ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ-Α΄ - Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (ΘΕΤΙΚΗ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ)

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

1. $\forall \alpha \in R$ και ν θετικό ακέραιο ορίζεται $\alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\nu \text{ φορές}}$

2. $\forall \alpha \in R - \{0\}$ ορίζεται $\alpha^{0} = 1$

3. $\forall \alpha \in R - \{0\}$ και ν θετικό ακέραιο ορίζεται $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$

4. $\forall \alpha$ θετικό πραγματικό , ν θετικό ακέραιο , κ ακέραιο ορίζεται $\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}}$

5. $\alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha \cdot \beta)^{\nu}$

6. $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}, \beta \neq 0$

7. $\alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\kappa} = \alpha^{\nu+\kappa}$

8. $\dfrac{\alpha^{\nu}}{\alpha^{\kappa}} = \alpha^{\nu-\kappa}, \alpha \neq 0$

9. $(\alpha^{\nu})^{\kappa} = \alpha^{\nu \cdot \kappa}$

10. $\forall \alpha \in R$, ν θετικό ακέραιο ισχύει $\alpha^{2\nu} \geq 0$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$

2. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$

3. $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$

4. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

5. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

6. $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma$

7. $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

8. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2]$

9. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) = 0$ ή $\alpha = \beta = \gamma$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

1. $\forall \alpha, \beta \in R$ ισχύει $\alpha = \beta$ ή $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$

2. $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε $\alpha < \gamma$

3. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma < \beta \pm \gamma$

4. αν $\begin{cases} \gamma < 0 \text{ τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma \\ \gamma > 0 \text{ τότε } \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma \end{cases}$

5. $\alpha\nu\ \alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \delta$
Μπορούμε να προσθέσουμε κατά μέλη ίδιας φοράς ανισώσεις **όχι** όμως και να τις αφαιρέσουμε

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί πραγματικοί : $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha\gamma < \beta\delta$

7. Αν α, β θετικοί πραγματικοί : $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$

8. $\frac{\alpha}{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0$

9. Αν α, β θετικοί πραγματικοί : $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$

10. $\forall\ \alpha, \beta \in R : \alpha < \beta \Rightarrow \alpha^{2\nu+1} < \beta^{2\nu+1}$

11. $\forall \alpha \in R$, ν θετικό ακέραιο ισχύει $\alpha^{2\nu} \geq 0$

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ

1. $x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha \leq \chi \leq \beta$
2. $x \in [\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha \leq \chi < \beta$
3. $x \in (\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha < \chi \leq \beta$
4. $x \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha < \chi < \beta$
5. $x \in (-\infty, a] \Leftrightarrow x \leq a$
6. $x \in (-\infty, a) \Leftrightarrow x < a$
7. $x \in [\alpha, +\infty) \Leftrightarrow x \geq a$
8. $x \in (\alpha, +\infty) \Leftrightarrow x > a$

ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

Ορισμός $|\chi| = \begin{cases} -\chi & \alpha\nu\ \chi < 0 \\ 0 & \alpha\nu\ \chi = 0 \\ \chi & \alpha\nu\ \chi > 0 \end{cases}$

1. $\lvert\chi\rvert \geq 0$	**2.** $\lvert-\chi\rvert = \lvert\chi\rvert$
3. $-\lvert\chi\rvert \leq \chi \leq \lvert\chi\rvert$	**4.** $\lvert\chi\rvert^2 = \lvert\chi^2\rvert = \chi^2$
5. $\lvert\chi \cdot \psi\rvert = \lvert\chi\rvert \cdot \lvert\psi\rvert$	**6.** $\left\lvert\frac{\chi}{\psi}\right\rvert = \frac{\lvert\chi\rvert}{\lvert\psi\rvert}, \psi \neq 0$
7. $\lvert\lvert\chi\rvert - \lvert\psi\rvert\rvert \leq \lvert\chi \pm \psi\rvert \leq \lvert\chi\rvert + \lvert\psi\rvert$	**8.** $\lvert\chi\rvert = \lvert\psi\rvert \Leftrightarrow \chi = \psi$ ή $\chi = -\psi$
9. Αν θ θετικός $\lvert\chi\rvert = \theta \Leftrightarrow \chi = \theta$ ή $\chi = -\theta$	**10.** Αν θ θετικός $\lvert\chi\rvert \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq \chi \leq \theta$
11. Αν θ θετικός $\lvert\chi\rvert \geq \theta \Leftrightarrow \chi \leq -\theta$ ή $\chi \geq \theta$	**12.** $\sqrt{\chi^2} = \lvert\chi\rvert$

ΡΙΖΕΣ

Ορισμός : Αν $x \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος : $\sqrt[\nu]{\chi} = \psi \Leftrightarrow \chi = \psi^{\nu}$

Ορισμός : Αν $x > 0$ και ν θετικός ακέραιος : $\sqrt[\nu]{\chi^{\kappa}} = \chi^{\frac{\kappa}{\nu}}$

1. Αν $x \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος : $(\sqrt[\nu]{\chi})^{\nu} = \chi$
2. Αν $x \geq 0$ και ν, κ θετικός ακέραιος : $(\sqrt[\nu]{\chi})^{\kappa} = \sqrt[\nu]{\chi^{\kappa}}$
3. Αν $x, \psi \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος : $\sqrt[\nu]{\chi \cdot \psi} = \sqrt[\nu]{\chi} \cdot \sqrt[\nu]{\psi}$

4. Αν $x \ge 0$, $\psi > 0$ και ν θετικός ακέραιος : $\sqrt[\nu]{\dfrac{\chi}{\psi}} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\chi}}{\sqrt[\nu]{\psi}}$

5. Αν $x, \psi \ge 0$ και ν θετικός ακέραιος : $\chi\sqrt[\nu]{\psi} = \sqrt[\nu]{\chi^{\nu}\psi}$

6. Αν $x \ge 0$ και ν, κ θετικός ακέραιος : $\sqrt[\nu]{\sqrt[\kappa]{\chi}} = \sqrt[\nu\cdot\kappa]{\chi}$, $\sqrt[\nu\cdot\kappa]{\chi^{\mu\cdot\kappa}} = \sqrt[\nu]{\chi^{\mu}}$

7. Αν $x, \psi \ge 0$ και ν θετικός ακέραιος : $\chi = \psi \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\chi} = \sqrt[\nu]{\psi}$

8. Αν ν θετικός ακέραιος : $\sqrt[2\nu]{\chi^{2\nu}} = |\chi|$

9.

παραστάσεις	συζυγείς
$\sqrt[\nu]{\chi^{\kappa}}$	$\sqrt[\nu]{\chi^{\nu-\kappa}}$
$\sqrt{\chi}+\psi$	$\sqrt{\chi}-\psi$
$\sqrt{\chi}-\psi$	$\sqrt{\chi}+\psi$
$\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}$	$\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}$
$\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}$	$\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}$
$\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\psi}$	$\sqrt[3]{\chi^2}-\sqrt[3]{\chi\psi}+\sqrt[3]{\psi^2}$
$\sqrt[3]{\chi}-\sqrt[3]{\psi}$	$\sqrt[3]{\chi^2}+\sqrt[3]{\chi\psi}+\sqrt[3]{\psi^2}$

10. Η εξισωση $\chi^{\nu} = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } \nu=2\kappa+1 \text{ τοτε } \begin{cases} \text{αν } \alpha<0 \text{ τοτε } \chi=-\sqrt[\nu]{-\alpha} \\ \text{αν } \alpha>0 \text{ τοτε } \chi=\sqrt[\nu]{\alpha} \end{cases} \\ \text{αν } \nu=2\kappa \text{ τοτε } \begin{cases} \text{αν } \alpha<0 \text{ τοτε αδυνατη} \\ \text{αν } \alpha>0 \text{ τοτε } \chi= \begin{cases} -\sqrt[\nu]{\alpha} \\ \sqrt[\nu]{\alpha} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$

ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΣΤΟ R

1. Αν $\nu \in Z$, $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$

2. Αν θετικός ακέραιος , $\alpha^{2\nu+1} = \beta^{2\nu+1} \Rightarrow \alpha = \beta$

3. Αν θετικός ακέραιος , $\alpha^{2\nu} = \beta^{2\nu} \Rightarrow \alpha = \pm\beta$

4. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma = \beta \pm \gamma$

5. $\alpha = \beta$ και $\lambda \ne 0 \Leftrightarrow \alpha\lambda = \beta\lambda$

6. $\alpha = \beta$ και $\lambda \ne 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\lambda} = \dfrac{\beta}{\lambda}$

7. $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma = \beta \pm \delta$

8. $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$

9. $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta \ne 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\delta}$

10. $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdots \omega = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$ ή $\gamma = 0$ ή .....$\omega = 0$

11. $\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu} + \ldots.\omega^{2\nu} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \ldots. = \omega = 0$ ν θετικός ακέραιος

12. $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| + \ldots.|\omega| = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \ldots. = \omega = 0$

13. $\sqrt[\nu]{\alpha} + \sqrt[\nu]{\beta} + \sqrt[\nu]{\gamma} + \ldots.\sqrt[\nu]{\omega} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \ldots. = \omega = 0$ ν θετικός ακέραιος

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1^{ΟΥ}ΒΑΘΜΟΥ

Είναι μορφής ψ=αχ+β και γεωμετρικώς εκφράζουν ευθεία

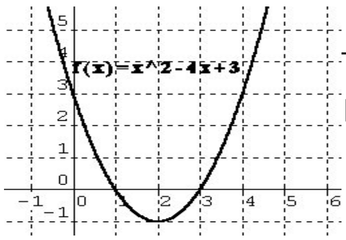
$$\text{Αν } \alpha\chi+\beta=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } \alpha \neq 0 \Rightarrow \chi = -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \text{αν } \alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{αν } \beta \neq 0 \text{ τότε αδύνατη} \\ \text{αν } \beta = 0 \text{ τότε αόριστη} \end{cases} \end{cases}$$

ΤΡΙΩΝΥΜΟ –ΕΞΙΣΩΣΗ 2^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

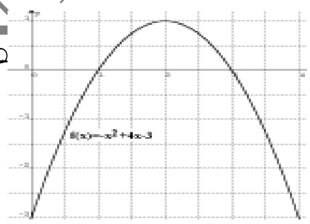
Το τριώνυμο είναι κάθε παράσταση μορφής f(x) = $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με $\alpha\neq 0$

Η αντίστοιχη εξίσωση 2^{ου} βαθμού είναι η $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$

Η διακρίνουσα είναι η $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ και μας επιτρέπει να διακρίνουμε τα παρακάτω

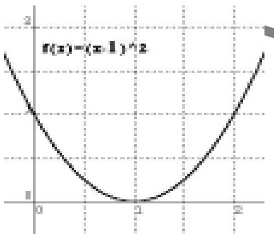


χ	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
F(χ)	Ομόσημο του α		0	ετερόσημο του α	0	Ομόσημο του α	

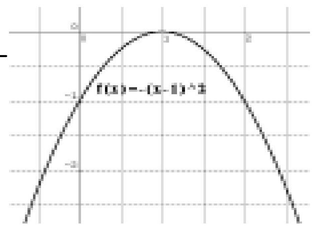


1) $\text{Αν } \Delta>0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{α) το f(x) και η εξίσωση έχουν 2 πραγματικές ρίζες τις } \chi_{1,2} = \dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \\ \text{β) το f(x) παραγοντοποιείται με } f(x)=\alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2) \\ \text{γ) γνωρίζουμε το πρόσημο του f(x) για τις διάφορες τιμές του } \chi \end{cases}$

2) $\text{Αν } \Delta=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{α) το f(x) και η εξίσωση έχουν 2 πραγματικές ίσες ρίζες τις } \chi_{1,2} = \dfrac{-\beta}{2\alpha} \\ \text{β) το f(x) παραγοντοποιείται με } f(x)=\alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_1)=\alpha(\chi-\chi_1)^2 \\ \text{γ) γνωρίζουμε το πρόσημο του f(x) για τις διάφορες τιμές του } \chi \end{cases}$



χ	$-\infty$	$x_1=x_2$	$+\infty$
F(χ)	Ομόσημο του α	0	ομόσημο του α



3) $\text{Αν } \Delta<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{α) το f(x) και η εξίσωση δεν έχουν πραγματικές ρίζες} \\ \text{β) το f(x) δεν παραγοντοποιείται} \\ \text{γ) το πρόσημο του f(x) είναι πάντοτε ομόσημο του } \alpha \end{cases}$

Αν $\Delta\geq 0$ και ρ_1,ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ τότε $S=\rho_1+\rho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P=\rho_1\cdot\rho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Η εξίσωση με ρίζες ρ_1,ρ_2 είναι η : $\chi^2-S\chi+P=0$

ΕΞΙΣΩΣΗ 3^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΩ

Όλα στο πρωτο μέλος και παραγοντοποίηση –κοινός παράγοντας ,ταυτότητες , ομαδοποίηση , σχήμα Horner

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ

Όλα στο πρωτο μέλος ,ομώνυμα (Ε.Κ.Π-καπελάκια) ,περιορισμούς (Ε.Κ.Π $\neq 0$), απαλείφουμε τον παρονομαστή

ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1 . 1^{ου} βαθμού : α x + β > 0 με $\alpha \neq 0$ $\alpha\chi + \beta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\nu\ \ \alpha > 0 \Leftrightarrow \chi > -\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \alpha\nu\ \ \alpha < 0 \Leftrightarrow \chi < -\dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases}$

2. 2^{ου} βαθμού : $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$ με $\alpha \neq 0$

Εφαρμόζουμε το πρόσημο τριωνύμου

3. 3^{ου} βαθμού και πάνω :

Δημιουργούμε παράσταση της μορφής $(\alpha_1 x - \beta_1)(\alpha_2 x - \beta_2)(\alpha_3 x - \beta_3)\ldots(\alpha_\nu x - \beta_\nu) > 0$

Με $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_\nu$ θετικούς πραγματικούς .

Τοποθετούμε σε άξονα τις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_\nu$ κάθε παράγοντα κατά σειρά μμεγέθους .

Το πρόσημο στο τελευταίο διάστημα (ρ_ν , + • • ∞) είναι **(+)** και στα υπόλοιπα εναλλάξ .(Αν συναντήσουμε διπλή ρίζα δεν αλλάζει το πρόσημο δηλ. κάθε παράγοντας της μορφής $(\alpha x + \beta)^{2\nu}$ $\nu \in N^*$ δεν επηρεάζει το πρόσημο της ανίσωσης).Το πρόσημο των παραγόντων μορφής $(\alpha x + \beta)^{2\nu+1}$ είναι ίδιο με το πρόσημο του $(\alpha x + \beta)$.

