

8.4. Ειδικό θέμα Α: Αντίστροφη συνάρτηση

1. α) i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, $f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2)$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \text{ Επομένως η } f \text{ είναι 1-1.}$$

ii) $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) < f^3(x_2)$

$$\Rightarrow f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i) Για $y = f(x)$ προκύπτει $y^3 + y = x + 2 \Rightarrow x = y^3 + y - 2 \Rightarrow f^{-1}(y) = y^3 + y - 2$.

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = x^3 + x - 2.$$

ii) $f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (Μοναδική ρίζα). Άρα $f^{-1}(1) = 0$.

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα άρα για $x < 1 \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(1) \Rightarrow f^{-1}(x) < 0$

και για $x > 1 \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(1) \Rightarrow f^{-1}(x) > 0$

Είναι $f(-2) = 0$ γιατί για $f(x) = 0$ η δοσμένη σχέση δίνει $0^3 + 0 = x + 2 \Rightarrow x = -2$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα για $x < -2 \Rightarrow f(x) < f(-2) \Rightarrow f(x) < 0$

και για $x > -2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow f(x) > 0$

iii) $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = x$

$$\Rightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

γ) Για $f(x) = 3$ η δοσμένη σχέση δίνει $3^3 + 3 = x + 2 \Rightarrow x = 28$ άρα $f(28) = 3$ ($f \uparrow$ άρα 1-1).

Για $x = 8$ η δοσμένη σχέση δίνει $f^3(x) + f(x) = 10 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(8) = 2$.

$$\text{Άρα } f(f^{-1}(x) + 20) > 3 \Rightarrow f(f^{-1}(x) + 20) > f(28)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) + 20 > 28 \Rightarrow f^{-1}(x) > 8 \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > 2$$

δ) i) Είναι $\varphi(x) = \int_x^{f(x)} f^{-1}(t) dt + \int_{f^{-1}(x)}^x f(t) dt$.

Στο πρώτο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = f^{-1}(t)$.

$$\text{Άρα } t = f(u) \Rightarrow dt = f'(u) du.$$

Για $t = x$ είναι $u = f^{-1}(x)$ και για $t = f(x)$ είναι $u = f^{-1}(f(x)) = x$

$$\text{Άρα } \varphi(x) = \int_{f^{-1}(x)}^x u f'(u) du + \int_{f^{-1}(x)}^x f(t) dt$$

$$= \int_{f^{-1}(x)}^x t f'(t) dt + \int_{f^{-1}(x)}^x f(t) dt = \int_{f^{-1}(x)}^x [t f'(t) + f(t)] dt =$$

$$= \int_{f^{-1}(x)}^x [t f'(t)]' dt = [t f(t)]_{f^{-1}(x)}^x = x f(x) - f^{-1}(x) \cdot f(f^{-1}(x))$$

$$= x f(x) - x f^{-1}(x) = x(f(x) - f^{-1}(x))$$

$$\text{Άρα } \frac{\varphi(x)}{x} = f(x) - f^{-1}(x).$$

ii) Είναι $f(-2) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = -2$ και $f^{-1}(1) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f^{-1}(x)] = f(0) - f^{-1}(0) = 1 - (-2) = 3$$

2. α) $f'(x) = \frac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x - 1}} > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

β) $f(0) = \sqrt{e^0 + 0 - 1} = 0$ και $f(1) = \sqrt{e^1 + 1 - 1} = \sqrt{e}$

άρα $f^{-1}(0) = 0$ και $f^{-1}(\sqrt{e}) = 1$.

Θέτουμε $u = f^{-1}(x)$ οπότε $x = f(u)$, $dx = f'(u)du$, $u_1 = f^{-1}(0) = 0$ και $u_2 = f^{-1}(\sqrt{e}) = 1$.

$$I = \int_0^{\sqrt{e}} x \cdot f^{-1}(x) dx = \int_0^1 f(u) \cdot u \cdot f'(u) du = \int_0^1 \sqrt{e^u + u - 1} \cdot u \cdot \frac{e^u + u - 1}{2 \cdot \sqrt{e^u + u - 1}} du =$$

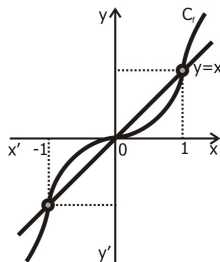
$$\int_0^1 u \cdot (e^u + 1) du = \int_0^1 u e^u du + \int_0^1 u du = \dots$$

3. α) $f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2$.

Είναι $\Delta = -4 < 0$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα. Άρα είναι 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως σύμφωνα με την ΠΡΟΤΑΣΗ 8 το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν οι C_f , $C_{f^{-1}}$ διχοτομείται από την ευθεία $y=x$ οπότε είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου μεταξύ των C_f και $y=x$ [ή μεταξύ των $C_{f^{-1}}$ και $y=x$].



$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^5 - 2x^3 + 2x = x \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1)^2 = 0.$$

Άρα $x = -1$ (διπλή) ή $x = 0$ ή $x = 1$ (διπλή).

$$E = \int_{-1}^0 (f(x) - x) dx + \int_0^1 (x - f(x)) dx = \dots$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x^5 - 2x^3 + x$	-	○	+	○	+

4. α) $(\ln f(x) + e^{f(x)})' = x'$ άρα $\frac{f'(x)}{f(x)} + e^{f(x)} \cdot f'(x) = 1$ ή $f'(x) \left(\frac{1}{f(x)} + e^{f(x)} \right) = 1$.

Η παρένθεση είναι πάντα θετική άρα είναι $f'(x) > 0$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

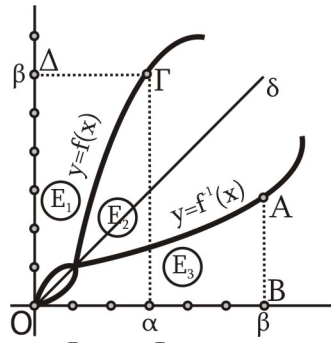
β) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι 1-1. Επομένως αντιστρέφεται.

γ) $f(x) = 1$ άρα η δοσμένη σχέση δίνει $\ln 1 + e^1 = x$ άρα $x = e$.

$$f(x) = e \text{ άρα η δοσμένη σχέση δίνει } \ln e + e^e = x \text{ άρα } x = e^e + 1.$$

δ) **Λες [ΠΡΟΤΑΣΗ 9].**

5. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \alpha]$ με $\alpha > 0$ άρα η f είναι αντιστρέψιμη στο $[0, \alpha]$ με $0 = f(0) < f(x) < f(\alpha)$ για κάθε $0 \leq x < \alpha$.



