1ο ΓΕ.Λ.
Θέρμης

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Ασκήσεις για λύση

Σειρά:
Μαθηματικές σημειώσεις για τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Σεπτέμβριος 2021

Θεολόγης Καρκαλέτσης

Περιεχόμενα

Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

1. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda x+3=5x-7$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

2. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{2x-1}{x-2}+\dfrac{x-2}{2x-1}-\dfrac{5}{2}=0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu\left(7x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

4. Να δείξετε ότι η παράσταση
$$\sigma\upsilon\nu^2x-2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$$
είναι ανεξάρτητη του x.

5. Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2x+3\sigma\upsilon\nu x-2=0$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $x^4-5x^3+5x^2+5x-6=0$.

7. α) Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η $f(x)=(\alpha-1)^x$ ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$;
β) Αν είναι $\alpha=3$ τότε να λύσετε την εξίσωση
$$f(x)+f(x+1)=6$$

8. Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ οι αριθμοί:
$\log 178,\ \log\sqrt{81(2^x+2\cdot 3^x)},\ x\log 3$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου;

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2-5|x|+6=0$ β) $|x-3|-|x+1|=3|2x-3|$

10. Να λυθούν οι ανισώσεις:
α) $|3x-1|<5$ β) $\left|2x+\dfrac{1}{3}\right|\ge 3$
γ) $2|x+1|+3|x|>x+1$
δ) $\dfrac{3|x-1|+2}{5}\le 2|x-1|<\dfrac{2|x-1|-1}{3}$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $\dfrac{4x^2-x^3-9}{x^2-2}=\dfrac{x^3+4x^2+9}{x^2+2}$
β) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}=7$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις:
α) $x^2-4x+4\le 0$ β) $x^3-4x^2+2x-8>0$
γ) $\dfrac{2+x-x^2}{x^2+1}\le 0$ δ) $x^2-\dfrac{2}{2x+1}<\dfrac{1}{x\cdot(2x+1)}$
ε) $2^{x-2}-3^{x-3}-2^{x-3}+3^{x-4}\ge 0$
στ) $\ln[(2x-1)(x+3)]\ge 2\ln 3$

2. Ορισμός συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι συναρτήσεις οι σχέσεις:
α) $f(x)=\begin{cases}3x-4, & x\le 2\alpha^2-\alpha\\ x^2+7, & x\ge \alpha^2+\alpha+3\end{cases}$
β) $f(x)=\begin{cases}3-x, & x\le 4\\ 3x^2-\alpha^2, & x\ge 4\end{cases}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$. Να βρείτε τα
$$f(0),\ f(\sigma\upsilon\nu 2\alpha),\ f(-x)$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Να δείξετε ότι:
$$f(\alpha+\beta)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{1+f(\alpha)f(\beta)}$$

4. Να απλοποιήσετε τους τύπους των συναρτήσεων:
α) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-x+2}{x^3-3x+2}$ β) $f(x)=\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$
γ) $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}$ δ) $f(x)=\ln\sqrt{xe^{\ln x}}$

5. Να εκφράσετε τις συναρτήσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:
α) $f(x)=\dfrac{3}{|x-3|-1}$ β) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$
γ) $f(x)=|x^3-4x^2+3x|$ δ) $f(x)=|\ln(x-1)|+\ln|5-x|$

6. Το άθροισμα των διαστάσεων α και β ενός ορθογωνίου είναι 14. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του α και ως συνάρτηση της διαγωνίου του δ.

7. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Αν ΜΝΡΣ είναι ένα εγγεγραμμένο ορθογώνιο και ΑΜ = x να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που εκφράζει το εμβαδόν του.

8. Ένα κουτί με σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει τετράγωνη βάση με πλευρά, και ύψος y και η περίμετρος της παράπλευρης επιφάνειας είναι 30 cm να εκφράσετε τον όγκο του κουτιού συναρτήσει του x.

9. Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha^x}{\alpha^x+\sqrt{\alpha}}$ συνάρτηση, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα
$$S=f\left(\frac{1}{2001}\right)+f\left(\frac{2}{2001}\right)+\ldots+f\left(\frac{2000}{2001}\right)$$ Ε.Μ.Ε.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x, & -5\le x\le -2 \\ |x|+\beta, & -2<x<6 \end{cases}$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β

β) Για $\alpha=2$ και $\beta=-1$ να βρείτε τις τιμές

$$f(-3),\ f(-2),\ f(-1),\ f(f(-3))$$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

3. Πεδίο ορισμού συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4x+3}$ β) $f(x)=\dfrac{x+4}{3^x+9^x-90}$

γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9}$ δ) $f(x)=\ln(1+\ln x)$

ε) $f(x)=(9-x^2)^{\eta\mu x+2}$ στ) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

ζ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}}$ η) $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{2-x}{2+x}}$

θ) $f(x)=\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

ι) $f(x)=\begin{cases} x-1, & 0\le x<2 \\ \ln x, & x>2 \end{cases}$

2. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{x^2-\lambda x+1}$ β) $f(x)=\ln\left(4\lambda x^2-4x+1\right)$

3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) $f(x)=\dfrac{x^3-\lambda x^2+3}{x^2-2\lambda x+1}$

β) $f(x)=\ln\left[(\lambda-2)x^2+(\lambda+1)x+\lambda+1\right]$

4. Πεδίο τιμών συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3-1}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (ομογραφική) με $A_f=\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)\cup\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},+\infty\right)$ και $\alpha\gamma\ne 0$, $\beta\gamma\ne\alpha\delta$. Να αποδείξετε ότι το πεδίο τιμών της είναι το

$$f(A)=\left(-\infty,\frac{\alpha}{\gamma}\right)\cup\left(\frac{\alpha}{\gamma},+\infty\right)$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με

$$f(x)=x^2-3x$$

και σύνολο τιμών το $f(A)=[-2,4]$.

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+\alpha},\ x\in\mathbb{R},\ \alpha>0$$

Να βρείτε το α ώστε η f να έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$xf(x)-f(-x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρεθεί το A_f της συνάρτησης f:

α) με $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{x+2}{2x}$ και $f(A_f)=(-\infty,2)$

β) με $f(x)=2^{2x+1}-2^x$ και $f(A_f)=[1,+\infty)$

γ) με $f(x)=x^{\ln x+1}$ και $f(A_f)=[1,e^2]$

δ) με $f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x}}$ και $f(A)=\left[e^2,e^{\frac{9}{2}}\right]$

ε) με $f(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ και $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$ των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{3-x}{1-x},\ x\in[-1,0]$ β) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$

γ) $f(x)=1-\sqrt{2-x}$ δ) $f(x)=2-\sqrt{x^2+9}$

ε) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ στ) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x-2}$

ζ) $f(x)=3^{2x}-8\cdot 3^x+6$ η) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{\ln x}$

θ) $f(x)=\sqrt{3}\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+2$ ι) $f(x)=\dfrac{4}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών $f(A)$ των παρακάτω συναρτήσεων:

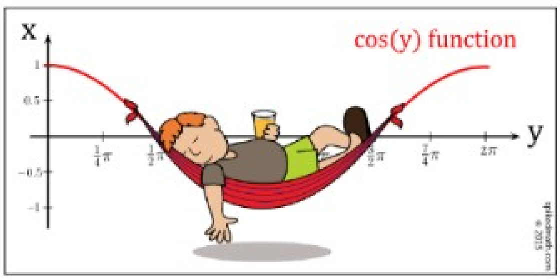
α) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & -1\le x\le 0 \\ x^2+1, & 0<x\le 1 \end{cases}$

β) $f(x)=|x-3|-2|x-1|$

4. Να βρεθούν τα α, β $\in\mathbb{R}$ ώστε η f να έχει το αντίστοιχο σύνολο τιμών.

α) $f(x)=\log\left(x^2+\alpha\right)$, $\alpha>0$ και $f(A)=[1,+\infty)$

β) $f(x)=\dfrac{e^x-\alpha}{e^x+\beta}$, $\beta>0$ και $f(A)=(-2,-1)$



5. Άρτια – περιττή συνάρτηση

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{x^6}$

β) $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+7}$

γ) $f(x)=3\varepsilon\varphi x+\eta\mu x-5x$

δ) $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x}+5$

ε) $f(x)=\ln x^2+2\sigma\upsilon\nu x$

στ) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}+\dfrac{|x|}{x}+\dfrac{|x+2|}{x+2}$

2. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x)=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

β) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

γ) $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-9}+1}$

δ) $f(x)=\begin{cases}-2x+5, & x<-3\\ -2x-5, & x>3\end{cases}$

3. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε να βρείτε το $f(0)$.

4. Έστω οι συναρτήσεις f, g. Αν ορίζεται η συνάρτηση $f\circ g$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Αν η g είναι άρτια τότε η $f\circ g$ είναι άρτια

β) Αν οι f και g είναι περιττές τότε η $f\circ g$ είναι περιττή

γ) Αν η f είναι άρτια και η g περιττή τότε η $f\circ g$ είναι άρτια

5. Να βρεθεί η συνάρτηση f αν είναι περιττή και

$$(x^2+1)f(x)-3x\le 0,\ x\in A_f$$

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $A_f=\mathbb{R}$

β) η f είναι περιττή

γ) Η C_f έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον $x'x$

7. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha f(x)+\beta f(-x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha+\beta\ne 0$$

τότε να αποδείξετε ότι $f(-x)=-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

6. Συναρτησιακές σχέσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(xy)=f(x)f(y)-\dfrac{x^2+y^2}{xy}$, $x,y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=0$

β) $f(y)=-f\left(\dfrac{1}{y}\right)$, $y>0$

γ) $f\left(\dfrac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

3. Να βρείτε αν είναι άρτια ή περιττή η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy)=f(x)+f(y)$.

4. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x)\le x$ (1) και $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ (2)

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$2f(x+y)=3f^2(x)+3f^2(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

2. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f(x+3)+2f(1-x)=x^2+x+1$

3. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(x)\le x$ (1) και $f(x+y)\le f(x)+f(y)$, (2) $x,y\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (ταυτοτική συνάρτηση)

4. Να βρείτε αν είναι άρτια ή περιττή η συνάρτηση f αν το πεδίο ορισμού της A είναι συμμετρικό ως προς το 0 και για κάθε $x,y\in A$ ισχύει:

α) $3f(x)-2f(-x)=e^x+e^{-x}$

β) $f(x-y)=f(x)-f(y)$

γ) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

δ) $3f(x)+f(-x)=2\eta\mu x$

5. Να αποδείξετε ότι η άρτια συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $B=(0,1,-1)$, $x\in\mathbb{R}$. E.M.E.

6. Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση f ώστε

$$f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x+y)\cdot f(x-y),\ \ x,y\in\mathbb{R}$$

είναι σταθερή.

7. Να αποδείξετε ότι μία συνάρτηση f η οποία για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x+y)\cdot f(x-y)=f^2(x)-f^2(y)$$

είναι περιττή.

8. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(f(x+y))=xf(x)+yf(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι άρτια

β) $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

9. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$. Να βρείτε:

α) το $f(1)$ β) τον τύπο της f

7. Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Γιατί η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης μπορεί να έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τον $y'y$;

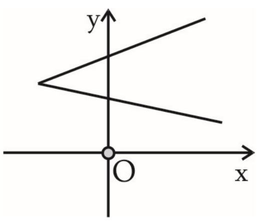
2. Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

3. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με κάθε οριζόντια ή με κάθε κατακόρυφη ευθεία;

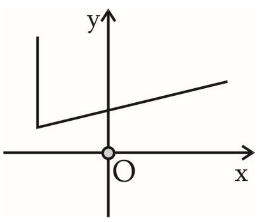
4. Υπάρχει συνάρτηση που η γραφική της παράσταση έχει άπειρα κοινά σημεία με τον $x'x$.

5. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω καμπύλες αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Αν όχι, χωρίστε την αντίστοιχη καμπύλη στον ελάχιστο αριθμό καμπυλών που να αντιστοιχούν σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων (όπου αυτό είναι δυνατό).

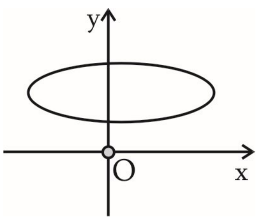
α)



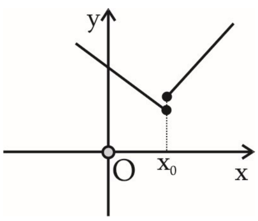
β)



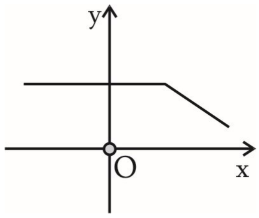
δ)



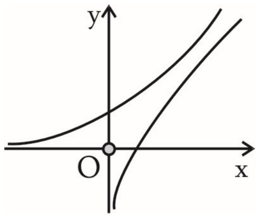
ε)



γ)



στ)



6. Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων ή των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασής της;

7. Το σύνολο τιμών μίας συνάρτησης είναι το σύνολο των τετμημένων ή των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασής της;

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^{x+5}-1$ β) $f(x)=|3-\ln x|$

γ) $f(x)=4-5\eta\mu 2x$ δ) $f(x)=|2x-3|$

ε) $f(x)=\ln(-x)$ στ) $f(x)=|\ln x|$

ζ) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & |x|<1 \\ \dfrac{2}{x}, & |x|\geq 1 \end{cases}$ η) $f(x)=\begin{cases} 2x, & x<-2 \\ x^2, & -2\leq x<3 \\ \dfrac{1}{x}, & x\geq 3 \end{cases}$

2. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=2x^2-4\lambda x+5\lambda+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η κορυφή της C_f να ανήκει στην ευθεία $5x-2y=4$.

3. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x+1}{x} \text{ και } g(x)=\frac{\lambda x-2\lambda-1}{x-1}$$

όταν οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

4. Να βρείτε, αν υπάρχουν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες αν $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-7}$

5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

α) $f(x)=1-e^{x+1}$ β) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x^2+x+5}$

6. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g .

α) $f(x)=x^2-5x+6$ και $g(x)=x^2+x-2$

β) $f(x)=\dfrac{5-3x}{1+x}$ και $g(x)=\dfrac{3}{x}$

7. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2^{x+1}$ και $g(x)=20-4^x$

β) $f(x)=\sqrt{5x+10}$ και $g(x)=8-x$

γ) $f(x)=4x^3+5x$ και $g(x)=12x^2-6$

8. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=e^{x+\alpha} \text{ και } g(x)=\ln(x+\beta)$$

να έχουν κοινό σημείο το $A(-2,1)$.

9. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=2^x+3^x \text{ και } g(x)=9^x-4^x$$

Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g και τη σχετική τους θέση.

10. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^2-8x+11$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(4-x)=f(4+x)$$

β) Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά η σχέση;

11. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^5+x^3-x^2+2}$$

Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3+x-1=0$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(\rho,f(\rho))$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{3}{2}$.

12. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=(\lambda-1)x^2+2(\lambda+1)x+\lambda+5,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$$

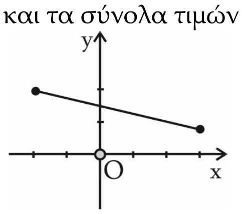
α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία

β) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η γραφική παράσταση της f να εφάπτεται στον άξονα $x'x$

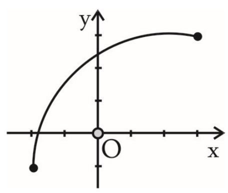
γ) Να αποδείξετε ότι όταν το $\lambda\in\mathbb{R}-\{1\}$ τότε η γραφική παράσταση της f διέρχεται από ένα σταθερό σημείο

13. Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων να βρείτε τα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους

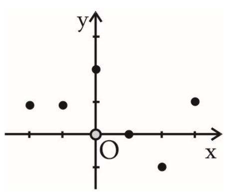
α)



β)



γ)



8. Ισότητα – Πράξεις συναρτήσεων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Α. Να εξετάσετε αν είναι ίσες συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-4} \text{ και } g(x)=\frac{x+1}{x+2}$$

Αν δεν είναι ίσες τότε να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$

Β. Ομοίως για τις συναρτήσεις

$$f(x)=x \text{ και } g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$$

2. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

α) $f(x)=\ln\frac{2-x}{x-3}$ και $g(x)=-\ln\frac{x-3}{2-x}$

β) $f(x)=\frac{1}{1-\text{συν}x}+\frac{1}{1+\text{συν}x}$ και $g(x)=\frac{2}{\text{ημ}^2x}$

γ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & x\le 1\\ \sqrt{3-x}, & x>1\end{cases}$ και $g(x)=\sqrt{2-|x-1|}$

3. Να αποδειχτεί ότι οι f,g είναι ίσες αν ισχύει:

$$2\left[f^2(x)+g^2(x)\right]=\left[f(x)+g(x)\right]^2,\ x\in\mathbb{R}$$

4. Α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ και το διάστημα στο οποίο είναι ίσες οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2-2\lambda+1}{x+3-2\lambda},$$

$$g(x)=\frac{x^2+(\lambda-2)x-\lambda-1}{x+1-\lambda}$$

Β. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\frac{4x}{x^2-x}$, $g(x)=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-1}$ να είναι ίσες.

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=\frac{1}{x-1}$ και $g(x)=\sqrt{2-x^2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις

$$f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h ορισμένες σε ένα σύνολο Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $f=g \Leftrightarrow f+h=g+h$

β) $f=g \Leftrightarrow f\cdot h=g\cdot h$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+2, & -3\le x\le 5\\ 5x+2, & x<-3 \text{ ή } x>5\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}-5x+1, & -2\le x\le 7\\ -x^2+5x-1, & x<-2 \text{ ή } x>7\end{cases}$$

α) Να οριστεί η συνάρτηση $h=f+g$

β) Να εξετάσετε που είναι σταθερή η h

8. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\log x\,,\ g(x)=\log(-x)$$

α) Ορίζονται οι συναρτήσεις $f+g,\ f\cdot g$;

β) Να οριστούν οι συναρτήσεις $\frac{2}{f},\ \frac{-3}{g},\ 4f$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\left[f(x)\right]^2-3f(x)+2=0$

9. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln x^2 \text{ και } g(x)=2\ln x$$

α) Να εξετάσετε αν $f=g$

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g\,,f-g\,,f\cdot g\,,\ \frac{f}{g}$

γ) Εξετάσετε ποια από τις παραπάνω είναι η μηδενική συνάρτηση

10. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\ge 1\\ -x, & x<1\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}3x, & x\ge 0\\ -4x-3, & x<0\end{cases}$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=f-g$

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της h

γ) Από τη γραφική παράσταση της h να βρείτε το πεδίο τιμών της

11. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

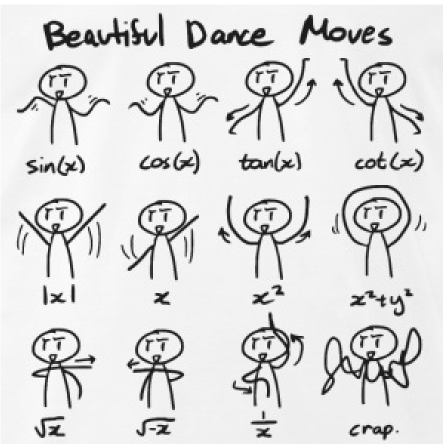
$$f(x)\cdot g(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Ισχύει ότι μία τουλάχιστον από τις δύο συναρτήσεις είναι ίση με το 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$;

12. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$(f+g)^2(x)-(f-g)^2(x)-8x^2\ge$$
$$\ge 2(f+g)(x)\left[(f+g)(x)-2x\right]$$

Να αποδείξετε ότι $f=g$.



9. Σύνθεση συναρτήσεων Ι

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\log\left(x^2-3x+2\right)$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$h(x)=f\left(\frac{2x-6}{x^2-1}\right) \text{ αν } A_f=(0,+\infty)$$

3. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \text{ και } g(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

α) Να βρείτε τα A_f και A_g

β) Να ορίσετε την $g\circ f$

4. Να βρείτε την $f\circ g$ αν

$$f(x)=\begin{cases}x-3, & x<2\\ 4x+1, & x\ge 2\end{cases} \text{ και } g(x)=\begin{cases}5-x, & x<7\\ x^2, & x\ge 7\end{cases}$$

5. Αν $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ τότε να αποδείξετε ότι $(f\circ g)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6. Αν $f(x)=\frac{\alpha x-1}{\alpha x+1}$ τότε να βρείτε το α ώστε να ισχύει $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\ne -1$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να οριστεί η $f\circ g$:

α) $f(x)=\frac{x+3}{1-x}$, $g(x)=\frac{x+4}{x-5}$

β) $f(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$, $g(x)=\ln(x-1)$

γ) $f(x)=\sqrt{4-x^2}\,,g(x)=\sqrt{x-1}$

δ) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ 2x-5, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x-5, & x\le 1\\ 1-4x, & x>1\end{cases}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\eta\mu\left(\frac{3}{x}\right)$

β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\sqrt{(2-x)(x-3)}\right)$

γ) $g(x)=f\left(1-\sqrt{x^2-3x}\right)$ αν $A_f=[-1,1]$

δ) $h(x)=f\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$ αν $A_f=(1,+\infty)$

ε) $h(x)=f(x+1)+f(x+2)$ αν $A_f=[-1,3]$

στ) $h(x)=f\left(x^2-3x+1\right)$ αν $A_f=[-2,11]$

3. Έστω η συνάρτηση f με $A_f=[2,+\infty]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

$$g(x)=f(x-1)+f(x^2-4x+2)$$

4. Αν είναι $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$ και $g(x)=\frac{x}{1-|x|}$ τότε αποδείξτε ότι $(g\circ f)(x)=x$.

5. Να βρεθεί μία συνάρτηση f ώστε να ισχύουν στα πεδία ορισμού τους οι σχέσεις:

$$(f\circ g)(x)=x^2+x-12 \text{ αν } g(x)=x-3$$

6. Αν είναι $f(x)=x$ και $g(x)=\sqrt{x}$ τότε να εξετάσετε αν (ή πότε) ισχύει η ισότητα $f\circ g=g\circ f$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha x+\alpha$ και $g(x)=x+\alpha$. Να βρείτε τη τιμή του α ώστε να είναι $(f\circ g)(x)=x^2+3x+3$.

8. Έστω $f(x)=\alpha x+\beta$ και $g(x)=\beta x+\alpha$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε:

α) την $(f\circ g)(x)$

β) την $(g\circ f)(x)$

γ) τα α, β ώστε

$$(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)-f(2-x)=0$$

9. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=2x+\alpha \text{ και } g(x)=3x+2\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Αν οι C_f, C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=1$ τότε:

α) Να βρείτε το α

β) Να αποδείξετε ότι $f\circ g=g\circ f$

10. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f\circ g$

β) Αν ισχύει $(f\circ g)(x)=-\frac{1}{x}$ να βρείτε την f

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

11. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε:

- $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$
- $f(x)=0$ αν και μόνο αν $x=1$

Αν ακόμη είναι $g(x)=f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

β) να βρείτε το A_g

γ) να δείξετε ότι $g(x)=0$ αν και μόνο αν $x=0$

δ) να δείξετε ότι η g είναι περιττή

10. Σύνθεση συναρτήσεων ΙΙ

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να εκφράσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{3\sqrt{x}+2}{1-5\sqrt{x}}$ ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων.

2. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x+2)=x^2-x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την f

β) Αν είναι $A_f=[0,\sqrt{2}]$ και $g(x)=f(2\eta\mu x)$ τότε να βρείτε το A_g

3. Έστω συνάρτηση f με

$$f(x+1)=x^2+5x+6,\ x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x^2+1)=0$ είναι αδύνατη.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$e^{f(x)}+f(x)=x-1$$

α) Αν η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα τότε να τη βρείτε

β) Να λύσετε την $f(x)=0$

5. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-x^2=0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης όταν:

α) $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)=\frac{x-7}{x+1}$ για κάθε $x\neq\pm1$

β) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ για κάθε $x\neq0$

γ) $(x+1)f(x)-xf(-x)=x^2-1$

δ) $3f(x-2)-f(2-x)=4x-8$

ε) $f(2x-1)=4x^2-10x+14$

στ) $f^2(x)=1-\sigma\upsilon\nu^2x$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=2x-3 \text{ και } (f\circ g)(x)=x^2-3x+2.$$

Να βρείτε την f.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g, h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$(f\circ g)(x)=(g\circ h)(x)=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι $f=h$.

4. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x+1)=x^2+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $f(x)+f(x+1)=2(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

5. Να εκφράσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων:

α) $f(x)=συν^2x$ β) $f(x)=\sqrt{\ln x-2}$

γ) $f(x)=\dfrac{1}{ημx}$ δ) $f(x)=3εφ^2x+εφx-2$

6. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=1-x$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ και όλες τις δυνατές συνθέσεις αυτών των συναρτήσεων (π.χ. $f\circ f$, $f\circ g$, $g\circ f\circ g$, ...). Ο αριθμός όλων των διαφορετικών αυτών συναρτήσεων που θα προκύψουν

α) Δεν είναι >5
β) Είναι >5 αλλά <10
γ) Είναι >10 αλλά όχι >100
δ) Είναι πεπερασμένος αριθμός >100

ε) Είναι άπειρος Ε.Μ.Ε.

7. Αν ισχύει $\begin{cases} f(x+3)+2g(2x+9)=\dfrac{x}{2} \\ f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+g(x+2)=x+1 \end{cases}$, $x\in\mathbb{R}$

τότε να βρείτε την $f\circ g$.

8. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $f(x)+f(2-x)=x$, $x\in\mathbb{R}$

11. Μονότονες συναρτήσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης
$$f(x)=\frac{1}{x}$$

2. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση
$$f(x)=e^x+x \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση
$$e^{2f(x)}+e^{f(x)+1}+f(x)-2e^2=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

4. Έστω μία γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που διέρχεται από δύο σημεία, έστω $A(3,2)$ και $B(4,7)$. Να βρείτε την μονοτονία της.

5, Να υπολογίσετε το $α\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι γνησίως αύξουσα η συνάρτηση $f(x)=x^3+αx+β$.

6. α) Να αποδείξετε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει μία το πολύ ρίζα.
β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x=1-x$.

7. α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.
β) Αν οι συναρτήσεις f,g δεν έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε η $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

β) $f(x)=x+\sqrt{x}$

γ) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$

δ) $f(x)=x^3-3x$

ε) $f(x)=\ln(x-1)+3x^2$

στ) $f(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$

ζ) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 1\\ x^2-2x+3, & x>1\end{cases}$

η) $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\le 2\\ x^2-4x+1, & x>2\end{cases}$

θ) $f(x)=x|x-1|-|x|-3$

2. Να υπολογίσετε το $α\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι γνησίως αύξουσες οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=\left(\dfrac{α-3}{1-α}\right)^x$

β) $f(x)=\begin{cases}αx-2, & x\le 0\\ 3x-α, & x>0\end{cases}$

γ) $f(x)=3x^3+3x^2+(3α-2)x+β$

3. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο $(α,β)$ τότε να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-β,-α)$.

4. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\ln x>1-x$

β) $f(x^2+1)<f(2x-2)$ αν $f(x)=x+\ln x$

γ) $\ln\dfrac{3^x+4^x}{5^x}<e^{5^x}-e^{3^x+4^x}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^x+x^3=1$

β) $5\cdot 3^{-x}-x=5$

γ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\dfrac{32}{9}=2^x$

δ) $\dfrac{2e}{x}=\ln(x-e)$

6. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε το πρόσημο της f στο $\mathbb{R}$.

7. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα η συνάρτηση
$$g(x)=\frac{f(x)}{1+f^2(x)},\ x\in\mathbb{R}$$

12. Ακρότατα συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=3x+1$ με $x\in[2,5)$. Να βρείτε τα ακρότατά της, αν υπάρχουν.

2. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x)=(x-1)^2+3$ β) $g(x)=2-\frac{|x-4|}{3}$

γ) $h(x)=2x-3$, $x\in[2,5)$ δ) $\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 1\\ 1-3x, & x>1\end{cases}$

3. Έστω δύο συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x)+g^2(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν οι C_f και C_g τέμνονται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: x=1$ να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $h(x)=2f(x)\cdot g(x)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-1$ β) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+3$

γ) $f(x)=x^2-4x+3$ δ) $f(x)=|x-1|-2$

2. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x)=g(x)-x^2-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των C_f και C_g,

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{4f(x)}{1+f^2(x)}$$

έχει ελάχιστο το –2 και μέγιστο το 2.

4. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2-4x+6,\ g(x)=\frac{2x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 2$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $g(x)\le 1$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g

5. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x^2-6x+10,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(\kappa-1)+f(\lambda+2)=2$$

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\frac{4x}{x^2+4}$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι

$$g(x)\le 1,\ x\in\mathbb{R}$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)=g(x),\ x\in\mathbb{R}$$

13. Συνάρτηση 1 – 1

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$(f\circ f)(x)+x^3=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη

γ) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-3x)=f(2x-6)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν οι f, g είναι 1–1 τότε και η $f\circ g$ είναι 1–1

β) αν η $f\circ g$ είναι 1–1 τότε και η g είναι 1–1

γ) αν είναι $f\circ g=g\circ f$ και η f είναι 1–1 τότε $g=f$

δ) αν είναι $(f\circ g)(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ τότε η g είναι 1–1

ε) αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $(f\circ f)(x)=xf(x)$ και $f(x)\neq 0$ τότε η f είναι 1–1

2. Η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$ και η f έχει ρίζα το 2. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1–1.

3. Αν $f(f(x))+f^3(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι η f είναι 1–1.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha\neq 0$ και $\Delta\neq 0$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1–1.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1+f(x))=2x-6+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να βρεθεί το $f(3)$

γ) Να λυθεί η εξίσωση

$$f(1+2f(x^2+x+1))=f(1+f(5))-4$$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^x+x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1.

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$e^{x^2-4}-e^{3x}=3x-(x^2-4)$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g(x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ που είναι 1–1.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να αποδείξετε ότι $g(f(x))=g(x)$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε την f

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Να αποδείξετε ότι αν η f έχει μοναδική ρίζα τότε 1–1.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(xyf(x)) = xf(xy),\ x,y\in\mathbb{R}$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι

$$f(x) = x,\ x\in\mathbb{R}$$

10. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$(f\circ g)(x) = x+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Να λύσετε την εξίσωση

$$g\left(4^x - 2^{x+1} + 4\right) = g\left(2^{x+2} - 4\right)$$

Τα μαθηματικά είναι η τέχνη

να δίνεις το ίδιο όνομα

σε διαφορετικά πράγματα.

Ανρί Πουανκαρέ

14. Αντίστροφη συνάρτηση Ι

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

α) Να βρείτε το A_f

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

γ) Να βρείτε την f^{-1}

δ) Αν είναι $\alpha = f^{-1}(\ln 1) + f^{-1}(\ln 2)$ τότε να βρείτε το α

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \qquad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και ότι η f είναι περιττή.

β) Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε η f^{-1} είναι περιττή και

$$f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(\nu x) = \nu f(x)$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$

δ) Αν $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρεθούν οι αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ β) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x-1}}$

γ) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ δ) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

ε) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ στ) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

ζ) $f(x) = \dfrac{2^x}{1+2^x}$ η) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

θ) $f(x) = \sqrt{5+\sqrt{6-x}}$ ι) $f(x) = 2x^3 - 1$

κ) $f(x) = \ln\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

2. Να ορίσετε το $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι 1–1 η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \kappa x+2, & x<0 \\ 2x+2, & x\ge 0 \end{cases}$ και να βρείτε την f^{-1}.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2+1, & x\ge 1 \end{cases}$. Να δείξετε ότι είναι 1–1 και να βρείτε την f^{-1}.

4. Έστω συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 και να βρείτε την f^{-1}.

5. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$(f\circ f\circ f + g\circ f\circ f)(x) = x,\ x\in\mathbb{R}$$

Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

α) η f αντιστρέφεται

β) $f^{-1}(x) = (f\circ f)(x) + (g\circ f)(x)$

6. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \dfrac{4x^3-1}{3}$ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}.

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$, $x\ge 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε την f^{-1}

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{3x+5}{2x-3}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας την $y=x$.

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ώστε

$$f^3(x) + f(x) = x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται με

$$f^{-1}(x) = x^3 + x,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε την μονοτονία της f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα

δ) Να βρείτε το πρόσημο της f

ε) Να λύσετε την εξίσωση

$$f\left(f^{-1}\left(x^2+x\right) - 8\right) = 1$$

15. Αντίστροφη συνάρτηση ΙΙ

Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί (Σ) και ποιοι λανθασμένοι (Λ).

α) Αν η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση τότε για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

β) Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες τότε και η $g\circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Έστω η $f:A\to\mathbb{R}$ και η $g:f(A)\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση $g\circ f$ είναι 1–1 τότε και η f είναι 1–1

δ) Κάθε συνάρτηση που είναι 1–1 είναι ή γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα

ε) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε η $f^{-1}:f(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα

στ) Είναι $f(f^{-1}(x))=x$ για κάθε $x\in A_f$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(f(x))=9x+8 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\dfrac{f(x)-8}{9}$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(9x+8)=9f(x)+8$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(f(x))=x+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι αντιστρέψιμη

β) $f(0)=0$

γ) $f^{-1}(x)=f(x)-x$ για κάθε $x\in f(\mathbb{R})$

3. Έστω $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 και να βρείτε την f^{-1}

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>f(f(x))$

4. Έστω συνάρτηση f με $f(f(f(x)))=2x-9$, $x\in\mathbb{R}$. Αν είναι $f(1)=3$ και $f(3)=9$ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 και να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=9$.

5. α) Δίνεται η συνάρτηση $y=f(x)$ με $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x))=x^3$. Να δείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται

ii) Ισχύει $(f(x))^3=f(x^3)$

β) i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$ στο $\mathbb{R}$

ii) Να δείξετε ότι $[f(-1)]^3+[f(1)]^3=f(0)$

iii) Αν $f(8)=64$ να βρείτε το $f(2)$ Ε.Μ.Ε.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται

β) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=12$, $f^{-1}(x)=-2$

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες και με την ευθεία $y=x$

δ) Να λύσετε:

i) την εξίσωση $(2-\eta\mu x)^3=\eta\mu^3x+2\eta\mu x-2$

ii) τις ανισώσεις $f^{-1}(x)<3$, $f^{-1}(x-1)\ge x+5$ Ε.Μ.Ε.

7. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}^*$$

Αν η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα τότε:

α) να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f^{-1}(x)$

β) να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)+f(x^2+3)=f(x^2+1)+f(x+1)$$

γ) αν επιπλέον είναι $f(x)>0$ για κάθε $x>1$ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ Σ.Σ.

8. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x-y)=f(x)-f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

γ) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση τότε:

i) να δείξετε ότι η f είναι 1–1

ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x+1)+f(3)=f(7)$

9. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως φθίνουσα και

$$g(x)=f(x)-f(f(x))$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$g(|2x-1|)-g(|x-2|)=0$$

γ) Αν Α, Β $\in C_g$ με $A(2,|x-3|)$ και $B(3,|x+1|)$ να βρείτε το διάστημα που ανήκει το x

10.** Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ με

$$f(x)=\sqrt{x}+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f^{-1}(x^2+x-2)=x \qquad (\text{Απ. } x=4)$$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2-1)>x$ (Απ. $x\le-1$)

16. Ορισμός ορίου στο $x_0 \in \mathbb{R}$ – Όριο ταυτοτικής, σταθερής συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x - \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ με $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda$ και $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 3$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να χαράξετε τη C_f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

α) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, $x_0 = 1$

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \le 1 \\ x - 1, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

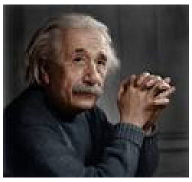
γ) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x < -1 \\ -2 - x, & x \ge -1 \end{cases}$

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$ με

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 6 \text{ και } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -11\lambda$$

Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$, για τα οποία υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Αν το Α είναι η επιτυχία
τότε ο μαθηματικός τύπος είναι
$A = X + Y + Z$
όπου X = *δουλειά*
Y = *παιχνίδι*
Z = *κρατάς το στόμα σου κλειστό*



Albert Einstein

17. Όριο και πράξεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να ελέγξετε αν έχει νόημα το όριο

$$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x-3} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6}\right)$$

2. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\ell \in \mathbb{R}$ αν ισχύει:

- $xf(x) - x \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

β) Αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to 0} f(x) \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(f^3(x) - xf^2(x) + f(x)\right) = 0$$

τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 5}\left(x^2 + 3 - \sqrt{x-4}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(x) - 2x + \sqrt{f^2(x) + 3}\right)$ όταν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$

2. Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ αν

$$\lim_{x\to x_0}\left[3f(x) - g(x)\right] = 3,\ \lim_{x\to x_0}\left[2f(x) + 5g(x)\right] = 19$$

3. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 3} f(x), \lim\limits_{x\to 3} g(x)$ όταν

$$\lim_{x\to 3}\left[5f(x) - 2xg(x)\right] = -8,\ \lim_{x\to 3}\left[3xf(x) - 4g(x)\right] = 6$$

4. Έστω ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) + g(x)\right] = k$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lambda$

τότε να δείξετε ότι $k^2 \ge 2\lambda$

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left[3f(x) + g(x)\right] = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = 0$

τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

5. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x) - x^2 + 3x + 3\right] = 5$$

6. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

α) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20} - x + 1}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^{20} - x - 1}$

γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{3x^9 + x - 1}$ δ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{3x^9 + x - 1}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^3 + x + 1)]$ στ) $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^3 + x - 1)]$

18. Όριο πολυωνυμικής – πολλαπλής συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει στο -2 και 2 το όριο της

$$f(x)=\begin{cases}2\alpha x+3\beta, & x<-2\\ 9, & -2<x<2\\ 3\beta x+2\alpha, & x>2\end{cases}$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-1}\left(x^3-2x^2+1\right)$ β) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{8}x^3+4\right)$

2. Έστω η συνάρτηση $f:(1,5)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to5}f(x)$ δ) $\lim\limits_{x\to0}f(x)$

3. Έστω συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<2\\ 5, & x=2\\ 1-x^2, & x>2\end{cases}$$

Βρείτε, αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2\alpha x^2-\beta x+2, & x\le-1\\ -3\alpha x+2\beta+6, & x>-1\end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε το $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=3$.

Τα όρια υπάρχουν στα μαθηματικά όχι στα συναισθήματα.

Νταντίν Ξυθάλη

19. Όριο ρητής συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-9}$ β) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{3x+10}-5}{2x-10}$

γ) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{13-x}}{x^2-25}$ δ) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+5}-4}{x^2-2x-3}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+x-2}$ β) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^4+2x^3}$

γ) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-3x^2-x+3}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{\sqrt{x^2-3}-1}$ β) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+x+2}-2}$

γ) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x-2}{\sqrt{x+2-\sqrt{8x}}}$ δ) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{x^2-16}$

ε) $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ στ) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{2-\sqrt{x+1}}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\sqrt[3]{1-x}-1}$ β) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{8x+3}-3}{x^2-2x-3}$

γ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt[3]{2x+4}}{x-2}$ δ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}$

ε) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{2-x}-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3-2x}}{x^2+3x-4}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}-x+1}{x\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}+x-1}$

β) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}$

γ) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x}-5}{x-3}$

δ) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{\sqrt{4x-3}+\sqrt{x+6}-2\sqrt{3x}}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1}{x^{\nu+1}-x^{\nu}-x+1}$

β) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2-\sqrt{3f(x)+1}}{\sqrt{f(x)+3}-2}$ όταν $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-\sqrt[3]{x^2+4}}$

β) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{3x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}}{x-3}$

γ) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3-x}+4\sqrt[4]{3-x}-5}{\sqrt{3-x}+\sqrt[4]{3-x}-2}$

7. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$ όταν

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\sqrt[3]{x}-1}=2,\quad \lim_{x\to1}g(x)(x-1)=3$$

8. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ αν $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}, & x<0\\ \frac{x}{\sqrt{x}-x}, & x>0\end{cases}$

20. Όριο σύνθετης συνάρτησης (αντικατάσταση)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=5$, τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}$.

3. Αν ισχύει $f(x-3)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=4$ τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-1}{x-5}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 256}\dfrac{\sqrt[4]{x}-4}{\sqrt{x}-16}$ β) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

2. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(2-x)=f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -1}\left[f(x)-2x-1\right]=5$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$.

3. Αν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left[f(2x)-f(x)\right]=0.$$

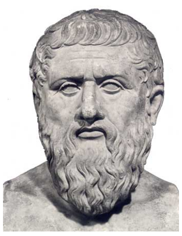
4. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=1$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια τότε $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=1$

β) Αν η f είναι περιττή τότε $\lim\limits_{x\to -3}f(x)=-1$

Η αλληγορία του σπηλαίου: Όταν ζωγραφίζουμε έναν κύκλο, άλλες φορές τον ζωγραφίζουμε καλύτερα και άλλες χειρότερα … Αλλά όσο πιο καλά, ζωγραφισμένος είναι ένας κύκλος, τόσο πιο πολύ … μοιάζει με τον απόλυτο, ιδεώδη κύκλο … με την ιδέα του κύκλου … Η ΙΔΕΑ του κύκλου είναι το πρωτότυπο … και το πρωτότυπο είναι πιο πραγματικό από την απομίμηση

Άρα, όλες αυτές οι πρωτότυπες ιδέες υπάρχουν σε έναν «άλλον κόσμο», που τον επισκεπτόμαστε με τον ΝΟΥ και την ΨΥΧΗ. Όχι με τις αισθήσεις. Διότι τα αισθητά αντικείμενα του κόσμου είναι απομιμήσεις του κόσμου των ιδεών …



Πλάτωνας

21. Όριο και διάταξη – Όριο με απόλυτες τιμές

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^3-3x-1|+x}{|x^3+5x+4|-2}$.

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-1|-1}{|x^2-x|}$.

3. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-2-x^2\eta\mu x}{x^2+x}$, όπου $f(x)$ μία συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=3$ τότε να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)-1|-1}{x}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-3|+|x-2|-3}{x^2-5x+4}$ β) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+|x-2|-10}{|x^2-3x|}$

γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x^2-1|-x^2+x+2}{\sqrt{x+2}-1}$

2. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^2-x|+x}{|x^2+x|+x}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}$

γ) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x^2-5x+6|+x^2-4}{\sqrt{x^2-4x+4}}$

δ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^4-x^3+25|-|x^3-x^2+29|}{x^2-4}$

3. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x-3|-4|x-1|+3}{|x-2|}$$

4. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ να βρείτε το

$$\lim_{x\to -1}\left(f(x)+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}\right)$$

5. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf(x)-f(x)\le x^2+2x-3,\ x\in\mathbb{R}$$

και το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

22. Κριτήριο παρεμβολής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει

$$x+2 \le f(x) \le x^2+x+2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$.

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ αν ισχύει:

$$x^2-4 \le f^2(x)-4f(x) \le x^4+x^2-4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

3. Έστω συνάρτηση η οποία ορίζεται κοντά στο x_0 για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει:

$$3x-4 \le f(x) \le 2x^2-x-2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$

γ) Έστω $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-1|-2}{x-1}, & x\ne 1\\ \alpha, & x=1\end{cases}$.

Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$

5. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\left[3f^2(x)+7g^2(x)\right]=0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x)+f(x)+7=x$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ αν $1+x-x^2 \le f(x) \le 1+x+x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2. Αν ισχύει $|f(x)-2x| \le (x-5)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=f(5)$.

3. Για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$x+3 \le f(x) \le x^2+x+3,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

4. Αν $2\sqrt{x+2} \le f(x) \le x+3$, για κάθε $x\ge -2$ να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-2}{x+1}$ γ) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)$ για την οποία ισχύει

$$3x-4 \le f(x) \le 2x^2-x-2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+1}{x-1}$.

β) Έστω $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|f(x)-1|-2}{x-1}, & x\ne 1\\ \alpha, & x=1\end{cases}$.

Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=g(1)$.

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left[3x\eta\mu\dfrac{x+5}{x}\right]$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x}-4|x^2-5|\right]$

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left|\dfrac{f(x)-3}{x}\right| \le 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

8. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x)-3| \le |x-x^2|$ τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

9. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)-g(x)| \le (x-2)^2|g(x)| \text{ και } \lim_{x\to 2} g(x)=1$$

τότε να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-2}$

23. Τριγωνομετρικά όρια

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\eta\mu^2 x-5\eta\mu x+2}{2\eta\mu x-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-\eta\mu 2x}}{x}$

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{2}{x}\right)$.

3. Να λύσετε την εξίσωση $xe^x+2x-2\eta\mu x=0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6\eta\mu(x-1)}{x^2+x-2}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 4x}{x\eta\mu 2x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}\eta\mu\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu^2 x-2\sigma\upsilon\nu^2 x+2}{\sqrt{x^2+4}-2}$

ε) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2-\sqrt{4+\eta\mu x}}$ στ) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\eta\mu(\eta\mu x)}{\pi-x}$

ζ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\eta\mu x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$ η) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\eta\mu x}-\sqrt{\sigma\upsilon\nu 2x}}{x^2}$

2. Αν $|xf(x)-\eta\mu 2x|\le|x\eta\mu x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x}\eta\mu\dfrac{x^2+1}{x^3}=0$.

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu 2x+4\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu x}$

β) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x-1}{\sqrt{2}\eta\mu x-1}$

γ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x}$

5. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}{x^2}$.

6. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{x},\alpha\neq 0$.

7. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$ αν

$$f(x)=\frac{\alpha^2x+3\alpha\eta\mu x}{x},\quad g(x)=\frac{-2x^2-2x\sigma\upsilon\nu x+2x}{x^2}$$

8. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{x^2+4x-5}$.

9. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\eta\mu(2x-6)}{3x-9}$.

10. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\eta\mu x^{2013}}{x}\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}\right)$.

11. Αν $|f(x)-\eta\mu x|\le 1-\sigma\upsilon\nu 2x$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

12. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3x-5x^2\le f(x)\le x^2+3x$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)+\eta\mu 3x\cdot\eta\mu 5x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

13. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=1-\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

24. Η $f(x)$ εμφανίζεται μέσα στο όριο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(5+3f(x)-(x-5)\cdot f(x)\right)=19$ τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

2. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\alpha x+4}{x-1}=7$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο σύνολο $(0,1)\cup(1,2)$ και ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2+3x-2}{x-1}=5$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2xf(x)-\eta\mu(x-1)}{x-1}$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x}{x^2-4}=3$. Να βρείτε τα:

α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+x^2-6}{\sqrt{x+2}-2}$

3. Έστω οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες υπάρχει σύνολο της μορφής $\Delta=(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ ώστε να ισχύει:

$$-f(x)<1<1+g(x),\ x\in\Delta \text{ και } \lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=-1$$

Να βρείτε τα όρια στο x_0 των συναρτήσεων f και g.

4. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$ τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2+x}$.

5. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to 3}\left[f(x)-(x-1)g(x)\right]=-2,\ \lim_{x\to 3}\left[-2xf(x)+x^2g(x)\right]=3$$

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$.

6. Έστω περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)f(x)+\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+7}-3}=30$$

Να βρείτε τα:

α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\le 4x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

Εγώ δεν συμφωνώ με τα μαθηματικά. Το άθροισμα πολλών μηδενικών είναι ένας επικίνδυνος αριθμός.

Jerzy Lec Stanislaw

25. Όριο στο x_0 με παράμετρο

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Αν $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-2}$ για κάθε $x\neq 2$ τότε να βρείτε τους $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$.

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των λ και κ ώστε να είναι
$$\lim_{x\to 2}\frac{(\lambda+1)x^2+(\kappa+1)x}{x^2-x+\kappa+\lambda}=3$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2\alpha x+\beta+2}{x^2-1}$. Αν το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

3. Αν το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+\alpha}-\sqrt{3x-\alpha}}{\sqrt{x}-2}$ είναι πραγματικός αριθμός τότε να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε το όριο.

4. Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\alpha-\sqrt{x+\beta}}{2-\sqrt{x+1}}=\dfrac{2}{3}$.

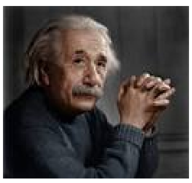
5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\alpha x+3\beta}{x-2}, & x<2\\ \dfrac{\sqrt{2x+3\alpha}-\alpha}{x-3}, & x>2\end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

6. Να βρείτε τη σχέση των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-(1+\alpha)x+\alpha}{x-1}, & x<1\\ x^2+\alpha x+\beta, & x>1\end{cases}$$
να έχει όριο στο 1.

7. Έστω η συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases}\alpha x+3\beta, & x<-1\\ x^2+\beta, & -1<x<1\\ 2\beta x^2+\alpha x-4, & x>1\end{cases}$$
Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να έχει όριο στο $x_1=-1$ και $x_2=1$.