4.κλασματική ανίσωση :

Όλα στο πρώτο μέλος ,ομώνυμα οπότε παίρνουμε την μορφή

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x)\,g(x) \leq 0 \text{ με } g(x) \neq 0$$

5. Ανισώσεις με ριζικά :

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Για το σύστημα (Σ) : $\begin{cases} \alpha\chi + \beta\psi = \varepsilon \\ \gamma\chi + \delta\psi = \zeta \end{cases}$ που γεωμετρικά εκφράζει δυο ευθείες

Ορίζουμε ως ορίζουσα του συστήματος τον αριθμό $D_\Sigma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta$

Ορίζουμε ως ορίζουσα που αντιστοιχεί στον άγνωστο χ την $D_\chi = \begin{vmatrix} \varepsilon & \beta \\ \zeta & \delta \end{vmatrix} = \varepsilon\delta - \zeta\beta$

Ορίζουμε ως ορίζουσα που αντιστοιχεί στον άγνωστο ψ την $D_\psi = \begin{vmatrix} \alpha & \varepsilon \\ \gamma & \zeta \end{vmatrix} = \alpha\zeta - \gamma\varepsilon$

i) Αν $D_\Sigma \neq 0$ Τότε και μόνο τότε το (Σ) έχει μοναδική λύση την $\chi = \frac{D_x}{D_\Sigma}$, $\psi = \frac{D_\psi}{D_\Sigma}$ οπότε οι ευθείες τέμνονται σε ένα μόνο σημείο

ii) Αν $D_\Sigma = 0$ Τότε το (Σ) είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις (αυτό το διαπιστώνουμε λύνοντας το (Σ) με άλλη μέθοδο)

Αν το (Σ) είναι αδύνατο τότε οι ευθείες είναι παράλληλες

Αν το (Σ) είναι αόριστο τότε οι ευθείες ταυτίζονται

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πολυώνυμο λέγεται κάθε παράσταση μορφής $P(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\chi^{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}\chi^{\nu-3} + ... + \alpha_1\chi + \alpha_0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_\nu$ πραγματικούς αριθμούς και ν θετικό ακέραιο .Το $P(\chi)=\alpha_0$ είναι το σταθερό πολυώνυμο και το $P(\chi)=0$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο

•Βαθμό ενός πολυωνύμου λέγεται η μεγαλύτερη δύναμη του χ του όρου που έχει συντελεστή $\neq 0$

Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

•Δύο πολυώνυμα είναι ίσα όταν α) είναι ίδιου βαθμού και β) οι ομοιόβαθμοί συντελεστές είναι ίσοι δηλ. αν $P(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\chi^{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}\chi^{\nu-3} + ... + \alpha_1\chi + \alpha_0$ και

$Q(\chi) = \beta_\kappa\chi^\kappa + \beta_{\kappa-1}\chi^{\kappa-1} + \beta_{\kappa-2}\chi^{\kappa-2} + \beta_{\kappa-3}\chi^{\kappa-3} + ... + \beta_1\chi + \beta_0$ με $\nu \geq \kappa$ τότε

$P(\chi)=Q(\chi)$ όταν $\alpha_0=\beta_0$ και $\alpha_1=\beta_1$ και $\alpha_2=\beta_2$ και $\alpha_3=\beta_3$ και ....και $\alpha_\nu=\beta_\nu$ και $\alpha_{\kappa+1}=\alpha_{\kappa+2}=......=\alpha_\nu=0$

•Για το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\chi^{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}\chi^{\nu-3} + ... + \alpha_1\chi + \alpha_0$ αριθμητική τιμή του για χ=ρ είναι ο αριθμός

$P(\rho) = \alpha_\nu\rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\rho^{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}\rho^{\nu-3} + ... + \alpha_1\rho + \alpha_0$ που βρίσκουμε όταν στην θέση του χ αντικαταστήσουμε το ρ

•Αν το P(χ) το διαιρέσουμε με το δ(χ) $\neq$ 0 βρίσκουμε το πηλίκο Π(χ) και το υπόλοιπο Υ(χ) και ισχύει η Ευκλείδεια ταυτότητα της διαίρεσης:

P(χ)=δ(χ)Π(χ)+Υ(χ) ,με 0 $\leq$ βαθμό(Υ(χ))<βαθμό δ(χ)

•Αν ένα πολυώνυμο το διαιρέσουμε με το χ-ρ (πρώτου βαθμού)τότε το υπόλοιπο είναι αριθμός ο Υ=P(ρ)

•Ένας αριθμός ρ είναι ρίζα του P(χ) $\Leftrightarrow$ P(ρ)=0 $\Leftrightarrow$ το χ-ρ είναι παράγοντας του P(χ) $\Leftrightarrow$ το P(χ) παραγοντοποιείται ως P(χ)=(χ-ρ) Π(χ) ,όπου το Π(χ) το πηλίκο της διαίρεσης του P(χ) δια (χ-ρ), το οποίο βρίσκουμε είτε κάνοντας την διαίρεση είτε με το σχήμα Horner με τον αριθμό ρ.

•Σχήμα horner για το $P(\chi)= 3\chi^5+3\chi^4+6\chi-13$ δια του χ-2

3	**3**	**0**	**0**	**6**	**-13**	**ρ=2**
	3•2 **6**	9•2 **18**	18•2 **36**	36•2 **72**	78•2 **156**	
3	**9**	**18**	**36**	**78**	**143=Υ**	

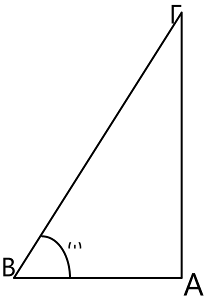
Οπότε $3\chi^5+3\chi^4+6\chi-13 =(\chi-2)(3\chi^4+9\chi^3+18\chi^2+36\chi+78)+143$

•Το πολυώνυμο $P(\chi) = \alpha_\nu\chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}\chi^{\nu-2} + \alpha_{\nu-3}\chi^{\nu-3} + ... + \alpha_1\chi + \alpha_0$ με $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_\nu$ ακεραίους αριθμούς και ν θετικό ακέραιο αν έχει τον ακέραιο ρ ρίζα του τότε το ρ είναι διαιρέτης του α_0

•Αν $P_1(\chi) \bullet P_2(\chi) \bullet P_3(\chi) \bullet .... P_\nu(\chi) =0 \Leftrightarrow (P_1(\chi)=0$ ή $P_2(\chi)= 0$ ή $P_3(\chi)=0$ ή ....ή $P_\nu(\chi) =0)$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



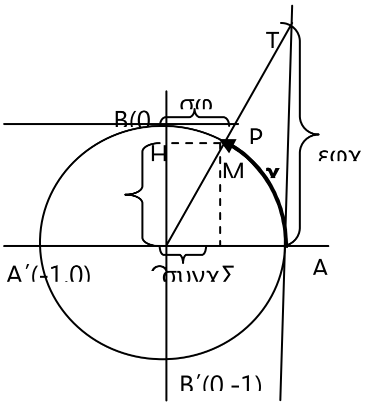
$$ημω = \frac{απέναντι\ \ κάθετη}{υποτείνουσα} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$συνω = \frac{προσκείμενη\ \ κάθετη}{υποτείνουσα} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$εφω = \frac{απέναντι\ \ καθετη}{προσκείμενη\ \ \ κάθετη} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

$$σφω = \frac{προσκείμενη\ \ \ κάθετη}{απέναντι\ \ κάθετη} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ –ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



ημχ = τεταγμένη του Μ = $\overline{ΟΗ}$

συνχ =τετμημένη του Μ = $\overline{ΟΣ}$

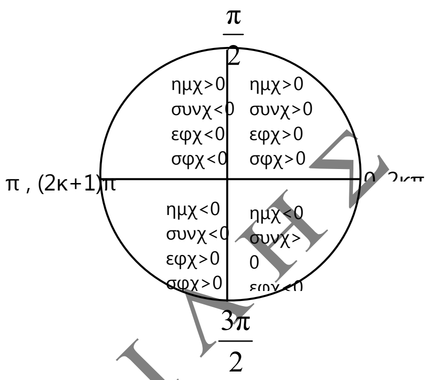
εφχ = $\overline{ΑΤ}$ σφχ = $\overline{ΒΡ}$

$-1 \le συνχ \le 1$ $-1 \le ημχ \le 1$

$$ημ^2χ + συν^2χ = 1$$

$$εφχ = \frac{ημχ}{συνχ} \qquad σφχ = \frac{συνχ}{ημχ}$$

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

χ	ημχ	συνχ	εφχ	σφχ
0	0	1	0	-
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-	0
π	0	-1	0	-

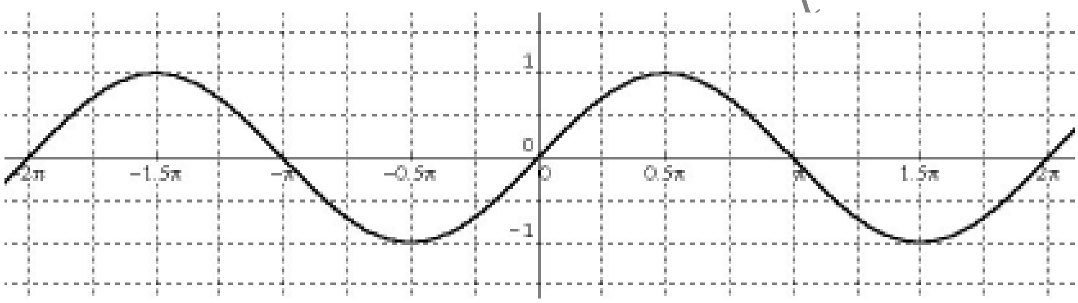
$\frac{3\pi}{2}$	**-1**	**0**	**-**	**0**

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1^{Ο} ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

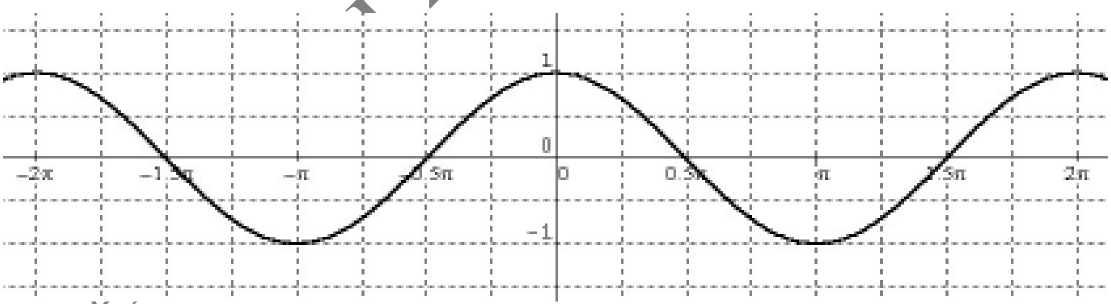
συν(-χ)=συνχ	ημ(-χ)= -ημχ	εφ(-χ)= -εφχ	σφ(-χ)= -σφχ
συν(π/2-χ)=ημχ	ημ(π/2-χ)=συνχ	εφ(π/2-χ)=σφχ	σφ(π/2-χ)=εφχ
συν(π-χ)=-συνχ	ημ(π-χ)=ημχ	εφ(π-χ)=-εφχ	σφ(π-χ)=-σφχ
συν(π+χ)=-συνχ	ημ(π+χ)=-ημχ	εφ(π+χ)=εφχ	σφ(π+χ)=σφχ
συν(3π/2-χ)= -ημχ	ημ(3π/2-χ)= -συνχ	εφ(3π/2-χ)=σφχ	σφ(3π/2-χ)=εφχ
συν(3π/2+χ)=ημχ	ημ(3π/2+χ)= -συνχ	εφ(3π/2+χ)= -σφχ	σφ(3π/2+χ)= -εφχ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

f(x)=ημχ , $x \in R$ $\eta\mu x \in [-1,1]$ **,είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π(rad) και περιττή**

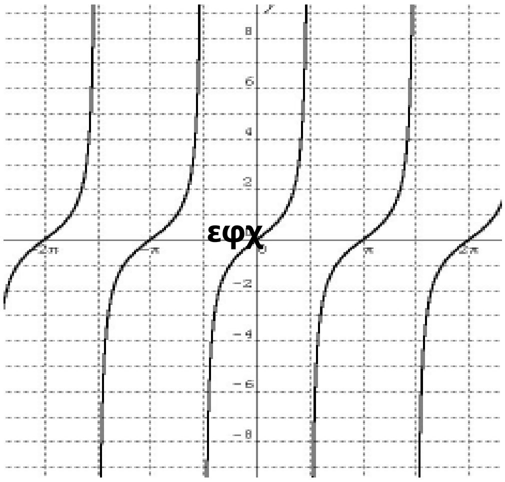


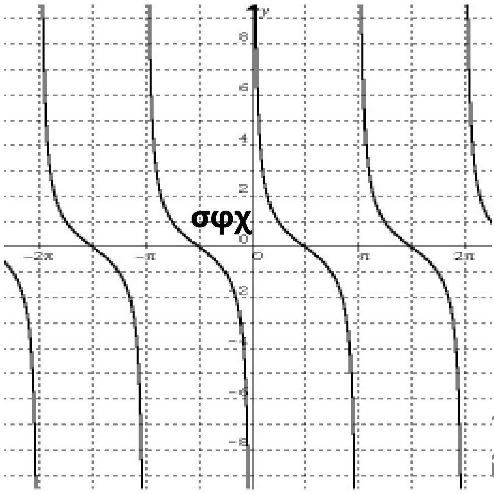
f(x)=συνχ , $x \in R$ $\sigma\upsilon\nu x \in [-1,1]$ **,είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π(rad) και άρτια**



f(x)=εφχ , $x \in R- \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\}, \kappa \in Z$ $\varepsilon\varphi x \in R$ **,είναι περιοδική με περίοδο Τ=π(rad)και περιττή**

f(x)=σφχ , $x \in R- \{\kappa\pi\} \kappa \in Z$ $\sigma\varphi x \in R$ **,είναι περιοδική με περίοδο Τ=π(rad) και περιττή**





ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \alpha \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \alpha \end{cases}, \kappa \in \mathrm{Z}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \alpha \\ \chi = 2\kappa\pi - \alpha \end{cases}, \kappa \in \mathrm{Z}$$

$$\varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\alpha \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \alpha, \chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathrm{Z}$$

$$\sigma\phi\chi = \sigma\phi\alpha \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \alpha, \chi \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathrm{Z}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

συν(α+β)=συνα συνβ-ημα ημβ

ημ(α+β)=ημα συνβ+ ημβ συνα

$$\varepsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha + \varepsilon\phi\beta}{1 - \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}$$

$$\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\alpha + \sigma\phi\beta}$$

συν(α-β)=συνα συνβ+ημα ημβ

ημ(α-β)=ημα συνβ- ημβ συνα

$$\varepsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\phi\alpha - \varepsilon\phi\beta}{1 + \varepsilon\phi\alpha\varepsilon\phi\beta}$$

$$\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΞΟΥ ΣΤΟ ΜΙΣΟ ΤΟΥ

ημ2α=2ημα συνα

συν2α=συν^{2}α-ημ^{2}α=1-2ημ^{2}α=2συν^{2}α-1

$$\varepsilon\phi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\phi\alpha}{1 - \varepsilon\phi^2\alpha}$$

$$\sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΞΟΥ ΣΤΟ ΔΙΠΛΑΣΙΟ ΤΟΥ (ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΗ)

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$$

$$\varepsilon\phi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

$$\sigma\phi^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ(ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ)

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha - \beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta = 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha + \beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\beta = 2\eta\mu\frac{\beta - \alpha}{2}\eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2}$$

ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ
ΟΡΙΣΜΟΣ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$	**ΟΡΙΣΜΟΣ** $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda,\ \lambda \neq 0$
ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$	**ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΟΣ** $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$
α,β,γ διαδοχικοί όροι $\Leftrightarrow 2\beta=\alpha+\gamma$ Ο $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ λέγεται αριθμητικός μέσος	α,β,γ διαδοχικοί όροι $\Leftrightarrow \beta^2=\alpha\gamma$ Ο $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ $S_\nu = \frac{\alpha_1 + \alpha_\nu}{2}\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu$	**ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ** $S_\nu = \begin{cases} \nu\alpha_1, & \lambda = 1 \\ \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1}, & \lambda \neq 1 \end{cases}$
ΓΡΑΦΗ ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ Δ.Ο Α.Π ……χ-3ω, χ-2ω, χ-ω, χ, χ+ω, χ+2ω, χ+3ω,…….	**ΓΡΑΦΗ ΠΕΡΙΤΤΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ Δ.Ο Γ.Π** $\ldots\ldots \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}, x, x\lambda, x\lambda^2, x\lambda^3, \ldots$
ΓΡΑΦΗ ΑΡΤΙΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ Δ.Ο Α.Π ……χ-5ω, χ-3ω, χ-ω, χ+ω, χ+3ω, χ+5ω,…….	**ΓΡΑΦΗ ΑΡΤΙΟΥ ΠΛΗΘΟΥΣ Δ.Ο Γ.Π** $\ldots\ldots \frac{x}{\lambda^5}, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, x\lambda^5, \ldots$