Η γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $[0, \beta] = [0, f(\alpha)]$ είναι συμμετρική ως προς τη διχοτόμο $\delta: y = x$ της γωνίας xOy της C_f .

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον Oy και την $\Gamma\Delta$ (E_1) είναι ίσο με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον Ox και την AB (E_3), δηλαδή $E_1 = E_3$.

Το $\int_0^\alpha f(x) dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την $x = \alpha$ και τον $x'Ox$ (E_2).

Το $\int_0^\beta f^{-1}(x) dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την $x = \beta$ και τον xx' (E_3).

Επομένως $\int_0^\alpha f(x) dx + \int_0^\beta f^{-1}(x) dx = E_2 + E_3 = E_2 + E_1 = \alpha\beta$.

6. α) $f(x)=0 \Leftrightarrow e^0 - 0 = x^2$ άρα $x^2 = 1$.

Επομένως $x = 1$ (το $x = -1$ απορρίπτεται).

β) Έστω $x_1, x_2 \geq 1$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$.

Άρα και $e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$.

Επομένως $e^{f(x_1)} + f(x_1) = e^{f(x_2)} + f(x_2)$.

Άρα $x_1^2 = x_2^2$ και επειδή $x_1, x_2 > 0$ είναι $x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $g'(x) = e^x - 1 > 0$ για $x > 0$. Άρα $g \uparrow \mathbb{R}$.

Επομένως για $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$

$\Rightarrow x_1 < x_2$ (για $x_1, x_2 > 0$).

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

δ) Η f είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, $f(x) \neq 0$ και $f(5) > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Είναι $E = \int_0^1 [f^{-1}(x)]^2 dx$.

Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Rightarrow x = f(u)$. Άρα $dx = f'(u) du$.

Είναι $f(1) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$ άρα για $x = 0$ είναι $u = 1$.

Είναι $f(x) = 1 \Rightarrow e^1 - 1 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{e-1}$. Άρα $f(\sqrt{e-1}) = 1 \Rightarrow f^{-1}(1) = \sqrt{e-1}$. Άρα για $x = 1$ είναι $u = \sqrt{e-1}$.

Άρα $E = \int_1^{\sqrt{e-1}} u^2 f'(u) du =$

6. α) $e^0 - 0 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

β) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) = -f(x_2)$

Προσθέτω κατά μέλη και προκύπτει

$e^{f(x_1)} - f(x_1) = e^{f(x_2)} - f(x_2) \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \xrightarrow{x_1, x_2 \geq 1} x_1 = x_2$

Άρα η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

γ) $f(x) \neq 0$ για $x > 1$ και συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(5) > 0$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 1$.

$$\text{Άρα } e^{f(x)} - f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x)(e^{f(x)} - 1) = 2x > 0$$

$$\text{Είναι } f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} \geq 1 \Leftrightarrow e^{f(x)} - 1 \geq 0.$$

Άρα $f'(x) > 0$ και η f γνησίως αύξουσα.

δ)

7. α)

β)

γ)

δ)

8. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ άρα το σύνολο τιμών της είναι το $[f(\alpha), f(\beta)] = [\alpha, \beta]$. Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$ και $f^{-1}(f(x)) = x$.

Για να υπολογίσουμε το $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx$ θέτουμε

$$u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u).$$

Είναι $dx = f'(u) du$. Όταν $x = \alpha$ τότε $u = f^{-1}(\alpha) = \alpha$ και όταν $x = \beta$ τότε $u = f^{-1}(\beta) = \beta$. Επομένως είναι

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u f'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x) dx$$

Η αρχική σχέση γράφεται

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x) dx =$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + x f'(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} [x f'(x) + x f'(x)] dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [x f(x)]' dx = [x f(x)]_{\alpha}^{\beta} =$$

$$\beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) = \beta \cdot \beta - \alpha \cdot \alpha = \beta^2 - \alpha^2$$

9.

10. α) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1, άρα αντιστρέφεται.

β) Το $B(e+1, e)$ ανήκει στην $C_{f^{-1}}$ άρα λόγω συμμετρία με την C_f ως προς την $y = x$ το $A(e, 1+e)$ ανήκει στην C_f το οποίο όντως ισχύει γιατί $f(e) = \ln e + e = 1 + e$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(e, 1+e)$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - e - 1 = \left(\frac{1}{e} + 1\right)(x - e)$$

$$\Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{e} + 1\right)x - 1 - e + e + 1 \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{e} + 1\right)x$$

Δεν μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της αντίστροφης συνάρτησης της f ούτε ξέρουμε αν η αντίστροφη είναι παραγωγίσιμη άρα δεν μπορούμε να βρούμε την εφαπτομένη της.

Όμως, λόγω συμμετρίας η εφαπτομένη της αντίστροφης στο B είναι η συμμετρική της παραπάνω εφαπτομένης της C_f στο A .

Η ζητούμενη εφαπτομένη διέρχεται από το $O(0,0)$ (όπως και η ε) και το $B(e+1, e)$ άρα έχει $\lambda = \frac{e}{e+1}$.

Άρα έχει εξίσωση $y = \frac{e}{e+1} x$.

11. α) $f(-x) = f(g(f(x))) = (f \circ g)(f(x)) = -f(x)$, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της υπόθεσης.

Για το μηδέν θέτουμε όπου x το 0.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ και άρα $-x_1 = -x_2$. Άρα η f είναι 1-1 άρα αντιστρέψιμη. Ομοίως και η g .

γ) Έστω α τυχαίος πραγματικός αριθμός. Το $g(-\alpha)$ ορίζεται και επομένως $f(g(-\alpha)) = -(-\alpha) = \alpha$ ή, γραμμένο αλλιώς, $f(y) = \alpha$ για κάποιο y . Επομένως μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό μέσω της f . Ομοίως και για την g .

δ) Αν δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, η σύνθεση τους είναι γνησίως αύξουσα, ως γνωστόν. Ωστόσο, η $-x$ είναι γνησίως φθίνουσα, άτοπο.