Ο κόσμος είναι επικίνδυνος
όχι εξαιτίας
αυτών που κάνουν το κακό
αλλά εξαιτίας
αυτών που κοιτάζουν
χωρίς να κάνουν τίποτα.



Albert Einstein

26. Μη πεπερασμένο όριο στο x_0 – Βασική μορφή: $\dfrac{\kappa}{0}$ με $\kappa\neq 0$

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{(x^2-1)\cdot(x^2-3x+2)}$

γ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)^3}$

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}$ γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x-2|}$

δ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\eta\mu x-1}$ ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-2x+1}$

2. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-1}{x^2+x-2}$

γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-1}{x^2-9}$ δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-1}{(e^{x-1}-1)(1-x)}$

ε) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x-1}}{x-1}$ στ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{(x-1)^3}$

ζ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{x-1}{\sigma\upsilon\nu x}$ η) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{x\eta\mu x}$

θ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-1}{|\eta\mu x|-|x|}$ ι) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{|x|+|x-3|-1}{4-|x|}$

27. Απροσδιόριστες μορφές – Όριο με απόλυτα

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to -2^+}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2+4x+4}\right)$.

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\dfrac{1}{x^2-8x+15}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x}{x-4}-\dfrac{x^2-12}{x^2-7x+12}\right)$

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=+\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{|3-xf(x)|-|2f(x)-3|}$.

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|f(x)+x|-|x-4|}{f^2(x)+3f(x)-5}$.

28. Μη πεπερασμένο όριο στο x_0 – Παραμετρικά όρια

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2\alpha}{\sqrt{x+3}-\beta}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+\beta}{x^2-\alpha}$ για $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\lambda^2+10)x^2-2(3\lambda-\mu)+\mu^2}{|x-1|}$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

3. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\alpha x+\beta\sqrt{x}+1}{x-4}=2$.

4. Βρείτε το $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+\kappa x+\kappa+3}=-\infty$.

29. Η $f(x)$ εμφανίζεται μέσα στο όριο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-4}{f(x)}=+\infty$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Αν είναι $\lim\limits_{x\to 1}\big(5+3f(x)-(x-5)\cdot f(x)\big)=19$ τότε να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{\sqrt{x+1}-1}=-\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ όταν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)f(x)}{\eta\mu(x-1)}=-\infty$.

4. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ όταν

$$\lim_{x\to 3}\big[2f(x)-3g(x)\big]=5,\ \lim_{x\to 3}\big[f(x)-g(x)\big]=-\infty$$

5. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 2}\big[(x^2-4x+4)f(x)\big]=-4$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\Big[\big(xf(x)-2f(x)\big)\cdot\big(\sqrt{x^2-3}-1\big)\Big]$

6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\big[x^2f(x)\big]=-3$

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-3}{f(x)\cdot\eta\mu^2 x}$

30. $f(x)\to\pm\infty$ άρα $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu 3x}{\eta\mu x}=+\infty$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f^2(x)+3f(x)-4}{f^2(x)-f(x)+1}$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{x^3-3x^2}\right]=+\infty$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{f^2(x)-13f(x)+7}}{f(x)-21}$

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}=-\infty$. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\big[(x^2-2x+1)f(x)\big]=-3$. Να υπολογίσετε τα:

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f^2(x)-3f(x)-5}{f^2(x)+f(x)-4}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^3(x)-2f(x)+3}{f^2(x)-3f(x)-1}$

δ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^2(x)+4}{f^3(x)-2f^2(x)+1}$

Το τίποτα

O

γίνεται τα πάντα

∞

31. Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης από ανισοτική σχέση

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x)\le -\dfrac{2}{x}$ για κάθε $x>0$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ όταν για κάθε $x\ne 2$ ισχύει

$$1\le (x-2)^2 f(x)$$

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ όταν ισχύει

$$\left(x^2-4x+4\right)f(x)\le x-5 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

32. Όριο πολυωνυμικής, ρητής συνάρτησης στο άπειρο

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+4x^2+1\right)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-7x^2+1}{7x^3+11x-4}$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x}-\dfrac{x^2+3}{x+2}\right)$

2. Να υπολογίσετε το $A=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2\alpha-1)x^3-3x+4}{(\alpha+1)x^2-3}$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α.

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και επιπλέον

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f^3(x)\cdot t^2+t+f(x)\cdot t\cdot\sqrt{t^2+1}}{t^2+t+1}=x\,,\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=x\,,\ x\in\mathbb{R}$.

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^4-7x^2+1\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-7x^2+1\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha^2-3\alpha\right)x^3-\alpha x^2+(\alpha-3)x-1$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)x^3-(\alpha-1)x^2+(\alpha-2)x+3\right]$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^4-5x^2+3}{2x^2+3x+6}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^6-4x^3-11x+12}{x^3+\dfrac{1}{x}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2+\dfrac{2x^3-x+5}{5x^2-11x+7}\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x+1}-\dfrac{x^2+3}{x-1}\right)$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3-(\beta-1)x^2+1}{\beta x^2+\alpha x-1}$

στ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^4-(\alpha-3)x^3+\alpha x^2-4}{(\alpha-3)x^3+(\alpha-1)x^3-5}$

ζ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{\alpha x^2+1}-\dfrac{x^3}{\alpha x^2-1}\right)$

η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^3+\beta x^2+\alpha x+1}{(\beta-2)x^3-\alpha x^2-\beta x-1}$

θ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^4-(\alpha-2)x^3-\alpha x^2+1}{(\alpha-2)x^3+(\alpha-1)x^2+x-2}$

3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\alpha-1)x^2+3\alpha x+2}{(\alpha-3)x^2+3\alpha x+1}=2$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha x^3-1}{x+1}-\alpha x-\beta\right)=-1$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\alpha x^2-1}{\beta x-1}-x+1\right)=2$

33. Όριο άρρητης συνάρτησης στο άπειρο

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2+x}-\sqrt{x^2+\beta x}\right)=2$$

2. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+3x-1}+\sqrt{9x^2-7x}-\sqrt{x^2+8}+\alpha x+\beta\right)=1$$

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+5-\sqrt{x^2+2}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x-2}+\sqrt{x^2+2}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+4}+x^5-2$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3x+2}+x-1}{\sqrt{9x^2+2x+3}+2x-3}$

ε) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{8x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^2+2}}$

στ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[4]{4x^2+x+1}}{\sqrt[5]{x^5+3}-\sqrt{x+2}}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^2-x\sqrt{x^2+x+1}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-4-\sqrt{4x^2-4x+2}\right)$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{16x^2+1}+\sqrt{9x^2+2}-7x\right)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{4x^2+1}-4\sqrt{x^2+1}-2x\right)$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{4x^2+1}+3x}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{4x+2}-\sqrt{3x+2}}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+3}-\sqrt{4x^2+1}\right)$

β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+1}-\sqrt{2x^2-x+2}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-2\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}-5x\right)$

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x\right)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{4x^2+x+1}+\alpha x\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\alpha-2)x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-\alpha x}$

7. Να βρείτε τα α και β όταν:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha x-\beta-\sqrt{4x^2-8x+5}\right)=3$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\alpha x-\beta\right)=-1$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\alpha\sqrt{x^2+1}+x\right)=0$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\alpha x^2+x}-\sqrt{x^2+\beta x}\right)=2$

ε) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{16x^2+3x-1}+\sqrt{9x^2-7x}-\sqrt{x^2+8}+\alpha x+\beta\right)=1$

34. Η $f(x)$ εμφανίζεται μέσα στο όριο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)}{\sqrt{x}-1}=\ell\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\sqrt{4x^2-8x+3}+2x\right]=5$$

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τη οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-6x^2-3x+5}{x^2-5x+4}=4$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

3. Αν είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3f(x)-8x}{2x+3f(x)}$.

4. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=4$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f(x)-3x\right]=3$ τότε να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+2x^2-3x+1}{2x^2f(x)-3x^3+5}$.

5. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}f(x)+4\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}+5}=3$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2+1)f(x)}{1-2x^2-x^3}=+\infty$

6. Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ όταν

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3f(x)-2g(x)\right]=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2f(x)+3g(x)\right]=18$

7. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν ισχύει

$$\sqrt{x^2+1}\le f(x)+x\le\sqrt{4x^2+1}-x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

8. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν ισχύει

$$\left|xf(x)-\sqrt{x^2+1}\right|\le 1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

9. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-4x+3\right]=0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-4x+1\right]=-2$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2f(x)-2x^2+3x-1}{3x-xf(x)}$

35. Όριο εκθετικής συνάρτησης στο άπειρο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x-2\alpha^x}{3^x+\alpha^x}$, $\alpha>0$ β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2^x+2^{1-x}-3}{1-2^{-x}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x^2-3x+2}{x-4}}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^2-3x+5}-\sqrt{4x^2+2}}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^x}{2^x}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{2^x}$ δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3^{x-1}}{4^{x+2}}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+5^x}{2^x+3^x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5^{x+2}+7^x}{5^x+7^{x+1}}$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5e^x+3\cdot2^{2x}}{2e^{x+1}-2^{2x+2}}$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6^x}{2^x+3^x}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{3x-1}-e^{2x+2}}{2^{3x+2}+e^{2x+1}}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\cdot 2^{x+1}-3\cdot 3^{x}}{4\cdot 5^{x}-x\cdot 2^{x}}$

4. Να υπολογίσετε τα όρια (για $\alpha>0$ και $\beta>0$):

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\alpha^{x+1}+5\cdot 3^{x+2}}{3^{x+1}+2\alpha^{x}}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5^{x+2}-3\alpha^{x}}{5^{x+1}-\alpha^{x+1}}$, $\alpha\neq 5$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta\cdot\alpha^{x+1}-2\beta^{x}}{2\alpha^{x}-\alpha\cdot\beta^{x+1}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha\beta^{x+1}-\beta\alpha^{x+2}}{\beta^{x}-\alpha^{x+1}}$

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3^{x}-6\cdot 3^{-x}-1}{3^{x}-3^{1-x}-2}$ β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2^{x}+2}-\sqrt{2^{x+1}}}{2^{x}-2}$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4\cdot 5^{x}-7^{x+2}}{3^{2x+1}-2\cdot 5^{x}}$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7\cdot 3^{x+1}-3x\cdot 2^{x-1}-6x^{2}\cdot 5^{x}}{3x^{2}\cdot 5^{x}+6x\cdot 2^{x+2}-4}$

7. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{x^{2}-5x+6}{x+1}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{e^{x}+1}{e^{x}-1}}$

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{2x+1+\sqrt{9x^{2}+5x-4}}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^{2}+1}-x}}$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|x^{2}+2\left(\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\right)x-3,\ \text{με}\ \vec{\alpha}\neq\vec{0},\ \vec{\beta}\neq\vec{0}$$

α) Να βρείτε το είδος του ακρότατου της συνάρτησης f καθώς και τα διαστήματα μονοτονίας

β) Αν $x\in\left[-\dfrac{\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|},+\infty\right)$, να βρείτε την f^{-1}

γ) Αν $\vec{\alpha}=(\kappa,3)$, $\vec{\beta}=(4,-\lambda)$ και

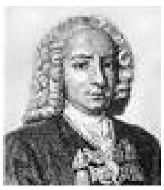
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-e^{\left(\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\right)x}}{x^{2}+\left(\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\right)x+3}=4\ \text{τότε:}$$

i) να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(\kappa,\lambda)$

ii) να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη απόσταση των σημείων $M(\kappa,\lambda)$ από την αρχή των αξόνων

δ) Αν η f έχει ακρότατο στο $x_0=-1$ τότε να εξετάσετε το είδος των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Κι έτσι η ψυχή του απείρου κατοικεί στις λεπτομέρειες. Και στα στενότερα όρια δεν μπαίνει όριο. Τι χαρά να διακρίνεις το λεπτό στην αιωνιότητα! Το απέραντο να το διακρίνεις στο μικρό, τι θειότητα!



Daniel Bernoulli

36. Όριο λογαριθμικής συνάρτησης στο άπειρο

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\sqrt{x}-1\right)-\ln(x-1)\right)$.

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}+1}{\ln x+1}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^{2}+x+1\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\ln\left(1+x^{2}\right)-\ln(2-x)\right]$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{6\ln^{2}x-5\ln x+4}{3\ln^{2}x+2\ln x-1}$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\ln x}{3+5\ln x}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^{3}-5x\right)-2\ln(x+2)\right]$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(2^{x}+1\right)-x\right]$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(3^{x}+5^{x}\right)-x\right]$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\sqrt{x^{2}+x+1}-x\right)\right]$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(e^{x}+1\right)-2x\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{2}+1\right)^{x}$

δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x}-e^{x/2}\right)-x\right]$

37. Όριο συνάρτησης στο άπειρο από ανισοτική σχέση

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν ισχύει:

$$3x^{2}+2+\left(\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{4x^{2}+1}\right)f(x)\leq 0,\ x\in\mathbb{R}$$

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x^{3}-3x^{2}\leq\left(x^{3}-5x+2\right)\cdot f(x)\leq 2x^{3}+3x^{2}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ όταν ισχύει

$$\eta\mu x+(x+2)f(x)\geq 3x^{2},\ x\in\mathbb{R}$$

3. Έστω η συνάρτηση f με $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < 3$.

4. Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν:

α) $f(x) \geq x^5$, $x \in \mathbb{R}$, τότε να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

β) $(3+x^4)\cdot f(x) \leq x^5$, $x \in \mathbb{R}$, τότε

γ) $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $f(x) > ημx + \ln x$, $x > 0$ τότε να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

δ) $f(x) + x^2 - e^x < 0$, $x \in \mathbb{R}$

38. Όριο συνάρτησης με τριγωνομετρικούς όρους στο άπειρο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2συνx + 2)$.

2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2 + συνx) - \ln x\right]$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot ημ\frac{1}{x}\right)$

β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot ημx}{x^2+1}$

γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x - ημx}{x + συνx}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}(x^3 + xσυν^2x + x^4ημ^2x)$

β) $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + x + 1} - 2ημx\right]$

γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2 + 3ημx - xσυν2x}{x^2 - 3x + 2}$

δ) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5xημ2x - (3x^2 - 7)συν5x}{2x^3 - 7x + 1}$

ε) $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1} - συνx}{\sqrt{x^2+1} + ημx}$

στ) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2συνx + \sqrt{x^2+1} - x}{x + ημx} - \frac{x^2 + ημx}{x^2 + συνx}\right]$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x + ημx)$

β) $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x + ημx) - 3\ln x\right]$

γ) $\lim_{x\to 0}\left(e^{-\frac{1}{x}}\cdot ημ\frac{1}{x} + \ln x\right)$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - ημx)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ii) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ημx}{f(x)}$ iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)ημ\frac{1}{f(x)}$

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left|(x^3 + 3x - 1)f(x) - 2x^2\right| \leq x,\ x > 0$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

β) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot ημx\right]$

39. Συνοπτική μεθοδολογία στα όρια συναρτήσεων

1. Αν μία συνάρτηση f έχει όριο στο x_0 τότε αυτό είναι μοναδικό.

2. Η πρώτη μας ενέργεια πάντα είναι να βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να εξετάζουμε αν έχει νόημα το όριο σ' αυτό το σύνολο.

3. Εφόσον η συνάρτηση της οποίας ψάχνουμε το όριο είναι συνεχής η πρώτη μας προσπάθεια είναι πάντα να θέτουμε στην παράσταση όπου x το x_0.

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ $\in\mathbb{R}$ Τέλος.

$= \frac{0}{0}$ Συζυγής παράσταση, παραγοντοποίηση, κανόνας De l' Hospital

$= \frac{κ}{0}$ Γράφω τη συνάρτηση ως γινόμενο δύο κλασμάτων από τα οποία το πρώτο έχει αριθμητή την μονάδα και παρανομαστή τον όρο που μηδενίζεται

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ Πολυωνυμικές – Ρητές

Προσπαθώ να δημιουργήσω κλάσματα της μορφής $\frac{1}{k(x)}$, όπου το $\lim_{x\to+\infty} k(x) = \pm\infty$ τα οποία τείνουν στο 0.

1. Αν η $f(x)$ εμφανίζεται μέσα σε μία παράσταση της οποίας δίνεται το όριο τότε θέτουμε $g(x)$ όλη την παράσταση.

2. Αν ισχύει $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = m$, $m\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

3. Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Παρατήρηση: Ο κανόνας De L' Hospital μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην άρση όλων των περιπτώσεων απροσδιοριστίας εκτός από την περίπτωση ορίου στο άπειρο όπου εμφανίζεται ρίζα και στον αριθμητή και στον παρανομαστή. Εκεί πρέπει να ακολουθήσουμε υποχρεωτικά μία από τις δύο πρώτες μεθόδους.

40. Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο Ι (Ορισμός)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{\sqrt{x+3}-2}, & x\neq 1\\ 8, & x=1\end{cases}$.

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0=1$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x^2+\beta x-3}{x-1}, & x\neq 1\\ 4, & x=1\end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β, έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$.

3. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=5$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu\sqrt{x}f(x)-x}{\sqrt{x}-x}=5$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν είναι συνεχείς κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις στο αντίστοιχο σημείο

α) $f(x)=\begin{cases}x^3-5x^2+9x+6, & x\leq 2\\ \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x+7}-3}, & x>2\end{cases}$, στο $x_0=2$

β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-2|-|x-2|}{|x+5|-5}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, στο $x_0=0$

γ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}, & x<0\\ 4, & x=0\\ \dfrac{\eta\mu 4x}{x}, & x>0\end{cases}$, στο $x_0=0$

δ) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-2|-|x-2|}{|x+5|-5}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, στο $x_0=0$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \text{ και } g(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α) η g είναι συνεχής στο 2

Β) η f είναι συνεχής στο 1

Γ) η g δεν είναι συνεχής σε δύο σημείο

Δ) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}3\alpha^2x^2-2\alpha x-4, & x<1\\ 2\alpha^2x^2+\alpha x+6, & x\geq 1\end{cases}$$

Για ποια $\alpha\in\mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=1$;

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 0\\ \alpha x+\beta, & 0<x<1\\ 1+x\ln x, & x\geq 1\end{cases}, \text{ όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0 και στο 1.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 τότε να βρείτε το $f(1)$ όταν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)f(x)-\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}=4$.

6. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2009$. Να βρείτε:

α) $f(2)$ β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)}{h}$

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\eta\mu 3x}{x^2+x}=2$ να βρείτε το $f(0)$.

8. Έστω η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, η οποία είναι 1–1, συνεχής και τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(0)$ και

$f^{-1}(x)=\begin{cases}f(x), & x>1\\ f(x-1), & x\leq 1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

α) το 1 δεν ανήκει στο σύνολο A

β) η συνάρτηση f^{-1} δεν είναι συνεχής

41. Συνέχεια συνάρτησης σε σημείο ΙΙ

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$ και

$$f(x)+f(x-2)=6x-2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=-2$.

2. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x)+f(x)=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$|f(x)-\eta\mu(x-1)|\leq x^2-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

4. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει

$$f^2(x)+4f(x)+4\sigma\upsilon\nu^2x\leq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0. Ε.Μ.Ε.

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x)+g^2(x)=x^2-3x+2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο 1 και στο 2.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=3$. Αν ισχύει

$$f(2-x)=f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=-1$.

2. Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=5$ και

$$f(x)+f(x+3)=2x^2+6x+19 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$. Αν επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+\sqrt{x+3}-2}{x^2+2x-3}=\frac{9}{16}$$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 4 και

$$4\sqrt{x}-8\le (x-4)f(x)\le x-4,\ x>0$$

τότε να βρείτε το $f(4)$.

5. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $1-x^2\le f(x)\le 1+x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=2$ και

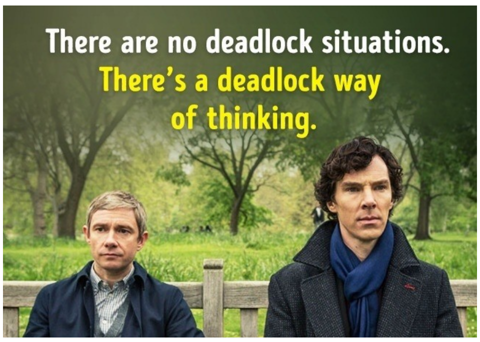
$$|xf(x)-\eta\mu 2x|\le|x\eta\mu x| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

7. α) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια και συνεχής στο x_0 να δείξετε ότι είναι συνεχής και στο $-x_0$.
β) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή και συνεχής στο $x_0\ne 0$ τότε να αποδείξετε ότι θα είναι συνεχής και στο $-x_0$.

8. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=3 \text{ και } \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=4$$



42. Συνέχεια συνάρτησης ΙΙΙ (Σε διάστημα – Βασικών συναρτήσεων)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt[3]{x-5}\sqrt{|x+1|}$$

2. Έστω οι συναρτήσεις

$$g(x)=x^2+x\eta\mu x \text{ και } f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2\sigma\upsilon\nu x}{g(x)}, & g(x)\ne 0\\ \alpha, & g(x)=0\end{cases}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.
β) Να βρείτε την πραγματική τιμή του αριθμού α για την οποία η f είναι συνεχής.

3. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει

$$f^2(x)+g^2(x)+x^2+x=2\left[xf(x)+\sqrt{x}g(x)\right] \quad x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y| \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να εξεταστεί αν είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}, & x\ne 1\\ 2, & x=1\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}, & x>5\\ 3, & x=5\end{cases}$

γ) $f(x)=\dfrac{e^x-3x}{\ln x+\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{x}}$

δ) $f(x)=\ln\left(\sigma\varphi(x)+\varepsilon\varphi\left(x^{e\sqrt{x-1}}\right)\right)$

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:
α) $f(x)=2-\sigma\upsilon\nu(2x)+\eta\mu^7(4x)$
β) $f(x)=\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)+\ln x^{e^x-3}$
γ) $f(x)=x^x$
δ) $f(x)=(x^2+3)\sigma\upsilon\nu x^3$

3. Αν οι $2\eta\mu x\cdot f(x)-g(x)$ και $x^2f(x)+\sigma\upsilon\nu x\cdot g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα Δ τότε να αποδειχτεί ότι και οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο Δ.

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε να αποδειχτεί ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση

$$g(x)=f(x)\eta\mu f(x)-\sigma\upsilon\nu^2 f(x)$$

5. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς (υποθέτουμε ότι ορίζονται σε κάποιο σύνολο)

α) $f(x)=\etaμ^2 x$ β) $g(x)=\ln\left(\etaμ\left(x^3+1\right)\right)$

43. Συνέχεια συνάρτησης IV (Συναρτησιακή σχέση – Εύρεση τύπου)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) αν η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha\neq 0$ τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. α) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο x_0 και η συνάρτηση g είναι ασυνεχής στο x_0

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι ασυνεχής στο x_0

ii) Θεωρούμε τα επόμενα τρία ζεύγη συναρτήσεων στα οποία η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και η g δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$

(1) $f(x)=x^2$ $\quad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(2) $f(x)=x$ $\quad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

(3) $f(x)=|x|$ $\quad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

Είναι η συνάρτηση $f\cdot g$ ασυνεχής στο $x_0=0$; Τι συμπεραίνετε;

β) Ας υποθέσουμε ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ασυνεχείς στο x_0.

i) Είναι το άθροισμα $f+g$ ασυνεχής στο x_0;

ii) Είναι το γινόμενο $f\cdot g$ ασυνεχής στο x_0; Ε.Μ.Ε.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)+\sqrt{x^2+x+2}=1+x\left(f(x)+1\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=0$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)+\alpha^2\beta \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

2. Α. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $x,y\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) $f(0)=0$

β) Η f είναι περιττή

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$ τότε είναι συνεχής

i) στο 0 ii) στο $\mathbb{R}$

Β. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)=0$

β) Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ τότε είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο α με $0<\alpha\neq 1$, τότε η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει $f(0)\neq 0$,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=1$

β) $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy,\ x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$

β) $f(-x)=2x^2-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

γ) $f(\nu)=\nu^2$, $\nu\in\mathbb{Z}$

δ) αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$, ώστε:

$$xf(x)=\etaμ5x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$xf(x)=\etaμ3x+\sqrt{x^2+x+1}-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση ώστε:

$$x^2f(x)+\sigmaυνx=\sqrt{x^2+9}-2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

8. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f^3(x)+f(x)-x=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

α) η f είναι 1–1

β) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) $f^{-1}(x)=x^3+x$

9. Έστω η περιττή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$x^2f(x)\leq\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot\etaμx \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι

$$x^2 f(x)=\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\cdot ημx \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f και να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής

Αισθάνομαι σαν παιδί

που παίζει στην αμμουδιά,

ενώ μπροστά του βρίσκονται ατελείωτοι

και ανεξερεύνητοι ωκεανοί.