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

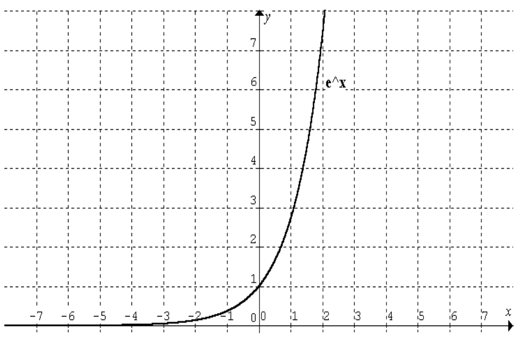
$f(x)=\alpha^{x}$, $0<\alpha\neq 1$

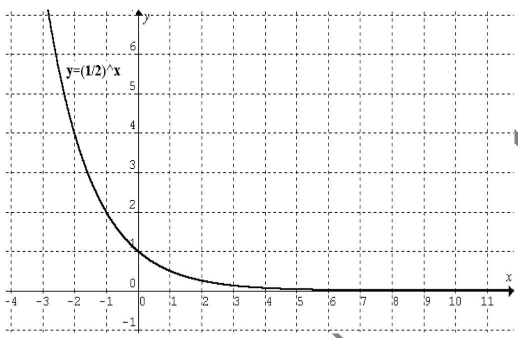
1. Έχει πεδίο ορισμού το R

2. Έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$

3. Είναι 1-1 δηλ.για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in R$ με $\chi_1\neq\chi_2 \Leftrightarrow \alpha^{\chi_1} \neq \alpha^{\chi_2}$ ή $\alpha^{\chi_1} = \alpha^{\chi_2} \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$

4. Είναι $\begin{cases} \text{αν } 0<\alpha<1 \text{ είναι γνησίως φθίνουσα δηλ } \forall\ \chi_1 < \chi_2 (\in R) \Leftrightarrow \alpha^{\chi_1} > \alpha^{\chi_2} \\ \text{αν } \alpha>1 \text{ είναι γνησίως αύξουσα δηλ } \forall\ \chi_1 < \chi_2 (\in R) \Leftrightarrow \alpha^{\chi_1} < \alpha^{\chi_2} \end{cases}$





ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$f(x)=\log_\alpha \chi$ με $0<\alpha\neq 1$ και $\chi>0$

Ορισμός : $\log_\alpha \chi = \psi \Leftrightarrow \alpha^{\psi} = \chi$

1. Έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$

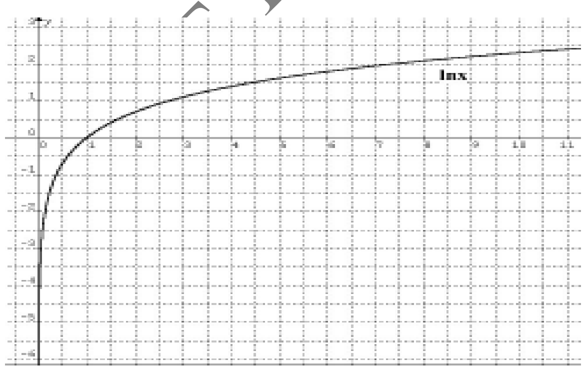
2. Έχει σύνολο τιμών το R

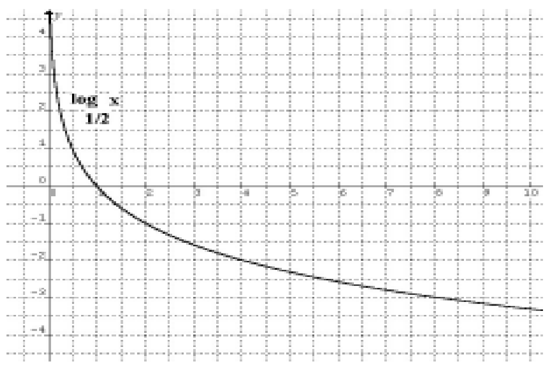
3. Είναι 1-1 δηλ. Για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in (0,+\infty)$ με $\chi_1\neq\chi_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 \neq \log_a x_2$ ή $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow \chi_1 = \chi_2$

4. Είναι $\begin{cases} \text{αν } 0<\alpha<1 \text{ είναι γνησίως φθίνουσα δηλ } \forall\ \chi_1 < \chi_2 (\in (0,+\infty)) \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \\ \text{αν } \alpha>1 \text{ είναι γνησίως αύξουσα δηλ } \forall\ \chi_1 < \chi_2 (\in (0,+\infty)) \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \end{cases}$

Με χ>0 και ψ>0 ισχύει

5. $\log_a 1 = 0$	**6.** $\log_a \alpha = 1$	**7.** $\log_a \alpha^x = x$	**8.** $\alpha^{\log_a x} = x, x>0$
9. $\log_a (x\cdot\psi) = \log_a \chi + \log_a \psi$	**10.** $\log_a (\frac{x}{\psi}) = \log_a \chi - \log_a \psi$	**11.** $\log_a x^{\psi} = \psi \log_a x$	

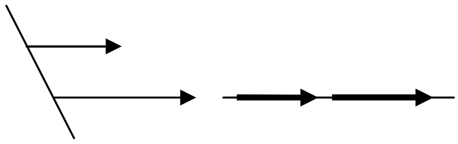




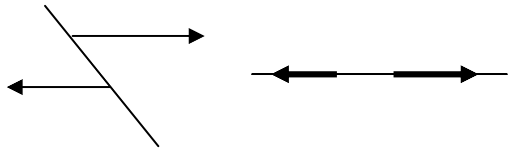
Β ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΟΜΟΡΡΟΠΑ ($\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$)



ΑΝΤΙΡΡΟΠΑ($\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$)



ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Δυο διανύσματα είναι ίσα όταν είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα
$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$

2. $\overrightarrow{\underset{1}{A}\underset{2}{B}} = \overrightarrow{\underset{3}{\Gamma}\underset{4}{\Delta}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\underset{1}{A}\underset{4}{\Delta}}$ και $\overrightarrow{\underset{2}{B}\underset{3}{\Gamma}}$ έχουν κοινό μέσο $\Leftrightarrow$ $\underset{1}{A}\underset{2}{B}\underset{4}{\Delta}\underset{3}{\Gamma}$ είναι παραλληλόγραμμο

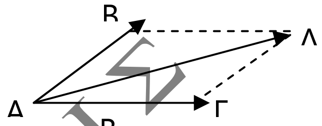
3. $\overrightarrow{\underset{1}{A}\underset{2}{B}} = \overrightarrow{\underset{3}{\Gamma}\underset{4}{\Delta}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\underset{2}{B}\underset{1}{A}} = \overrightarrow{\underset{4}{\Delta}\underset{3}{\Gamma}}$ **4.** $\overrightarrow{\underset{1}{A}\underset{2}{B}} = \overrightarrow{\underset{3}{\Gamma}\underset{4}{\Delta}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\underset{1}{A}\underset{3}{\Gamma}} = \overrightarrow{\underset{2}{B}\underset{4}{\Delta}}$ **5.** $\overrightarrow{\underset{1}{A}\underset{2}{B}} = \overrightarrow{\underset{3}{\Gamma}\underset{4}{\Delta}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\underset{4}{\Delta}\underset{2}{B}} = \overrightarrow{\underset{3}{\Gamma}\underset{1}{A}}$

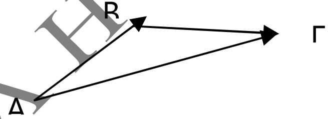
ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Δυο διανύσματα είναι αντίθετα όταν είναι αντίρροπα και έχουν ίσα μέτρα
$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.Ισχύει ότι $|\overrightarrow{AB}| = |-\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

6. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta}$





7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

8. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{AM}$ Μ μέσον του ΒΓ

9. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma B}$ **10.** $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{A\Gamma}$ **11.** $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

12. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ **13.** $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ **14.** $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

15. $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **16.** $\vec{\alpha} + \vec{\chi} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\chi} = \vec{0}$ **17.** $\vec{\alpha} + \vec{\chi} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\chi} = -\vec{\alpha}$

18. $-(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ **1 9.** $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

20. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ομόρροπα **21.** $\big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίρροπα

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ λ ΕΠΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Για $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\lambda \neq 0$ το $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ με $\left|\lambda \cdot \vec{\alpha}\right| = |\lambda| \cdot \left|\vec{\alpha}\right|$ και $\begin{cases} \alpha\nu\ \lambda < 0 \text{ τότε } \lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha} \\ \alpha\nu\ \lambda > 0 \text{ τότε } \lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha} \end{cases}$

Είναι $0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ και $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

21. $0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ **23.** $\lambda(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} \pm \lambda\vec{\beta}$ **24.** $(\lambda \pm \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} \pm \mu\vec{\alpha}$

25. $(\lambda\mu)\vec{\alpha} = (\mu\lambda)\vec{\alpha} = \mu(\lambda\vec{\alpha})$ **26.** $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ **27.** $(-\lambda)\vec{\alpha} = -(\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha})$

28. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ **29.** $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

$$\text{Α}\nu\ \vec{\beta} \neq \vec{0} \text{ και } \begin{cases} \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \lambda = \dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\beta}\right|} > 0 \text{ ώστε } \vec{\alpha} = \lambda\,\vec{\beta} \\ \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \lambda = -\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\beta}\right|} < 0 \text{ ώστε } \vec{\alpha} = \lambda\,\vec{\beta} \\ \vec{\alpha} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \lambda = 0 \text{ ώστε } \vec{\alpha} = 0\,\vec{\beta} \end{cases}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

30. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ όχι συγγραμμικά και λ $\vec{\alpha}$ +μ $\vec{\beta}$ $= \vec{0}$ τότε λ=μ=0

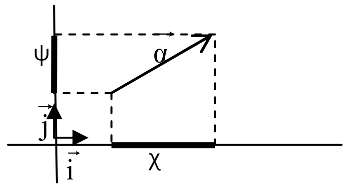
31. Αν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ΒΓ} + \overrightarrow{ΓΑ} = \vec{0}$ τότε $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ΒΓ}, \overrightarrow{ΓΑ}$ σχηματίζουν τρίγωνο ή είναι συγγραμμικά

32. Δύο σημεία Α ,Β συμπίπτουν όταν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ ή $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

33. Τρία σημεία Α, Β ,Γ είναι συνευθειακά όταν $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ΒΓ}$ είναι συγγραμμικά (παράλληλα) δηλ $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{ΒΓ}$,$\lambda \in$ R

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j})$ είναι δυο κάθετες ευθείες (οριζόντιος άξονας χ΄χ και κατακόρυφος άξονας ψ΄ψ) με αρχή Ο , στους οποίους θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}$ με $\left|\vec{i}\right| = 1, \left|\vec{j}\right| = 1$. Για κάθε διάνυσμα του επιπέδου που ορίζουν οι άξονες υπάρχουν πάνω στους άξονες μοναδικοί αριθμοί χ ,$\psi \in$ R ώστε $\vec{\alpha} = \chi\vec{i} + \psi\,\vec{j}$ και λέγονται συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$ και γράφουμε $\vec{\alpha} = (\chi, \psi)$



Έστω $\vec{\alpha}$ =(χ_1,ψ_1) και $\vec{\beta}$ =(χ_2,ψ_2) Τότε

34. $\left|\vec{\alpha}\right| = \left|\vec{\beta}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_1 = \chi_2 \\ \psi_1 = \psi_2 \end{cases}$

35. $\left|\vec{\alpha}\right| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

36. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (\chi_1 + \chi_2, \psi_1 + \psi_2)$

37. Με $\lambda \in R$ τότε $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(\chi_1, \psi_1) = (\lambda\chi_1, \lambda\psi_1)$

38. Αν $A(\chi_A, \psi_A)$, $B(\chi_B, \psi_B)$ τότε

i) $\vec{OA} = (\chi_A, \psi_A)$ και $\vec{OB} = (\chi_B, \psi_B)$

ii) $\vec{AB} = (\chi_B - \chi_A, \psi_B - \psi_A)$

iii) $\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_B - \chi_A)^2 + (\psi_B - \psi_A)^2}$

iv) Αν Μ μέσον του ΑΒ τότε $M\left(\frac{\chi_A + \chi_B}{2}, \frac{\psi_A + \psi_B}{2}\right)$ και $\vec{OM} = \left(\frac{\chi_A + \chi_B}{2}, \frac{\psi_A + \psi_B}{2}\right)$

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Έστω $\vec{\alpha} = (\chi_\alpha, \psi_\beta)$ και $\vec{\beta} = (\chi_\alpha, \psi_\beta)$ τότε

39. $\vec{\alpha}$ παράλληλο $\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \chi_\alpha & \psi_\alpha \\ \chi_\beta & \psi_\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \chi_\alpha\psi_\beta - \chi_\beta\psi_\alpha = 0 \Leftrightarrow$ αν $\chi_\alpha \neq 0, \chi_\beta \neq 0$ τότε

$\frac{\psi_\alpha}{\chi_\alpha} = \frac{\psi_\beta}{\chi_\beta}$

40. Αν $\chi_\alpha \neq 0$ το $\lambda_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\chi_\alpha}$ ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$

αν $\chi_\alpha = 0$ οπότε $\vec{\alpha}$ κάθετο στον χ΄χ τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$

αν $\psi_\alpha = 0$ τότε $\vec{\alpha}$ παράλληλο χ΄χ και ο συντελεστής διεύθυνσης είναι λ=0

αν $\vec{\alpha}$ παράλληλο $\vec{\beta}$ και $\chi_\alpha \neq 0$, $\chi_\beta \neq 0$ τότε $\lambda_\alpha = \lambda_\beta \Leftrightarrow \frac{\psi_\alpha}{\chi_\alpha} = \frac{\psi_\beta}{\chi_\beta}$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ $\vec{v}$ ΣΕ ΔΥΟ ΣΥΝΙΣΤΩΣΕΣ $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Σημαίνει ότι ψάχνουμε $\lambda, \mu \in R$ ώστε

$$\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \Leftrightarrow (\chi_v, \psi_v) = (\lambda\chi_\alpha + \mu\chi_\beta, \lambda\psi_\alpha + \mu\psi_\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_v = \lambda\chi_\alpha + \mu\chi_\beta \\ \psi_v = \lambda\psi_\alpha + \mu\psi_\beta \end{cases}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$

Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ τότε

$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \chi_1\chi_2 + \psi_1\psi_2$ και $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{\beta}\right|} = \frac{\chi_1\chi_2 + \psi_1\psi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \psi_1^2}\sqrt{\chi_2^2 + \psi_2^2}}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$

2. $(\lambda\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\lambda\vec{\beta})$

3. $\vec{\alpha}(\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha}\,\vec{\beta} + \vec{\alpha}\,\vec{\gamma}$

4. $\vec{\alpha}^2 = \vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2$ Προσοχή δεν ορίζονται δυνάμεις με μεγαλύτερο εκθέτη

5. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$

6. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = \vec{\beta}\,\vec{\gamma}$. Προσοχή $\vec{\alpha}\,\vec{\gamma} = \vec{\beta}\,\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$ μόνο αν $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ όχι κάθετο στο $\vec{\gamma}$ και $\vec{\gamma} \le \vec{0}$

7. $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

8. $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

9. ισχύουν οι γνωστές τετραγωνικές ταυτότητες

α) $(\vec{\alpha} \pm \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \pm 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$

β) $\vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

γ) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}\cdot\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$

10. Προσοχή ΔΕΝ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα δηλ. $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma} \neq \vec{\alpha}(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$

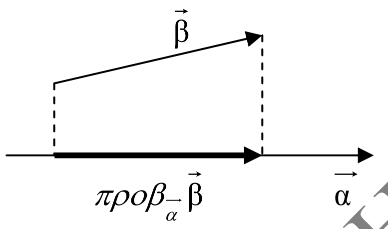
11. Προσοχή $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 \neq \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ είναι $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ μόνο αν $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$

ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Αν $\vec{\alpha} = (\chi_\alpha, \psi_\alpha) \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} = (\chi_\beta, \psi_\beta) \neq \vec{0}$ Τότε

$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \chi_\alpha\chi_\beta + \psi_\alpha\psi_\beta = 0 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\cdot\lambda_{\vec{\beta}} = -1$ αν $\chi_\alpha \neq 0, \chi_\beta \neq 0$

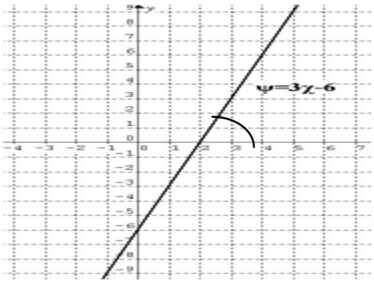
ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