ε) Παίρνοντας την f^{-1} (που επιτρέπεται αφού η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$) στην σχέση $f(g(-x)) = x$ έχουμε:

$g(-x) = f^{-1}(x)$ και αφού η g είναι περιττή, $f^{-1}(x) = -g(x)$. Ομοίως και για την g^{-1} .

4. Ειδικό θέμα Β: Ανισοτικές σχέσεις

1. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}$.

Είναι $g'(x) = \dots > 0$ άρα η $g(x) \uparrow [0, +\infty)$.

Επομένως για $x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow g(x) > \frac{1}{5} > 0$.

2. Έστω η συνάρτηση $h(t) = e^{\frac{t}{x^2}}$.

Είναι $h'(t) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{t}{x^2}} > 0$ άρα η $h(x) \uparrow (0, +\infty)$.

Είναι $1 \leq t \leq 4 \Rightarrow h(1) \leq h(t) \leq h(4)$.

3. Είναι $f(0) = 1$.

α) Είναι $g'(x) = f'(x) - x > 0$ άρα $g \uparrow [0, 6]$.

β) Για $x \geq 0$ είναι $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq f(0) - 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 1 > 0$

γ) Έστω $f(6) = 8$.

Άρα $g(6) = f(6) - \frac{6^2}{2} = 8 - 18 = -10 < 0$.

Άτοπο, άρα $B \notin C_f$.

4. Είναι $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \ln x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x} \ln x}{2x^2}$
 $= \frac{\sqrt{x}(2 - \ln x)}{x^2}$.

Είναι $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e^2$ για $x > 0$.

Άρα για $x < e^2$ είναι $f \uparrow$.

Επομένως $e < \pi < e^2 \Rightarrow f(e) < f(\pi) \Rightarrow \frac{\ln e}{\sqrt{e}} < \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}}$

$\Rightarrow \sqrt{\pi} \ln e < \sqrt{e} \ln \pi \Rightarrow \ln e^{\sqrt{\pi}} < \ln \pi^{\sqrt{e}} \Rightarrow e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$

5.

• Είναι $x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) \Leftrightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} > 0$.

Έστω $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$.

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x \text{ και } f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + 1 > 0$$

$$\text{άρα } f' \uparrow \text{ και } f'(0) = 0 \text{ άρα για } x > 0: f'(x) > f'(0) = 0.$$

Επομένως $f \uparrow$ άρα για $x > 0$ είναι

$$f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0.$$

• Είναι $\ln x \leq x - 1$ για $x \geq 0$. (Το ίσον ισχύει για $x = 1$)

$$\text{Για } x = x + 1 \text{ είναι } \ln(x+1) \leq x + 1 - 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) \leq x$$

Το ίσον ισχύει για $x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Άρα για $x > 0$ είναι $\ln(1+x) < x$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3$ με $f(1) = 0$ (ολικό ελάχιστο). Άρα για

$$x > 0 \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3 \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \geq 3$$

7. α) Είναι $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{x-1}{x}$.

$$\text{Για } 0 < x < 1 \text{ είναι } f'(x) < 0 \text{ άρα } f \downarrow (0, 1].$$

$$\text{Για } x > 1 \text{ είναι } f'(x) > 0 \text{ άρα } f \uparrow [1, +\infty).$$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = e$.

β) Είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} \geq e, x \in (0, +\infty)$.

$$x \geq e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow x^x \geq \left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)^x \Leftrightarrow x^x \geq e^{x-1}$$

8. α) Είναι $\ln x \leq x - 1 < x$.

β) Είναι $g(x) = 2x + \frac{\ln x}{x}$ και

$$g'(x) = 2 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2}, x > 0.$$

$$\text{Έστω } h(x) = 2x^2 + 1 - \ln x, x > 0.$$

$$\text{Είναι } h'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}.$$

$$\text{Για } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ είναι } h'(x) < 0 \text{ άρα } h \downarrow \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Για } x > \frac{1}{2} \text{ είναι } h'(x) > 0 \text{ άρα } h \uparrow \left[\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

$$\text{Επομένως } h(x) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln 2 > 0.$$

Άρα $g'(x) > 0$ επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

9. α) $x^{x+1} > (x+1)^x \Leftrightarrow (x+1) \ln x > x \ln(x+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > \frac{\ln(x+1)}{x+1} \quad (1)$$

$$\text{Έστω η συνάρτηση } f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ άρα για } 0 < x \leq e \text{ η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα ενώ για } x \geq e \text{ είναι γνησίως φθίνουσα.}$$

Επομένως από την (1) προκύπτει

$$f(x) > f(x+1) \Leftrightarrow x < x+1 \Leftrightarrow f \downarrow \text{ άρα } \Delta = [e, +\infty)$$

$$\beta) \left(1 + \frac{1}{e}\right)^e < e \Leftrightarrow \left(\frac{e+1}{e}\right)^e < e \Leftrightarrow (e+1)^e < e^{e+1}$$

το οποίο ισχύει από το προηγούμενο ερώτημα αφού $e, e+1 \in [e, +\infty)$

$$10. e^x \geq x^e \Leftrightarrow x \ln e \geq e \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln e}{e} \geq \frac{\ln x}{x} \quad (1)$$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

Είναι $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ άρα για $0 < x \leq e$ η f είναι γνησίως αύξουσα ενώ για $x \geq e$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Επομένως από την (1) προκύπτει

Επομένως από την (1) προκύπτει $f(e) \geq f(x)$ το οποίο ισχύει για κάθε $x > 0$ αφού η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = e$.

11. Για την f ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[2, e]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(2, e)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (2, e)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{\ln e - \ln 2}{e - 2} = \frac{1 - \ln 2}{e - 2}$.

$$\text{Είναι } 2 < \xi < e \Rightarrow \frac{1}{e} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e} < \frac{1 - \ln 2}{e - 2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{e - 2}{e} < 1 - \ln 2 < \frac{e - 2}{2} \Rightarrow \frac{e - 2}{e} - 1 < -\ln 2 < \frac{e - 2}{2} - 1$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{e} < -\ln 2 < \frac{e}{2} - 1 \Rightarrow \frac{e}{2} - 1 < \ln 2 < \frac{2}{e}$$

12. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

Για $x > 1$, για την f ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[1, x]$
- παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (1, x)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{-\ln x}{1 - x}$

$$\text{Είναι } \xi < x \Rightarrow \frac{1}{\xi} > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{-\ln x}{1 - x} > \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln x}{x - 1} > \frac{1}{x} \Rightarrow \ln x > \frac{x - 1}{x}.$$

Για $x < 1$ για την f ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[x, 1]$
- παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$ με $f'(x) = \frac{1}{x}$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x - 1}$.

$$\text{Είναι } \xi > x \Rightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\ln x}{x - 1} < \frac{1}{x}$$

$$\stackrel{x-1>0}{\Rightarrow} \ln x < \frac{x - 1}{x} \Rightarrow \ln x < x - 1$$

Για $x = 1$ ισχύουν οι δύο ισότητες.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$. Για την f ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[\alpha, \alpha + h]$
- παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \alpha + h)$ με $f'(x) = \sigma \nu x$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+h)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} \Rightarrow \text{συν}\xi = \frac{\eta\mu(\alpha+h)-\eta\mu\alpha}{h}$.