Isaac Newton

44. Θεώρημα Bolzano I (Άμεση εφαρμογή – Ορισμός συνάρτησης)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-9x^2+23x-15=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=2ημx-3συνx$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=\frac{5}{2}$.

3. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ ετερόσημες.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3e^{f(x)}+x=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2)

β) Να βρείτε μία ρίζα της παραπάνω εξίσωσης

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα.

α) $x^4-3x^2-x-1=0$, στο $(0,2)$

β) $ημ(συν3x)=0$ στο $(0,\pi)$

γ) $3x^2-1=συν^2x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

δ) $2^x=5x-2$ στο $(0,1)$ και $(1,5)$

ε) $x^{10}+\alpha^4x^6=\alpha^{10}$ στο $(\alpha,0)$

στ) $4(1-x)e^{2x}=1$ στο $(0,1)$

2. α) Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\alpha x^3+x^2+x-1 \text{ με } \alpha\neq-1$$

Να αποδείξετε ότι έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$. Τι συμβαίνει όταν $\alpha=-1$.

β) Όμοια για τη συνάρτηση g με

$$g(x)=x^3-x^2+\alpha x+1 \text{ με } \alpha\neq-1$$

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+1, & -2\le x<-1\\ 2x^3-5x^2-10x+4, & -1\le x\le 2\end{cases}$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2,2)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x\in[-3,0)\\ x^2-3, & x\in[0,3]\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει $\xi\in(-3,3)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$.

5. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\frac{x^3}{4}+ημ(\pi x)-1$ παίρνει την τιμή $\frac{5}{3}$ στο διάστημα $(-2,2)$.

6. Δίνεται η $f(x)=x^3-συν(\pi x)+1$. Η συνάρτηση παίρνει την τιμή 5 στο διάστημα $(-2,2)$;

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3}{16}-ημ(\pi x)+7$. Η f παίρνει την τιμή 3,5 στο διάστημα $(-4,4)$;

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-(\kappa\lambda-2)x+1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$, όταν $\kappa+\lambda=2$.

45. Θεώρημα Bolzano II (Μία ακριβώς ρίζα)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+3x-2=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=εφx+x-1$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$

β) η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(0,1)$

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ ώστε

$$e^{x_0}+\ln(x_0+1)=2$$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=σφx-x+1$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$.

β) η f έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2(f\circ f)(x)-2\alpha f(x)-\alpha^2x=0,\ \alpha>0, x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι 1–1

β) Αν $f(f(x)) = x$ τότε

i) η εξίσωση $\alpha f(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο $(-1,1)$

ii) η f είναι συνεχής

46. Θεώρημα Bolzano III (ν τουλάχιστον ρίζες. Επιλογή διαστημάτων)

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x - 3 - 5\eta\mu x = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x - 1$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(0,2)$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \cdot \varepsilon\varphi x = 1$ έχει δύο, τουλάχιστον ρίζες αντίθετες στο διάστημα $(0,\pi)$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - \sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει δύο, ακριβώς ρίζες αντίθετες στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$

α) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

β) έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, αντίθετες

47. Θεώρημα Bolzano IV (Συνάρτηση που δεν ορίζεται στα άκρα)

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\eta\mu\alpha}{x+1} + \frac{\eta\mu\beta}{x} + \frac{\eta\mu\gamma}{x-1} = 0$ με $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\pi)$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $(-1,1)$.

3. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει

$$x \cdot f(x) \geq x^2 + \eta\mu 2x$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 2005$

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to (\alpha,\beta)$, συνεχής και $\alpha \cdot \beta > 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε $\frac{f(x_0)}{\alpha} = \frac{\beta}{x_0}$.

2. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[-1,2] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-1,2)$.

3. Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0,\ \alpha < \beta$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

4. Έστω η εξίσωση $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$ με $\kappa,\lambda,\mu \neq 0$

α) Να αποδείξετε ότι έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(-1,1)$

β) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της τότε $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$

5. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα.

α) $\ln x = x^2 - 4x + 2$ στο $(0,1)$

β) $(x+1)^2 = 4e^x$ στο $(-\infty,-1)$

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 1$ με $\alpha < -2$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες

48. Θεώρημα Bolzano V (Μία τουλάχιστον ρίζα σε κλειστό διάστημα)

Ασκήσεις Α΄ ομάδας

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 2)f(x) \leq f(0) + f(4)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = f(4)$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0^{\,2}) = x_0 \cdot f(2x_0)$

Ασκήσεις Β΄ ομάδας

1. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $g(\beta) = \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha,\beta]$, ώστε $2f(x_0) + 3g(x_0) = 5x_0$.

2. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $0 \leq f(x) \leq 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $f(\eta\mu x_0) = \eta\mu x_0$.

3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f\left(e^{2x-3\pi}\right)+f\left(\eta\mu x\right)=\dfrac{2x-4\pi}{\pi}$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(1)+f(-1)=-1$

β) υπάρχει $\xi\in[0,\pi]$ ώστε $f(\sigma\upsilon\nu\xi)=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\xi}{2}$

4.** Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=9$, $f(3)=0$. Να αποδείξετε ότι έχει η εξίσωση

$$f(x)-f(x+1)=3$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $[0,2]$.

49. Θεώρημα Bolzano VI (Κοινό σημείο γραφικών παραστάσεων)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $\alpha<\beta$ ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)=\alpha+\beta$ και $f(\alpha)\neq\beta$. Αν είναι $g(x)=\dfrac{f(x)-\beta}{x-\alpha}$ και $h(x)=\dfrac{f(x)-\alpha}{x-\beta}$ τότε να δείξετε ότι οι C_g, C_h έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g των παρακάτω συναρτήσεων έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

α) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$, $g(x)=xe^x-3$

β) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=\eta\mu^2x+1$

2. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha-1)<1<f(\alpha+1)$ με $\alpha>0$ και $g(x)=(x-\alpha)^2$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

3. Έστω οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$ και $\alpha<g(x)<\beta$, $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x-6}{\sqrt{3x+1}-2}, & -\dfrac{1}{3}\le x<1\\ \alpha x^2+\beta x-\alpha, & x\ge 1\end{cases}\quad \text{με } \alpha\neq 0$$

και οι συναρτήσεις

$$g(x)=(\alpha+2)x^2-\beta x+\alpha,\ h(x)=2x^2-\alpha x+\alpha+\beta$$

Αν οι C_g, C_h έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Ένα μόνο δεν μου δίνει το όνειρο. Το όριο, ως που να κινδυνέψω.

Γιατί τότε πια δεν θα ήταν όνειρο. Θα 'ταν γεράματα.

50. Θεώρημα Bolzano VII (Πρόσημο συνάρτησης – Εύρεση f από f^2)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το πρόσημο της $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8}$

2. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=1-x^2$, για κάθε $x\in[-1,1]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

β) Να δείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο $(-1,1)$

γ) Αν είναι $f(0)=1$ τότε να βρείτε τον τύπο της f

δ) Ποια είναι η γραφική παράσταση της f;

3. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

4. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $(f(x)-1)(f(x)+2)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

5*. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:[-\pi,0]\to\mathbb{R}$ με $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ ώστε

$$f^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2x=1,\ x\in[-\pi,0]$$

6*. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f με $A_f=[2,6]$, $f(x)>0$ για την οποία ισχύει

$$(x-4)^2+[f(x)-3]^2=4,\ x\in[2,6]$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$, ώστε $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$ και υπάρχει μοναδικό $x_0\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0)=0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 0$, $x\in[\alpha,\beta]$.

2. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x-1$ με $x\in[0,\pi]$

β) $f(x)=\sqrt{21-4x-x^2}-x-3$

γ) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ δ) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{-x^2+6x-8}$

ε) $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x+2$ στ) $f(x)=\ln(x-1)-3$

3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η C_f τέμνει τον $x'x$ μόνο στα $A(1,0)$, $B(5,0)$. Αν $f(4)<0$ και $f(3)\cdot f(6)=-18$ να δείξετε ότι:

α) $f(2)\cdot f(3)>0$ β) $f(7)>0$

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}: f(x_0)=3-x_0$

4. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-2xf(x)=5$ για $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(2)=-1$:

α) να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) να βρείτε τον τύπο της f και το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

5. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με

$$f^2(x)=(x-1)^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

51. Θεώρημα Bolzano VIII (Γενικές ασκήσεις)

1. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x^\nu}+\alpha\right]=\ell>0,\ \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x^\nu}+\alpha\right]=\ell$$

$\alpha\in\mathbb{R}$ και ν περιττός, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\alpha x^\nu\right)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+\alpha x^\nu\right)$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f(x_0)=-\alpha x_0^{\,\nu}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2x^2+1)f(x)+x^3\eta\mu\frac{3}{x}\right)=2$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

β) Αν f περιττή να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

γ) Αν η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f(0)>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα

3. Δίνονται οι $f(x)=x^2+\beta x+\gamma$ και $g(x)=-x^2+\beta x+\gamma$ με $\gamma\neq0$. Αν ρ_1 είναι μία ρίζα της f και ρ_2 μία ρίζα της g με $\rho_1<\rho_2$ τότε η εξίσωση $f(x)+2g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

4. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $g(1)=-1$, $g(-1)=1$ και g γνησίως φθίνουσα.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ g$

γ) Αν επιπλέον η f είναι περιττή τότε υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ ώστε $(f\circ g)(x_0)+f(x_0)+g(x_0)=0$

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\beta^2<3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

6. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)<1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)>2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)<1,\ f(x_2)>2$

β) υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με $\left[f(x_0)\right]^3=5$

7. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, με τιμές θετικές και

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[f(0)\right]^{x+1}-1}{\left[f(0)\right]^{x+2}+2}$$

α) Να υπολογίσετε το A

β) Αν $A>0$ τότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε

$$f(\xi)\left(f(\xi)-1\right)+\xi=0$$

8. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$x^2-x\le f(x)\eta\mu x\le x^4+x^2-x \text{ για κάθε } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=-1$

β) υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ ώστε $4f(x_0)=\pi(\pi-2)$

9. Έστω η συνάρτηση f συνεχής και

$$f(x)+2x^2-3x+x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

β) Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ με $A_f\in\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$

10. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το $O(0,0)$.

α) Βρείτε το πρόσημο της f στο $\mathbb{R}$

β) Έστω $\varphi(x)=f(f(x))+f(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

ii) Να αποδείξετε ότι η C_φ τέμνει τον $x'x$ σε ακριβώς ένα σημείο

iii) Να βρείτε το πρόσημο της φ στο $\mathbb{R}$

iv) Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(x^2-x)<0$

12. Έστω η συνάρτηση f συνεχής και

$$xf(x)+2x^2-3x+x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

α) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

β) Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$ με $A_f\in\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$

13. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)=1$ είναι αδύνατη

β) Να βρείτε στο $\mathbb{R}$ το πρόσημο της

$$\varphi(x)=f^2(x)-1$$

14. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1-\ln x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,+\infty)$.

52. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:[-1,3]\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,3]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(-1,3)$ τέτοιο ώστε

$$6f(x_0)=2f(-1)+f(2)+3f(3)$$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^3}{4}+\eta\mu(\pi x)+1$ παίρνει την τιμή $\frac{5}{3}$ στο $(-2,2)$.

3. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ τότε το σύνολο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$$

α) Να βρείτε την μονοτονία της f

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $2x_0\ln x_0=2-3x_0$

2. Να εξετάσετε αν η f παίρνει τις τιμές –2, 0 η

$$f(x)=5\eta\mu^2 2x-3\sigma\upsilon\nu 3x+\eta\mu x \text{ με } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\sqrt{3x+1}-x^2+3x+1$

Να εξετάσετε αν υπάρχουν $x_1,x_2\in[1,8]$ ώστε:

$$f^2(x_1)+f^2(x_2)-4f(x_1)-6f(x_2)+13=0$$

4. Έστω η συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,3)$ ώστε $3f(x_0)=f(1)+f(2)+f(3)$.

5. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό

$$x_0\in(\alpha,\beta) \text{ ώστε } f(x_0)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(1)<f(0)<f(2)$$

Να αποδείξετε ότι δεν είναι γνησίως μονότονη.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{Q}$, συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

53. Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0,2]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\frac{f(0)+5f(1)+4f(2)}{10}$.

2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν:

α) $x_0,x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0)=\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$

β) $x_0',x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0')\geq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ Ε.Μ.Ε.

3. Αν είναι $0<\alpha<\beta<\gamma$ και η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(\xi)=\frac{\alpha f(\alpha)+\beta f(\beta)+\gamma f(\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,8]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,8]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x_0)=\frac{f(3)+f(5)+f(6)}{3}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1,x_2,x_3,\dots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\dots+f(x_\nu)}{\nu}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $7f(x_0)=3f(\alpha)+4f(\beta)$

4. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_1,x_2,\dots,x_\nu\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_0)=\frac{\kappa_1 f(x_1)+\kappa_2 f(x_2)+\dots+\kappa_\nu f(x_\nu)}{\kappa}$

με $\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_\nu\in\mathbb{N}^*$ και $\kappa=\kappa_1+\kappa_2+\dots+\kappa_\nu$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, συνεχής και μη σταθερή για την οποία ισχύει: $5f(0)+f(1)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) το $\frac{4f(0)+f(1)}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f

β) υπάρχει $x_0\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=-2f(0)$

6. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό. Να αποδείξετε ότι ή το ελάχιστο αυτής είναι θετικός αριθμός ή το μέγιστο αυτής είναι αρνητικός αριθμός.

54. Εύρεση συνόλου τιμών συνάρτησης

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x)=1-4x\,,\ x\in[1,3)$$

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

α) $f(x)=2-3x\,,\ x\in[-2,4]$

β) $f(x)=2-3x\,,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)=3x-2,\ x\in[3,7]$

δ) $f(x)=-x^2+6x-1,\ x\in[3,5]$

ε) $f(x)=x^2-3x+2\,,\ x\in[3,5]$

στ) $f(x)=x^2-3x+2\,,\ x\in\mathbb{R}$

ζ) $f(x)=\dfrac{5x+3}{x+1},\ x\in[1,3]$

η) $f(x)=\sqrt{5-x}-\sqrt{x+2},\ x\in[-2,5]$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

α) $f(x)=x^5+\sqrt{x}$

β) $f(x)=e^{-x}-\ln x$

γ) $f(x)=x-2\eta\mu x$

δ) $f(x)=e^{x}-e^{-x}+x+1$

ε) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}-\ln x$

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

α) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

β) $g:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^2+\eta\mu x$

γ) $h:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με $h(x)=x^3+\varepsilon\varphi x$

4. Έστω συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2x-1, & 1\le x\le 2\\ 5-x, & 2<x\le 3\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να αποδείξετε ότι $f([1,3])\neq[f(1),f(3)]$

5. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(f(x))<f(x)\,,\ x\in[0,1]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,1]$

β) η συνάρτηση f δεν έχει ολικό ελάχιστο

γ) η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής

55. Χρήση συνόλου τιμών (Μία τουλάχιστον ρίζα – Εύρεση ορίων)

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta=(-\infty,1)$ να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+f(x)}{x+2}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)-x^2}{x-1}$

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\alpha\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\beta\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+e^{x+1}+\ln x=1$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

2. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με

$$f(0)=2\,,\ f(1)=1 \text{ και } f(3)=-1$$

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α) Υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$

Β) $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=-1$

Γ) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$

Δ) $[-1,2]\subseteq f(\Delta)$

Ε) Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, για την οποία ισχύει

$$x\cdot f(x)\ge x^2+\eta\mu 2x$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με $f(x_0)=2009$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln(x+1)+\eta\mu\alpha=\ln x+\alpha$$

έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$ για κάθε θετικό αριθμό α

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-e^{-x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x′x ακριβώς σε ένα σημείο

δ) Να αποδείξετε ότι έχει μοναδική λύση η εξίσωση

$$e^{x}\cdot\sqrt{x}=1+2010e^{x}$$

56. Σύνολο τιμών και αντίστροφη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}$.

α) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x-2}+x^3-1$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να λύσετε την ανίσωση

$$f^{-1}\left(e^{x-2}+x^3+e^{-1}-9\right)<1$$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{2-x}\left(x^3-8\right)+3\right)=8$$

έχει μοναδική λύση

2. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$, με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x)+3f(x)=x+5,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να εξηγήσετε γιατί η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} και η ευθεία $y=x$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,2)$

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)\cdot ημx}{x^4}$

3. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f(x)=\frac{1}{x}-x+1$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα

γ) Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)},\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$$

αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής

4. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με

$$f(x)=x^2-\frac{1}{x}+1$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f^{-1}(x)-x}{x+f^{-1}(x)}$ αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής

57. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύει

$$f(x)+f(3-2x)=2g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Αν $f(x)+2f(1-x)=x^2-x$, $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε τους τύπους των f, g και το κοινό σημείο των C_f, C_g. Ε.Μ.Ε.

2. α) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2x+y+1)=f(x-y+2)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ (1)

i) Να βρείτε ποια x και y πρέπει να τοποθετήσετε στη σχέση (1) ώστε να ισχύει $f(3)=f(1)$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υποθέτουμε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $α, β, α_1, β_1$ ώστε να ισχύει $f(αx+βy)=f(α_1x+β_1y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ όπου $αβ_1-α_1β\neq 0$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

3. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x=1$

β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

ii) Να βρείτε την f^{-1}

iii) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

4. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)},\ x,y\in\mathbb{R} \text{ με } f(x)\cdot f(y)\neq 1$$

α) Να δείξετε ότι $f(0)=0$ και $f(-x)=-f(x)$ $x\in A_f$

β) Να αποδείξετε ότι αν έχουμε $f(λ)=0$ όπου $λ\in\mathbb{R}$ τότε θα έχουμε και $f(x+λ)=f(x)$ για κάθε $x\in A_f$

5. Έστω $g(x)=\dfrac{2-x}{2+x}$ και $(g\circ f)(x)=\ln x$. Να βρείτε:

α) την $f(x)$ β) το $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e}}f(x)$

6. Έστω συνάρτηση f ώστε

$$f(x)-x\le x^2\le f(x-1)+x,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{ημx}$ Ε.Μ.Ε.

7. Έστω συνάρτηση f, ώστε

$$\left(f(x)\right)^3+x^2f(x)=2x^3,\ x\in\mathbb{R}$$

Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\ell\in\mathbb{R}$ να βρείτε το ℓ. Ε.Μ.Ε.

8. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot x^4\right)=3$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x^2-ημ^2x}=1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

9. Αν $x^2f(x)\le x^2-\eta\mu^2 x\le f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Ε.Μ.Ε.

10. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$y(z)=z^2,\ z(x)=\sqrt[3]{x+1},\ x(t)=\alpha^t,\ \alpha>0$$

α) Να εκφράσετε την y ως συνάρτηση του t

β) Να βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t)$

γ) Είναι σωστός ή λάθος ο ισχυρισμός ότι $z\to 0$ όταν $t\to\sigma\in\mathbb{R}$ ή $t\to\pm\infty$; Ε.Μ.Ε.

11. α) Έστω $f(t)=\sqrt{t^2+(x^2+y^2)t+2}-\sqrt{t^2+4yt+3}$ όπου (x,y) είναι οι συντεταγμένες σημείου Μ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ τότε το σημείο Μ ανήκει σε κύκλο

β) Έστω $f(t)=\sqrt{t^2+2xt+3x^2}+\sqrt{t^2-2yt+5y^2}-2t$ όπου (x,y) είναι οι συντεταγμένες σημείου Μ του επιπέδου. Να αποδείξετε ότι αν $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=-2$ τότε το σημείο Μ ανήκει σε ευθεία

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία και ο κύκλος έχουν δύο κοινά σημεία Ε.Μ.Ε.

12. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\ne 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_2)=-1$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x_1)\cdot x^3+f(x_2)\cdot x^2+x\cdot f(x_1)-2x^3}{f^2(x_1)\cdot f(x_2)\cdot x^2}$

13. Έστω $f(x)=x^2-10x+14$ και $g(x)=\sqrt{x-5}$.

α) Να βρείτε την $g\circ f$

β) Έστω $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{(g\circ f)(x)-3}{x-10}, & x>10\\[2mm] \dfrac{5}{3}, & x=10\end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο $[10,+\infty)$

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

14. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,\pi]$ και ισχύει $1+2\sqrt{\eta\mu x}\le f(x)\le 2+\eta\mu x$ για κάθε $x\in[0,\pi]$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\dfrac{\pi}{2}$

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{f(x)-3}$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{|3-f(x)|-xf(x)+3x}{f(x)-3}$ Ε.Μ.Ε.

15. Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\sqrt{x^2+3}-2\ge f(x)\ge\sqrt{8x+8}-4 \text{ για κάθε } x\ge -1.$$

α) Να βρείτε το $f(1)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[-1,1]$ ώστε

$$f(x_0)=4x_0$$

16. Αν f συνάρτηση ώστε $f(0)=-\alpha\ne 0$ και

$$xf(x)-x^4+\eta\mu(\alpha x)=x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\quad x\in\mathbb{R}_+^*$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0

β) Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ Ε.Μ.Ε.

17. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+\eta\mu 2x}{x^3}=2$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^6-[f(x)]^4\eta\mu^2 x}{x^6}$

18. Η συνάρτηση $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0)=f(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=f\left(x+\dfrac{\alpha}{2}\right)$ έχει ρίζα στο $\left[0,\dfrac{\alpha}{2}\right]$

β) Υπάρχουν $x,y\in[0,\alpha]$ τέτοια ώστε

$$|x-y|\le\frac{\alpha}{2},\ f(x)=f(y)$$

Ε.Μ.Ε.

19. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^3(x)+f(x)-x=0\quad x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

α) η f είναι 1–1

β) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) $f^{-1}(x)=x^3+x$

20. Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to[\alpha,\beta]$ με

$$|f(x)-f(y)|\le\frac{1}{2}|x-y|,\ x,y\in A_f$$

Να αποδείξετε: ότι

α) η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

β) η $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$

21. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[0,1]$ και συνεχής, με $f(0)=f(1)$. Θεωρούμε και τη συνάρτηση g:

$$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)\quad \text{όπου } \nu\in\mathbb{N}^*$$

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g;

β) Όταν $\nu>1$ αποδείξετε ότι

$$g(0)+g\left(\frac{1}{\nu}\right)+g\left(\frac{2}{\nu}\right)+\ldots+g\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)=0$$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)=f\left(x+\frac{1}{\nu}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1)$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$

Ε.Μ.Ε.

22. Έστω $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχείς, για τις οποίες ισχύουν $f([0,1])=g([0,1])=[0,1]$, $f\circ g=g\circ f$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε

$$f(x_0)=x_0 \text{ και } g(x_0)=x_0$$

23. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$
$$h(x)=(\alpha-2)x^2+(\gamma-2)x+2\beta+2$$

είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=-4$, $\gamma=6$

β) Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-3}=\kappa\in\mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$

ii) Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to3}\frac{f^3(x)+\lambda f(x)+\mu}{x-3}=40$$

24. Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει ακριβώς μία λύση στο $\mathbb{R}$.

25. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα, για την οποία υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 2

β) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση $f(2)=0$, να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{f(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{|f(x)|}$

iii) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x-2)f(x)}$

26. α) Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\ne x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

β) Αν είναι $f(0)=1$ και $\dfrac{f(x)-x}{e^x}+\dfrac{e^x}{x-f(x)}=0$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

27. Αν $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{(f^3(x)+1)t^2+5t-7+f(x)t\sqrt{t^2+1}}{t^2-3t+5}=x$

α) να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=x-1$

β) να βρείτε τις ρίζες της f

γ) να βρείτε το πρόσημο της f

28. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^x-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να λύσετε γραφική την εξίσωση $f(x)=0$

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει ότι

$$f(h(x))=-x,\ x\in\mathbb{R}$$

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων

ε) Να βρείτε συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία να ισχύει ότι

$$e^{x^3}\left(e^{2g(x)}-1\right)=e^{g(x)}\left(1-e^{2x^3}\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

στ) Έστω $g(x)=-x^3$.

i) Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)=g(x)+1$$

έχει το πολύ μία ρίζα

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\varphi(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)},\ x\ge0$$

έχει μέγιστο το –2. Ποια είναι η θέση του μέγιστου;

iv) Να δείξετε ότι δεν είναι 1–1 η συνάρτηση

$$A(x)=\begin{cases} f(x), & x<0 \\ g(x), & x\ge0 \end{cases}$$

29. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x)\ne x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x\cdot f(x)=1$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$

Αν επιπλέον ισχύει

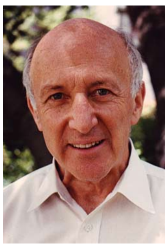
$$f(0)=1 \text{ και } \frac{f(x)-x}{e^x}+\frac{e^x}{x-f(x)}=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$

γ) να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

δ) Αν η f είναι ορισμένη στο διάστημα $\Delta=[-1,1]$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το σημείο $A(1,0)$ περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της και ένα, τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από το A λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της

Μια από τις μεγάλες παρανοήσεις σχετικά με τα μαθηματικά την οποία διαπράττουμε στις τάξεις μας είναι ότι ο δάσκαλος φαίνεται πάντα να γνωρίζει την απάντηση σε οποιοδήποτε πρόβλημα το οποίο συζητιέται.



Leon Henkin

Διαφορικός λογισμός

1. Η έννοια της παραγώγου

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ η συνάρτηση $f(x)=3x^2+x$.

2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=0$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^{\nu}\cdot \eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0, \nu>1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0 οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=3x+1$, $x_0=-4$ β) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x_0=2$

2. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στη θέση x_0 οι συναρτήσεις

α) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x-5, & x\le -2 \\ 3x^2+5x+3, & x>-2 \end{cases}$, $x_0=-2$

β) $f(x)=|x-1|+|x-3|-2x+1$, $x_0=2$

γ) $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2\eta\mu\frac{\pi}{2x-2}, & x\neq 1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$, $x_0=1$

δ) $f(x)=\begin{cases} x\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$, $x_0=0$

3. Να αποδείξετε ότι δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}+2x-1$.

2. Παράγωγος και συνέχεια (Εύρεση παραμέτρων)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & x\le 1 \\ 2x^2, & x>1 \end{cases}$.

2. Να βρείτε το α ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-\alpha x, & x\le 2 \\ x^3-2x^2-\alpha x+4, & x>2 \end{cases}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \sigma\upsilon\nu x\cdot\sqrt{x+4}, & x\ge 0 \\ e^x\sqrt{x^2+9}, & x<0 \end{cases}$$

2. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-\alpha x, & x\le 1 \\ 5x+\sqrt{\alpha}-4, & x>1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

3. Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τα α και β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0;

α) $f(x)=\begin{cases} 3x^2-x, & x\ge 2 \\ \alpha x+\beta, & x<2 \end{cases}$, $x_0=2$

β) $f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-\beta, & x\le 1 \\ \beta x^2-2\alpha, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

γ) $f(x)=\begin{cases} 4x^2-\alpha^2 x, & x\le 1 \\ 7x-\alpha-\beta, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

δ) $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha^2 x+1, & x\le 1 \\ 2x^2+\alpha x+\beta, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

ε) $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & x\le 1 \\ \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}, & x>2 \end{cases}$, $x_0=2$

στ) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1 \\ \alpha x+\beta, & x>1 \end{cases}$, $x_0=1$

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0:

α) $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2-x+\beta, & x<2 \\ 2, & x=2 \\ x^3+\gamma x-4, & x>2 \end{cases}$, $x_0=2$

β) $f(x)=\begin{cases} x^2+2\alpha x+\alpha, & x\le -1 \\ \frac{\alpha x^2-\beta x+\gamma}{x+1}, & x>1 \end{cases}$, $x_0=-1$

3. Υπολογισμός παραγώγου με γνωστή παράγωγο άλλης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $g'(2)=3$ και $g(2)=-2$ να βρείτε το $f'(2)$ όταν $f(x)=x^2g(x)+2x+1$.

2. Η $g(x)=\begin{cases} f(x^3+1), & x<1 \\ f(2x), & x\ge 1 \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 αν και μόνο αν $f'(2)=0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Αν $f(x)=e^x g(x)+x$ και είναι $f(0)=-1$, $f'(0)=2$ να βρείτε το $g'(0)$.

2. Να βρείτε το $f'(0)$ όταν ισχύει

$$f^2(x)+g^2(x)=x^2 ημx \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

3. α) Να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$, $x_0\in\mathbb{R}$ αν

$$f(x)=\begin{cases} g(x)ημ\dfrac{1}{x-x_0}, & x\neq x_0 \\ 0, & x=x_0 \end{cases} \text{ και } g(x_0)=g'(x_0)=0$$

β) Έστω $f(x)=\begin{cases} g(x)ημ\dfrac{1}{x}-ημ\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

Αν $g(0)=1$, $g'(0)=0$ τότε $f'(0)=0$.

4. α) Έστω η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και $f'(1)=3$. Να βρείτε τα $α,β\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} (f(x))^3, & x<1 \\ αx+β, & x\geq 1 \end{cases}$$

β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=2$ και $f'(0)=1$. Να βρείτε τα $α,β\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη στο 0 η

$$g(x)=\begin{cases} (f(x))^3, & x\leq 0 \\ α(f(x))^2+β, & x>0 \end{cases}$$

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot ημ^2x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

4. Υπολογισμός παραγώγου με κριτήριο παρεμβολής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν ισχύει $6\sqrt{x}-9\leq f(x)-3\leq x$ για κάθε $x\geq 0$ τότε να υπολογίσετε το $f'(9)$.

2. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-\sqrt{x}}{x-1}=\frac{3}{2}.$$

Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0=1$ τότε να αποδείξετε ότι είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ ώστε $f(x)=\begin{cases} f^2(x)-1, & x\leq 0 \\ f^3(x)+3f^2(x)-4, & x>0 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $g(0)$ και τις $f'(0)$ και $g'(0)$.

2. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $x_0=3$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-\sqrt{x+1}}{x-3}=-\dfrac{1}{4}$. Να αποδείξετε ότι είναι και παραγωγίσιμη στο $x_0=3$.

3. Να υπολογίσετε το $f'(0)$ αν ισχύει

$$|f(x)-xe^x|\leq x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

4. Να αποδείξετε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$x^3+|ημ2x|\leq f(x)\leq 2|x|+x^3,\ x\in\mathbb{R}$$

είναι συνεχής στο $x_0=0$ και όχι παραγωγίσιμη.

5. α) Αν $0\leq f(x)+g(x)(x^2-4)\leq (x+2)^2$ και g συνεχής στο -2 τότε η f παραγωγίσιμη στο -2

β) $|f(x)-g(x)|\leq (x-1)^2$ και g παραγωγίσιμη στο 1 τότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο 1

γ) Αν $(f(x))^2-(g(x))^2=xημ(πx)$, $g(0)=0$, f,g παραγωγίσιμες στο 0 τότε $f'(0)^2-(g'(0))^2=π$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x^2ημ\frac{1}{x}}{x^3}=7$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και τότε είναι και παραγωγίσιμη στο 0

6. α) Έστω η f συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{ημ2x}=1003$.

Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$ ii) $f'(0)=2006$

β) Έστω η f συνεχής στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+x^3}{x-1}=3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1

γ) Αν $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)+4xf(x)}{x^2}=-4$ τότε

$$f'(0)=-2$$

5. Απόδειξη παραγωγισιμότητας από δοσμένο γνωστό όριο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 3 και

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)}{x-2}=7$$

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=4$ και

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x+1)}{x-3}=11$$

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 4

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+3x)}{x}=5$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-1}{h}=6$ τότε

i) $f'(2)=2$ ii) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+x^2-3x+1}{x^2-3x+2}=3$

δ) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 3 και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(5-2x)}{x-1}=-4$ να αποδείξετε ότι $f(3)=0$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 με $f'(3)=2$

2. α) Έστω f παραγωγίσιμη στο 1. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(x^2), & x\le 1 \\ f(2x-1), & x>1\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $g'(1)=2f'(1)$

β) Έστω $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f(1)=g(1)$. Αν $h(x)=\begin{cases} f(\sqrt{x}), & x\ge 1 \\ g(\sqrt[3]{x}), & 0<x<1\end{cases}$ τότε η h είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ αν και μόνο αν

$$3f'(1)=2g'(1)$$

.

6. Υπολογισμός ορίου από γνωστή παράγωγο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο 2 με $f(2)=2$, $f'(2)=1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-\sqrt{x+2}}{x-2}$.

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(-1)=-7$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-1)\frac{f\left(\frac{-x}{x-1}\right)-f(-1)}{7x+5}=1$$

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(2)=2$ και $f'(2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

2. Έστω η συνάρτηση f με $f(1)=2$ και $f'(1)=-1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)-2f(x)}{x^2+x-2}$

β) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x^2-2x}$

γ) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{xf(x)-2}{x-1}$

3. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x^2-{x_0}^2}$ β) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^2(x)-f^2(x_0)}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}$

γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$ δ) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|^3-|f(x_0)|^3}{(x-x_0)f^2(x)}, f(x_0)>0$

7. Συναρτησιακές σχέσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει $f^3(x)-x^2ημx=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε την $f'(0)$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f'(0)=α$, για την οποία ισχύει

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Να υπολογίσετε το $f'(x_0)$ για κάθε $x_0\neq 0$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να είναι

$f(xy)\le f(x)+f(y)$ για κάθε $x,y\ge 0$

Να αποδείξετε ότι, αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε θετικό αριθμό α και είναι $f(1)=0$ και $f'(1)=1$ τότε θα έχουμε $f'(α)=\frac{1}{α}$ για κάθε $α>0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 1. Αν $f^3(x)+(x-1)^2f(x)-2(x-1)^3=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$

2. α) Αν $f(x+y)=f(x)+f(y)+αxy+β$, $x,y\in\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

β) Αν $f(x+y)=f(x)συνy+f(y)συνx$, $x,y\in\mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη στο 0 τότε:

i) $f(0)=0$ ii) $f'(x)=f'(0)συνx$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f'(0)=α$, για την οποία ισχύει $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε το $f'(x_0)$ για κάθε $x_0\neq 0$.

δ) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $f(x)=g(x)ημx+1$, g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g(0)=2006$. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=2006\cdot f(x)$

ε) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, $f(0)\neq 0$ και $f'(0)=1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$

ii) η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

στ) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, $x,y>0$, f παραγωγίσιμη στο 1 και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(1)=1$ ii) f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

ζ) $f(xy)=xf(y)+yf(x)$, $x,y\in\mathbb{R}^*$ και $f(1)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$.

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f'(1)=\alpha$, ώστε

$$f(x\cdot y)=xf(y)+yf(x)-xy \quad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το $f'(x_0)$ για κάθε $x_0\neq 1$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε

$$f(x+y)\leq f(x)\cdot f(y) \quad \text{για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του $\mathbb{R}$ και είναι $f(0)=f'(0)=1$ τότε είναι και $f'(x_0)=f(x_0)$ για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

5. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+y)=f(x)\sigma\upsilon\nu y+f(y)\sigma\upsilon\nu x$$

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=f'(0)\cdot\sigma\upsilon\nu x_0$

Ένας μαθηματικός δεν έχει κατανοήσει εντελώς την εργασία του, μέχρι να είναι σίγουρος ότι μπορεί να βγει στον δρόμο και να την εξηγήσει αποτελεσματικά στον πρώτο τυχόντα.

Joseph Louis Lagrange

8. Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – Παράγωγος συνάρτησης

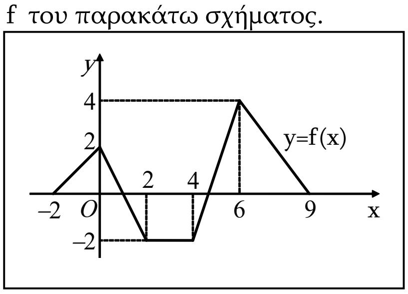
Ασκήσεις Α' ομάδας

1. α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

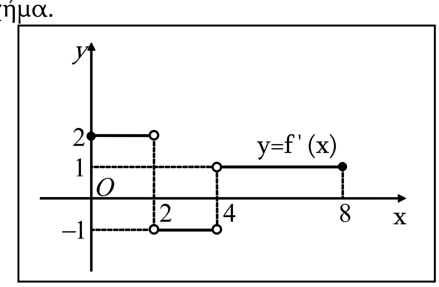
$$f(x)=\sqrt{x} \text{ στο σημείο } x_0=9.$$

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^2, & x<1 \\ \sqrt{x}, & x\geq 1\end{cases}$

2. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του παρακάτω σχήματος.



3. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x, & x<\pi \\ \alpha x+\beta, & x\geq\pi\end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\pi$.

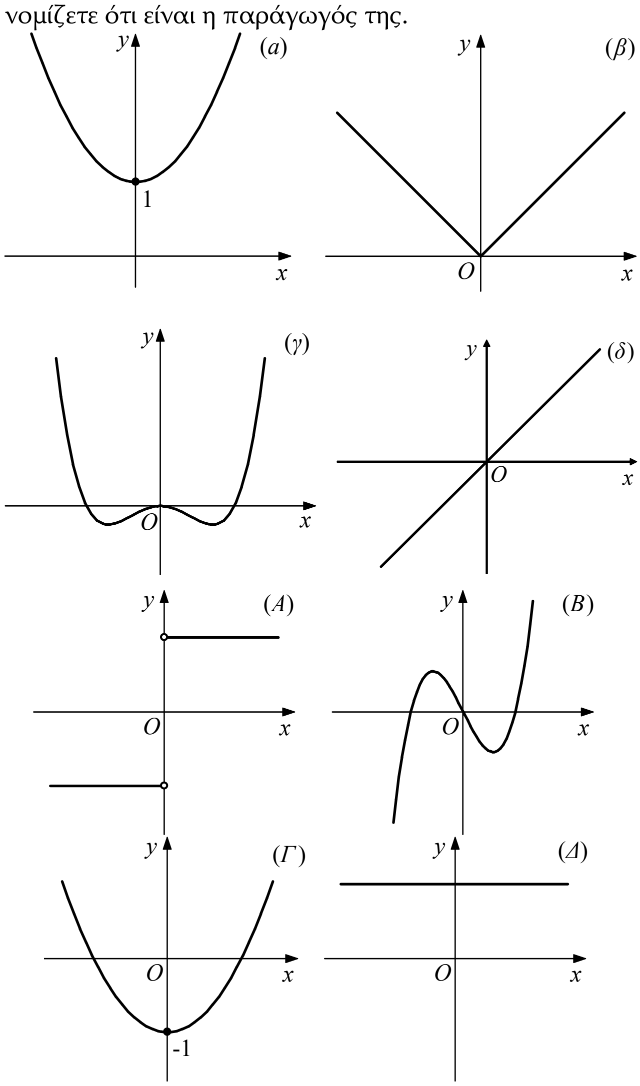
Ασκήσεις Β' ομάδας

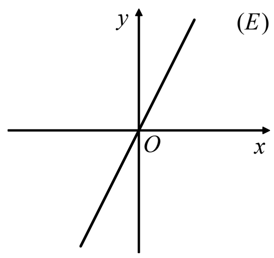
1. Να βρείτε την $f'(x)$ για $x>0$:

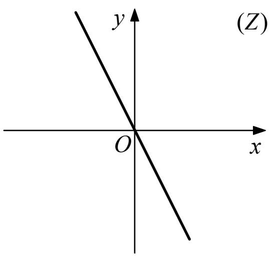
α) $f(x)=x^{-3}$ β) $f(x)=\frac{1}{x^4}$ γ) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

δ) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$ ε) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ στ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

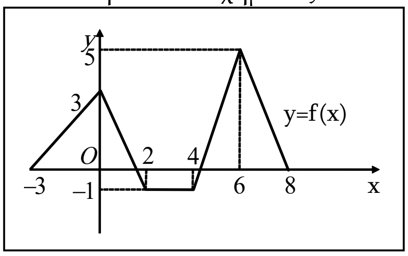
2. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της.



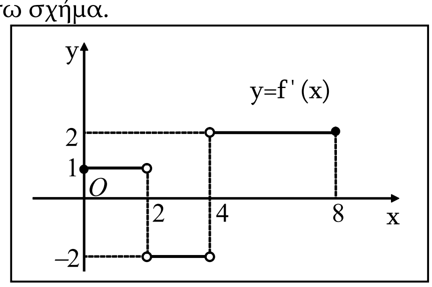




3. Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του παρακάτω σχήματος.



4. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(0)=0$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα.



9. Παράγωγος αθροίσματος – γινομένου – πηλίκου

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

α) $f(x)=2x^3+\ln x-\sqrt{3}$

β) $f(x)=(x^2-1)(x-3)$

γ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{e^x}$

2. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$2+4x+6x^2+\ldots+2\nu x^{\nu-1},\quad \nu\in\mathbb{N}^*$$

3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\sqrt{x}\cdot\eta\mu x$$

4. Αν $f(x)=\dfrac{2(x+1)}{x-1}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, να βρείτε τις συναρτήσεις f',g'. Ισχύει $f'=g'$; (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^5-7x-1$ β) $f(x)=\sqrt[4]{x^3}+x^{-\frac{2}{5}}+\sqrt[4]{5^3}$

γ) $s(x)=\dfrac{x^4+2x^2-3x}{x}$ δ) $t(x)=x\sqrt[4]{x^3}+x^2\cdot x^{-\frac{2}{5}}$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-3e^x\cdot x$ β) $f(x)=x^2\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x$

γ) $h(t)=t\ln t$ δ) $f(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu\upsilon)$

3. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ β) $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x$

γ) $f(x)=e^x\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\upsilon$ δ) $h(x)=xe^x\ln x$

4. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $g(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{3x-5}$ β) $h(t)=\dfrac{t^2-3}{1-2t}$

γ) $\varphi(u)=\dfrac{e^u-x}{e^u+x}$ δ) $q(\alpha)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\sigma\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha}$

10. Παράγωγος ανώτερης τάξης– Πράξεις με παραγώγους συναρτήσεων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1, & x\le 1\\ 2x^2, & x>1\end{cases}$$

2. Αν $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma x+\delta$ με $\alpha\neq 0$ έχει 3 πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 τότε:

α) $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=\dfrac{1}{x-\rho_1}+\dfrac{1}{x-\rho_2}+\dfrac{1}{x-\rho_3}$, $x\in\mathbb{R}-\{\rho_1,\rho_2,\rho_3\}$

β) $P'(\rho_1)\cdot P'(\rho_2)\cdot P'(\rho_3)\neq 0$

3. Αν f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\cdot g(x)=\alpha x$, $\alpha\neq 0$ τότε οι εξισώσεις $f'(x)=0$ και $g'(x)=0$ δεν έχουν κοινή ρίζα.

4. Να αποδείξετε ότι αν το ρ είναι διπλή ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$, βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 τότε ισχύει $P(\rho)=P'(\rho)=0$ και αντιστρόφως.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+4, & x\le -2\\ 3x^2+5x+3, & x>-2\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}x^3\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

γ) $f(x)=2x^3-|x-1|$

δ) $f(x)=3x+|x-1|-|3-2x|$

ε) $f(x)=|x^2-5x+6|+3x$

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x_0)\neq 0$ τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με παράγωγο

$$\left(|f(x_0)|\right)'=f'(x_0)\frac{f(x_0)}{|f(x_0)|}$$

3. Αν είναι $f(x)=x\cdot e^{-x}$ και $g(x)=x\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$ τότε να αποδείξετε ότι $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha}{x-\beta}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει:

$$(x-2)^2\cdot f'(x)=x^2-4x+3$$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$. Να αποδείξετε ότι

$$f^{(3)}(1)-3f''(1)+3f'(1)=e$$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $2f''(2)+f'(2)$.

7. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=x-\varepsilon\varphi x \text{ και } g(x)=x+\sigma\varphi x$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\frac{f'(x)-g'(x)}{f'(x)\cdot g'(x)}=\frac{4\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu^2 2x}$$

8. Αν $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να είναι $P(x)-P'(x)=x^3$.

9. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει η ισότητα

$$10P(x)=\left[P'(x)\right]^2-6x^2+10x-5$$

10. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες και ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}=e^x \text{ με } f(x)\cdot g(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$f^2(x)\cdot\left[g(x)+g'(x)\right]+g^2(x)\cdot\left[f(x)+f'(x)\right]=0$$

11. Υπολογισμός ορίου από γνωστή παράγωγο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$

β) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=e^\alpha\left(f(\alpha)+f'(\alpha)\right)$ (ΣΧ.)

2. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=2$ και $f'(1)=3$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)\cdot\ln x}{x-1}$ β) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x f(x)-2e}{x-1}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση.

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη να δείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+\alpha h)-f(x)}{h}=\alpha f'(x)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$

ii) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=2f'(x)$

β) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to1}\frac{f'\left(\frac{x}{h}\right)-f'(x)}{h-1}=-xf''(x)$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\alpha$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha\sqrt{f(x)}-x\sqrt{f(\alpha)}}{x-\alpha}=\frac{\alpha f'(\alpha)-f(\alpha)}{2\sqrt{f(\alpha)}}$$

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

β) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{{x_0}^2f(x)-x^2f(x_0)}{x-x_0}={x_0}^2f'(x_0)-2x_0f(x_0)$

γ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^2(x_0+4h)-2f(x_0+3h)+2f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

δ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+\kappa h)-f(x_0+\lambda h)}{h}=(\kappa-\lambda)f'(x_0)$

ε) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^2(x_0+\kappa h)-f^2(x_0+\lambda h)}{h}=2(\kappa-\lambda)f(x_0)f'(x_0)$

στ) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f^3(x_0-2h)-f^3(x_0-9h)}{h}=21f'(x_0)f^2(x_0)$

4. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(1-x)=g(x)$ με $x\in\mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(1)\cdot g(1)}{x}=f'(0)\cdot f(1)+g'(0)\cdot g(1)$$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f'(0)=3$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(3x)}{x}$.

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι:

$$\lim_{h\to1}\frac{f(hx)-2f(x)+f\left(\frac{x}{h}\right)}{h-1}=0,\ x\neq0$$

7. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=e^x\cdot\ln x$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x\cdot\ln x}{x-1}$

12. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης (Ι)

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2^{5x-3}$ β) $f(x)=\eta\mu x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x}$ (ΣΧ.)

2. α) Αν $f(\alpha x+\beta)=x^\nu$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$, $\nu>0$, τότε

$$f'(x)=\frac{\nu(x-\beta)^{\nu-1}}{\alpha^\nu}$$

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)\neq0$ και $f(\alpha x)=(3-\alpha)\cdot f(x)$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\dfrac{3}{2}$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(\alpha x+\beta)=f(x)$ με $\alpha\neq1, x\in\mathbb{R}$ τότε $f'\left(\dfrac{\beta}{1-\alpha}\right)=0$

3. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(1)=2 \text{ και } f(x^2)=f(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)-2}{x-1}=2$.

4. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο 4 με

$$f'(4)=1 \text{ και } g(x)=f(x^2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε, αν υπάρχει, την παράγωγο της g στο 2.

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f(x)=(x-\ln x)^4$ β) $g(x)=\sigma\upsilon\nu^3 x$

γ) $h(x)=\sqrt{x^3-2x+1}$ δ) $s(t)=e^{2t-t^3+x}$

ε) $q(s)=3s^4(6-2s)^2-(s^3-2s^2+3)^3$

στ) $g(x)=\ln(\eta\mu x)+\ln(\sigma\upsilon\nu x)$

ζ) $h(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

η) $f(x)=(1+\sigma\upsilon\nu2x)(1+\varepsilon\varphi x)^2-2\eta\mu2x$

2. Αν $f(x)=\ln(x^2+\alpha x+\beta)$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε $f'(1)=1$ και $f(0)=\ln(2\alpha+3)$

3. Έστω f,g συναρτήσεις $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο α με $f'(\alpha)=f''(\alpha)=2$. Αν $g(x)=f(\alpha x^2)$, να βρείτε το α έτσι ώστε $g''(1)=-\dfrac{1}{2}$.

13. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης (ΙΙ)

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^{\ln x}$

β) $f(x)=(\ln x)^x$, $x>1$ (ΣΧ.)

2. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

β) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

γ) $f(x)=\sqrt[5]{(x-1)^2}$

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt[5]{x^4}$ β) $f(x)=\sqrt[3]{x^6}$ γ) $f(x)=\sqrt[5]{(x-2)^2}$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^x$ β) $g(x)=x^{e^x}$ γ) $f(x)=x^{\ln x}$

δ) $h(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ε) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$

στ) $f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $x>0$

14. Συναρτησιακές σχέσεις

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f'(0)=1$, $g(0)=2$ και

$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{g(x)}{e^x}=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) το $g'(0)$ β) το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-\sqrt{x+4}}{x}$

2. Αν για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y)=\dfrac{f(x)}{e^y}+\dfrac{f(y)}{e^x}$ να αποδείξετε ότι $e^x[f(x)+f'(x)]=e^y[f(y)+f'(y)]$.

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Έστω δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Αν $g'(0)=3$ και

$$f(x)\cdot(x^2+3x+3)+\frac{g(x)}{e^x}=x^3+3x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να βρείτε την $f'(0)$.

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy)=f(x)+f(y)+x^2y^2-x^2-y^2,\ x,y\in(0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$xf'(x)-yf'(y)=2(x^2-y^2),\ x,y\in(0,+\infty)$$

3. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+3xf(x)=x^3-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$ αν:

α) η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

β) η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0

4. Έστω συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f(\eta\mu x)=\sigma\upsilon\nu^2x-x^2 \quad \text{για κάθε } x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε τα:

α) $f'(0)$, $f''(0)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)\cdot f''(x)-\eta\mu 3x}{\sqrt{x+4}-2}$

15. Θεωρητικές εφαρμογές

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή

β) Αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια

2. Έστω μία συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)=x$ για κάθε $x>0$, $f'(1)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x>0$

γ) Αν $g(x)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$, να δείξετε ότι

$$g'(x)=0 \text{ για κάθε } x>0$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να βρείτε την $f'(1)$ αν ισχύει

$$f^3(x)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu(\pi x) \text{ για κάθε } x\neq 0$$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x)+e^{f(x)}=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

β) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x)<\frac{1}{2}$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση ώστε:

$$f'(0)=1 \text{ και } f(x)\cdot f'(-x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής

β) Να δείξετε ότι $f'(x)>0$

γ) Αν $g(x)=f(x)\cdot f(-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

16. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και 1–1 με $f'(x)=f(x)$ τότε $f^{-1}(x)'=\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

β) Έστω $f:(-1,1)\to(-1,1)$ παραγωγίσιμη στο A_f και 1–1 με $f'(x)=\sqrt{1-f^2(x)}$. Να αποδείξετε ότι

$$\left(f^{-1}(x)\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

γ) Έστω $f'(x)=\eta\mu\left(\ln\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ με $e^{-\pi}<x<e^{\pi}$ και f αντιστρέψιμη με $f\left(e^{\frac{\pi}{3}}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}$. Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}\left(e^{\frac{\pi}{4}}\right)\right)'$

δ) Έστω $f(x)=4x+2+e^x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και η f^{-1} παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}(3)\right)'$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε το $\left[f^{-1}(1)\right]'$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ορίζεται η f^{-1} στο $\mathbb{R}$. Αν $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι

$$\left(f^{-1}\right)''(x)=f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

3. Να υπολογίσετε το $\left(f^{-1}(x)\right)'$ αν:

α) $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

β) $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in(0,\pi)$

γ) $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

4. α) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι 1 – 1 και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'\left(f^{-1}(\alpha)\right)=0$, τότε η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0=\alpha$.

β) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^5+3x^2$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

17. Εφαπτομένη σε δοσμένο σημείο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της
$$f(x)=x^3+\ln x \text{ στο } x_0=1$$

2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της
$$f(x)=\begin{cases}x+\eta\mu x, & x\le 0\\ x^3+2x, & x>0\end{cases} \text{ στο } x_0=0$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $xf^3(x)+f^2(x)=x+f(x)$ στο $A(-2,2)$.

4. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι $f(x_0)=0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ στο x_0.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $f(x)=2x+e^{x^2}$ στο $x_0=0$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-x+1$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(2,3)$.

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο αντίστοιχο σημείο με το δοσμένο x_0:

α) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$, $x_0=1$

β) $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+1, & x<0\\ e^x, & x\ge 0\end{cases}$, $x_0=0$

γ) $f(x)=\begin{cases}1+\sigma\upsilon\nu x, & x\le 0\\ \lambda x^2+2, & x>0\end{cases}$, $x_0=0$

δ) $f(x)=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu x, & x\le\dfrac{\pi}{2}\\ x^2+(1-\pi)x+\dfrac{\pi^2-2\pi}{4}, & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0)\neq -1$ με $(f\circ f)(x)=x^2-(2\alpha-1)x+\alpha^2$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η f είναι να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(x_0,f(x_0))$.

5. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $x_0=0$ με $f^2(x)-2xf(x)=-\eta\mu^2 x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(0,f(0))$.

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x^3-x+2)=e^{x-1}+x+1$ με $x>0$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(2,f(2))$.

7. Έστω $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$, $\beta^2>4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία τομής της με τον $x'x$ τέμνονται στην $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$

8. Δίνεται η $f(x)=\dfrac{\ln(\alpha x)}{x}$ με $\alpha>0$, $x>0$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ και να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτομένες διέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο.

9. Έστω οι f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και
$$g(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$$
Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ και η εφαπτομένη της C_g στο $(x_0,g(x_0))$ τέμνονται στον $y'y$.

18. Κλίση εφαπτομένης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την εφαπτομένη της $f(x)=x^3-2x^2+4$ για κάθε $x>0$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=4$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-3x+3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y=f(x)$ που είναι κάθετη προς την ευθεία
$$\varepsilon: x+6y-1=0$$

3. Αν $f(x)=1-\dfrac{\alpha}{2}x+\sigma\upsilon\nu x$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα σημεία της C_f με κλίση $-\dfrac{\alpha}{2}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε σταθερές ευθείες.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ και η C_f τέμνει τον $x'x$ στο $A(x_0,0)$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ στο A σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία $\dfrac{\pi}{4}$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4,\ x\in\mathbb{R}$$

και ευθεία που διέρχεται από το $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και τέμνει την C_f στα διακεκριμένα σημεία Α και Β.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)=x^2+x$

β) οι εφαπτομένες της C_f στα Α, Β είναι κάθετες

γ) το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων είναι σημείο της $y=-\frac{1}{2}$

3. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x_0+x)=f(x_0-x)-2x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την $f'(x_0)$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι κάθετη στην $y=x+2$

4. Έστω f παραγωγίσιμη και άρτια στο $\mathbb{R}$ και τα σημεία $A(x_0,1)$ και $B(-x_0,f(-x_0))$ με $x_0\neq 0$.

α) Αν η κλίση της C_f στο Α είναι $c\in\mathbb{R}^*$ τότε να βρείτε την κλίση της C_f στο Β

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των εφαπτομένων της C_f στα Α και Β

5. Να βρείτε την εφαπτομένη της $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x>0$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2-3x+3$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη προς την ευθεία $\varepsilon: x+6y-1=0$.

7. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=2$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=3$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=\frac{3x^2-x+4}{f(x)}$. Να βρείτε:

α) την παράγωγο της f στο 0

β) την κλίση της g στο 0

Η βάση της μνήμης είναι

η τέχνη της προσοχής.

Samuel Johnson

19. Κλίση εφαπτομένης και παράμετροι

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι ίση με $\frac{1}{2}$. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τα οποία η C_f με $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2-\beta, & x\le 1\\ \frac{\gamma}{x}, & x>1\end{cases}$ έχει στο $x_0=1$ εφαπτομένη κάθετη στην $x-2y+1=0$

2. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ για τα οποία η C_f με $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3+\beta x^2+1, & x\le 1\\ \gamma x^2+x, & x>1\end{cases}$ έχει στο $x_0=1$ εφαπτομένη

α) κάθετη στην $2y+x=2$

β) παράλληλη στην $y=2x-1$

γ) σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον $x'x$

δ) με κλίση 2

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+2x+3$ με $x\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα α, β για τα οποία η κλίση της C_f στο $(-1,1)$ είναι 8.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+9x-12$ με $x\in\mathbb{R}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,-10)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης –3. Να βρείτε:

α) τα α, β

β) τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $\varepsilon: 48x-2y+2011=0$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-7x+5$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $M(1,f(1))$ και $N(-3,f(-3))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Να βρείτε:

α) τον αριθμό α

β) τις εφαπτομένες της C_f που είναι κάθετες στην ευθεία $\varepsilon: x-7y+21=0$

6. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{x^3-3x^2+\lambda}{x-1}$ να εφάπτεται στον άξονα των τετμημένων.

20. Απόδειξη ότι δοσμένη ευθεία είναι εφαπτομένη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 8x - 11$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο Α. (ΣΧ.)

3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά. (ΣΧ.)

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων. (ΣΧ.)

4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει πολυώνυμο f δεύτερου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να εφάπτεται των ευθειών $y = x + 1$ και $y = 3x - 1$ στα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,2)$ αντιστοίχως. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 2$.

2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη για την οποία ισχύει

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 2 \text{ με } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) η C_f εφάπτεται στην C_g με $g(x) = \ln x + 3$ με $x > 0$

3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x - 1$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - x^2$$

δύο κοινά σημεία και εφάπτεται σε αυτή σε ένα από τα σημεία αυτά.

4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + 8x = 2x^3 + (x^2 + 4) f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 4x - 1$ εφάπτεται στη C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

5. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση $y = -4x + 7$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς β και γ

β) Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f

21. Εύρεση εφαπτομένης από εξωτερικό σημείο της C_f

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το $A(2,3)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να δείξετε ότι από το σημείο $M(\kappa, -2)$ άγονται κάθετες εφαπτομένες στην C_f με $f(x) = \frac{1}{8}x^2$.

2. Έστω $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Να δείξετε ότι από κάθε σημείο $M(\alpha, \beta)$ με $\alpha^2 > 2\beta$ άγονται δύο εφαπτομένες της C_f. Αν $\beta = -\frac{1}{2}$ τότε οι δύο εφαπτομένες είναι κάθετες.

3. Έστω $f(x) = 5x - 3x^2$ και $M(\alpha, \beta)$ με $\beta > 5\alpha - 3\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι:

α) από το Μ άγονται δύο εφαπτομένες της C_f

β) αν οι δύο εφαπτομένες είναι κάθετες τότε ο γεωμετρικός τόπος του Μ είναι η ευθεία $y = \frac{13}{6}$

4. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu \geq 0$ και $P_1(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x) : (x - x_0)$.

α) Να αποδείξετε ότι $P_1(x_0) = P'(x_0)$

β) Αν $y = \lambda x + \beta$ είναι η εφαπτομένη της C_P στο x_0 τότε το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) - \lambda x - \beta$ διαιρείται ακριβώς με το $x - x_0$ και το πηλίκο $Q_1(x)$ επίσης διαιρείται με το $x - x_0$

γ) Αν $P(x) = x^4 - 4x^3$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_P η οποία εφάπτεται σε δύο σημεία στη C_P

Πιο είναι τελικά πιο γρήγορο;

… Το πι και φι;	*… Το τάκα – τάκα;*
… Το μάνι – μάνι;	*… Το τσακ – μπαμ;*
… Το σε χρόνο dt;	*… Το πιτς φυτίλι;*
… Το άψε – σβήσε;	*… ή το πατ – κιουτ;*

22. Συμπεράσματα από γνωστή εφαπτομένη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+3$.

α) Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία $y=(\lambda-1)x+\lambda-4$ να είναι εφαπτομένη της καμπύλης της C_f

β) Να βρείτε τα αντίστοιχα σημεία επαφής

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=-x+2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=x^2\cdot f(x)+f(x^3)$ στο σημείο της $B(1,g(1))$.

3. Έστω η $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$, όπου $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu\geq 2$ και $g(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\mu\in\mathbb{N}$, όπου τα $P(x)$, $g(x)$ δεν έχουν κοινή ρίζα. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει στο $(x_0,f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη τον $x'x$ αν και μόνο αν το x_0 είναι διπλή ρίζα του $P(x)$.

4. Αν $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x-1}$ και η C_f έχει εφαπτομένη τον $x'x$ τότε $m=0$ ή $m=4$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y=\lambda x+1$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2+x+2$$

2. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε ο άξονας $x'x$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+2\alpha x+\beta$ στο σημείο με $x_0=1$.

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x^3+\alpha x+\beta x+3,\text{ με } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Η ευθεία $\varepsilon: y=10x-9$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο της $M(2,f(2))$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f

4. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$f(x^2)=(2x^3+3x^2)^2\cdot g(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Αν η ευθεία $\varepsilon: y=3x-1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(-1,g(-1))$.

5. Δίνεται άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση

$$y=2x-3.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=f(x^2+x)+f^2(x)$ στο σημείο της $B(-2,g(-2))$

23. Εμβαδόν τριγώνου που σχηματίζεται από εφαπτομένη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=-2x^2$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι θετικοί ημιάξονες με την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με τεταγμένη −2.

2. Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\dfrac{1}{\xi}\right)$. Αν A,B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να δείξετε ότι

α) Το Μ είναι μέσο του ΑΒ

β) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi\in\mathbb{R}^*$ (ΣΧ.)

3. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\eta\mu x)=e^x\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(0)$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο (ΣΧ.)

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $(f\circ f)(x)=x^2-x+1$ και $f'(1)<0$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της παραβολής $C: y^2=2px$, $p>0$ στο σημείο της $M(x_1,y_1)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία $\varepsilon: y=x+8$ και τις εφαπτομένες της καμπύλης $y=x^2-x-7$ στα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία ε.

2. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ και τις εφαπτομένες της καμπύλης $y = x^2 - 4x + 5$ στα σημεία τομής της καμπύλης με την ευθεία ε.

3. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι άξονες με τυχαία εφαπτομένη της καμπύλης

$$y = \frac{\alpha}{x}$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = \sqrt{1 + x^2}$ που σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $4\sqrt{3}$ τ.μ.

24. Κοινές εφαπτομένες σε κοινό σημείο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - x + 2 \text{ και } g(x) = 2x^2 - x + 2$$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g στα κοινά τους σημεία.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 2$.

α) Να βρείτε όλες τις δευτέρου βαθμού συναρτήσεις $g(x)$ που οι γραφικές τους παραστάσεις εφάπτονται με την C_f στο $A(1, f(1))$ στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη

β) Να βρείτε την κοινή τους εφαπτομένη

2. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 - x + \alpha \text{ και } g(x) = \beta x^2 - 2\alpha x + \beta$$

να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x = 1$.

3. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με

$$f(x) = \frac{3x^2 - x + 1}{2x},\ g(x) = x^2 + \alpha x + \beta$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάποιο κοινό τους σημείο με κλίση $-\frac{1}{2}$.

4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - \alpha x - \beta$ και $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 3$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x = -2$.

5. α) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g όπου $f(x) = 4 - x^2$ και $g(x) = -x^2 + 8x - 20$

β) Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g όπου $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = -2x^2$

γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g με

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ και } g(x) = x^2 + 5x + 4$$

έχουν κοινή εφαπτομένη την $y = x$

6. Έστω $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\lambda x - 2\lambda(1 - \lambda)$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι όλες οι γραφικές παραστάσεις της f έχουν κοινή εφαπτομένη

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της C_f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στον $x'x$ είναι η $(\varepsilon): y = x$

γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων της C_f στα οποία οι εφαπτομένες της είναι κάθετες στην (ε)

7. α) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = e^{-x}$ τότε να αποδείξεε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g με $f(x) = e^x$ και $g(x) = \sqrt{x}$

8. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ και } g(x) = (x^2 - 1)\text{συν}x$$

έχουν κοινές εφαπτομένες.

9. Έστω οι συναρτήσεις

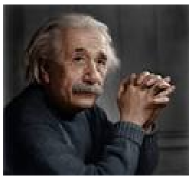
$f(x) = (x - 1) \cdot \ln(x + 1) + \alpha(x + 1)$ και

$g(x) = e^{-3x} + \beta \cdot (x - 1)^3 + 5$

α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$

β) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης τους

Δεν μπορείς να λύσεις ένα πρόβλημα ακολουθώντας τον τρόπο σκέψης που είχες όταν το δημιούργησες.



Albert Einstein

25. Κοινές εφαπτομένες σε μη κοινό σημείο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=x^2-5x+10 \text{ και } g(x)=x^2-x+6$$

α) Να βρείτε την κοινή τους εφαπτομένη

β) Να βρείτε τα σημεία επαφής της με τις C_f και C_g

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^x \text{ και } g(x)=-x^2-x$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g. (ΣΧ.)

3. Έστω f μία παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(x^2+x+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0,g(0))$. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2-x+\frac{5}{4}$ και $g(x)=e^{-2x}$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=-\frac{1}{2}$ εφάπτεται στη C_g.

2. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\frac{1}{x}$ και $g(x)=e^{-x}$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο A και η C_g τον άξονα $y'y$ στο B, να δείξετε ότι η ευθεία AB είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g στα σημεία A και B αντίστοιχα.

3. Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=2x^2+x+1$ και $g(x)=3x^2-11x+13$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των δύο παραπάνω συναρτήσεων.

4. Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=x^2-4x+4$ και $g(x)=2x^2-6x+3$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των δύο παραπάνω συναρτήσεων.

5. Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\ln x$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των δύο παραπάνω συναρτήσεων.

6. Έστω οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=\ln(\lambda x)$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η κοινή εφαπτομένη αυτών να διέρχεται από το σημείο $M(1,0)$

7. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^{1-x}+2 \text{ και } g(x)=2-\ln(x-1)$$

και τα σημεία $A(1,f(1))$ και $B(2,g(2))$ των γραφικών τους παραστάσεων. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB εφάπτεται των C_f και C_g στα A και B.

8. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x)=x^2-3x+4 \text{ και } g(x)=x^2+x+4$$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=2x^2+\alpha x \text{ και } g(x)=x^2+\beta \text{ με } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Η ευθεία με εξίσωση $y=2x$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g.

α) Να βρείτε τα α και β

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν και άλλη κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

26. Εφαπτομένη αντίστροφης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν $f(x)=e^{x+1}+x-e$ τότε να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $(0,f^{-1}(0))$.

2. Έστω η παραγωγίσιμη και 1–1 συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η εφαπτομένη στο σημείο $A(2,f(2))$ είναι η ευθεία $y=3x+2$. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $A'(f(2),2)$, αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+2x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0=-2$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

γ) Να βρείτε, αν υπάρχει, κοινή εφαπτομένη ευθεία στις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1}

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία αντιστρέφεται και είναι παραγωγίσιμη. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x,f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x),x)$ των $C_{f^{-1}}$ και C_f αντίστοιχα. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}

β) Αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, τότε να δείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $y=x$, στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$

γ) Να αποδείξετε ότι γενικά, αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αντιστρέφεται και η C_f εφάπτεται στην $y=x$ στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$, τότε και η $C_{f^{-1}}$ εφάπτεται στην $y=x$ στο A (Θεωρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0

27. Ρυθμός μεταβολής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=x^3-3x^2+1 \text{ και } A_f=\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0=1$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x ελαττώνεται

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x,f(x))$ ως προς x στο $x_0=2$

2. Η θέση $x(t)$, σε m, ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε έναν άξονα, δίνεται από τη σχέση: $x(t)=2t^3-18t^2+48t-12$, όπου $t\in[0,4]$ ο χρόνος σε sec. Να βρείτε:

α) την ταχύτητα του σώματος όταν ο χρόνος είναι $t=1$, $t=2$, $t=3$ sec

β) την επιτάχυνση του σώματος όταν $t=3$ και όταν $t=4$ sec

γ) το διάστημα που διανύεται στο πρώτο δευτερόλεπτο

δ) ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι ακίνητο

ε) ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη δεξιά και ποια προς την αριστερή κατεύθυνση

στ) το ολικό διάστημα που διήνυσε το σημείο κατά τα 4 πρώτα δευτερόλεπτα της κίνησής του

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τον τύπο $y=f(x)=\begin{cases}x^2+2\eta\mu x, & x\le 0\\ -x^2+2x, & x>0\end{cases}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στα $x_0=-\frac{\pi}{2}$ και $x_1=0$.

2. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x,y,\theta\in[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με μεταβλητή το χρόνο t για τις οποίες ισχύει $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{y(t)}{x(t)}$, $x(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$. Αν τη χρονική στιγμή $t_0=2$ είναι $x(2)=x'(2)=1$ και $y(2)=y'(2)=3$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του θ, τη χρονική στιγμή $t_0=2$.

3. Το διάστημα s, σε μέτρα, που διανύει ένα κινητό σε χρόνο t sec, δίνεται από τον τύπο

$$s(t)=10t-t^2, \text{ όπου } 0\le t\le 10$$

α) Να βρείτε τη ταχύτητα του κινητού τη στιγμή $t_0=1\,\text{sec}$

β) Ποια στιγμή το κινητό παραμένει ακίνητο;

4. Το διάστημα s, σε μέτρα, που διανύει ένα κινητό σε χρόνο t sec, δίνεται από τον τύπο $s(t)=\ln t\cdot t^{-1}$. Να βρείτε:

α) την ταχύτητα του σώματος όταν ο χρόνος είναι $t=1$, $t=e$, $t=e^2$ sec

β) την επιτάχυνση του σώματος όταν $t=1$

5. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy έχουμε ότι: ένα σωματίδιο A κινείται πάνω στο θετικό ημιάξονα Ox με ταχύτητα $3\text{cm}/\text{sec}$ κατά τη θετική φορά και ένα άλλο σωματίδιο B κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=-\sqrt{3}x, x\le 0$ με ταχύτητα $4\text{cm}/\text{sec}$ απομακρυνόμενο από την αρχή O του συστήματος Oxy.

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης AB ως προς τον χρόνο

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOB τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του AB είναι $\sqrt{444}\text{m}$

6. Πεζοπόρος A βρίσκεται σε απόσταση 4 Km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι O και βαδίζει προς αυτό με ταχύτητα $8\text{Km}/\text{h}$. Την ίδια στιγμή πεζοπόρος B βρίσκεται σε απόσταση 3Km νότια από το σταυροδρόμι O και απομακρύνεται από αυτό με ταχύτητα $9\text{Km}/\text{h}$. Να βρείτε αν στη θέση αυτή η απόστασή τους AB μεγαλώνει ή μικραίνει και με ποιο ρυθμό.

7. Ο πληθυσμός μίας κοινωνίας βακτηριδίων αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου σύμφωνα με τον τύπο $\pi(t)=2\left(\sqrt{2}\right)^t$ εκατοντάδες (t σε ημέρες). Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού τους της όγδοη μέρα.

Ευφυία είναι η ικανότητα
να προσαρμόζεσαι στις αλλαγές.

Stephen Hawking

28. Ρυθμός μεταβολής – Γεωμετρικά μεγέθη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου

$O(0,0)$, $A(2x,0)$ και $B(0,e^x)$ με $x>0$

Αν το x αυξάνει με ρυθμό $2cm/sec$ τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε, όταν $x=1cm$.

2. Οι διαστάσεις x και y ορθογώνιο αυξάνονται με ρυθμούς 2 και 3 cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή που είναι $x=10$ και $y=12$.

3. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνεται με ρυθμό $100cm^3/sec$. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με $9cm$;

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $\beta=41cm$, $\gamma=68cm$ και $\hat{A}=60^o$. Αν οι πλευρές αυξάνονται με ρυθμό $3cm/sec$ η β και $4cm/sec$ η γ τότε να βρείτε τον ρυθμό αύξησης της πλευράς α ύστερα από 3 sec.

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 2m και ΑΓ = 3m. Η τρίτη πλευρά ΒΓ = α αυξάνεται καθώς αυξάνεται η γωνία Α. Να βρείτε:

α) το ρυθμό μεταβολής του α ως προς Α, όταν $A=\frac{\pi}{2}$

β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ΑΒΓ ως προς τη γωνία Α όταν $A=\frac{\pi}{2}$ και όταν $A=\frac{2\pi}{3}$

3. Έστω $x>0$ και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό $4cm/sec$ τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε, όταν $x=5cm$.

4. Ένας προβολέας Π είναι στο έδαφος και φωτίζει ένα ανερχόμενο μπαλόνι Μ που ρίχνει τη σκιά του σε έναν τοίχο Αx. Αν η απόσταση του προβολέα από τον τοίχο είναι 80 m και από τη βάση του μπαλονιού 20 m τότε να βρείτε την ταχύτητα της σκιάς του μπαλονιού πάνω στον τοίχο, τη χρονική στιγμή που η ταχύτητά του είναι 10 m/sec.