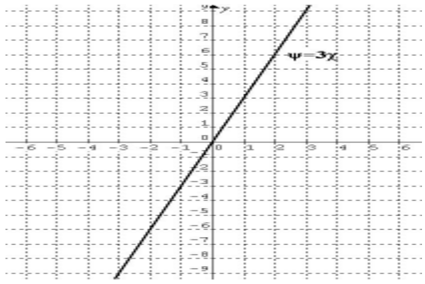


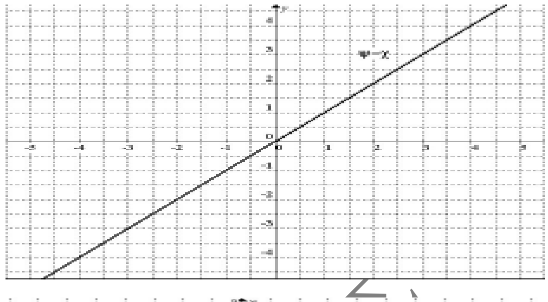
Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \vec{\alpha}\cdot(\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}) = \vec{\beta}\cdot(\pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha})$

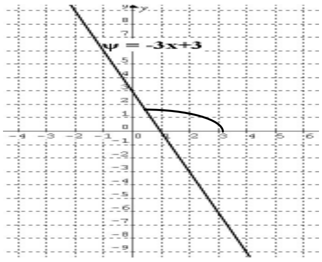
$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Rightarrow \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \pi\rho o\beta_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \vec{0}$

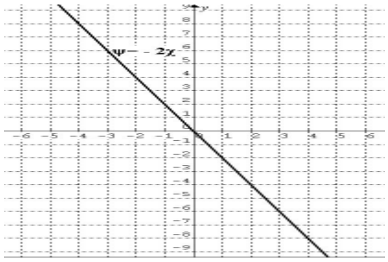
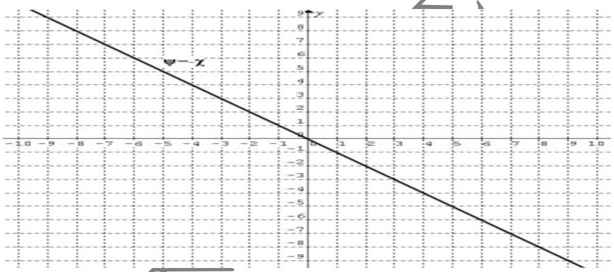
ΕΥΘΕΙΑ









ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ (λ)

1. $\lambda = \varepsilon\varphi\omega\,, \omega \neq \frac{\pi}{2}$ Αν $\omega = \frac{\pi}{2}$ τότε $(\varepsilon) \perp \chi'\chi$ και δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης

2. Αν $A(\chi_A, \psi_A)\,, B(\chi_B, \psi_B)$ και $\chi_A \neq \chi_B$ τότε $\lambda_{AB} = \frac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A} = \frac{\psi_A - \psi_B}{\chi_A - \chi_B}$

Αν $\chi_A = \chi_B$ τότε ευθεία $AB \perp \chi'\chi$ και δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης

3. $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$

4. $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$

5. Αν η ευθεία έχει εξίσωση ψ =αχ +β τότε λ =α

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

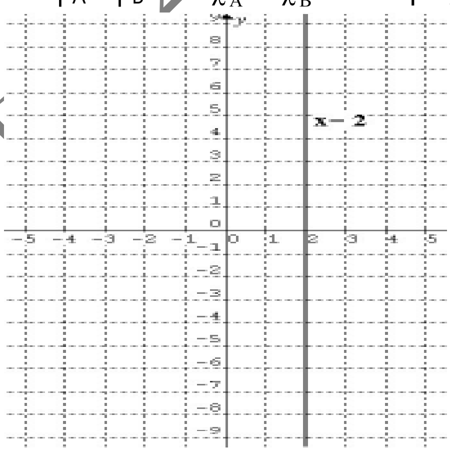
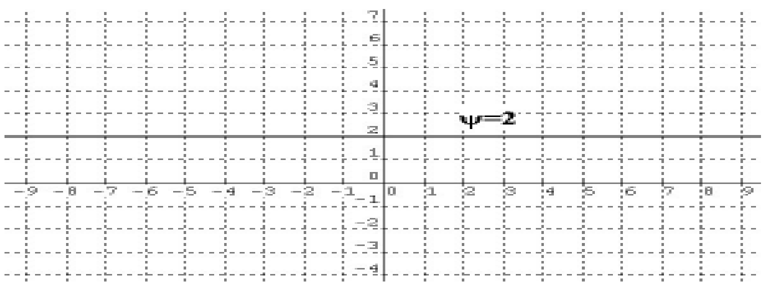
1. Με γνωστό το λ και ένα σημείο $A(\chi_A,\psi_A)$ τότε η εξίσωση είναι : $\boldsymbol{\psi-\psi_A=\lambda(\chi-\chi_A)}$

2. Με γνωστά δύο σημεία $A(\chi_A,\psi_A)$ και $B(\chi_B,\psi_B)$

i. Αν $\chi_A \neq \chi_B$ τότε $\lambda_{AB} = \frac{\psi_B - \psi_A}{\chi_B - \chi_A}$ και η εξίσωση AB είναι : $\psi - \psi_A = \lambda_{AB}(\chi - \chi_A)$ ή $\psi - \psi_B = \lambda_{AB}(\chi - \chi_B)$

ii. Αν $\chi_A=\chi_B$ τότε η εξίσωση AB είναι : $\chi=\chi_A$ και είναι κάθετη στον χ΄χ

iii) Αν $\psi_A=\psi_B$ και $\chi_A \neq \chi_B$ τότε η εξίσωση AB είναι : $\psi=\psi_A$ και είναι παράλληλη στον χ΄χ

ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Αχ+Βψ+Γ=0 με $\mathrm{A} \neq 0$ ή $\mathrm{B} \neq 0$

Η ευθεία Αχ+Βψ+Γ=0 είναι ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ στο διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$

Η ευθεία Αχ+Βψ+Γ=0 είναι ΚΑΘΕΤΗ στο διάνυσμα $\vec{V} = (A, B)$

ΟΞΕΙΑ ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ

Αν ($ε_1$): $Α_1χ+Β_1ψ+Γ_1=0$ (// $\overrightarrow{u_1} = (B_1, -A_1)$) και ($ε_2$): $Α_2χ+Β_2ψ+Γ_2=0$ (// $\overrightarrow{u_2} = (B_2, -A_2)$).

Τότε για την οξεία γωνία φ των ($ε_1$), ($ε_2$) ισχύει $\sigma\upsilon\nu\phi = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

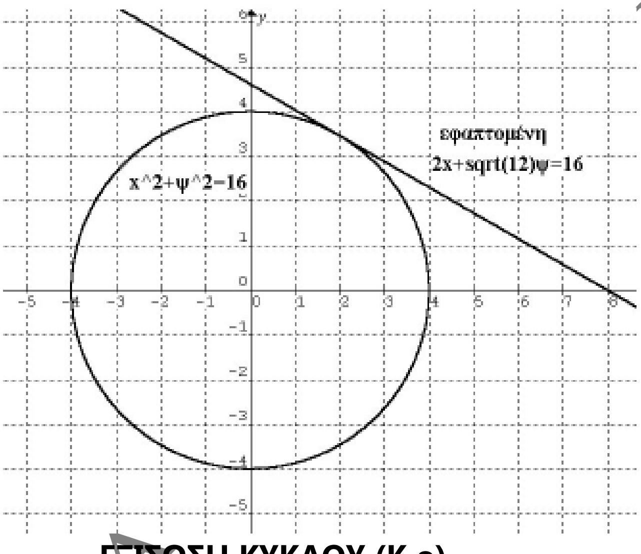
ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ Μ($χ_Μ$,$ψ_Μ$) ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ (ε):Αχ+Βψ+Γ=0

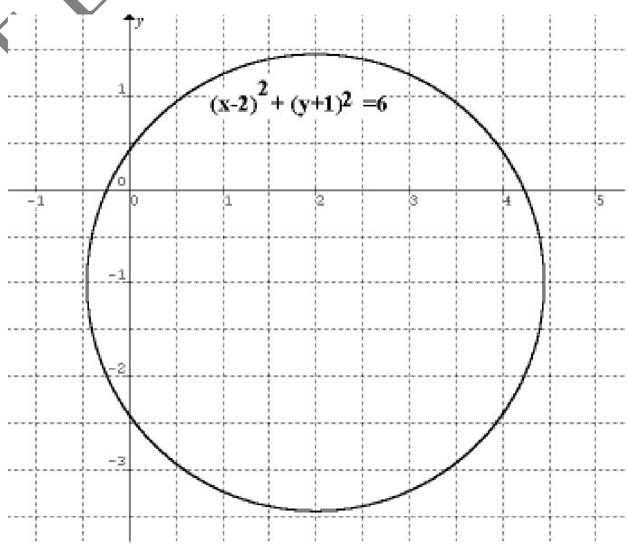
$$d(M, (\varepsilon)) = \frac{\left|\mathrm{A}\chi_{\mathrm{M}} + \mathrm{B}\psi_{\mathrm{M}} + \Gamma\right|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΒΓ ΜΕ Α($χ_Α$,$ψ_Α$), Β($χ_Β$,$ψ_Β$) Γ($χ_Γ$,$ψ_Γ$)

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}})\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathrm{x_B - x_A} & \psi_\mathrm{B} - \psi_\mathrm{A} \\ \mathrm{x_\Gamma - x_A} & \psi_\Gamma - \psi_\mathrm{A} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(\mathrm{x_B - x_A})(\psi_\Gamma - \psi_\mathrm{A}) - (\psi_\mathrm{B} - \psi_\mathrm{A})(\mathrm{x}_\Gamma - \mathrm{x_A})\right|$$

ΚΥΚΛΟΣ





ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ (Κ,ρ)

$$\begin{cases} \chi^2 + \psi^2 = \rho^2 \text{ αν } \mathrm{K}(0,0) \\ (\chi - \chi_0)^2 + (\psi - \psi_0)^2 = \rho^2 \text{ αν } \mathrm{K}(\chi_0, \psi_0) \end{cases}$$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ (ε) ΚΥΚΛΟΥ (Κ,ρ) ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ Α($χ_Α$,$ψ_Α$)

$$\begin{cases} \mathrm{xx_A} + \psi\psi_\mathrm{A} = \rho^2 \text{ αν } \mathrm{K}(0,0) \\ (\chi - \chi_0)(\chi_\mathrm{A} - \chi_0) + (\psi - \psi_0)(\psi_\mathrm{A} - \psi_0) = \rho^2 \text{ αν } \mathrm{K}(\chi_0, \psi_0) \\ \text{Γενικά } \mathrm{d}(\mathrm{K}, (\varepsilon)) = \rho \end{cases}$$

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΚΥΚΛΟΥ

$χ^2+ψ^2$+Αχ+Βψ+Γ=0 όταν $Α^2+Β^2$-4Γ>0 με κέντρο το $\mathrm{K}(-\frac{\mathrm{A}}{2}, -\frac{\mathrm{B}}{2})$ και ακτίνα $\rho = \dfrac{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 - 4\Gamma}}{2}$

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

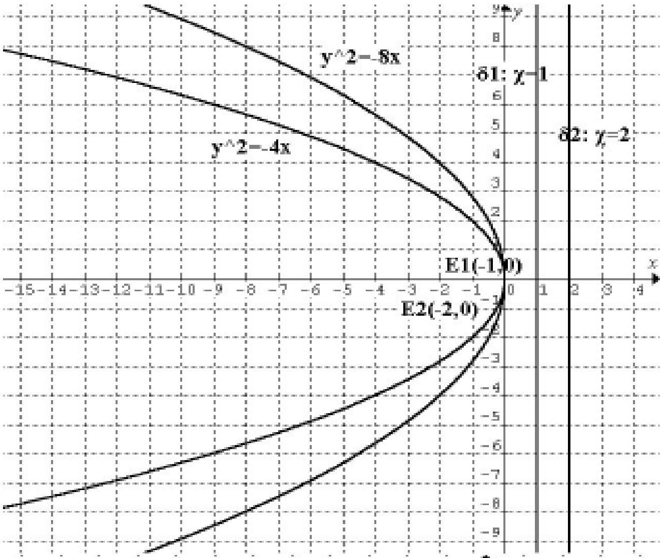
Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ισαπέχουν από σταθερή ευθεία (δ) (διευθετούσα)και από ένα σταθερό σημείο Ε (εστία)

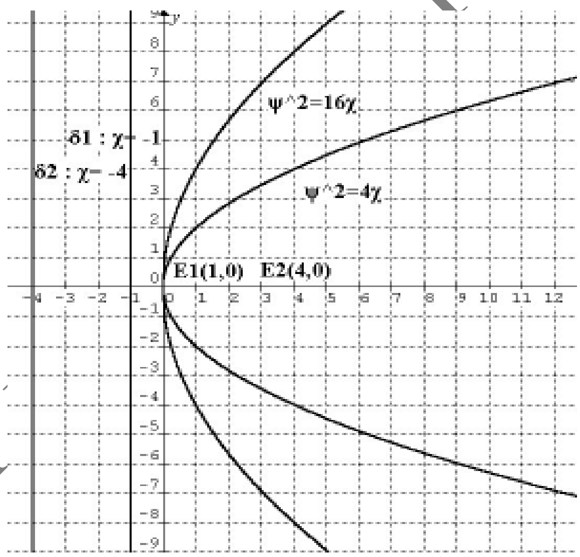
ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

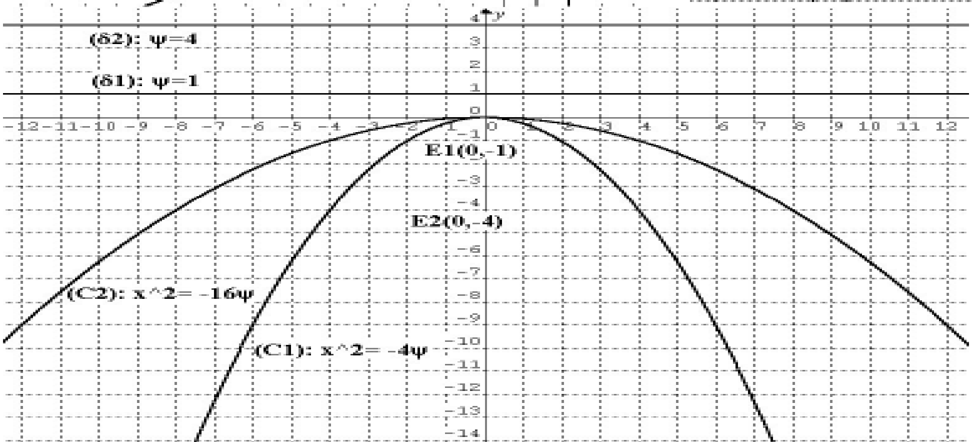
$$\begin{cases} \psi^2 = 2\rho\chi \text{ αν } E \in \chi'\chi \text{ και } E(\frac{\rho}{2},0) \text{ και } (\delta): \chi = -\frac{\rho}{2} \text{ και έχει άξονα συμμετρίας τον } \chi'\chi \\ \chi^2 = 2\rho\psi \text{ αν } E \in \psi'\psi \text{ και } E(0,\frac{\rho}{2}) \text{ και } (\delta): \psi = -\frac{\rho}{2} \text{ και έχει άξονα συμμετρίας τον } \psi'\psi \end{cases}$$