Το $\text{συν}x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Είναι $\xi > \alpha \Rightarrow \text{συν}\xi < \text{συν}\alpha \Rightarrow \frac{\eta\mu(\alpha+h)-\eta\mu\alpha}{h} < \text{συν}\alpha$

$\stackrel{h>0}{\Rightarrow} \eta\mu(\alpha+h)-\eta\mu\alpha < h\text{συν}\alpha \Rightarrow \eta\mu(\alpha+h) < h\text{συν}\alpha + \eta\mu\alpha$

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$.

Για $x > 0$ για την f ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[x, x+1]$
- παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \ln(x+1) - \ln x$.

Είναι $0 < x < \xi < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

Για την f ξέρουμε ότι είναι

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο (α, β)

άρα σύμφωνα με το **Θ.Μ.Τ.** υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{\beta \ln \beta - \alpha \ln \alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\ln \frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}}{\beta-\alpha} = \ln \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}.$$

Είναι $f'(x) = \ln x + 1$ και $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\alpha < \xi < \beta \Rightarrow f'(\alpha) < f'(\xi) < f'(\beta)$

$$\Rightarrow \ln \alpha + 1 < \ln \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \ln \beta + 1$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha e) < \ln \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \ln(\beta e) \stackrel{\ln x \uparrow}{\Rightarrow} \alpha e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta e$$

16. Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$.

Άρα υπάρχει:

$$\bullet \quad x_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) : f'(x_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) = f'(x_1) \frac{\beta-\alpha}{2} \quad \text{και}$$

$$\bullet \quad x_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) : f'(x_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\Rightarrow f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f'(x_2) \frac{\beta-\alpha}{2}$$

α) Η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Επομένως ισχύει $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Rightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta)$$

β) Η f είναι κοίλη άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα. Επομένως ισχύει: $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) > f'(x_2) \Rightarrow$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) > f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha) + f(\beta)$$

17. Η εξίσωση της ευθείας (χορδής) που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ είναι:

$$y - f(\alpha) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$$

$$\Rightarrow y = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha).$$

Αρα αν $g(x) = f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$ με $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η C_g είναι η χορδή AB .

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για ένα τυχαίο σημείο $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $f(x) < g(x)$.

$$\text{Έστω η } h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha) \text{ με } x \in [\alpha, \beta].$$

Αρα αρκεί $h(x) < 0$, $x \in [\alpha, \beta]$.

Για την h ισχύει:

- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

- παραγωγίσιμη στο (α, β) με $h'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

- $h(\alpha) = h(\beta) = 0$

άρα σύμφωνα με το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h'(x_0) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως και η h' είναι γνησίως αύξουσα.

Αν είναι $\alpha < x < x_0$ τότε είναι $h'(x) < h'(x_0) = 0$ δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, x_0)$.

Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, x_0)$ είναι $h(x) < h(\alpha) = 0$.

Αν είναι $x_0 < x < \beta$ τότε είναι $0 = h'(x_0) < h'(x)$ δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0, \beta]$.

Επομένως για κάθε $x \in (x_0, \beta]$ είναι $h(x) < h(\beta) = 0$.

18. Η f είναι κυρτή άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ για $x \in [\alpha, \beta]$ με $h(x_0) = 0$

Είναι $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ άρα και η h' .

Για $x < x_0 \Rightarrow h'(x) < h'(x_0) = 0$

για $x > x_0 \Rightarrow h'(x) > h'(x_0) = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
h'	-		+
h			

Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$h(x) \geq h(x_0) \Leftrightarrow h(x) \geq 0$$

19.

20. α) Είναι $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x > 0$ άρα f κυρτή

β) Είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$.

γ) Η f είναι κυρτή άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη της άρα $e^x \geq x + 1$.

21. α) Είναι $f'(x) = \frac{1}{x}$ και $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ άρα η f είναι κοίλη.

β) Είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = x - 1$.

γ) Η f είναι κοίλη άρα η C_f είναι κάτω από την εφαπτομένη της άρα $\ln x \leq x - 1$.

22. Είναι $\ln(1 + x^2) \leq (1 + x^2) - 1 \Leftrightarrow \ln(1 + x^2) \leq x^2$

23. Είναι $xe^x \geq e^x - 1 \Leftrightarrow x \geq 1 - e^{-x} \Leftrightarrow e^{(-x)} \geq 1 + (-x)$ που ισχύει.

24.

25.

26.

27.

28. Για κάθε $x > 1$ είναι $x^{v-1} < x^v \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} x^{v-1} dx < \int_{\alpha}^{\beta} x^v dx$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^v}{v} \right]_{\alpha}^{\beta} < \left[\frac{x^{v+1}}{v+1} \right]_{\alpha}^{\beta} \Rightarrow \frac{\beta^v - \alpha^v}{v} < \frac{\beta^{v+1} - \alpha^{v+1}}{v+1}$$

29.

30. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - e^{1-x^2}$.

$$\text{Είναι } f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x - e^{1-x^2} \cdot (-2x) = 2x \cdot (e^{x^2} + e^{1-x^2}) > 0$$

άρα $f(x) \uparrow [0, 1]$.

$$\text{Είναι } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(0) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 f(1) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 (1 - e) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (e - 1) dx$$

$$\Rightarrow 1 - e \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$$

31.

