = 6$ τότε

Από τη σχέση $xy = 3$ έχουμε ότι: $3z = 6 \Leftrightarrow z = 2$

Από τη σχέση $yz = 6$ έχουμε ότι: $6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$

Από τη σχέση $xz = 2$ έχουμε ότι: $2y = 6 \Leftrightarrow y = 3$

Επομένως μια λύση του συστήματος είναι η: $(x, y, z) = (1, 3, 2)$

- Έστω $xyz = -6$ τότε

Από τη σχέση $xy = 3$ έχουμε ότι: $3z = -6 \Leftrightarrow z = -2$

Από τη σχέση $yz = 6$ έχουμε ότι: $6x = -6 \Leftrightarrow x = -1$

Από τη σχέση $xz = 2$ έχουμε ότι: $2y = -6 \Leftrightarrow y = -3$

Επομένως μια ακόμα λύση του συστήματος είναι η: $(x, y, z) = (-1, -3, -2)$

Μορφή 9η

Να λύσετε τα συστήματα: α) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 2xy = -5 \\ x^2 + y^3 = 2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 27 \end{cases}$

Γενική μέθοδος επίλυσης

Το παραπάνω συστήματα δεν αντιμετωπίζονται όπως οι προηγούμενες μορφές αφού το (α) δεν είναι συμμετρικό σύστημα, ενώ το (β) ενώ είναι συμμετρικό δεν αντιμετωπίζεται με πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό των σχέσεων. Επίσης ο βοηθητικός άγνωστος δεν μας βοηθάει σε καμία περίπτωση.

α) Παρατηρώντας την πρώτη εξίσωση φαίνεται να περιέχει κάποιες «κρυμμένες» ταυτότητες. Ξαναγράφουμε λοιπόν την πρώτη εξίσωση ως εξής:

$$\begin{cases} \underline{x^2} + x^2 + \underline{\underline{y^2}} + y^2 + \underline{2x} - \underline{\underline{2y}} + 2xy + \underline{\underline{4}} + \underline{1} = 0 \\ x^2 + y^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 + (x+y)^2 = 0 \\ x^2 + y^3 = 2 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα τετραγώνων δυο ή περισσοτέρων αριθμών ισούται με το μηδέν αν και μόνο αν όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι με το μηδέν. Οπότε από την πρώτη εξίσωση συμπεραίνουμε ότι:

$$x+1=0 \text{ και } y-1=0 \text{ και } x+y=0$$

Οπότε έχουμε $x=-1$ και $y=1$, λύσεις που επαληθεύουν τις αρχικές εξισώσεις.

β) Παρατηρούμε όμως οι όροι της δεύτερης εξίσωσης είναι οι όροι της πρώτης υψωμένοι στο τετράγωνο, που μας οδηγεί στην ταυτότητα:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = 27 &\Leftrightarrow (x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 27 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9^2 - 2(xy+xz+yz) = 27 \\ &\Leftrightarrow 2(xy+xz+yz) = 54 \\ &\Leftrightarrow xy+xz+yz = 27 \end{aligned}$$

Όμως ισχύει $x^2+y^2+z^2=27$, άρα:

$$x^2+y^2+z^2 = xy+xz+yz \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=0$$

Η τελευταία εξίσωση θυμίζει την ταυτότητα $(x+y+z)^2$. Πολλαπλασιάζοντας με το 2 και τα δυο μέλη της εξίσωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0 &\Leftrightarrow x^2+x^2+y^2+y^2+z^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0 \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε ότι:

$$x-y=0 \text{ και } x-z=0 \text{ και } y-z=0$$

Οπότε $x=y=z$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση του συστήματος έχουμε:

$$x+y+z=9 \Leftrightarrow 3x=9 \Leftrightarrow x=3$$

Τελικά η λύση του συστήματος είναι:

$$(x,y,z)=(3,3,3)$$

Γ. Προβλήματα

1) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που έχει περίμετρο 12m και εμβαδόν $8m^2$.

Υπ. Μορφή 1η

2) Έστω δύο τετράγωνα με πλευρές x, y με άθροισμα εμβαδόν $25m^2$ και το γινόμενο των πλευρών τους x, y είναι 12m. Βρείτε τις πλευρές των τετραγώνων.

Υπ. Μορφή $2^η$

3) Δύο κύβοι με πλευρές x, y έχουν όγκο $2m^3$ και το άθροισμα των πλευρών τους x, y είναι 2m. Βρείτε τις πλευρές των κύβων.

Υπ. Μορφή $3^η$

4) Βρείτε ένα μη – γραμμικό σύστημα που να έχει λύση την $(-1,2)$.

Απ. $\begin{cases} x+y=1 \\ y^2=-4x \end{cases}$

5) Βρείτε ένα μη – γραμμικό σύστημα που να έχει λύση τις $(2,-1)$ και $(-1,2)$.

Σημείωση: Η παραπάνω άσκηση αποτελεί μια όμορφη εργασία για τους μαθητές του Προσανατολισμού της Β Λυκείου, αφού γίνεται όμορφη προσέγγιση με την παράγραφο των κωνικών τομών.