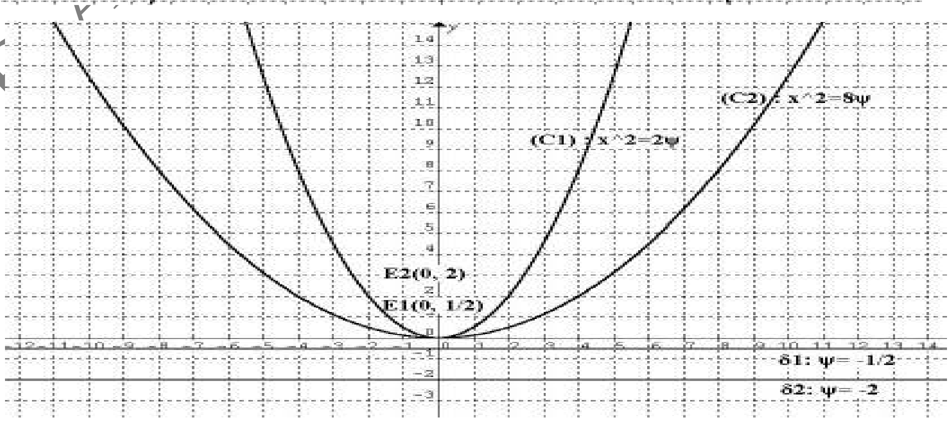
ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ Α(χ_A,ψ_A)

$$\begin{cases} \psi\psi_A = \rho(\chi + \chi_A) \text{ αν } \psi^2 = 2\rho\chi \\ \chi\chi_A = \rho(\psi + \psi_A) \text{ αν } \chi^2 = 2\rho\psi \end{cases}$$









ΕΛΛΕΙΨΗ

Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ ώστε το άθροισμα των αποστάσεων τους από δυο σταθερά σημεία Ε΄ , Ε (εστίες) να είναι σταθερό και μεγαλύτερο από (Ε΄Ε)=2γ,δηλ.(ΜΕ΄)+(ΜΕ)=2α ,2α>2γ

Εστιακή απόσταση:(Ε΄Ε)=2γ .Μεγάλος άξονας :(Α΄Α) =2α. Μικρός άξονας:(Β΄Β) =2β με $\beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

$$\text{με } \alpha>\beta \begin{cases} \dfrac{\chi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1 \text{ με } \mathrm{E}'(-\gamma,0), \mathrm{E}(\gamma,0), \mathrm{A}'(-\alpha,0), \mathrm{A}(\alpha,0), \mathrm{B}'(0,-\beta), \mathrm{B}(0,\beta) \\ \dfrac{\psi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\chi^2}{\beta^2}=1 \text{ με } \mathrm{E}'(0,-\gamma), \mathrm{E}(0,\gamma), \mathrm{A}'(0,-\alpha), \mathrm{A}(0,\alpha), \mathrm{B}'(-\beta,0), \mathrm{B}(\beta,0) \end{cases}$$

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΕΛΛΕΙΨΗΣ

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha} \;,\; 0<\varepsilon<1 \text{ και ισχύει } \frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

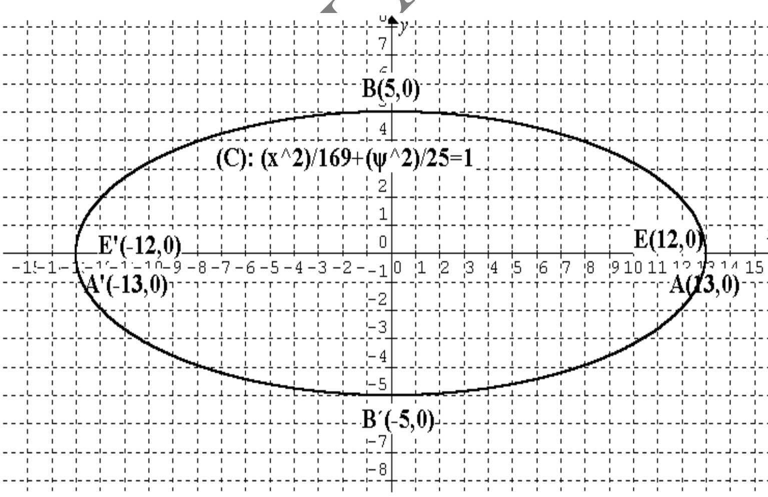
ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΕΛΛΕΙΨΗΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ Α(χ_A,ψ_A)

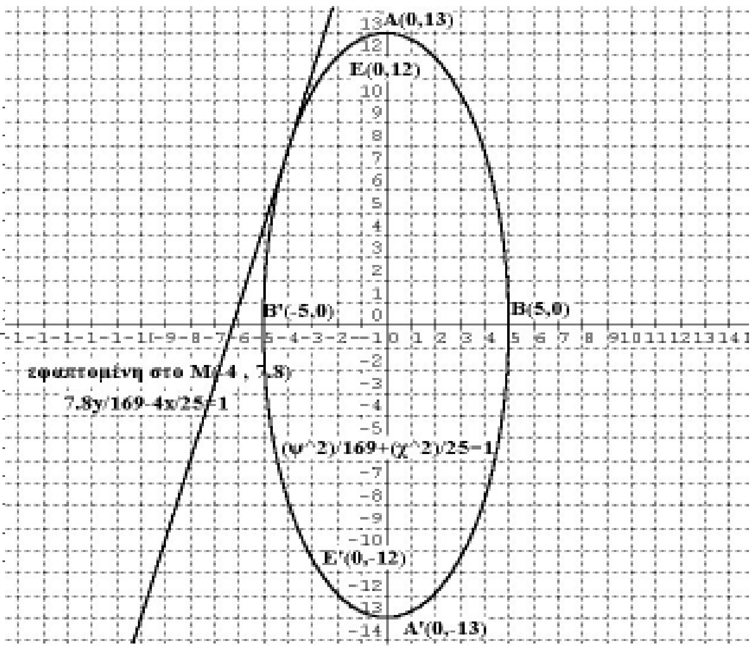
$$\text{με } \alpha>\beta \begin{cases} \dfrac{\chi\chi_A}{\alpha^2}+\dfrac{\psi\psi_A}{\beta^2}=1 \text{ αν } \dfrac{\chi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1 \\ \dfrac{\psi\psi_A}{\alpha^2}+\dfrac{\chi\chi_A}{\beta^2}=1 \text{ αν } \dfrac{\psi^2}{\alpha^2}+\dfrac{\chi^2}{\beta^2}=1 \end{cases}$$

παρατήρηση :

Η έλλειψη έχει άξονες συμμετρίας τους χ΄χ και ψ΄ψ και κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0)

Ονομάζουμε διάμετρο της έλλειψης το ευθύγραμμο τμήμα ΑΟΒ με Α,Β σημεία της έλλειψης





ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που η απόλυτη τιμή των αποστάσεων τους από δυο σταθερά σημεία Ε΄ ,Ε (εστίες) είναι σταθερή και μικρότερη από (Ε΄Ε)=2γ,δηλ. $|(\mathrm{ME}') - (\mathrm{ME})| = 2\alpha$ 2α<2γ Εστιακή απόσταση (Ε΄Ε)=2γ.Απόσταση κορυφών (Α΄Α) =2α και $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

$$\begin{cases} \dfrac{\chi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \mathrm{E}'(-\gamma,0)\ ,\mathrm{E}(\gamma,0)\ ,\mathrm{A}'(-\alpha,0)\ ,\mathrm{A}(\alpha,0) \\[2ex] \dfrac{\psi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\chi^2}{\beta^2} = 1 \text{ με } \mathrm{E}'(0,-\gamma)\ ,\mathrm{E}(0,\gamma)\ ,\mathrm{A}'(0,-\alpha)\ ,\mathrm{A}(0,\alpha) \end{cases}$$

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

$$\begin{cases} \text{αν } \dfrac{\chi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \text{ τότε ασύμπτωτες είναι οι } \psi = -\dfrac{\beta}{\alpha}\chi \text{ και } \psi = \dfrac{\beta}{\alpha}\chi \\[2ex] \dfrac{\psi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\chi^2}{\beta^2} = 1 \text{ τότε ασύμπτωτες είναι οι } \psi = -\dfrac{\alpha}{\beta}\chi \text{ και } \psi = \dfrac{\alpha}{\beta}\chi \end{cases}$$

ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}\ ,\ \varepsilon > 1 \text{ και ισχύει } \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$$

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ ΕΠΑΦΗΣ Α(χ_A,ψ_A)

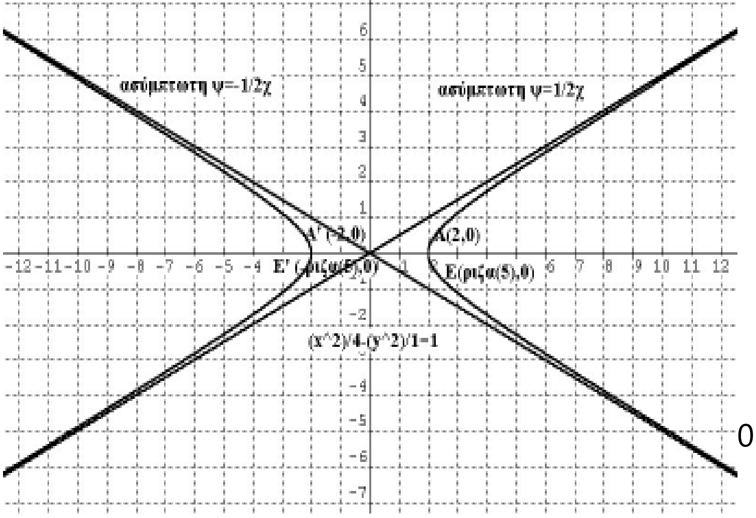
$$\begin{cases} \dfrac{\chi\chi_A}{\alpha^2} - \dfrac{\psi\psi_A}{\beta^2} = 1 \text{ αν } \dfrac{\chi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \\[2ex] \dfrac{\psi\psi_A}{\alpha^2} - \dfrac{\chi\chi_A}{\beta^2} = 1 \text{ αν } \dfrac{\psi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\chi^2}{\beta^2} = 1 \end{cases}$$

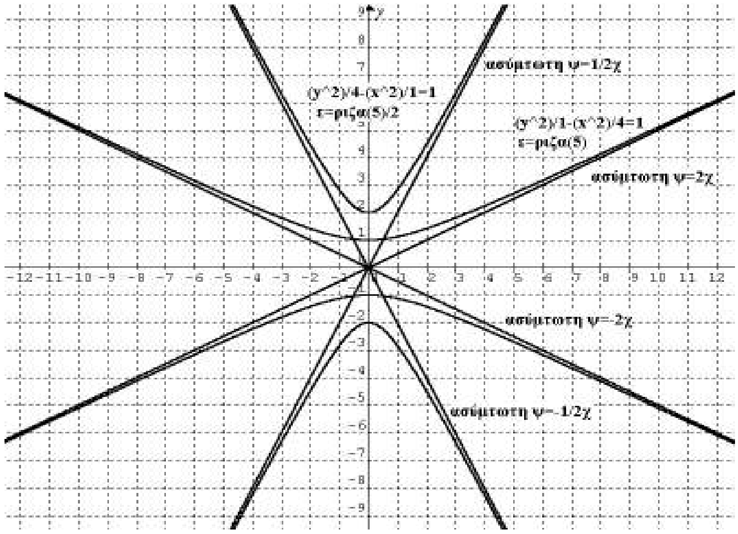
παρατήρηση :

- Η υπερβολή έχει άξονες συμμετρίας τους χ΄χ και ψ΄ψ και κέντρο συμμετρίας το Ο(0,0)
- Το ορθογώνιο βάσης σχηματίζεται

$$\begin{cases} \text{για την } \dfrac{\chi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\psi^2}{\beta^2} = 1 \text{ απο τις ευθείες } \chi = \alpha, \chi = -\alpha\ , \psi = \beta\ , \psi = -\beta \\[2ex] \text{για την } \dfrac{\psi^2}{\alpha^2} - \dfrac{\chi^2}{\beta^2} = 1 \text{ απο τις ευθείες } \psi = \alpha, \psi = -\alpha\ , \chi = \beta, \chi = -\beta \end{cases}$$

και οι διαγώνιες του δίνουν τις ασύμπτωτες της υπερβολής





ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Αν θέλουμε να αποδείξουμε μια πρόταση ότι ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν (ή με $\nu \geq \mu$)

Τότε : 1)Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για ν=1 (ή ν=μ)

2)Υποθέτοντας ότι ισχύει για ν=κ τυχαίο

3)Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για ν=κ+1

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

Αν α,β ακέραιοι με $\beta \neq 0$,τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι κ ,υ ώστε

$\alpha = \beta \cdot \kappa + \upsilon$ με $0 \leq \upsilon < |\beta|$

Έτσι κάθε ακέραιος α γράφεται

$$\begin{cases} \text{διαιρούμενος με 2 },\alpha = 2\kappa \text{ ή } \alpha = 2\kappa + 1 \\ \text{διαιρούμενος με 3 },\alpha = 3\kappa \text{ ή } \alpha = 3\kappa + 1 \text{ ή } \alpha = 3\kappa + 2 \\ \text{διαιρούμενος με 4 },\alpha = 4\kappa \text{ ή } \alpha = 4\kappa + 1 \text{ ή } \alpha = 4\kappa + 2 \text{ ή } \alpha = 4\kappa + 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{διαιρούμενος με } \beta \text{ },\alpha = \beta\kappa \text{ ή } \alpha = \beta\kappa + 1 \text{ ή } \alpha = \beta\kappa + 2 \text{ ή} \dots\dots\dots \alpha = \beta\kappa + |\beta| - 1 \end{cases}$$

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

Ορισμός :Αν α ,β$\in Z$,με α$\neq$0,τότε ο α διαιρεί τον β και συμβολικά α/β όταν υπάρχει κ$\in Z$ ώστε β=κα

Ιδιότητες

1. α/β τότε $\pm$α/$\pm$β	2. $\pm$1/α για κάθε α$\in Z$
3. $\pm$α/α για κάθε α$\in Z^*$	4. α/0 για κάθε α$\in Z^*$
5. α/β$\Leftrightarrow$λα/λβ για κάθε λ$\in Z^*$	6. Αν α/β και β/α τότε α=β ή α=-β
7. Αν α/β και β/γ τότε α/γ	8. Αν α/β τότε α/λβ για κάθε λ$\in Z$
9. Αν α/β και α/γ τότε α/(β+γ)	10. Αν α/β και α/γ τότε α/(κβ+λγ) για κάθε κ,λ$\in Z$
11. Αν α/β με β $\in Z^*$ τότε $\|\alpha\| \leq \|\beta\|$	

Μ.Κ.Δ-Ε.Κ.Π

Ορισμός Μ.Κ.Δ:

Αν α.β $\in Z$,με έναν τουλάχιστον όχι 0,τότε ο Μ.Κ.Δ των α,β είναι ο (α ,β) =δ ώστε

$$\begin{cases} 1)\ \delta > 0 \\ 2)\ \delta/\alpha \text{ και } \delta/\beta \\ 3)\ \text{αν } \kappa/\alpha \text{ και } \kappa/\beta \text{ τότε } |\kappa| \leq \delta \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 1)\ \delta > 0 \\ 2)\ \alpha = \text{πολ}.\delta \text{ και } \beta = \text{πολ}.\delta \\ 3)\ \text{αν } \alpha = \text{πολ}.\kappa \text{ και } \beta = \text{πολ}.\kappa \text{ τότε } |\kappa| \leq \delta \end{cases}$$

Ορισμός Ε.Κ.Π

Αν α.β $\in Z^*$,τότε ο Ε.Κ.Π των α,β είναι ο [α ,β] =ε ώστε

$$\begin{cases} 1)\ \varepsilon > 0 \\ 2)\ \alpha/\varepsilon \text{ και } \beta/\varepsilon \\ 3)\ \text{αν } \alpha/\kappa \text{ και } \beta/\kappa \text{ τότε } \varepsilon \leq |\kappa| \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 1)\ \varepsilon > 0 \\ 2)\ \varepsilon = \text{πολ}.\alpha \text{ και } \varepsilon = \text{πολ}.\beta \\ 3)\ \text{αν } \kappa = \text{πολ}.\alpha \text{ και } \kappa = \text{πολ}.\beta \text{ τότε } \varepsilon \leq |\kappa| \end{cases}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Ο z=α+βi με $\alpha,\beta \in R$ λέγεται μιγαδικός το i είναι η φανταστική μονάδα και $i^2=-1$
Το α=Re(z) και λέγεται πραγματικό μέρος του Ζ , το β=Im(z) και λέγεται φανταστικό μέρος του Ζ