32. α) Έστω η συνάρτηση F με

$$F(x) = h(x) - g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η F είναι συνεχής (διαφορά συνεχών) και $F(x) > 0, x \in \mathbb{R}$

$$\text{Άρα } \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx > 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (h(x) - g(x)) dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

β) i) Παραγωγίζουμε κατά μέλη την

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \text{ και έχουμε:}$$

$$f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}.$$

ii) Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$. Επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Μέσης τιμής** υπάρχει

$$\xi \in (0, x) \text{ τέτοιο ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Επίσης } f''(x) = -\frac{e^{-f(x)} \cdot f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (-\infty, +\infty) \text{ άρα και στο } [0, x].$$

$$\text{Επομένως } f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(0) < \frac{f(x)}{x} < f'(x).$$

$$\text{Είναι } f'(0) = \frac{1}{1 + e^{-f(0)}} = \frac{1}{1 + e^{-f(0)}} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2} \text{ και } x > 0 \text{ άρα η παραπάνω σχέση δίνει } \frac{x}{2} < f(x) < xf'(x).$$

$$\text{iii)} \text{ Είναι } E = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\text{Από τη σχέση } f(x) > \frac{x}{2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε ότι}$$

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Από τη σχέση } f(x) < xf'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε ότι } \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \Rightarrow E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx$$

$$\Rightarrow E < f(1) - \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow E < f(1) - E \Rightarrow E < \frac{1}{2} f(1).$$

4. Ειδικό θέμα Δ: Γραφικές παραστάσεις

1. α) Δεν υπάρχει **β)** Δεν υπάρχει

γ) Δεν υπάρχει **δ)** $-5 \in A_f$

ε) Ναι

$$\text{στ)} g'(3) = 2 \cdot (-3) f'(9) = -6 \cdot (-1) = 6$$

ζ) **η)** Το ii)

θ) Το iii) **ι)** Το i)

κ) Το i)

$$\text{λ)} x \in [-10, -5) \cup (-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 10)$$

μ) π **ν)** 1,5

ξ) Δεν είναι συνεχής.

2. α) Είναι $A_f = [-4, 4]$ και $f([-4, 4]) = [-3, 3]$.

β) • $\kappa \in [1, 2) : 3 \text{ ρίζες}$

• $\kappa = 2 : 2 \text{ ρίζες}$

• $\kappa \in (2, 3] : 1 \text{ ρίζα}$

γ) Για κάθε $x \in [-4, 4]$ είναι $-3 \leq f(x) \leq 3$. Άρα

$$-3 \leq f(-1) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \cdot 2 \leq 2 \cdot f(-1) \leq 2 \cdot 3$$

$$-3 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 3$$

$$-3 \leq f\left(\frac{3}{2}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \cdot 4 \leq 4 \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) \leq 3 \cdot 4$$

Προσθέτουμε τις παραπάνω ανισοισότητες κατά μέλη και προκύπτει $-3 \cdot 7 \leq 2f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) \leq 3 \cdot 7$

$$\Leftrightarrow -3 \leq \frac{2f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{2}\right)}{7} \leq 3$$

Αν θέσουμε $\kappa = \frac{2f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{2}\right)}{7}$ τότε $-3 \leq \kappa \leq 3$ και από το **θεώρημα ενδιαμέσων τιμών** προκύπτει υπάρχει

$x_0 \in (-4, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{2f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{2}\right)}{7}$$

3. α)

x	-3	-2	-1	0	1	3	4	5
f'(x)	-		-		+		+	
f(x)								

β)

x	-3	-2	-1	0	1	3	4	5
f'(x)								
f(x)								
	Σ.Κ.					Σ.Κ.		

γ)

δ)

ε)

4. α) Είναι $A_g = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$ και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

β) i) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{g(x)} = +\infty$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ δεν υπάρχει

iii) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{g(x)} = +\infty$

iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

v) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$

γ) Στο $x_0 = 1$ δεν είναι συνεχής.

5. α)

β)

γ)

δ)

ε)

στ)

6. α) Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, 4)$

β) $f \uparrow (-\infty, -2)$, $f \uparrow (-2, -1]$, $f \uparrow [-1, 1]$, $f \downarrow [1, 3]$, $f \downarrow [3, 4]$

Τοπικά ακρότατα: $f_{\min} = f(1)$, $f_{\min} = f(4)$

$f' \uparrow (-\infty, -2)$, $f' \downarrow (-2, -1)$, $f' \uparrow (-1, 0]$, $f' \downarrow [0, 2]$, $f' \uparrow [2, 3)$, $f' \downarrow (3, 4]$

Τοπικά ακρότατα: $f'_{\min} = f'(-1)$, $f'_{\max} = f'(1)$, $f'_{\max} = f'(3)$

Ολικό ελάχιστο: $f'_{\min} = f'(2) = f'(4)$

γ) Η f είναι κυρτή στα $(-\infty, -2)$, $[-1, 0]$, $[2, 3]$ και κοίλη στα $(-2, -1]$, $[0, 2]$ και $[3, 4]$.

Σημεία καμπής: $A(-1, f(-1))$, $B(0, f(0))$, $\Gamma(2, f(2))$, $\Delta(3, f(3))$.

δ) $[-3, +\infty)$

ε) $x = -2$ και $y = 0$

στ) Είναι συμμετρική της C_f ως προς την $y = x$

ζ) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$ ii) $\lim_{x \rightarrow -2} f'(x) = +\infty$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f'(x)} = +\infty$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f'(x)}$ δεν υπάρχει

v) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f'(x)} = -\infty$ vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$

vii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$

η) $E(\Omega) = \frac{5}{3} \tau.μ.$

7. α) Είναι $f \uparrow (-\infty, -1]$, $f \downarrow [-1, 1]$ και $f \uparrow [1, +\infty)$.

Είναι $g \uparrow \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$, $g \downarrow \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ και $g \downarrow [3, +\infty)$.

β) $\alpha = 0$

γ) i) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} f(x) = f\left(\frac{5}{3}\right) > 0$.

Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι η g'' παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{5}{3}$ άρα από το **θεώρημα Fermat** προκύπτει ότι

$$g''\left(\frac{5}{3}\right) = 0.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} g''(x) = g''\left(\frac{5}{3}\right) = 0$ και $g''(x) > 0$ κοντά στο 0.

Επομένως $A = \lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{f(x)}{(g''(x))^2} = +\infty$.

ii) Έστω $u(x) = \sin x + \ln x + g(f(x))$.