5. Μία σφαιρική μπάλα χιονιού με αρχική ακτίνα 4cm αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $r=4-t^2$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας όταν είναι $t=1sec$.

6. Αν η ακτίνα r μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $\frac{1}{10\pi}m/sec$ τότε να βρεθούν:

α) ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας Ε κατά τη χρονική στιγμή t_0 που είναι $r=4m$

β) ο ρυθμός μεταβολής του όγκου V όταν $t=t_0$

7. Ο όγκος V ενός σφαιρικού μπαλονιού που φουσκώνει αυξάνει με ρυθμό $100cm^3/sec$. Με ποιο ρυθμό αυξάνει η ακτίνα του r τη χρονική στιγμή t_0, που αυτή είναι ίση με 9cm;

29. Ρυθμός μεταβολής – Κίνηση σε καμπύλη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η παραβολή $y^2=x$ και ένα σημείο Μ το οποίο κινείται πάνω στην παραβολή. Έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες $x'x$ και $y'y$. Το σημείο Μ κινείται έτσι ώστε η προβολή του στον ημιάξονα Οx να απομακρύνεται από το Ο με ταχύτητα $u=5m/sec$.

α) Να βρείτε το ρυθμό, ως προς x, με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του ΟΑΜΒ τη στιγμή που είναι

$x=(OA)=9$

β) Να βρείτε το ρυθμό, ως προς t, με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του ΟΑΜΒ τη στιγμή που είναι

$x=(OA)=9$

2. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\ln x$, όπου $x>0$.

α) Να βρείτε το σημείο τομής Α της εφαπτομένης ε της C_f στο $M(\alpha,f(\alpha))$ με τον άξονα $x'x$

β) Έστω ότι ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της C_f. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=2\alpha(t)$ τότε να βρείτε:

i) το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής Α της εφαπτομένης της C_f στο Μ με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το Μ έχει τετμημένη e

ii) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $x'x$ αυτή την χρονική στιγμή

3. Ένα σημείο Α κινείται κατά μήκος της $y=\ln x$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του σημείου Α δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=2\alpha(t)$, να βρείτε:

α) το ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της εφαπτομένης της C_f στο Α με τον άξονα $x'x$, τη χρονική στιγμή που το Α έχει τετμημένη e

β) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Α με τον $x'x$ την ίδια χρονική στιγμή με το α. ερώτημα

4. Ένα κινητό κινείται στην καμπύλη $y=\ln x$. Καθώς το Μ περνάει από το σημείο $A\left(\sqrt{e},\frac{1}{2}\right)$, η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta=M\hat{O}x$, τη χρονική στιγμή που το κινητό Μ περνάει από το Α.

Ασκήσεις Β' ομάδας

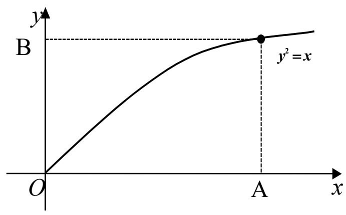
1. Κινητό σημείο Μ κινείται πάνω σε καμπύλη $C: y = e^{x-1} + \ln x$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $y \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του $x(t)$ να αυξάνεται με ρυθμό $2m/\min$. Αν τη χρονική στιγμή t_0 η τεταγμένη του είναι ίση με 1, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη στιγμή t_0.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ένα σώμα κινείται πάνω στη C_f. Όταν το σώμα περνάει από το σημείο Α στο οποίο η εφαπτομένη της C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -1, τότε η εφαπτομένη του σώματος αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σώματος, όταν αυτό διέρχεται από το σημείο Α.

3. Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων Ο και κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2 + 2x$ έτσι, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/s. Η προβολή του σημείου Μ πάνω στον άξονα $x'x$ είναι το σημείο Α.

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ, όταν το σημείο Μ έχει τετμημένη ίση με $\frac{1}{2}$

β) Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του Μ είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x



Σημείωση: Θεωρούμε ότι τα σωματίδια Α, Β είναι υλικά σημεία και τη στιγμή $t = 0$ sec βρίσκονται στο Ο

30. Θεώρημα Rolle I (Άμεση εφαρμογή – Παράμετροι)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση $f(x) = |x-2|$ στο $[-1,1]$.

2. Έστω η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) = (x-1)f(x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Για τη συνάρτηση $g(x) = f(x^2)$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0,1]$

β) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = g(\xi)$

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 2, & -1 \leq x < 0 \\ x^3 + \beta x^2 + 3x + \gamma, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[-1,1]$

β) Να βρείτε τα ξ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 5$. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 \in [-1,2]$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για κάθε συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τα ξ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.

α) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$ στο $[-1,1]$

β) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ στο $[1,5]$

γ) $f(x) = ημ2x + 2συνx$ στο $[0,2\pi]$

δ) $f(x) = (x-\alpha)^{\nu}(x-\beta)^{k}$ στο $[\alpha,\beta]$, $\nu, k \in \mathbb{N}^*$

2. Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για κάθε συνάρτηση στο αντίστοιχο διάστημα. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τα ξ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.

α) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \leq 0 \\ 1-x^3, & x > 0 \end{cases}$ στο $[-1,1]$

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 12, & x \leq -2 \\ 4x^2 + 16x, & x > -2 \end{cases}$ στο $[-3,0]$

3. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο αντίστοιχο διάστημα. Σε κάθε περίπτωση βρείτε τα ξ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.

α) $f(x) = x^2 - (3\alpha+1)x + 5\alpha + 1$ στο $[4,6]$

β) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2\alpha - x}$ στο $[2,4]$

4. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο αντίστοιχο διάστημα. Σε κάθε περίπτωση βρείτε τα ξ για τα οποία $f'(\xi) = 0$.

α) $f(x) = \begin{cases} \alpha x + x^2 ημ\frac{\pi}{2x}, & -1 \leq x < 0 \\ \beta x + \gamma, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ στο $[-1,1]$

β) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x < 0 \\ \gamma x^2 + 4x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$ στο $[-2,2]$

γ) $f(x) = \begin{cases} \alpha ημx, & x < 0 \\ \dfrac{\beta x^2 + \gamma x + \alpha - 2\beta}{\alpha}, & x \geq 0 \end{cases}$ στο $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\right]$

5. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με

$$f(\alpha) = ef(0) \text{ και } f(x) > 0,\ x \in [0,\alpha]$$

Αν για την $g(x)=\ln f(x)-\alpha x$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[0,\alpha]$ τότε:

α) Να υπολογίσετε το α

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$

6. α) Έστω $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $\left[0,\frac{1}{\pi}\right]$ και ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{1}{\pi}\right)$ με $\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=2\xi$

β) Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $g(x)=f(x)(x-\alpha)(x-\beta)$. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την $g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$

γ) Έστω $f(x)=(x^2-\alpha)g(x)$ με $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$, $g'(x)\neq 0$ στο $[0,\alpha]$ και $(\alpha-1)g(\alpha)+g(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ με $\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=\frac{2\xi}{\alpha-\xi^2}$

δ) Έστω f,g παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\neq 0$ στο $[\alpha,\beta]$, $g'(x)\neq 0$ στο (α,β) και $f(\beta)g(\alpha)=f(\alpha)g(\beta)$. Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ και ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$

7. Έστω $f(x)=(x-1)\ln(x+1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

β) Η εξίσωση $(x+1)^{x+1}=e^{1-x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$

8. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $g(x)=\frac{f(x)}{x-\gamma}$, $\gamma\notin[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $g'(x_0)=0$

β) Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε οι εφαπτομένες της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ να διέρχονται από το $(\gamma,0)$

9. Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $f(x^\alpha)=\frac{1}{\alpha}+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{N}^*$

α) Αν $g(x)=\ln f(x)+\ln(\ln x)$ τότε για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι $g(e^\nu)=g(e)$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρα ξ_ν με $\nu\in\mathbb{N}^*$ τέτοια ώστε $f'(\xi_\nu)=-\frac{f(\xi_\nu)}{\xi_\nu\cdot\ln\xi_\nu}$

31. Θεώρημα Rolle II (Αριθμός ριζών)

Θεωρητικές εφαρμογές

1. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

α) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της f'

β) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει μία το πολύ ρίζα της f

2. Έστω η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 στο $[\alpha,\beta]$.

3. Αν $f'(x)\neq 2$, $x\in\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι η $g(x)=f(x)-2x$ είναι 1– 1.

4. Αν η f' δεν μηδενίζεται στο (α,β) τότε είναι γνησίως μονότονη. *(Εκτός ύλης)*

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $f(x)=0$ υπάρχει μοναδική ρίζα της g.

2. Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο πραγματικών ριζών της εξίσωσης $e^{-x}-\sigma\upsilon\nu x=0$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της $\eta\mu x\cdot e^x=1$.

3. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η C_f δέχεται δύο παράλληλες εφαπτομένες τότε να αποδείξετε ότι η $y=f'(x)$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

4. Έστω η συνάρτηση f, με $e^x\cdot f''(x)\neq x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\frac{x}{e^x}$ έχει δύο το πολύ πραγματικές ρίζες.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6+2x^2+3=0$ έχει δύο το πολύ ρίζες.

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x-1=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2=\sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Αν η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει τρεις άνισες ρίζες στο $\mathbb{R}$ τότε $\alpha^2>3\beta$.

2. Αν η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f^{(3)}(\xi)=0$.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 2x-1$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-x$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

4. Έστω $f(x)=x^6+4x^4+5x^2+x-7$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτομένες της C_f παράλληλες μεταξύ τους.

5. Έστω $f(x)=e^{x^2}+x^4+3e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτομένες της C_f παράλληλες μεταξύ τους.

6. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(0)=f(2)=0$ και $g(x)=f(1)(2x-x^2)$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,2)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=g'(x_1)$ και $f'(x_2)=g'(x_1)$

β) υπάρχει $x_0\in(0,2)$ με $f''(x_0)=-2f(1)$

7. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\beta\gamma$, $f(\beta)=\alpha\gamma$, $f(\gamma)=\alpha\beta$ με $0<\alpha<\gamma<\beta$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\gamma)$, $x_2\in(\gamma,\beta)$ με

$$f(x_1)+x_1f'(x_1)=f(x_2)+x_2f'(x_2)=0$$

β) Αν τα $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και O είναι συνευθειακά τότε υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2):f''(x_0)=0$

8. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το πολύ μία ρίζα.

α) $x^3-3x+\alpha=0$ στο $(-1,1)$

β) $2x^3-3x^2-\alpha^4x-\beta=0,\ \alpha>1$ στο $[0,1]$

γ) $x^5+\alpha=5x$ στο $(-1,1)$

δ) $4x^3-21x^2+18x+6\mu=0$ στο $(1,2)$

ε) $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha^2<3\beta$

στ) $x^3-12x+\lambda=0$ στο $(-2,0)$

η) $x^4+\alpha x^2+\beta x=0,\ \alpha>0$ στο $\mathbb{R}^*$

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και

$$f^2(x)-3f(x)+2=e^x+x$$

Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο του $(1,+\infty)$.

10. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$f^2(x)-e^{f(x)}-f(x)=x^3+e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

11. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν το πολύ δύο ρίζες.

α) $x^4+2\alpha x^3+6\alpha^2x^2+\beta x+\gamma=0$

β) $6x^4-8x+1=0$

γ) $x^{2\nu}+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha>0$

δ) $x^{2\nu}+\alpha x+\beta=0$

12. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ έχει το πολύ τέσσερις πραγματικές ρίζες.

13. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς ρίζα.

α) $x^5+3x^3=1$

β) $2x^3+6x+6=3x^2$

γ) $x^3+(1-\alpha)x+\beta=0,\ \alpha<1$

δ) $\alpha x^3+\delta=\beta x^2+\gamma x,\ \beta^2+3\alpha\gamma<0$

ε) $3x^5-2x^3=4$ στο $(1,2)$

στ) $2x^3+9x^2+12x+\alpha=0,\ \alpha\in(4,5)$ στο $(-2,-1)$

ζ) $x+\alpha\eta\mu x=e^\beta,\ \alpha\in(-1,0)$ στο $(0,e^\beta-\alpha]$

14. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^{3x}+3x^7$ και $g(x)=e^{-x}-5x^3$. Να αποδείξετε ότι οι C_f,C_g έχουν μόνο ένα κοινό σημείο.

15. Έστω $f:[0,1]\to(0,1)$ παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $|f'(x)|<1$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

16. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2=x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Τα μαθηματικά χαρακτηρίζονται από το ιδιαίτερο προνόμιο, ότι στην πορεία της ιστορίας πάντα προοδεύουν και ποτέ δεν οπισθοδρομούν.

Edward Gibbon

32. Θεώρημα Rolle III (Χρήση αρχικής συνάρτησης)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$4x^3-3(\alpha+4)x^2+2(\beta+2\alpha)x-4\beta=0$$

όπου $\alpha+\beta=-4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,2)$.

2. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(1)=-4$ και $f(2)=-6$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε $f'(x_0)+5=2x_0$.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f(2)=2f(1)$ τότε υπάρχει $x_0\in(1,2)$ με $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα.

α) $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0=0$ στο $(0,1)$ όταν $\dfrac{\alpha_\nu}{\nu+1}+\dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\nu}+\ldots+\dfrac{\alpha_1}{2}+\alpha_0=0$

β) $\alpha_0x^{2\nu}+\alpha_1x^{2\nu-1}+\ldots+\alpha_{2\nu-1}x+\alpha_{2\nu}=0$ στο $(-1,1)$ όταν $\dfrac{\alpha_0}{2\nu+1}+\dfrac{\alpha_2}{2\nu-1}+\dfrac{\alpha_4}{2\nu-3}+\ldots+\alpha_{2\nu}=0$

γ) $\alpha x^\nu+\beta x^\mu+\gamma x^\rho+\delta x=0$, με $\mu,\nu,\rho\in\mathbb{N}^*$ στο $(0,1)$ όταν $\dfrac{\alpha}{\nu+1}+\dfrac{\beta}{\mu+1}+\dfrac{\gamma}{\rho+1}+\delta=0$

δ) $x^2-\dfrac{\beta}{x}=\alpha\eta\mu(\pi x)$ στο $(1,2)$ αν $6\alpha+7=3\beta\ln 2$

ε) $\alpha x^2+(\beta+2\delta)x+\gamma=\delta$ στο $(0,1)$ αν $\alpha\neq0$ και $2\alpha+3\beta+6\gamma=0$

στ) $\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x}+\eta\mu(\pi x)=0$ στο $(1,3)$ αν $3\beta\ln3+26\alpha=0$

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα.

α) $3x^2+2\lambda x=\lambda+1$ στο $(0,1)$

β) $2007x^{2006}-2006(\lambda+1)x^{2005}+\lambda=0$ στο $(0,1)$

γ) $\eta\mu x+x=\eta\mu\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

δ) $3\alpha x^2+2\beta x=\alpha+\beta$ στο $(0,1)$

ε) $8x^3+3\beta x+2\gamma x=\beta+\gamma+2$ στο $(0,1)$

στ) $4\alpha x^3-3\beta x^2+2\gamma x+\beta-\alpha-\gamma=0$ στο $(0,1)$

ζ) $\alpha x^2-\dfrac{2}{3}\beta x=\dfrac{1}{3}(\alpha-\beta)$ στο $(0,1)$

η) $8\alpha x^3+2\beta x^2-6\beta x=2\alpha$ στο $(0,1)$

3. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2)-f(1)=\ln 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε $x_0f'(x_0)=2x_0^2-3x_0+1$.

4. Έστω $f(x)=x^4+\alpha x^3-\alpha x^2+1,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το α ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f'(x_0)=4x_0^3$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{2x_0f(x_0)}{1-x_0^2}$.

6. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=\dfrac{f(\alpha)-f(x_0)}{x_0-\beta}$.

7. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ με $2f(x_0)=(1-2x_0)f'(x_0)$.

8. Έστω οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) με $f'(x)\cdot g'(x)\neq0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $|g(x)|\le m\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)=f(\beta)=0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}+\dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}=0$.

9. Έστω $f:[0,2\pi]\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη στο $[0,2\pi]$. Αν $f(0)=f(2\pi)$ τότε υπάρχει $x_0\in(0,2\pi)$ με $f'(x_0)=2\eta\mu x_0\sqrt{f(x_0)}$.

10. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $\alpha<\beta<\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ με $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, $f(\gamma)=\gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1)=x_1\cdot f'(x_1)$ και $f(x_2)=x_2\cdot f'(x_2)$

β) Αν τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και η αρχή O των αξόνων είναι συνευθειακά τότε υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$ με $f''(x_0)=0$

11. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και $\gamma\notin[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f στο (α,β) που διέρχεται από το $(\gamma,0)$.

12. Έστω δύο συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι η εξίσωση $f(x)e^x = g(x)$ (1) έχει δύο τουλάχιστον ρίζες. Να αποδείξετε ότι μεταξύ των ριζών της (1) υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης

$$f'(x)\cdot e^x = g'(x) - g(x)$$

13. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με

α) $f'(x_0) = \dfrac{1}{\alpha - x_0} + \dfrac{1}{\beta - x_0}$

β) $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0) - f(\alpha)}{\beta - x_0}$

14. Αν τα $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$, $\Gamma(\gamma,f(\gamma))$ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι συνευθειακά και η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\gamma]$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma}$$

15. Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Αν $0 \notin [\alpha,\beta]$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με $x_0 f'(x_0) - f(x_0) = 0$

β) Το προηγούμενο x_0 είναι μοναδικό

16. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\alpha+1)}{\alpha+1} = \dfrac{f(\alpha)}{\alpha} + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\alpha+1)$ με $f'(\xi) = \xi + \dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

33. Θεώρημα Rolle IV (Συντελεστής Euler – Αρχική από $F(\alpha) = F(\beta)$)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ($\alpha > 0$). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$x_0 \cdot f'(x_0) + (1 + x_0)\cdot f(x_0) = 0$$

2. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $\alpha^{f(\beta)} = \beta^{f(\alpha)}$ με $1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0 \cdot f'(x_0)\cdot \ln x_0$$

3. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ν βαθμού, ισχύει $P''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) Ο ν είναι άρτιος

β) Το $P'(x)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω f,g παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ ώστε:

α) $f'(x_0) + g'(x_0) f(x_0) = 0$ β) $f'(x_0) + 3f(x_0) = 0$

γ) $f'(x_0) - 4f(x_0) = 0$ δ) $f'(x_0) + 2x_0 f(x_0) = 0$

ε) $f'(x_0) - \eta\mu x_0 f(x_0) = 0$

2. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\alpha < \beta < \gamma$ με $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f''(x_0) + 2f'(x_0) = 0$.

3. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν $e^{f(\alpha)}\cdot g(\alpha) = e^{f(\beta)}\cdot g(\beta)$ με $\alpha < \beta$ και g παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ με

$$f'(x_0)\cdot g(x_0) + g'(x_0) = 0$$

4. Έστω μία συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $\alpha > 0$ και $e^{f(\alpha)-f(\beta)} = \dfrac{\beta}{\alpha}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x) + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

34. Θεώρημα Μέσης Τιμής I

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να εξετάσετε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής στη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x \text{ στο } [1,e]$$

2. Να εξετάσετε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Μέσης Τιμής στη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x + 2, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases} \text{ στο } [-1,3]$$

3. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x - 2y + 3 = 0$.

4. Να λύσετε την εξίσωση $7^x + 4^x = 6^x + 5^x$.

5. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = f(\alpha) + f(\beta)$$

Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ με $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$

β) αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[\alpha,\beta\right]$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)=0$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να δείξετε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στις παρακάτω συναρτήσεις και να βρείτε το αντίστοιχο κάθε φορά σημείο του διαστήματος

α) $f(x)=e^x$ στο $\left[0,1\right]$

β) $f(x)=x+\ln x$ στο $\left[1,e\right]$

γ) $f(x)=+3$ στο $\left[-2,6\right]$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$ στο $\left[1,5\right]$

2. Να δείξετε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Τ. στις παρακάτω συναρτήσεις και να βρείτε το αντίστοιχο κάθε φορά σημείο του διαστήματος

α) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+4, & x\le 2\\ 2x^2-7x+8, & x>2\end{cases}$ στο $\left[-1,3\right]$

β) $f(x)=\begin{cases}x^3-x+2, & x\le 1\\ x^2+1, & x>1\end{cases}$ στο $\left[-1,3\right]$

3. Βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει το Θ.Μ.Τ.:

α) $f(x)=\begin{cases}(\ln x)^2, & 1\le x\le e\\ \alpha x+\beta, & e\le x\le 5\end{cases}$ στο $\left[1,5\right]$

β) $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta x, & x\le 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ στο $\left[0,2\right]$

γ) $f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+\alpha x+\beta, & x\le 1\\ \beta x^2+2x+\alpha, & x>1\end{cases}$ στο $\left[0,2\right], f(-1)=0$

4. Έστω συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$. Να δείξετε ότι:

α) ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[e,e^2\right]$

β) υπάρχει $x_0\in(e,e^2)$ ώστε $f'(x_0)<0$

γ) είναι $f(x_0)>\dfrac{1}{x_0}$

5. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\left[\alpha,\beta\right]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\left[\alpha,\beta\right]$. Να δείξετε ότι:

α) για την συνάρτηση $g(x)=\ln f(x)$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο $\left[\alpha,\beta\right]$

β) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\alpha)=f(\beta)\cdot e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$

6. Έστω συνάρτηση $f(x)=(x-1)e^x$. Να δείξετε ότι:

α) η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $\left[\alpha,\beta\right]$ με $\alpha>0$

β) $e^\beta+\alpha e^\alpha<\beta e^\beta+e^\alpha$

7. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της C_f τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)=0$.

8. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=\alpha+\beta$, $f(2)=2\alpha+\beta$, $f(3)=3\alpha+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με

$$f''(x_0)=0$$

9. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έστω ότι είναι $g(x)=f(x)-f(2-x)$ με $g(2)=2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ με

$$f''(x_0)=f''(x_0-2)$$

10. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\left[\alpha,\beta\right]$ με $f(\beta)=f(\alpha)+f'(\alpha)(\beta-\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f''(x_0)=0$.

11. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left[1,3\right]$ με $\dfrac{f(1)+f(3)}{2}=f(2)+1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,3)$ με $f''(x_0)=2$.

12. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$, $\alpha>0$ τέτοιο ώστε $1+\alpha f'(\xi)=f(\alpha)$.

13. Έστω $f:\left[0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0)=0$, παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, $x>0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$, $\alpha>0$ ώστε $\xi^2 f(\alpha)=\alpha g(\xi)$.

14. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\beta)$, $\beta>0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: f(\beta)x-\beta y+\beta=0$.

Ένας μαθηματικός δεν έχει κατανοήσει εντελώς την εργασία του, μέχρι να είναι σίγουρος ότι μπορεί να βγει στον δρόμο και να την εξηγήσει αποτελεσματικά στον πρώτο τυχόντα.

Joseph Louis Lagrange

35. Θεώρημα Μέσης Τιμής ΙΙ (Ανισότητες)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και ισχύει $2 \le f'(x) \le 5$ για κάθε $x \in (0,4)$. Αν $f(0)=1$ να αποδείξετε ότι $9 \le f(4) \le 21$. (ΣΧ.)

2. Έστω μία συνάρτηση f με f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$. Να δείξετε ότι: $f'(x) > \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$, $x > \alpha$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. α) Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[0,5]$ με $f(0)=1$ και $2 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in (0,5)$. Να αποδείξετε ότι $11 \le f(5) \le 21$.

β) Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[1,2]$ με $f'(x) \ge 2$, $x \in (1,2)$. Αν $f(1)=-1$ τότε $f(2) \ge 1$.

γ) Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x) < k$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(\beta) \le f(\alpha) + k(\beta-\alpha)$.

δ) Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $|f'(x)| < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $|f(\beta)-f(\alpha)| < |\beta-\alpha|$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

ε) Αν $f'(x) \le M < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) \le xM + f(x)$ ii) $f(x) \ge xM + f(0)$, $x < 0$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

v) η f είναι αντιστρέψιμη

στ) Αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με $f'(x) \ge M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι $f(\beta) \ge f(\alpha) + M(\beta-\alpha)$.

2. α) Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,4]$ με $f(0)=0$ και $f'(x) \ge M > 0$ για κάθε $x \in [0,4]$. Να δείξετε ότι $f(x) \ge M$, $x \in [1,4]$.