Δυνάμεις του i : $i^{\nu} = \begin{cases} 1 \text{ αν } \nu=4\kappa \\ i \text{ αν } \nu=2\kappa+1 \\ -1 \text{ αν } \nu=2\kappa+2 \\ -i \text{ αν } \nu=2\kappa+3 \end{cases}$

Αν $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ και $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$

Τότε $z_1+z_2=\alpha_1+\alpha_2+(\beta_1+\beta_2)i$

$z_1-z_2=\alpha_1-\alpha_2+(\beta_1-\beta_2)i$

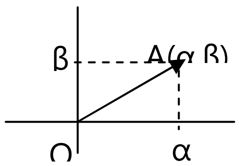
$z_1z_2=\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$

$(z_1)^{\nu}== z_1\, z_1\, z_1\, z_1\, z_1\, z_1\, z_1 \ldots\ldots z_1$,ν θετικός ακέραιος και αν $z \neq 0$ τότε $z^0=1$

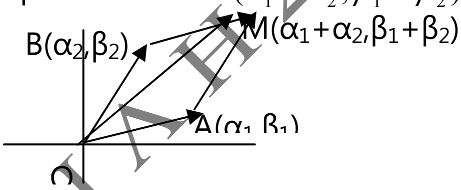
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}=\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}{(\alpha_2+\beta_2 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\beta_1\alpha_2-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}i$$

$z_1=z_2 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1=\beta_2$

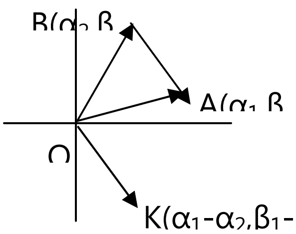
Γεωμετρικά ο z=α+βi παριστάνει το σημείο Α(α,β) ή την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OA}=(\alpha,\beta)$



Γεωμετρικά ο $z_1+z_2=\alpha_1+\alpha_2+(\beta_1+\beta_2)i$ παριστάνει το σημείο $M(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$ ή την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2)$ σύμφωνα με τον κανόνα παρ/μου



Γεωμετρικά ο $z_1-z_2=\alpha_1-\alpha_2+(\beta_1-\beta_2)i$ παριστάνει το σημείο $K(\alpha_1-\alpha_2,\beta_1-\beta_2)$ ή την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OK}=(\alpha_1-\alpha_2,\beta_1-\beta_2)$ ή το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$



ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ

Αν z=α+βi με α,β $\in R$ τότε ο συζυγής του είναι $\bar{z}$ =α-βi με α,β $\in R$

Ιδιότητες συζυγών

1. $\bar{\bar{z}} = z$	**2.** $z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$	**3.** $z+\bar{z}=2\alpha$	**4.** $z-\bar{z}=2\beta i$
5. $z \in R \Leftrightarrow \bar{z} = z$	**6.** $z \in I \Leftrightarrow \bar{z} = -z$	**7.** $\overline{z_1 + z_2 + ... + z_\nu} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ...+$	**8.** $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \cdots$
9. $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$	**10.** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$		

ΜΕΤΡΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Αν z=α+βi με α,β $\in R$,τότε μέτρο του z είναι η απόσταση του γεωμετρικού του σημείου από το O(0,0) δηλ. $|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \geq 0$

Ιδιότητες μέτρου

1. $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$	**2.** $|z^2| = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$	**3.** $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$	**4.** $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots\cdots$
5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, z_2 \neq 0$	**6.** $z \in R \Leftrightarrow |z^2| = |z|^2 = z^2$	**7.** $z \in I \Leftrightarrow |z^2| = |z|^2 = -z^2$	

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$ >0 με z,z_0 $\in$ C είναι κύκλος κέντρου Κ(z_0) ακτίνας ρ

Αν z_0=α+βi τότε η αναλυτική εξίσωση του κύκλου είναι $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2 = \rho^2$

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΥ

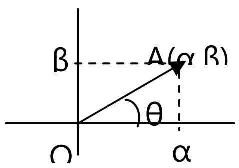
Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ με z ,z_1 ,z_2 $\in$ C είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με Α(z_1), Β(z_2)

Για να βρούμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου θέτουμε z=χ+ψi και λύνουμε την εξίσωση ή Βρίσκουμε το λ_{AB} και μετά το λ της μεσοκαθέτου από τον τύπο $\lambda_{\mu\varepsilon\sigma o\kappa.} \cdot \lambda_{AB} = -1$.Βρίσκουμε και το μέσον Μ του ΑΒ ,Μ($\frac{\chi_A + \chi_B}{2}, \frac{\psi_A + \psi_B}{2}$) οπότε η ευθεία της μεσοκαθέτου είναι $\psi-\psi_M = \lambda_{\mu\varepsilon\sigma o\kappa.}(\chi-\chi_M)$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ

Αν z=α+βi ($\neq 0$)με α,β $\in R$, Τότε η μορφή του **z =ρ(συνθ+i ημθ) ,ρ>0** λέγεται τριγωνομετρική μορφή του z και είναι ρ=$|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ >0 και θ=arg(z) (όρισμα του z) τέτοια ώστε συνθ=$\frac{Re(z)}{|z|}$ **και** ημθ=$\frac{Im(z)}{|z|}$

Αν θ$\in$[0 ,2π] τότε λέγεται πρωτεύον όρισμα του z και συμβολίζεται με θ=Arg(z).Η γωνία θ είναι η γωνία που σχηματίζει η διανυσματική ακτίνα $\overline{OA}$ του z με τον χ΄χ άξονα και άρα γεωμετρικά δίνει την **ημιευθεία** πάνω στην οποία βρίσκεται ο z



Αν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1)$,$\rho_1>0$ και $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_2)$,$\rho_2>0$

Τότε $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2))$ και $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\text{συν}(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2))$ και

$(z_1)^{\nu} = \rho_1^{\nu}(\text{συν}(\nu\theta_1) + i\,\text{ημ}(\nu\theta_1))$ (τύπος de Moivre)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ (f):λέγεται κάθε απεικόνιση–σχέση –τύπος ώστε σε κάθε ένα $\chi \in$ Π.Ο$_f$ (πεδίο ορισμού της) να αντιστοιχίζεται –να παίρνουμε **ένα μόνο** $\psi \in$ Σ.Τ $_f$ (σύνολο τιμών της)

Αν Π.Ο$_f \subseteq$ R και Σ.Τ$_f \subseteq$ R τότε έχουμε πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Ισότητα συναρτήσεων: f=g $\Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \Pi.O_f = \Pi.O_g = A \\ 2)\ \forall x \in A \text{ ισχυει } f(x)=g(x) \end{cases}$

Άρτια συνάρτηση:f άρτια όταν για κάθε x∈Π.Ο $_f$ ισχύει $\begin{cases} 1)\ -x \in \Pi.O_f \\ 2)\ f(-x)=f(x)\ \forall x \in \Pi.O_f \end{cases}$

Περιττή συνάρτηση :f περιττή όταν για κάθε x∈Π.Ο $_f$ ισχύει $\begin{cases} 1)\ -x \in \Pi.O_f \\ 2)\ f(-x)= -f(x)\ \forall x \in \Pi.O_f \end{cases}$

Περιοδική συνάρτηση :f περιοδική με περίοδο Τ ∈R* όταν για κάθε x ∈Π.Ο$_f$ ισχύει

$\begin{cases} 1)\ x+T \in \Pi.O_f \\ 2)\ f(x+T)= f(x)\ \forall x \in \Pi.O_f \end{cases}$

Σύνθεση συναρτήσεων: Αν για τις f,g το σύνολο Α={x ∈Π.Ο$_f$ και f(x) ∈Π.Ο $_g$ } $\neq \varnothing$ τότε ορίζεται καινούρια συνάρτηση η gof στο Α με τύπο **(gof)(x)=g(f(x))** δηλ. στον τύπο της g όπου χ αντικαθιστούμε τον τύπο της f

Μονοτονία συναρτήσεων

η f είναι γνησίως αύξουσα(↗)στο Δ $\subseteq$ Π.Ο $_f \Leftrightarrow \forall\ \chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ έπεται $f(x_1) < f(x2)$

η f είναι γνησίως φθίνουσα(↘)στο Δ $\subseteq$ Π.Ο $_f \Leftrightarrow \forall\ \chi_1, \chi_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ έπεται $f(x_1) > f(x2)$

Μονοτονία και σύνθεση :

Έστω ότι ορίζεται η gof τότε :

- Αν g ,f γνήσια μονότονες με το ίδιο είδος μονοτονίας τότε και η gof θα είναι γνησίως αύξουσα
- Αν g ,f γνήσια μονότονες με διαφορετικό είδος μονοτονίας τότε και η gof θα είναι γνησίως φθίνουσα

Συνάρτηση ¨1 - 1¨.

Δείχνουμε ότι η f είναι ¨ 1- 1 ¨ με ένα από τους πιο κάτω τρόπους :

i) Αποδεικνύουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in$ Π.Ο $_f$ με $x_1 \neq x2$ τότε $f(x_1) \neq f(x2)$ ή

ii) Αποδεικνύουμε ότι $\forall x_1, x_2 \in$ Π.Ο $_f$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έπεται ότι $x_1=x_2$ (Μόνο)

iii) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνήσια μονότονη

Γραφικά η f είναι ¨ 1- 1 ¨ όταν και μόνο όταν οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο .

Αντίστροφη συνάρτηση :

- Αν f:A →f(A) και ¨1 -1¨ τότε ορίζεται η αντίστροφη της f η f^{-1} :f(A)→R και ισχύει $f^{-1}(\psi)= f(x) \Leftrightarrow f(x)=\psi$

Για να βρούμε τον τύπο της $f^{-1}(x)$ λύνουμε την εξίσωση f(x)=ψ ως προς x και στον τύπο που βρίσκουμε αντικαθιστούμε το ψ με το χ.

- Οι γραφικές παραστάσεις των f ,f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x.

•Αν η f : A$\to$ f(A) είναι ¨ 1- 1 ¨ τότε $\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = x \ , \forall x \in A \\ f(f^{-1}(x)) = x \ \ \forall x \in f(A) \end{cases}$

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Βασικά όρια :

1. $\lim\limits_{x\to x_0} x = \chi_0$,	**2.** $\lim\limits_{x\to x_0} \kappa = \kappa$	**3.** $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$	**4.** $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$	**5.** $\lim\limits_{x\to -\infty} x^{2\nu+1} = -\infty$	**6.** $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x^{2\nu} = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$	**8.** $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu\chi_0$	**9.** $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\chi_0$	**10.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu\chi}{x} = 1$	**11.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu\chi}{x} = 0$	**12.** $\lim\limits_{x\to x_0 \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi$
$\lim\limits_{x\to x_0\neq\kappa\pi} \sigma\varphi x = \sigma\varphi x_0$	**14.** $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$	**15.** $\lim\limits_{x\to x_0>0} \ln x = \ln x_0$	**16.** $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$	**17.** $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$	**18.** $\lim\limits_{x\to 0} \ln$

Ιδιότητες ορίων (στα παρακάτω το $x_0 \in R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$)

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \kappa \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \kappa$

2. Αν f(x) $\leq$g(x) $\forall x \in (a,x_0)\bigcup(x_0,\beta)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$ τότε σε κάποιο $x \in (a,x_0)\bigcup(x_0,\beta)$ οι τιμές της f(x) είναι ομόσημες του λ.

$\forall x \in (a,x_0)\bigcup(x_0,\beta)$

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lambda \in R$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \kappa \in R$ τότε ισχύουν

i. $\lim\limits_{x\to x_0} \rho\cdot f(x) = \rho\cdot\kappa$	**ii.** $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lambda+\kappa$	**iii.** $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lambda\cdot\kappa$
iv. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lambda}{\kappa}$ αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$	**v.** $(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^\nu = \kappa^\nu, \nu \in N$	**vi.** $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\kappa}, \nu\in N, f(x)\geq 0$
vii. $\lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x)\rvert = \lvert\kappa\rvert$		

5. Κριτήριο παρεμβολής :

Αν $\left.\begin{cases} h(x) \leq f(x) \leq g(x) \ , \forall x \in (\alpha,x_0)\bigcup(x_0,\beta) \\ \kappa\alpha\iota \\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lambda \end{cases}\right\}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda$

6. Όριο σύνθετης συνάρτησης :

Αν ορίζεται η fog και

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lambda$ και $g(x) \neq \lambda$ κοντα στο χ_0 και $\lim\limits_{x\to\lambda} f(x) = k$ τοτε $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) \underline{\underline{\ g(x)=u\ }} \lim\limits_{u\to\lambda} f(u) = k$

Με $\chi_0 \in R\bigcup\{-\infty,+\infty\}$ ισχύουν

7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(-f(x)) = -\infty$	**8.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ η $(-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \lvert f(x)\rvert = +\infty$
9. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τοτε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = +\infty$	**10.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ η $(-\infty) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

11. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \\ \text{και} \\ f(x)>0\ \forall x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \end{cases}\right\}$ τοτε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$	
12. $\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \\ \text{και} \\ f(x)<0\ \forall x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \end{cases}\right\}$ τοτε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$	

Ποιο γενικά , για τα άπειρα όρια ισχύουν τα παρακάτω

Πίνακας 1 (ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$	$\lambda\in R$	$\lambda\in R$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	;	;

Πίνακας 2(ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$	$\lambda\in R_+^*$	$\lambda\in R_-^*$	$\lambda\in R_+^*$	$\lambda\in R_-^*$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
Και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	;	;

Πίνακας 3 (ΠΗΛΙΚΟΥ)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=$	$\lambda\in R$	$\lambda\in R$	$\lambda\in R_+^*$ ή $+\infty$	$\lambda\in R_+^*$ ή $+\infty$	$\lambda\in R_-^*$ ή $-\infty$	$\lambda\in R_-^*$ ή $-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=$	$+\infty$	$+\infty$	κ=0 και g(x)>0	κ=0 και g(x)<0	κ=0 και g(x)>0	κ=0 και g(x)<0	k>0	k<0	k>0	k<0
Τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Κανόνας de le Hopital

1) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

2) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ η $(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ η$(-\infty)$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ : Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\chi_0 \in$ Π.Ο $_f$ όταν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Η συνάρτηση f **δεν είναι** συνεχής στο $\chi_0 \in$ Π.Ο $_f$ όταν

1) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ή 2) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq f(x_0)$ ή 3) $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ή 4) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

Αν f, g συνεχείς τότε :

1. λf συνεχής όπου f συνεχής	**2.** $f \pm g$ συνεχείς όπου f,g συνεχείς
3. f g συνεχείς όπου f,g συνεχείς	**4.** $\frac{f}{g}$ συνεχής όπου f,g συνεχείς και $\{x: g(x) \neq 0\}$
5. |f| συνεχής όπου f συνεχής	**6.** $\sqrt[\nu]{f}$ συνεχής όπου f συνεχής και $f(x) \geq 0$

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

Οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους .

I. $f(x) = \alpha_\nu \chi^\nu + \alpha_{\nu-1}\chi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1\chi + \alpha_0$ $\nu \in N^*$, $\alpha_i \in R$, i = 0, ,2,..., ν

II. g(x) = c, $c \in R$. III. p(x) = ημx IV. Q(x) = συν x V. Z(x) = εφ x

VI. t(x) = σφ x VII. $y(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ VIII. $t(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$

IX. Αν f συνεχής στο xo και g συνεχής στο f(xo), τότε gof συνεχής στο xo.

Θ . BOLZANO

Αν f συνεχής στο [α ,β] και f(α) f(β) < 0 τότε υπάρχει έ**να τουλάχιστον** ξ $\in$ (α ,β) ώστε f(ξ) = 0 (**Δεν ισχύει το αντίστροφο)**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν f συνεχής στο [α ,β] και f(α) f(β) $\leq$ 0 τότε υπάρχει έ**να τουλάχιστον** ξ$\in$ [α ,β] ώστε f(ξ) = 0

2) Για να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ (α , β) ώστε f(ξ) =g(ξ), αρκεί η h(x) = f(x) - g(x) να ικανοποιεί τις συνθήκες Bolzano στο [α, β].