Άρα $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(\sin x + \ln x + g(f(x))) \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(u(x))}{x} \cdot x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right].$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right] = 1.$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq f(u(x)) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3x} \leq \frac{f(u(x))}{x} \leq \frac{3}{x}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(u(x))}{x} \right] = 0 \text{ άρα } B = 0 \cdot 1 = 0.$$

δ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{g'(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\text{D.L.H. } x \rightarrow 3} \frac{\sigma\upsilon\nu(x-3)}{g''(x)} = \frac{1}{g''(3)}$ (η g'' είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της)

ε) • $f \uparrow (-\infty, -1]$ άρα για $x_1, x_2 \in (-\infty, -1]$ είναι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g \downarrow_{\left[\frac{1}{3}, 3\right]}(f(x_1)) > g \downarrow_{\left[\frac{1}{3}, 3\right]}(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f \downarrow$$

• $f \downarrow [-1, 1]$ άρα για $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ είναι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow g \downarrow_{\left[\frac{1}{3}, 3\right]}(f(x_1)) < g \downarrow_{\left[\frac{1}{3}, 3\right]}(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f \uparrow$$

• $f \uparrow [1, +\infty)$ άρα για $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ είναι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g \downarrow_{\left[\frac{1}{3}, 3\right]}(f(x_1)) > g \downarrow_{\left[\frac{1}{3}, 3\right]}(f(x_2)) \Rightarrow g \circ f \downarrow$$

στ) Έστω η συνάρτηση

$$u(x) = (x^2 - 4)(f \circ g')(\alpha) - (x^2 - 1)(g' \circ f)(\beta) =, \quad x \in [1, 2]$$

Είναι $u(1) = -3f(g'(\alpha)) < 0$ αφού $f(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

Είναι $u(2) = -3g'(f(\beta)) \geq 0$ γιατί $\frac{1}{3} \leq f(\beta) \leq 3$ και η $g'(x) \leq 0$ για $x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

• Αν $u(2) = 0$ τότε το 2 είναι ρίζα της u

• Αν $u(2) > 0$ τότε από το **θεώρημα Bolzano** προκύπτει ότι η υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 τέτοιο ώστε $u(x_0) = 0$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2]$.

ζ) Αρκεί να υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ ώστε $d'(\xi) = 0$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι $d(0) = f(0) - g'(0) = 0$.

Επίσης υπάρχει κάποιο σημείο A με $x_\alpha \in (3, 4)$ ώστε $d(x_\alpha) = f(x_\alpha) - g'(x_\alpha) = 0$.

Άρα από **θεώρημα Rolle** στην d στο $[0, x_\alpha]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ ώστε $d'(\xi) = 0$.

8. α) f, f', f''

β) i) $(\varepsilon_1): y = x$ και $(\varepsilon_2): y = -2x + 1$

ii) f κοίλη, f' κυρτή

iii)

γ)

4. Ειδικό θέμα Ε: Συναρτησιακές σχέσεις

1. α) Για $x = y = 0$ η δοσμένη σχέση δίνει $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0) + f(h) + x_0 h] \\ &= f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) + 0 = f(x_0) \end{aligned}$$

άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ άρα και σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Η f είναι συνεχής στο $\alpha \neq 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(\alpha + h) = f(\alpha) \Rightarrow$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(\alpha) + f(h) + \alpha h] = f(\alpha)$$

$$\Rightarrow f(\alpha) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(\alpha) \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0 = f(0)$$

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Επομένως σύμφωνα με το (α) είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

2.

3.

4. α) Για $x = y = 0$ προκύπτει

$$g(0) = e^0 g(0) + e^0 g(0) + 0 + \alpha \Rightarrow g(0) = 2g(0) + \alpha \Rightarrow g(0) = -\alpha.$$

Για $y = 0$ προκύπτει

$$g(x+0) = e^0 g(x) + e^x g(0) + x \cdot 0 + \alpha \Rightarrow$$

$$g(x) = g(x) + e^x \cdot (-\alpha) + \alpha \Rightarrow \alpha(1 - e^x) = 0.$$

Η δοσμένη σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα είναι $\alpha = 0$. Επομένως είναι $g(0) = -\alpha = 0$.

$$\begin{aligned} \beta) \quad \text{Είναι } g'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h g(x_0) + e^{x_0} g(h) + x_0 h - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h g(x_0) - g(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} g(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 h}{h} \\ &= g(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} + e^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} + x_0. \quad (1) \end{aligned}$$

Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h}$ δηλαδή η παράγωγος της e^x στο 0. Άρα είναι ίσο με $e^0 = 1$.

$$\text{Είναι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = g'(0).$$

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω στην (1) και έχουμε $g'(x_0) = g(x_0) + e^{x_0} \cdot g'(0) + x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

5. α) Για $x = y = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει

$$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$$

Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} = \\ \lim_{h \rightarrow 1} \frac{\cancel{f(x_0)} + f(h) + \alpha(x_0 - 1)(h - 1) - \cancel{f(x_0)}}{x_0(h - 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) + \alpha(x_0 - 1)(h - 1)}{x_0(h - 1)} = \\ \frac{1}{x_0} \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(h) - f(1)}{h - 1} + \frac{\alpha(x_0 - 1)}{x_0} \\ &= \frac{1}{x_0} f'(1) + \frac{\alpha(x_0 - 1)}{x_0} = \frac{\alpha(x_0 - 1)}{x_0} \text{ που είναι πραγματικός αριθμός άρα η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } (0, +\infty). \end{aligned}$$

$$\beta) \quad \text{Είναι } g'(x) = f'(x) - \alpha + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha(x-1)}{x} - \alpha + \frac{\alpha}{x} = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = c \text{ για κάθε } x > 0.$$

γ) Για $x = 1$ η παραπάνω σχέση δίνει

$$g(1) = c \Rightarrow f(1) - \alpha(1 - \ln 1) = c \Rightarrow c = -\alpha.$$

Άρα είναι $f(x) - \alpha(x - \ln x) = -\alpha$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha(x - \ln x - 1) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

4. Ειδικό θέμα Ζ: Σύνολο τιμών

1. $f(x) \geq 0$ και υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Η f παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat $f'(x_0) = 0$. Άρα η εφαιπτομένη στο x_0 είναι η $y = 0$.

2. α) Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής στην f στο $[0, 2]$ άρα $f([0, 2]) = [3, 5]$.

β) Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών στην f στο $[1, 2]$.