6) Βρείτε το μη γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \alpha^2x^2+\beta^2y^2=5 \\ 5\alpha x-\beta y=3 \end{cases}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ που έχει λύση το $(1,-1)$.

Απ. $\alpha=1,\beta=-2$

Δ. Άλυτες ασκήσεις

1) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} -x+y=-3 \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-3y=2 \\ x^2-4y^2=5 \end{cases}$

2) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2-3y^2=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x^2-y^2=3 \\ -5x^2+2y^2=-2 \end{cases}$

3) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=6 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy^2=2 \end{cases}$

4) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ xy=6 \end{cases}$

5) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}-5=0 \\ \dfrac{7}{y}=\dfrac{1}{x}-12 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}\right)=8 \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{y}=1 \end{cases}$

6) Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} (x-2y)(x+y)=0 \\ x-2y=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (3y-x)(5y-2x+3)=0 \\ x-2y=2 \end{cases}$

7) Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} |x-2y|=3 \\ 4x-5y=6 \end{cases}$ β) $\begin{cases} |2y-x|=|2x-y| \\ x+2y=-3 \end{cases}$

8) Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} 2x^3+3y^2=-4 \\ -x^3+2y^2=16 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (x-1)^3+2(y+1)^3=3 \\ 2(x-1)^3-(y+1)^3=1 \end{cases}$

9) Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 13 cm και περίμετρο 30 cm. Να βρείτε το μήκος των κάθετων πλευρών του.

10) Να λυθούν οι εξισώσεις :

α. $|3x+2y-5|+|x-3y-9|=0$ β. $(2x-y-2)^2+(x-2y-7)^2=0$

11) Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x^2-y^2=9(x-y) \\ xy=18 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2y-y^2x=3(x-y) \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

12) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ y^2+xy=24 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 7y=3xy+3 \\ 7x=2xy+2 \end{cases}$

13) Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=1$ και η ευθεία $y=2x+\alpha$, $\alpha>0$.

Να βρείτε :

α. Τις τιμές του $\alpha>0$, ώστε η ευθεία να έχει με τον κύκλο ένα κοινό σημείο.

β. Τις συντεταγμένες του κοινού σημείου.

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζει η ευθεία με τους άξονες.

δ. Το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της ευθείας και του κύκλου.

14) Να λυθεί το σύστημα $\left.\begin{matrix} x-y=3 \\ x^2+2y^2=9 \end{matrix}\right\}$

$(\text{Απ}:(1,-2),(3,0))$

15) Δίνεται το σύστημα $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{matrix}\right\}$

α) Να λυθεί το σύστημα

$(\text{Απ}:(4,-3),(-3,4))$

β) Να λυθεί το σύστημα γραφικά (σε χαρτί μιλιμετρέ).
γ) Να λυθεί το σύστημα γραφικά με τη βοήθεια του προγράμματος GeoGebra.

16) Δίνεται το σύστημα $\left.\begin{matrix} x+y=2 \\ xy=-8 \end{matrix}\right\}$

α) Να λυθεί το σύστημα

$\left(\text{Απ}: (-2,4),(4,-2)\right)$

β) Να λυθεί το σύστημα γραφικά (σε χαρτί μιλιμετρέ).
γ) Να λυθεί το σύστημα γραφικά με τη βοήθεια του προγράμματος GeoGebra.

17) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ xy=-4 \end{cases}$

α) Να λυθεί το σύστημα

$\left(\text{Απ}: (1,-4),(-1,4),(4,-1),(-4,1)\right)$

β) Να λυθεί το σύστημα γραφικά (σε χαρτί μιλιμετρέ).
γ) Να λυθεί το σύστημα γραφικά με τη βοήθεια του προγράμματος GeoGebra.

18) Να λύσετε τα συστήματα

α) $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+xy=15 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} xy=16 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} xy=6 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

19) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=2 \\ y^2=x \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2+y^2=29 \\ xy=10 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2=y \\ y^2=x \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x+y=16 \\ xy=63 \end{cases}$

20) Να λυθούν τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x+y=6 \\ y^2=3x \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+y=15 \\ y^2=4x \end{cases}$

21) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+3y^2=8 \\ 2x^2-y^2=9 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2|x|-4|y|=16 \\ -\frac{1}{2}|x|+2|y|=-4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2\sqrt{x}+2\sqrt{y}=2 \\ 4\sqrt{x}+\sqrt{y}=-2 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{2}{y}=4 \\ \frac{2}{x}+\frac{7}{y}=8 \end{cases}$

22) Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} (x-1)(y+3)=0 \\ (x-2)(2y+1)=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} (x+1)\cdot(y-2)=0 \\ (x+1)\cdot(4y+7)=0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x+2y=5 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} |x+y|=2 \\ x-4y=10 \end{cases}$

23) Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} |x|-|y|=-1 \\ 4|x|-3|y|=8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2|x|+3|y|=5 \\ 4|x|-3|y|=8 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3|x|-4|y|=10 \\ 4|x|+3|y|=5 \end{cases}$