Θ. Ενδιαμέσων τιμών

Αν f συνεχής στο [α ,β] και f(α) $\neq$ f(β) τότε για κάθε κ ανάμεσα στα f(α),f(β) υπάρχει έ**να τουλάχιστον** ξ (α ,β) ώστε f(ξ)=κ

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Ορισμός :

Αν για $x_0 \in$ Π.Ο$_f$ το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$ τότε η f παραγωγίζεται στο χ_0 και

$f\,'(\chi_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R$

ή

Για h = x - xο οπότε $\chi=x_0+h$ και για $x\to x_0 \Leftrightarrow h\to 0$ τότε $f\,'(\chi_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in R$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

f(x)	**Π.Ο.f**	**Π.Ο.f ΄**	**f ΄**
c	**R**	**R**	**0**
χ	**R**	**R**	**1**
$\nu\in N^*$ χ^ν	**R**	**R**	$\nu\chi^{\nu-1}$
$\alpha\in Z^*$ χ^α	**R-{0}**	**R-{0}**	$\alpha\chi^{\alpha-1}$
$\alpha\in Q$ χ^α	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$\alpha\chi^{\alpha-1}$
$\sqrt{\chi}$	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\chi}}$
$\dfrac{1}{x}$	**R-{0}**	**R-{0}**	$-\dfrac{1}{x^2}$
ημχ	**R**	**R**	**συνχ**
συνχ	**R**	**R**	**- ημχ**
εφχ	R-{κπ+ $\dfrac{\pi}{2}$ }	R-{κπ+ $\dfrac{\pi}{2}$ }	$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$
σφχ	**R-{κπ}**	**R-{κπ}**	$-\dfrac{1}{\eta\mu^2\chi}$
e^x	**R**	**R**	e^x
lnx	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$\dfrac{1}{x}$
$\log_\alpha x$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$\dfrac{1}{x\ln\alpha}$
$\alpha>0$ α^x	**R**	**R**	$\alpha^x\ln\alpha$

ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Συνάρτηση	**παράγωγος**
$\lambda\in R$,λf	λf ΄
f+g	f ΄+g ΄
f g	f ΄g+f g ΄
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f\,'g-f\,g'}{g^2}$

ΣΥΝΘΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $[f(g(x))]' = f'(g(x))\, g'(x)$

Βασική συνάρτηση	Σύνθετη	Παράγωγος σύνθετης
χ^{α}	$(f(x))^n$	$n(f(x))^{n-1} f'(x)$
$\sqrt{\chi}$	$\sqrt{f(x)}$	$\frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(\chi)$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
ημχ	ημf(x)	συνf(χ) f ΄(χ)
συνχ	συνf(χ)	- ημf(χ) f ΄(χ)
e^x	$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(\chi)$
lnx	lnf(x)	$\frac{1}{f(x)} f'(\chi)$
α>0 α^{χ}	$\alpha^{f(\chi)}$	$\alpha^{f(\chi)} \ln\alpha\, f'(\chi)$

Εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$

Αν η f παραγωγίζεται στο x_0 τότε η Εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f σιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι

(ε) : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ_0 τότε είναι και συνεχής στο χ_0

ΠΡΟΣΟΧΗ:Δεν ισχύει το αντίστροφο π.χ η $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0

2. **Θεώρημα FERMAT**

Αν

i. f ορισμένη σε διάστημα Δ και

ii. f παραγωγίσιμη σε x_0 εσωτερικό σημείο του Δ και

iii. η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο χ_0 .

τότε $f'(x_0) = 0$

3. **Θεώρημα ROLLE**

i. Αν f συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] και

ii. f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) (τουλάχιστον) και

iii. f(α) = f(β)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική ερμηνεία Θεωρήματος ROLLE

Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f, Α(ξ,f(ξ)) με $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε η εφαπτόμενη στην C_f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στον άξονα χ΄χ .

4. **Θ .Μ.Τ (Lagrange)**

i. Αν f συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] και

ii. f παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) (τουλάχιστον)

Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία Θ.Μ.Τ

Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f, Α(ξ,f(ξ)) με $ξ \in (α,β)$ ώστε η εφαπτόμενη στην C_f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στην χορδή ΑΒ με Α(α,f(α)) και Β(β,f(β)) .

5.

Αν f συνεχής στο διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ είναι f ΄(x) = 0 τότε η f είναι σταθερή στο Δ

6.

Αν f ,g συνεχείς στο διάστημα Δ και f ΄(x) = g΄(x) για κάθε x εσωτερικό του Δ τότε υπάρχει σταθερά c $\in$R ώστε f(x) = g(x) + c για κάθε x $\in$.

7.

Έστω f, συνεχής στο [α ,β] τότε :

Αν f (x) > 0 $\forall x \in (\alpha,\beta)$ τότε f γνησίως αύξουσα στο [α , β] ή

Αν f (x) < 0 $\forall x \in (\alpha,\beta)$ τότε f γνησίως φθίνουσα στο [α , β]

8.

Έστω f παραγωγίσιμη στο (α,x_0)$\cup$ (x_0 ,β) και συνεχής στο x_0 τότε :

i. Αν {f ΄(χ)<0 $\forall x \in (\alpha, x_0)$ **και** f ΄(χ)>0 $\forall x \in (x_0,\beta)$ }τότε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $χ_0$ το f($χ_0$)

ii. Αν {f ΄(χ)>0 $\forall x \in (\alpha, x_0)$ **και** f ΄(χ)<0 $\forall x \in (x_0,\beta)$ }τότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $χ_0$ το f($χ_0$)

iii. Αν {f ΄(χ)<0 $\forall x \in (\alpha, x_0)$ **και** f ΄(χ)<0 $\forall x \in (x_0,\beta)$ }τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το (α,β) και **δεν** έχει ακρότατο στο $χ_0$

iv. Αν {f ΄(χ)>0 $\forall x \in (\alpha, x_0)$ **και** f ΄(χ)>0 $\forall x \in (x_0,\beta)$ }τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το (α,β) και **δεν** έχει ακρότατο στο $χ_0$

ΣΧΟΛΙΟ

Αναζητούμε τα ακρότατα (ολικά ή τοπικά) μιας συνάρτησης στο διάστημα Δ

1) Στα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f ΄(χ) μηδενίζεται

2) Στα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f ΄(χ) δεν ορίζεται

3)Στα κλειστά άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της)

9. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΟΙΛΩΝ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ τότε

i) η f στρέφει τα κοίλα άνω (κυρτή) στο Δ ,αν η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ

ii) η f στρέφει τα κοίλα κάτω (κοίλη) στο Δ ,αν η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

10. Θεώρημα κοίλων

Έστω f συνεχής στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ Τότε :

(i) Αν f ΄΄(x) >0 για κάθε χ εσωτερικό του Δ τότε η f στρέφει τα κοίλα άνω στο Δ

(ii) Αν (x) <0 για κάθε χ εσωτερικό του Δ τότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο Δ

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΜΠΗΣ

Αν η συνάρτηση f

i) έχει εφαπτόμενη στο $χ_0$ και

ii) αλλάζει κοίλα εκατέρωθεν του $χ_0$

τότε το σημείο $Α(χ_0, f(χ_0))$λέγεται **σημείο καμπής** της C_f

11. Θεώρημα

Αν το $Α(χ_0, f(χ_0))$ είναι **σημείο καμπής** της C_f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $χ_0$,τότε $f''(χ_0)=0$

12. ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

i) . Κατακόρυφη ασύμπτωτη :

Έστω $χ_0$ σημείο ασυνέχειας ή ανοικτό άκρο του $Π.Ο_f$ κι ένα τουλάχιστον από τα $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$. Τότε η $x = x_0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της C_f

ii). Οριζόντια - πλάγια ασύμπτωτη

Η ευθεία $y = αx + β$,$α,β \in R$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$,$(+\infty)$όταν :

$\lim\limits_{x \to -\infty,(+\infty)} [f(x) - (α x + β)] = 0$.

iii)Θεώρημα: Αν η ευθεία $y = αx + β$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$,$(+\infty)$ τότε

$α = \lim\limits_{x \to -\infty,(+\infty)} \dfrac{f(x)}{x}$ και $β= \lim\limits_{x \to -\infty,(+\infty)} (f(x) - αx)$

ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ –ΠΑΡΑΓΟΥΣΑΣ ΤΗΣ f

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ ,τότε αρχική της ή παράγουσά της ονομάζουμε την F ,που είναι παραγωγίσιμή στο Δ και ισχύει $F'(χ)=f(χ)$,για κάθε $χ \in Δ$

Θεώρημα : Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα Δ και F μια αρχική της στο Δ,τότε έχει άπειρες αρχικές και είναι όλες της μορφής $F(x)+c$, $c \in R$.

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f

ονομάζουμε το σύνολο όλων των απείρων αρχικών της f και συμβολίζεται με $\int f(x)dx$,

δηλ. αν F μια αρχική της f στο Δ τότε $\int f(x)dx = F(x) + c$, $c \in R$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

$\int 0\, dx = c$	$\int ημx\, dx = -συνx + c$	$\int εφx\, dx = -\ln\lvert συνx\rvert + c$
$\int 1\, dx = x + c$	$\int συνx\, dx = ημx + c$	$\int σφx\, dx = \ln\lvert ημx\rvert + c$
$\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$	$\int \frac{1}{συν^2 x} dx = εφx + c$	$\int \ln x\, dx = x\ln x - x + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{1}{ημ^2 x} dx = -σφx + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$
$\int x^α\, dx = \frac{1}{α+1}x^{α+1} + c$, $α \neq -1$	$\int e^x\, dx = e^x + c$	$\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\, dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$
$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$	$\int α^x\, dx = \frac{α^x}{\ln α} + c$	$\int (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))\, dx = f(x)g(x) + c$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΟΡΙΣΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \;\; , \lambda \in R\text{-}\{0\}$	**2.** $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

Για συναρτήσεις f , g με συνεχείς παραγώγους σε διάστημα Δ ισχύει :

$$\int f(x)g\,'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f\,'(x)g(x)\,dx$$

Έτσι αν P(x) πολυώνυμο τότε

i) $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx = \int P(x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha})'dx = P(x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}) - \int P'(x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha})dx$

ii) $\int P(x)\eta\mu(\alpha x)\,dx = \int P(x)(-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\alpha})'dx = P(x)(-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\alpha}) - \int P'(x)(-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x}{\alpha})dx$

iii) $\int P(x)\sigma\upsilon\nu(\alpha x)\,dx = \int P(x)(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha})'dx = P(x)(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha}) - \int P'(x)(\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha})dx$

iv) $\int P(x)\ln(\alpha x)\,dx = \int \left(\int P(x)\right)'\ln(\alpha x)dx = \left(\int P(x)\right)'\ln(\alpha x) - \int \left(\int P(x)\right)\frac{1}{x}dx$

v) $I(x) = \int \eta\mu(\beta x)e^{\alpha x}\,dx = \int \eta\mu(\beta x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha})'dx = \eta\mu(\beta x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}) - \int \left(\eta\mu(\beta x)\right)'(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha})dx \;= ....$ και

λύνουμε ως εξίσωση του I(x).

vi) $I(x) = \int \sigma\upsilon\nu(\beta x)e^{\alpha x}\,dx = \int \sigma\upsilon\nu(\beta x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha})'dx = \sigma\upsilon\nu(\beta x)(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}) - \int \left(\sigma\upsilon\nu(\beta x)\right)'(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha})dx \;= ....$ και

λύνουμε ως εξίσωση του I(x).

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \xrightarrow[g'(x)dx=du]{g(x)=u} = \int f(u)du$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Αν ο βαθμός του αριθμητή f(x) είναι ≥ του βαθμού παρονομαστή g(x) τότε κάνουμε διαίρεση οπότε από την Ευκλείδεια διαίρεση f(x)=g(x)Π(x)+Υ(x) και

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \int \Pi(x)dx + \int \frac{Y(x)}{g(x)}dx$$

Αν $\frac{Y(x)}{g(x)} = \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ με β^2-4αγ>0 και χ_1,χ_2 οι ρίζες του τριωνύμου, βρίσκουμε Α ,Β ώστε

$\frac{Y(x)}{g(x)} = \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{\alpha}(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2})$ οπότε

$\int \frac{\kappa x+\lambda}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}dx = \frac{1}{\alpha}\int (\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2})dx = \frac{1}{\alpha}(A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2|) + c$,

ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] θεωρούμε διαμέριση του [α,β] $\alpha=\chi_0<\chi_1<\chi_2<\ldots<\chi_{\kappa-1}<\chi_\kappa<\ldots<\chi_\nu=\beta$

(δηλ. χωρίζουμε το [α,β] σε ν ισομήκη υποδιαστήματα) με μήκος το καθένα $\Delta\chi=\chi_\kappa-\chi_{\kappa-1}=\dfrac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Στο κάθε διάστημα $[\chi_{\kappa-1},\chi_\kappa]$ παίρνουμε κάποιο ξ_κ .Τότε το **ορισμένο ολοκλήρωμα** της f στο [α,β] είναι ο αριθμός $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$

Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και $f(x)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ τότε το $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)=E(\Omega)$

δηλ. είναι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται απο την C_f ,τον χ΄χ ,τις κατακόρυφες ευθείες χ=α και χ=β.

Προφανώς αν f συνεχής στο [α,β] και $f(x)\geq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι μηδέν σε όλο το [α,β], τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Αν f , g συνεχείς τότε

1. $\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$

2. $\int_\alpha^\beta f(x)dx=-\int_\beta^\alpha f(x)dx$

3. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$

4. $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά

$\int_\alpha^\beta (\lambda f(x)+\kappa g(x))dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta \kappa g(x)dx$ $\lambda,\kappa\in R$

5. Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα στο διάστημα Δ και α,β,γ,δ,ε,....ω $\in\Delta$ τότε ισχύει

$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\delta f(x)dx+\ldots\int_\omega^\beta f(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω f ορισμένη και συνεχής σε διάστημα Δ και α $\in\Delta$ τότε η συνάρτηση

$f(x)=\int_a^x g(t)dt$, $x\in\Delta$ είναι μια παράγουσα της g ,οπότε $\left(\int_\alpha^x g(t)dt\right)'=g(x)$ για $\chi\in\Delta$

Γενικότερα στο πεδίο ορισμού της ισχύει $\left(\int_\alpha^{h(x)} g(t)dt\right)'=g(h(x))\cdot h'(x)$

ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω F μια παράγουσα της συνεχούς στο [α,β] συνάρτησης f. Τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = [F(x)]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha) = [\int f(x)dx]_\alpha^\beta$$

ΤΥΠΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Για συναρτήσεις f , g με συνεχείς παραγώγους στο [α , β] ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Αν f , g΄ συνεχείς συναρτήσεις τότε $\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx = \xrightarrow{g(x)=u \Rightarrow g'(x)dx=du} = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ισχύουν τα εξής

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ **2.** $\int f'(x)dx = f(x) + c$

3. $\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)' = 0$ **4.** $\int_\alpha^\beta f'(x)dx = f(\beta) - f(\alpha)$

5. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du = [F(\beta) - F(\alpha)]$ όπου F αρχική της f

6. $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(u)du = [F(\beta) - F(\alpha)]$ όπου F αρχική της f

ΕΜΒΑΔΟΝ ΧΩΡΙΟΥ

1. Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f ,C_g ,τις κατακόρυφες ευθείες χ=α και χ=β με α<β δηλ $E_{Cf,\,Cg,\,x=\alpha,\,\chi=\beta} = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$ και βρίσκουμε το πρόσημο της f(x)-g(x) στο[α,β] και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

Παρατήρηση :

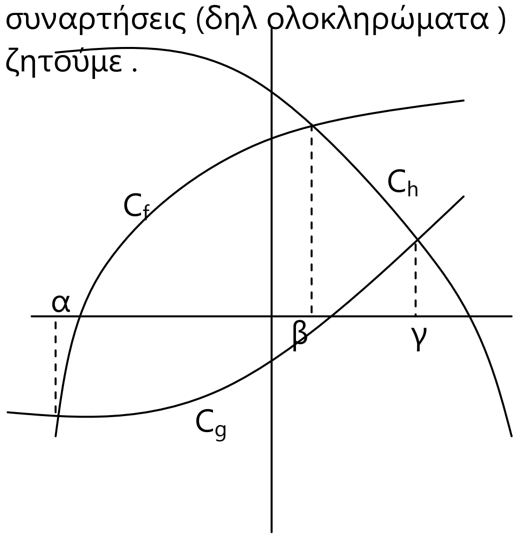
i) Ο άξονας χ΄χ είναι συνάρτηση η g(x)=0

ii) Ο άξονας ψ΄ψ είναι κατακόρυφη ευθεία χ=0 και άρα όχι συνάρτηση αλλά άκρο του ολοκληρώματος

2. Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f ,C_g , δηλ δεν δίνονται οι κατακόρυφες ευθείες.