3. $(-\infty, 2)$

4. Ειδικό θέμα Η: Άρτιες – Περιττές συναρτήσεις

1. Για $x = y = 0$ προκύπτει $f(0) = 0$.

Για $y = -x$ προκύπτει $f(-x) = -f(x)$ άρα περιττή.

2. α) Για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Άρα για $x = 0$ προκύπτει $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

β) Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[-\alpha, 0]$.

Προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (-\alpha, 0)$ ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(0) - f(-\alpha)}{0 - (-\alpha)} = \frac{f(\alpha)}{\alpha}. \quad (1)$$

γ) Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[0, \alpha]$.

Προκύπτει ότι υπάρχει $x_1 \in (0, \alpha)$ ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(\alpha) - f(0)}{\alpha - 0} = \frac{f(\alpha)}{\alpha}. \quad (2)$$

Από τις (1) – (2) προκύπτει ότι $f'(x_0) = f'(x_1)$ άρα από το **θεώρημα Rolle** προκύπτει ότι η f'' έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(x_0, x_1) \subseteq (-\alpha, \alpha)$

3. α) Για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$.

$$\text{Άρα } (f(-x))' = (f(x))' \Leftrightarrow -f'(-x) = f'(x).$$

Άρα η f' είναι περιττή.

β) Είναι $f'(\rho) \cdot f'(-\rho) = -1 \Leftrightarrow -f'(\rho) \cdot f'(\rho) = -1$

$$\Leftrightarrow f'(\rho) = \pm 1$$

Αν $f'(\rho) = 1$ τότε $f'(-\rho) = -1$.

Αν $f'(\rho) = -1$ τότε $f'(-\rho) = 1$.

Άρα η μία εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης -1 επομένως είναι παράλληλη στην $y = -x$.

γ) Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f' στα διαστήματα $[-\rho, 0]$ και $[0, \rho]$ και προκύπτει ότι υπάρχουν $x_1 \in (-\rho, 0)$ και $x_2 \in (0, \rho)$

$$\text{ώστε } f''(x_1) = \frac{f'(0) - f'(-\rho)}{\rho} = \frac{-f'(-\rho)}{\rho} \text{ και}$$

$$f''(x_2) = \frac{f'(\rho) - f'(0)}{\rho} = \frac{f'(\rho)}{\rho}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$f''(x_1) \cdot f''(x_2) = \frac{-f'(-\rho) \cdot f'(\rho)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

4.

5.

6.

7.

4. Ειδικό θέμα Θ: Πολλαπλές συναρτήσεις

1. Είναι γιατί τα σύνολα τιμών των δύο κλάδων είναι ξένα μεταξύ τους.

2.

3. α) $\alpha = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\beta = -1$

$$\beta) f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln x + 1 - x}{(1-x)^2}, & x \in (0,1) \cup (1,+\infty) \\ -\frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

γ) f γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$

δ) $(-\infty, 0]$

4. α) $\beta = -\alpha = 1$

β) $\uparrow \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right], \downarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right], \uparrow \left[\frac{1}{3}, +\infty\right), f(A) = \mathbb{R}$

γ) $g(x) = \eta \mu x$

$A_{f \circ g} = [-\pi, 0], (f \circ g)(x) = -\eta \mu^2 x - \eta \mu x + 1$

$x = -\pi, x = -\frac{\pi}{2}, x = 0$

δ) Το κλάσμα ορίζεται στο $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.

Το όριο είναι 0.

5.

6. α) $f'(0) = 0$ β) Η f ελάχιστο στο e

7. α) $\alpha = 0$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dots = +\infty$

γ) $y = x$ δ) $A\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

8. α) $\alpha = \beta = 0$ β) $\frac{7}{27}$ τ.μ.

4. Ειδικό θέμα Ι: Πολυωνυμικές – ρητές συναρτήσεις

1. α)

β)

γ)

2. α) Για $x = \frac{1}{x}$ είναι $f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f'(x) = \frac{2}{x}$. (1)

$$\left(f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 0 \Rightarrow f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = c$$

Για $x=1$ είναι $f(1)=1$ άρα $c=1$ άρα $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=1$. (2)

Από τις (1) – (2) προκύπτει $f(x)=x^2$.

Η f συνεχής άρα $f(x)=x^2$ για $x \geq 0$.

β) i) $B\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$ και $d = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha^4}$.

Άρα $d'(t_0) = \frac{33}{\sqrt{17}} \mu/s$

ii) $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = 2\alpha(t) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{4}{17} \text{ rad/s}$

γ) Έστω $F(x) = x^3 + 2\lambda x^2 - (2\lambda + 1)x$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι $F(0) = F(1) = 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $F'(\xi) = 0$

δ) i) $g(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x$, $x \geq 1$

Η g είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών άρα έχει μία ακριβώς λύση

ii) Στο $[1, +\infty)$ η C_g είναι κάτω από τη C_f .

3. α)

β)

γ)

4. α)

β)

γ)

5. α)

β)

γ)

6. α)

β)

γ)

4. Ειδικό θέμα ΙΑ: Εύρεση του τύπου της f

1. $f^2(x) = 2 - x - 2\sqrt{2-x} + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = (\sqrt{2-x} - 1)^2$

$\Leftrightarrow |f(x)| = |\sqrt{2-x} - 1|$

Είναι $\sqrt{2-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow 2-x = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Η f είναι συνεχής και διάφορη του μηδενός στο $(-\infty, 1)$ και στο $(1, 2]$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο κάθε διάστημα.

• Για $x \in (-\infty, 1)$: $f(-2) = -1 < 0$ άρα $f(x) < 0$.

Είναι $x < 1 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow 2-x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} > 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} - 1 > 0$

Επομένως $-f(x) = \sqrt{2-x} - 1 \Leftrightarrow f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$

• Για $x \in (1, 2]$:

Είναι $f(2) = 1 > 0$ άρα $f(x) > 0$.

Είναι $x > 1 \Leftrightarrow -x < -1 \Leftrightarrow 2-x < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2-x} < 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} - 1 < 0$

Επομένως $f(x) = -(\sqrt{2-x} - 1) \Leftrightarrow f(x) = 1 - \sqrt{2-x}$

$$2. \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f(x)\sqrt{x^2+1} = x$$

$$\Leftrightarrow f(x)\sqrt{x^2+1} - x = 0$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η

$$g(x) = f(x)\sqrt{x^2+1} - x \text{ είναι σταθερή και ίση με } 0.$$

$$\text{Είναι } g'(x) = f'(x)\sqrt{x^2+1} + f(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)(x^2+1) + f(x)x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\text{Άρα } g(x) = c \Rightarrow f(x)\sqrt{x^2+1} - x = c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } g(x)=0 \text{ άρα } c=0 \text{ άρα } g(x)=0, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } f(x)\sqrt{x^2+1} - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

2ος τρόπος:

$$xf(x) + (x^2+1)f'(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f(x) + \sqrt{x^2+1} \cdot f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{x^2+1} \cdot f(x) \right]' = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \cdot f(x) = x + c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=0 \text{ άρα } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$3. \quad \alpha) \quad f(x) = f''(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f'(x) = f''(x) + f'(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) + f'(x) = ce^x$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=2 \text{ άρα } f(x) + f'(x) = 2e^x$$

$$\Rightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow (e^x f(x))' = (e^{2x})'$$

$$\text{Άρα } e^x f(x) = e^{2x} + c.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=-1 \text{ άρα } e^x f(x) = e^{2x} - 1$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \quad xf'(x) - 2f(x) = x \Rightarrow f'(x) - \frac{2}{x}f(x) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}f'(x) - \frac{2}{x^3}f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2} \right)' = \left(-\frac{1}{x} \right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } c=1 \text{ άρα } f(x) = x^2 - x, x > 0$$

$$\gamma) \quad f(x) = \ln \frac{e^{x^2} + 1}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\delta) \quad f(x) = e^{x + \frac{6}{x}}, x > 0$$

$$\epsilon) \quad f(x) = 2e^{\frac{5}{3}x}$$

$$\sigma\tau) \quad f(x) = x^2 + x + \frac{1}{x}$$

$$4. \quad 2f'(x)f(x) - 2(e^{-x}f(x) - e^{-x}f'(x)) - 2e^{-2x} = 0$$

$$\Rightarrow 2f'(x)f(x) + 2(e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x)) - 2e^{-2x} = 0$$

$$\Rightarrow (f^2(x) + 2e^{-x}f(x) + e^{-2x})' = 0$$

$$\text{Άρα } f^2(x) + 2e^{-x}f(x) + e^{-2x} = c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=9 \text{ άρα } f^2(x) + 2e^{-x}f(x) + e^{-2x} = 9$$

$$\Rightarrow (f(x) + e^{-x})^2 = 9 \Rightarrow |f(x) + e^{-x}| = 3.$$

Είναι $g(x) = f(x) + e^{-x} \neq 0$ και συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\text{Είναι } g(0) = f(0) + e^{-0} = 3 > 0 \text{ άρα } g(x) > 0.$$

$$\text{Επομένως } f(x) + e^{-x} = 3 \Leftrightarrow f(x) = 3 - e^{-x}.$$

$$\mathbf{5.} \quad (f^2(x) + 2f(x)e^x + e^{2x})(f'(x) + e^x) = 2e^{6x}$$

$$\Rightarrow (f(x) + e^x)^2 (f'(x) + e^x) = 2e^{6x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{(f(x) + e^x)^3}{3} \right)' = \left(\frac{e^{6x}}{3} \right)' \Rightarrow \frac{(f(x) + e^x)^3}{3} = \frac{e^{6x}}{3} + c$$

$$\Rightarrow (f(x) + e^x)^3 = e^{6x} + 3c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } c=0 \text{ άρα } (f(x) + e^x)^3 = e^{6x} \Leftrightarrow f(x) + e^x = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = e^{2x} - e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{6.} \quad f'(x) + \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)f(x) = 0$$

$$e^{x-\alpha \ln x} f'(x) + e^{x-\alpha \ln x} \left(1 - \frac{\alpha}{x}\right)f(x) = 0$$

$$\Rightarrow (e^{x-\alpha \ln x} f(x))' = 0$$

$$\Rightarrow e^{x-\alpha \ln x} f(x) = c$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } c=1 \text{ άρα } e^{x-\alpha \ln x} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x^\alpha \cdot e^{-x}$$

7.

$$\mathbf{8.} \quad f'(x) = \sqrt{4 + f^2(x)} \Rightarrow [f'(x)]^2 = 4 + f^2(x)$$

$$\text{Παραγωγίζω και προκύπτει } 2f'(x)f''(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$\text{Είναι } f'(x) \neq 0 \text{ άρα } f''(x) = f(x).$$

Η συνέχεια είναι στο 3 α)

$$\mathbf{9.} \quad xf'(x) + f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \Leftrightarrow (\ln x)' = \left(\frac{1}{f(x)} \right)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = \ln x + c$$

$$\text{Για } x=e \text{ είναι } c=0 \text{ άρα } f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad x > 1.$$

$$\mathbf{10.} \quad f'(x)f(x) + f'(x) = e^{-f(x)}$$

$$\Rightarrow e^{f(x)} f'(x) f(x) + e^{f(x)} f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow (e^{f(x)} f(x))' = 1 \Rightarrow e^{f(x)} f(x) = x + c$$

$$\Gamma\iota\alpha \ x=0 \ \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ e^{f(0)}f(0)=c \Leftrightarrow c=0 \ .$$

$$\text{Αρ}\alpha \ e^{f(x)}f(x)=x \Leftrightarrow f(x)=xe^{-f(x)}$$

11.

$$\text{12.} \ \Theta\acute{\epsilon}\tau\omega \ u=\frac{x}{h} \Leftrightarrow h=\frac{x}{u}$$

$$\text{Αρ}\alpha \ \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)-f(x)}{\frac{x}{u}-1} = -x-2 \Rightarrow \lim_{u \rightarrow x} u \cdot \frac{f(u)-f(x)}{x-u} = -x-2$$

$$\Rightarrow -x \cdot \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u)-f(x)}{u-x} = -x-2 \Rightarrow -x \cdot f'(x) = -x-2$$

$$\Gamma\iota\alpha \ x>0 \ \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ f'(x)=1+\frac{2}{x} \Rightarrow f(x)=x+2\ln x+c \ .$$

$$\Gamma\iota\alpha \ x=2 \ \ \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \ f(2)=2+2\ln 2+c \Leftrightarrow c=0 \ .$$

$$\text{Αρ}\alpha \ f(x)=x+2\ln x \ .$$

13.