Τότε λύνουμε την εξίσωση f(x)-g(x)=0 και αν α η **μικρότερη ρίζα** της και β η **μεγαλύτερη ρίζα** της τότε $E_{Cf,\,Cg} = \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)|dx$ και βρίσκουμε το πρόσημο της f(x)-g(x) στο[α,β] και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

3. Το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από την C_f ,C_g , C_h ,τότε κάνουμε σχήμα και βρίσκουμε το εμβαδόν του χωρίου με πρόσθεση των χωρίων που σχηματίζονται από δυο συναρτήσεις (δηλ ολοκληρώματα) και αποτελούν το χωρίο του οποίου το εμβαδόν ζητούμε .



$$E_{Cf,Cg,Ch} = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|dx + \int_{\beta}^{\gamma} |h(x) - g(x)|dx$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Αν έχουμε έναν στατιστικό πληθυσμό και πάρουμε απο αυτό ένα δείγμα ν ατόμων προς μελέτη ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους ,λέμε ότι κανουμε δειγματοληψία .Το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο το μελετάμε λέγεται μεταβλητή και έστω ότι το συμβολίζουμε με Χ .Όλες τις τιμές που παίρνει η Χ λέγονται παρατηρήσεις και συμβολίζονται με t_i ,i=1,...ν και όλες τις **διαφορετικές** τιμές που παίρνει η Χ συμβολίζονται με χ_i ,i=1,...κ ($\kappa \le \nu$)

Συχνότητα (απόλυτη) ν_i είναι ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή χ_i και $\sum_{i=1}^{\kappa} \nu_i = \nu$

Σχετική συχνότητα f_i $= \dfrac{\nu_i}{\nu}$ είναι ο αριθμός που δείχνει πόσο συχνά εμφανίζεται η τιμή χ_i και $\sum_{i=1}^{\kappa} f_i = 1$

Σχετική συχνότητα(επι τοις εκατό) $f_i\%$ $=100\dfrac{\nu_i}{\nu}$ και ισχύει $\sum_{i=1}^{\kappa} f_i\% = 100$

Αθροιστική συχνότητα (απόλυτη) N_i είναι ο αριθμός που δείχνει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής χ_i και ισχύει $N_1 = \nu_1$, $N_i = \nu_1+\nu_2+\nu_3+\ldots+\nu_i$,i=1,2,....κ ,$N_\kappa = \nu$

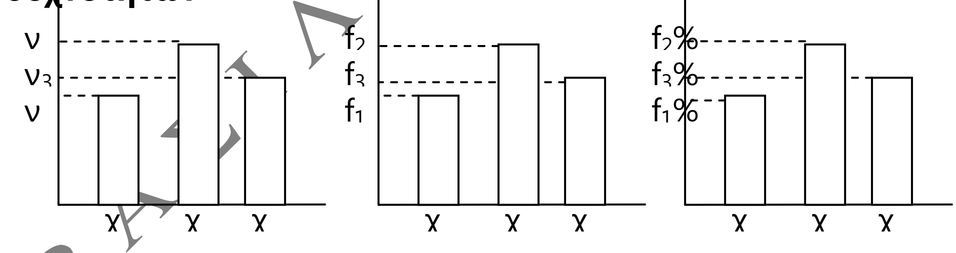
Για την Αθροιστική σχετική συχνότητα F_i ισχύει $F_i = \dfrac{N_i}{\nu}$ και $F_1 = f_1$, $F_i = f_1+f_2+f_3+\ldots+f_i$, i=1,2,....κ ,$F_\kappa = 1$

Για την Αθροιστική σχετική συχνότητα (επι τοις εκατό) $F_i\%$ ισχύει $F_i\% = 100\dfrac{N_i}{\nu}$ και $F_1\% = 100 f_1$, $F_i\% = 100(f_1+f_2+f_3+\ldots+f_i)$,i=1,2,....κ ,$F_\kappa\% = 100$

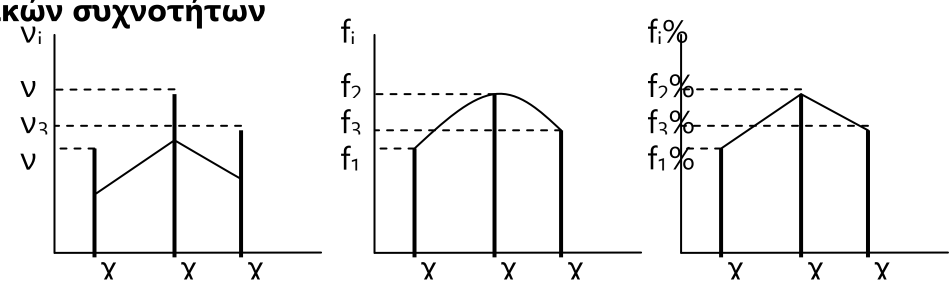
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

ΣΕ ΜΗ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

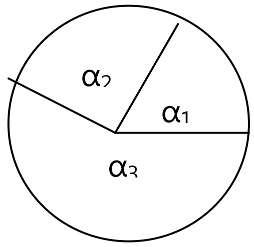
ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑ συχνοτήτων –σχετικών συχνοτήτων και επί τοις εκατό σχετικών συχνοτήτων



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟ συχνοτήτων –σχετικών συχνοτήτων και επί τοις εκατό σχετικών συχνοτήτων



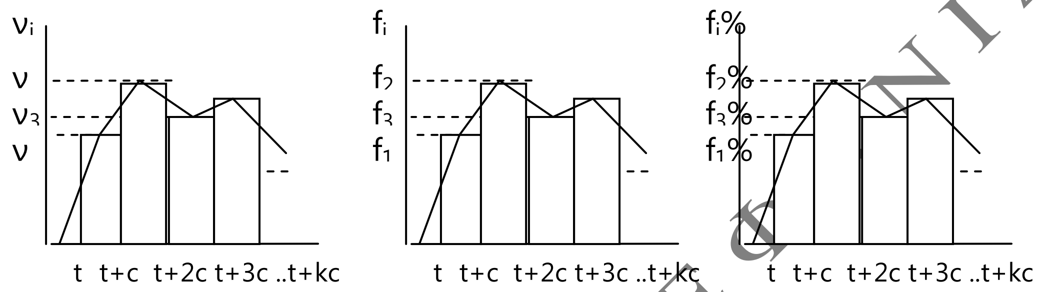
ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ



$\alpha_i = 360^0 \dfrac{\nu_i}{\nu} = 360^0 f_i, i=1,2,3,\ldots,\kappa$

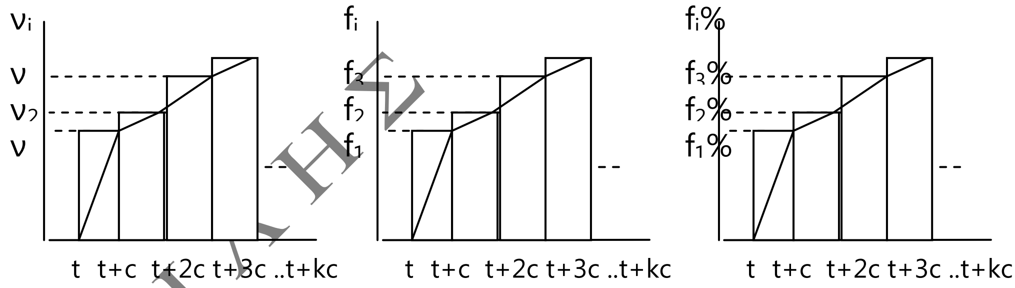
ΣΕ ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟ συχνοτήτων –σχετικών συχνοτήτων και επί τοις εκατό σχετικών συχνοτήτων



Το άθροισμα των εμβαδών των παρ/μων είναι ίσο με το ν , 1 , 100 αντίστοιχα

ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ ΚΑΙ ΠΟΛΥΓΩΝΟ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΩΝ συχνοτήτων –αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και επί τοις εκατό αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων



ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ

1. **ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ($\overline{X}$)**

$\overline{X} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} t_i$ όπου t_i οι τιμές όλων των παρατηρήσεων

ή

$\overline{X} = \dfrac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i$ όπου χ_i οι διαφορετικές τιμές (ή τα κέντρα των κλάσεων σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις) της μεταβλητής και ν_i οι αντίστοιχες συχνότητες

ή

$\overline{X} = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i f_i$ όπου χ_i οι διαφορετικές τιμές (ή τα κέντρα των κλάσεων σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις) της μεταβλητής και f_i οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες

2. **ΣΤΑΘΜΙΚΟΣ ΜΕΣΟΣ($\overline{w}$)**

$$\overline{W}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i W_i}{\sum_{i=1}^{\kappa} W_i}$$ όπου w_i οι συντελεστές βαρύτητας

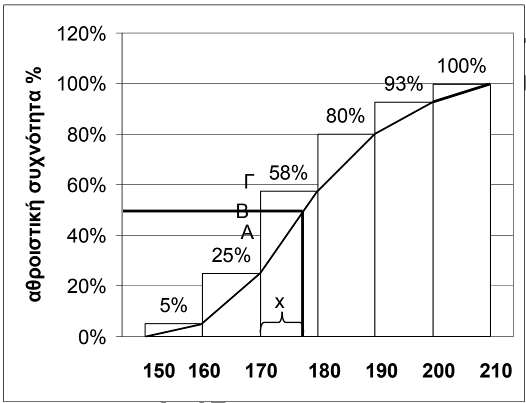
3. **ΔΙΆΜΕΣΟΣ (δ)**

i) Αν οι παρατηρήσεις είναι όχι ομαδοποιημένες και

α) Αν είναι περιττού πλήθους (ν=2μ+1) τότε $\delta = t_{\frac{\nu+1}{2}}$ η μεσαία παρατήρηση

β)Αν είναι αρτίου πλήθους ν=2μ τότε $\delta=\dfrac{t_{\frac{\nu}{2}}+t_{\frac{\nu}{2}+1}}{2}$ ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων

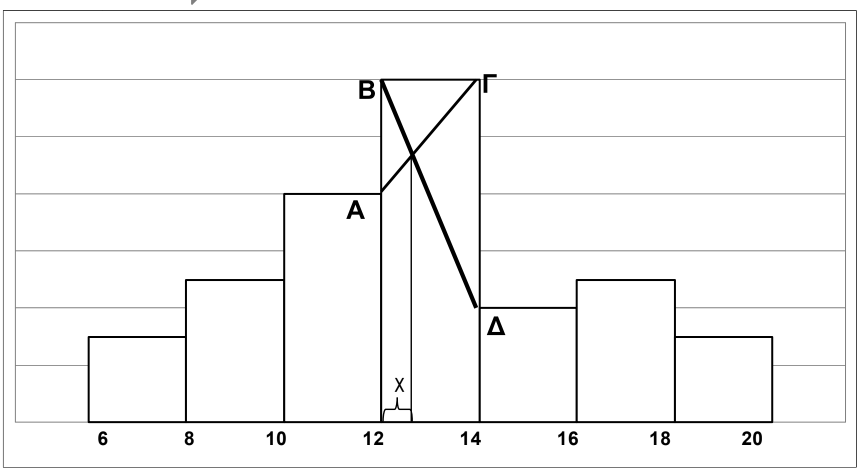
ii) Αν οι παρατηρήσεις είναι ομαδοποιημένες σχηματίζουμε το πολύγωνο αθροιστικών επί τοις εκατό συχνοτήτων και βρίσκουμε σε ποια τιμή επι του οριζόντιου άξονα αντιστοιχεί το 50% του κατακόρυφου άξονα



$\dfrac{AB}{A\Gamma}=\dfrac{\chi}{c}$ και δ=170+χ

4. **Επικρατούσα τιμή (M_0):Είναι η τιμή των παρατηρήσεων με την μέγιστη συχνότητα**

Σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις βρίσκεται από την κατασκευή του ιστογράμματος συχνοτήτων



5.

$\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}=\dfrac{\chi}{c-\chi}$ και M_0=12+χ

ΜΕΤΡΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

1. ΕΥΡΟΣ(R) : R= η μικρότερη τιμή μείον η μεγαλύτερη τιμή των παρατηρήσεων

ΔΙΑΣΠΟΡΑ –ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

$S^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(t_i-\bar{x})^2$ ή $S^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}t_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}t_i\right)^2}{\nu}\right\}$ όπου t_i όλες οι τιμές των παρατηρήσεων

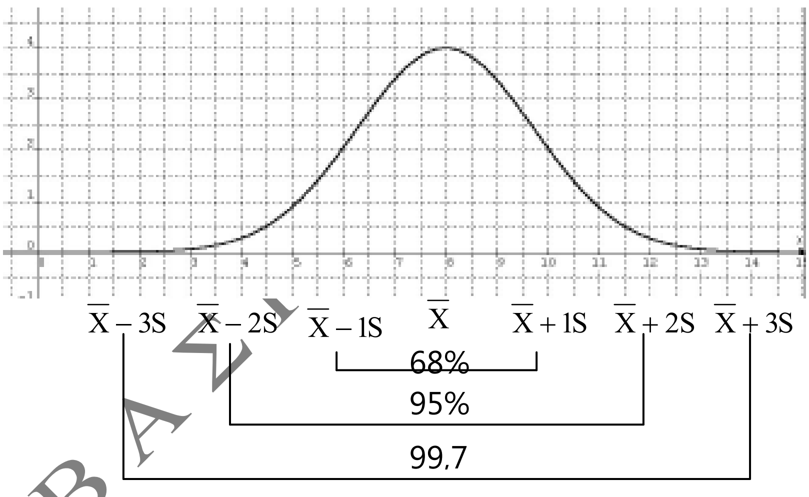
ή $S^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2\nu_i$ **ή** $S^2=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2\nu_i-\frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa}x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\}$ όπου χ_i οι διαφορετικές τιμές των παρατηρήσεων και ν_i οι συχνότητες

ή $S^2=\sum_{i=1}^{\kappa}(x_i-\bar{x})^2f_i$ **ή** $S^2=\left\{\sum_{i=1}^{\kappa}x_i^2f_i-\bar{x}\right\}$ όπου χ_i οι διαφορετικές τιμές των παρατηρήσεων και f_i οι σχετικές συχνότητες

2. ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ (S): $S=\sqrt{S^2}$

3.ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ (CV): $CV=\frac{S}{\bar{X}}$ **ή επί τοις εκατό** $CV\%=\frac{S}{\bar{X}}100$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ



κλάσεις	κέντρο κλασης χ_i	συχνότητα ν_i	$\chi_i\nu_i$	χ_i^2	$\chi_i^2\nu_i$
[80-90)	85	8	680	7225	57800
[90-100)	95	9	855	9025	81225

[100-110)	105	17	1785	11025	187425
[110-120)	115	15	1725	13225	198375
[120-130)	125	14	1750	15625	218750
[130-140)	135	7	945	18225	127575
Άθροισμα		**70**	7740		871150
			Μέση τιμή $\overline{X} =$ **110,5714**		**Διασπορά** **S^2=218,95918**
					Τυπική απόκλιση S=14,79727

ΕΥΘΕΊΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ή ΕΥΘΕΙΑ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗΣ

$$\hat{\psi} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\chi \text{ με } \hat{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\nu\sum_{i=1}^{\nu} X_i Y_i - (\sum_{i=1}^{\nu} X_i)(\sum_{i=1}^{\nu} Y_i)}{\nu\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{\nu} X_i)^2}, \text{ και } \hat{\alpha} = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} \psi_i - \hat{\beta}\sum_{i=1}^{\nu} \chi_i\right) = \overline{\psi} - \hat{\beta} \cdot \overline{\chi}$$