β) Αν $f(x) = \ln(1+x^2)$ τότε $|f(\beta)-f(\alpha)| \le |\beta-\alpha|$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \le |\beta-\alpha|$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

δ) Αν $f(x) = x(\ln x - 1)$ να δείξετε ότι $1 < e^{\frac{1}{e-1}} < e$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι $f(0) \ge 2$ και $f(1)=5$ τότε υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) \le 3$

β) Αν είναι $f(1)=5$ και $f'(x) > 2$ για κάθε $x \in (0,1)$ τότε είναι $f(0) < 3$ [Λ. Θ.]

4. Έστω $f:[0,\alpha] \to (0,+\infty)$, παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\alpha)$ με

$$f'(x_0) - f(x_0) < \frac{f(\alpha)}{\alpha}$$

5. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(1)=3$ και $|f'(x)| \le 2$ για κάθε $x \in (0,2)$. Να δείξετε ότι $1 \le f(x) \le 5$, $x \in [0,2]$.

6. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(x) > 0$, $x \in (0,1)$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f(\xi) = (1-\xi)f'(\xi)$

β) υπάρχει $x_0 \in (0,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < \dfrac{f'(\xi)}{\xi}$

7. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, f' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

α) $f(\alpha)+f(\delta) < f(\beta)+f(\gamma)$ με $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ και $\alpha+\delta = \beta+\gamma$

β) $f'(x)(x-\alpha) < f(x) - f(\alpha)$, $x < \alpha$

γ) $f'(x) < \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$ και $f(0)=0$

δ) $2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)+f(\beta)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

ε) $2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha+\beta}{2} > \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta$, $\alpha,\beta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \ne \beta$

8. Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f^2(1) - f^2(0) > 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)\cdot f'(\xi) > \dfrac{1}{2}$.

9. α) Να δείξετε ότι $\left|\dfrac{x^2+\eta\mu x}{2x^2+2}\right| \le \dfrac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Αν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ τότε $|f(\beta)-f(\alpha)| \le \dfrac{1}{2}|\beta-\alpha|$

10. Έστω $f:[1,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1)=0$, $f(x) > 0$, $x > 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\beta \in (1,\alpha)$, $\alpha > 1$ ώστε

$$f(\alpha) > (\beta-1)f'(\beta)$$

11. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=0$, $f(x) > 0$, $x > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\beta \in (0,\alpha)$, $\alpha > 0$ ώστε

$$\beta f'(\beta) > f(\alpha) - 2f(\beta)$$

36. Θεώρημα Μέσης Τιμής ΙΙΙ (Ανισότητες με μονοτονία f')

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι $1+\frac{1}{1+e}<\ln(1+e)<1+\frac{1}{e}$.

2. Να αποδείξετε ότι $1<\frac{e^x-1}{x}<e^x,\ x>0$.

3. Έστω $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1)=2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(3)=3$. Αν $f'\uparrow\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $f(x)\le 3x-1,\ x\in[1,3]$. Πότε ισχύει το ίσον;

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $1-\frac{\alpha}{\beta}<\ln\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}-1$, για $0<\alpha<\beta$

β) $e^\beta-e^\alpha<\beta e^\beta-\alpha e^\alpha$, για $0<\alpha<\beta$

γ) $\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}\le \varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta<\frac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$, για $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

δ) $2^\alpha\ln 2<\frac{2^\beta-2^\alpha}{\beta-\alpha}<2^\beta\ln 2$, με $\alpha<\beta$

ε) $\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\ln(\sigma\upsilon\nu\alpha)-\ln(\sigma\upsilon\nu\beta)}{\beta-\alpha}<\varepsilon\varphi\beta,\ 0\le\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

στ) $\frac{1}{\alpha+1}<\ln\frac{\alpha+1}{1}<\frac{1}{\alpha}$, για $\alpha>0$

ζ) $\left|\ln\frac{x^2+1}{y^2+1}\right|\le|x-y|,\ x,y\in\mathbb{R}$

η) $\ln\frac{e^\beta+1}{e^\alpha+1}<\beta-\alpha,\ \alpha<\beta$

θ) $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\pi$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\varphi\beta<\frac{\ln(\eta\mu\beta)-\ln(\eta\mu\alpha)}{\beta-\alpha}<\sigma\varphi\alpha,\ 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$

β) $\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)\le\alpha^\nu-\beta^\nu\le\nu\alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)$, $0<\beta<\alpha,\nu\in\mathbb{N}^*$

γ) $e^{-\alpha}<\frac{\alpha-\beta}{e^\alpha-e^\beta}<e^{-\beta},\ \alpha>\beta$

δ) $\left|\sqrt{x^2+\alpha^2}-\sqrt{y^2+\alpha^2}\right|\le|x-y|,\ x,y,\alpha\in\mathbb{R}$

ε) $|\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta|\le|\alpha-\beta|,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

στ) $\frac{\beta-\alpha}{\nu\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}<\sqrt[\nu]{\beta^\nu}-\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}<\frac{\beta-\alpha}{\nu\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}}$, $0<\alpha<\beta,\ \nu\in\mathbb{N}^*,\ \nu\ge 2$

ζ) $\eta\mu(\alpha+h)<\eta\mu\alpha+h\sigma\upsilon\nu\alpha,\ 0<\alpha<\alpha+h<\frac{\pi}{2}$

η) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+h)<\sigma\upsilon\nu\alpha-h\eta\mu\alpha,\ 0<\alpha<\alpha+h<\frac{\pi}{2}$

3. Να αποδείξετε ότι:

α) $2-\frac{e}{\pi}<\ln\pi<\frac{\pi}{e}$

β) $\eta\mu\frac{2\pi}{11}<\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{132}$

γ) $\eta\mu\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi}{36}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $2-\frac{e}{3}<\ln 3<\frac{3}{e}$

ε) $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{18}<\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$

στ) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{72}<\eta\mu\frac{5\pi}{18}<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{36}$

ζ) $\varepsilon\varphi 50^\circ>1+\frac{\pi}{18}$

η) $\frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha}>\frac{\beta}{\alpha},\ \alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

θ) $\alpha e<\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}<\beta e,\ 0<\alpha<\beta$

ι) $\frac{1}{3}<\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$

4. α) Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,7]$ με f' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$f(1)+f(7)<f(3)+f(5)$$

β) Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, f' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

i) $(\alpha-\beta)f'(\alpha)+f(\beta)<f(\alpha)<(\alpha-\beta)f'(\beta)+f(\beta)$, $\alpha<\beta$

ii) $f(x+2)-f(x)<2f'(x)<f(x)-f(x-2),\ x\in\mathbb{R}$

iii) $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1),\ x\in\mathbb{R}$

5. Να αποδείξετε ότι:

α) $x+1<e^x<xe^x+1,\ x<0$

β) $\frac{x-1}{x}<\ln(x+1)<x,\ x>0$

γ) $\frac{x}{x+1}<\ln(x+1)<x,\ x>0$

δ) $\frac{1}{x}<\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)<\frac{1}{x-1},\ x>1$

ε) $1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2},\ -1<x<0$

στ) $x\le\varepsilon\varphi x\le\frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

6. Έστω $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι συνεχής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $3f'(x)<1$, για κάθε $x<0$, να δείξετε ότι

$$\frac{x}{3}<f(x)<xf'(x)$$

7. α) Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

β) Για κάθε $x\neq\frac{1}{2}$ να δείξετε ότι $2\sqrt{e}<e^x+e^{1-x}$

37. **Θεώρημα Μέσης Τιμής IV (Επιλογή διαστήματος)**

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

2. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[0,5]$, παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ με $f(5)=f(0)+1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,5)$ με $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=1$.

3. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β). Έστω υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$: $\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{f(\gamma)-f(\alpha)}<0$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi)=0$.

4. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f(1)=2$ και $f(2)=4$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(1,2)$ με $f(x_0)=2(3-x_0)$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,2)$ με $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=4$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:[1,3]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[1,3]$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $f([1,3])=[0,2]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ με

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$$

2. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν:

α) $\xi,\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2f'(\xi)$

β) $\xi_1,\xi_2,\xi_3: f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

γ) $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta): f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0 \quad (f(\alpha)=f(\beta))$

3. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f(0)+f(2)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1,ξ_2 με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)+f(1)$.

4. Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ,ξ_1,ξ_2,ξ_3 ώστε

$$2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=9f'(\xi)$$

5. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε $4f(x_0)=f(\alpha)+3f(\beta)$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi\in(\alpha,\beta): \dfrac{3}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{4}{f'(\xi)}$

6. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $\gamma\in(\alpha,\beta)$ και $2\gamma=\alpha+\beta$, $2f(\gamma)=f(\alpha)+f(\beta)$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta): f''(\xi)=0$

7. Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=x_0$

β) υπάρχει $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=1$

8. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$, παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=1-x_0$ τέτοια ώστε $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$$

9. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=\alpha+\beta-x_0$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

10. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ με $f(x_0)=0$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ με $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$

11. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=1$ και $f(1)=3$. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=2$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=1$

12. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

13. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και γνησίως μονότονη. Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $\dfrac{1}{f(\alpha)}+\dfrac{1}{f(\beta)}=\dfrac{2}{f(x_0)}$

β) υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)>0$

14. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

38. Θεώρημα Μέσης Τιμής VI (Γενικές)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\gamma)$ με $(f'(\xi))^2=f(\xi)\cdot f''(\xi)$.

2. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f, η οποία έχει με την C_f δύο τουλάχιστον κοινά σημεία τότε:

α) η f' δεν είναι 1–1

β) υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ με $f''(x_0)=0$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$$

α) Αν $f(\beta)<0$ και $f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)<0$

β) Αν $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με

i) $f(x_0)>0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)<0$

ii) $f(x_0)<0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)>0$

γ) Αν $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)=f'(\beta)>0$ τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με $f''(\xi)>0$

2. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ με $x>0$ έχει θετική παράγωγο.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως αύξουσα.

α) Αν $f(0)=0$, να δείξετε ότι $xf'(x)>f(x)$, $x>0$

β) Να δείξετε ότι $f(4x)-f(2x)<2xf'(4x)$, $x>0$

γ) Να δείξετε ότι $f(x)+f(3x)>2f(2x)$, $x>0$

δ) Αν επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι υπάρχει $\beta\in(\alpha,2\alpha)$, $\alpha>0$ ώστε

$$f(\alpha)+f(3\alpha)=2f(\beta)$$

4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Επίσης $f'(1)=1$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y=2x+1$.

α) Να βρείτε τα $f(0)$ και $f'(0)$

β) Να αποδείξετε ότι $2<f(1)<3$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ ώστε: $(2-3\xi)f(\xi)=f(1-\xi)-4\xi$

39. Συνέπειες του Θ.Μ.Τ.

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=(2x^2+1)^2-(x^2-5)^2-x^2(3x^2+14).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή

β) Να βρείτε την τιμή της

2. Έστω οι συναρτήσεις f,g, δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f''(x)=f(x)$ και $g''(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)$ είναι σταθερή.

3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2)=2$, $f(-1)=-3$ και

$$f'(x)=-\frac{2f(x)}{x},\ x\neq0$$

α) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)$ ισχύει $g'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι είναι σταθερές οι παρακάτω συναρτήσεις:

α) $h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$ αν $f(x)\neq0$ και

$$f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

β) $h(x)=[f(x)]^2+[g(x)]^2$ αν $f'(x)=\alpha g(x)$ και

$$g'(x)=-\alpha f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

γ) $h(x)=[f(x)]^2+[f(-x)]^2$ αν $f'(x)=2f(-x)$, $x\in\mathbb{R}$

δ) $h(x)=\dfrac{1}{x}[f(x)+g(x)]-x[f(x)-g(x)]$, $x\in\mathbb{R}^*$

αν $f(x)=xg'(x)$, $g(x)=xf'(x)$, $g(x)$ περιττή

ε) $f(x)=\dfrac{1}{3}(\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x)+\eta\mu^2x\cdot\sigma\upsilon\nu^2x$

στ) $f(x)=\eta\mu^2x+\eta\mu^2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\eta\mu x\cdot\eta\mu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f. Να αποδείξετε ότι η g είναι σταθερή και να βρείτε την $f(x)$.

α) $g(x)=f(x)e^{\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in\mathbb{R}$ με $f'(x)=f(x)\eta\mu x$ και $f(0)=1$

β) $g(x)=e^{\frac{1}{x}}f(x)$, $x>0$ με $f(x)=x^2f'(x)$ και $f(1)=1$

γ) $g(x)=\dfrac{\ln f(x)}{e^x}$, $f(x)>0$ με $\ln[f(x)]^{f(x)}=f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=e$

δ) $g(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$, $x\in\mathbb{R}$ αν $f''(x)=-f(x)$ και $f(0)=1$, $f'(0)=0$

ε) $g(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$, $x\in\mathbb{R}$
αν $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f'(x)$ και $f(0)=0$, $f'(0)=1$

στ) $g(x)=f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$, $f(x)>0$
και $f(x)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)=x$, $f(1)=1$

ζ) $g(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^2$, $x\in\mathbb{R}$
με $f''(x)+f(x)=0$ και $f(0)=1$, $f'(0)=-1$

η) $g(x)=[f(x)]^2-[f'(x)]^2$, $x\in\mathbb{R}$
με $f''(x)-f(x)=0$ και $f(0)=f'(0)=1$

θ) $g(x)=1-e^{-f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$ με $e^{f(x)}=1+f'(x)$ και $f(0)=-\ln 2$

ι) $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\ln f(x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)>0$,
$f'(x)=f(x)\cdot\varepsilon\varphi x\cdot\ln f(x)$ και $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^e$

κ) $g(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$, $x\in(0,\pi)$ αν $f'(x)=\sigma\varphi x\cdot f(x)$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

λ) $g(x)=[f'(x)]^2+[f(x)]^4$, $x\in\mathbb{R}$
αν $f''(x)=-2f^3(x)$ και $f(1)=f'(1)=0$

μ) $g(x)=f^5(x)$, $x\in\mathbb{R}$ αν $f(x)\cdot f'(x)=0$ και $f(1)=1$

3. Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει η σχέση $2f(x)+3x=xf'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f'' είναι σταθερή.

4. Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$f''(x)=f(x)-e^x f'(x)$$
$$g''(x)=g(x)+e^x g'(x)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x)=f(x)\cdot g(x)-f'(x)\cdot g'(x)$$

είναι σταθερή για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τα μαθηματικά δεν γνωρίζουν φυλές. Για τα μαθηματικά όλος ο κόσμος του πολιτισμού είναι μία και μοναδική χώρα.

David Hilbert

40. Πόρισμα συνεπειών του Θ.Μ.Τ. (Αντιπαραγώγιση – Σε διαστήματα)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, όταν ισχύει
$f'(x)=3x+2\sigma\upsilon\nu x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f'(x)=2x^2-3x-2$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=2x+1$ για κάθε $x\neq 2$
β) Αν $f(2)=7$ τότε να βρείτε τον τύπο της f

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τον τύπο της $f:A_f\to\mathbb{R}$ όταν:
α) $f'(x)=3x+1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(1)=2$
β) $f'(x)=\eta\mu x+1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$
γ) $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2$
δ) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=2$
ε) $f'(x)=2e^x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$, $f(1)=2e$

2. Να βρείτε τον τύπο της $f:A_f\to\mathbb{R}$ όταν:
α) $f'(x)=\frac{2}{x}$ με $f(1)=f(-1)=3$
β) $x^2f'(x)=x^2\sigma\upsilon\nu x-1$, $x\neq 0$, $f(\pi)=f(-\pi)=0$
γ) $(x+2)f'(x)=2x^2+5x+2$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$

41. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. (Αντιπαραγώγιση με κανόνες παραγώγισης)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτηση f, όταν ισχύει
$2xf'(x)+f(x)=2\sqrt{x}$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=2$

2. Να βρείτε τον τύπο της παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)=2-\frac{f(x)}{x} \text{ για κάθε } x\neq 0$$

3. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμες με $f(0)=g(0)>0$, $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f(x)g(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) $f(x)=e^xg(x)$, $x\in\mathbb{R}$
β) $g(x)>0$ για κάθε $f(x)=e^xg(x)$, $x\in\mathbb{R}$

4. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει $f'(x)\cdot f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

5. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε
$f'(3x-1)=2x+1$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(2)=5$

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f^3(x)+3f(x)=3x$, $x\in\mathbb{R}$

β) η f αντιστρέφεται και να βρείτε την $f^{-1}(x)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τον τύπο της $f:A_f\to\mathbb{R}$ όταν:

α) $f'(x)=ημx+xσυνx$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$

β) $f'(x)=2xσυνx-x^2ημx$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2$

γ) $f'(x)=e^x(ημx+συνx)$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=3$

δ) $f'(x)=\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$, $f(1)=2$

ε) $f'(x)=\dfrac{xσυνx-ημx}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{\pi}$

στ) $f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=3$

2. Να βρείτε την $f:A_f\to\mathbb{R}$ όταν:

α) $f'(x)=3x^2f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$, $f(0)=1$

β) $f'(x)=2xe^{-f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$, $f(1)=1$

γ) $x^2f'(x)+e^{-f(x)}=0$, $x\in(0,+\infty)$, $f(1)=0$

δ) $f'(x)+2xf^2(x)=0$, $f(x)\neq 0$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$

ε) $f'(x)-e^x\sqrt{f(x)-1}=0$, $f(x)>1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2$

στ) $f'(x)=\dfrac{2x^3}{f(x)}$, $f(x)>0$, $x>0$, $f(1)=1$

ζ) $f'(x)συνx-f(x)ημx=1$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=1$

η) $xf'(x)-2f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$, $f(1)=0$

θ) $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$, $f(1)-e=-f(-1)$

ι) $1+xf'(x)=xe^{-f(x)}$, $x\in(0,+\infty)$, $f(1)=0$

κ) $f(x)-f'(x)=e^{-x}f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$, $f(0)=2$

3. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και ισχύει $f'(x)\cdot f(-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$.

4. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε:

$$f'(x)=\frac{1}{(x-1)^2} \text{ με } f(2)=1 \text{ και } f(0)=3$$

5. Να βρείτε τον τύπο της $f:A_f\to\mathbb{R}$ όταν:

α) $f'(3x-1)=2x+1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(2)=5$

β) $f'(x^2)=2x-3$, $x\in(0,+\infty)$, $f(4)=1$

γ) $f'(x^3)=8x+1$, $x\in\mathbb{R}$, $f(1)=2$

δ) $f'(-x^2)=x+4$, $x\le 0$, $f(0)=2$

ε) $f''(3x-1)=18x$, $x\in\mathbb{R}$ $f'(1)=10$, $f(0)=-1$

στ) $f'\left(\dfrac{\ln x}{\ln α}\right)=x$, $x>0$, $f(0)=\dfrac{1}{\ln α}$, $(0<α\neq 1)$

6. Έστω η $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, παραγωγίσιμη τέτοια ώστε

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x},\ x\in\mathbb{R}^*$$

α) Να αποδείξετε ότι έχουν ίσες παραγώγους οι

$$h(x)=f(x)e^{-x} \text{ και } g(x)=f(x)e^x$$

β) Να βρείτε την f όταν $f(\ln 2)=-\dfrac{2}{3}$

7. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, όταν ισχύει:

α) $x\ln xf'(x)=1$ και $f(e)=1$

β) $(f(x)-e^x)(f'(x)-e^x)=0$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=2$

8. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και

$$2xf(x)+x^2f'(x)=3x^2+1$$

α) Να βρείτε την $f(x)$

β) Να δείξετε ότι η $y=\dfrac{3}{4}x+1$ εφάπτεται στην C_f

9. Να βρείτε την $f:A_f\to\mathbb{R}$ όταν

α) $f'(x)ημx=f(x)συνx+ημ2x$, $x\in(0,\pi)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

β) $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=x^2$, $x\in(0,+\infty)$, $f(1)=2$

γ) $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=1$, $x\neq 0$, $f(1)=1$

δ) $xf'(x)-f(x)=xσυνx-ημx$, $x>0$, $f(1)=2\pi$

10. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$. Αν ισχύει

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2e^x}{1-e^{2x}}$$

τότε να δείξετε ότι είναι

$$f(x)=c\frac{e^x+1}{e^x-1}, \text{ όπου c σταθερός αριθμός.}$$

42. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. ($f'(x)=f(x)$ – συντελεστής Euler)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=3$ και $f'(x)-x^3=f(x)-3x^2$. Να βρείτε τον τύπο της f.

2. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f, όταν ισχύει $f'(x)-f(x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=5$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την f όταν:

α) $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$,

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$

β) $f'(x) = \frac{x+1}{x} f(x)$, $x > 0$, $f(1) = e$

γ) $f'(x) = f(x)\ln f(x)$, $f(0) = e$, $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

δ) $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

2. Να βρείτε την $f : A_f \to \mathbb{R}$ όταν:

α) $f'(x) = -2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2$

β) $f'(x) = g'(x)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

γ) $f'(x) = cf(x)$, $x \in \mathbb{R}$

δ) $f'(x) + f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$

ε) $f'(x) = 2f(x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

στ) $3f'(x) + 2f(x) = 6$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$

ζ) $f'(x) + 2xf(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

η) $f(x) = x^2 f'(x)$, $x > 0$, $f(1) = \frac{1}{e}$

θ) $x\left(f'(x) - f(x)\right) = f(x)$, $x \geq 0$, $f(1) = e$

3. Να βρείτε την $f : A_f \to \mathbb{R}$ όταν

α) $f'(x) - f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ $f(0) = 1$

β) $f'(x)\sigma\upsilon\nu x + f(x)\eta\mu x = f(x)\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$f(0) = 2007$

γ) $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{1}{f'(x)}$, $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

δ) $f'(x) = f(x) + 2xe^x$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = -1$

ε) $f'(x)\sigma\upsilon\nu x + 3f(x)\eta\mu x = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) > 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

4. Να βρείτε την $f : A_f \to \mathbb{R}$ όταν:

α) $(x^2+2)\left[f(x) - f'(x)\right] = 2xf(x), x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$

β) $f'(x) - f(x) = e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

γ) $\sigma\upsilon\nu^2 x f'(x) + f^2(x) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(x) \neq 0$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

δ) $2x\left[f'(x) + f(x)\right] = e^{-x}$, $x > 0$, $f(1) = \frac{1}{e}$

43. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. (Δεύτερη παράγωγος)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 5x + 3$. Να βρείτε:

α) τις τιμές $f'(0)$ και $f(0)$

β) τον τύπο της f

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την $f : A_f \to \mathbb{R}$ αν $f''(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) $f(0) = f'(0) = 1$

β) $f(0) = f'(0) = 0$

γ) χωρίς συνθήκες

2. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και ισχύει

$$2f(x) + 4xf'(x) + (x^2+1)f''(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο ώστε $f(0) = 2f'(0) = 1$ και

$$f''(x)f(x) + \left(f'(x)\right)^2 = f(x)f'(x),\ x \in \mathbb{R}$$

4. Έστω f μία συνάρτηση με $f(0) = f'(0) = 0$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$12x^2 f(x) + 8x^3 f'(x) + (x^4+1)f''(x) = 2,\ x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$.

5. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $\left(f'(x)\right)^2 = f(x) \cdot f''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 2$. Να βρείτε:

α) τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$

β) τον τύπο της f

6. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - 2x^2 + 3x}{x^2 - 4} = -\frac{1}{2}$ και

$$2f''(x) + f''(4-x) = 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f'(2)$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$2f(x) + f(4-x) = 3x^2 - 9x + 12 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

γ) Να βρείτε τον τύπο της f

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)\eta\mu x}{f(x)}$

44. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. (Απόδειξη τύπου συνάρτησης)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $f'(x) = af(x)$ τότε να αποδείξετε ότι $f(x) = ce^{\alpha x}$, όπου c σταθερά.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, $f'(0)=3$ και $f''(x) = -9f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) αν $g(x) = f(x) - ημ3x$ τότε $g''(x) = -9 \cdot g(x)$

β) η $F(x) = [g'(x)]^2 + 9[g(x)]^2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή

γ) $f(x) = ημ3x$, $x \in \mathbb{R}$

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει:
$ημ(x+α) \cdot ημ(x-α) = ημ^2 x - ημ^2 α$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

4. Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $x^2 f'(x) = (x - \ln x)e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 0$. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$, $x > 0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $xf'(x) = e^{\frac{1}{x}}(x-1)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

45. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. (Παράσταση και παράγωγός

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f αν
$f(0)=1$, $f'(x) - 2x + 2x(f(x) - x^2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x^2$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(1) = e^{-1}$
- $f(x) \neq -\ln x$ για κάθε $x > 0$
- $xf'(x) + 1 = -2x^2(f(x) + \ln x)$ για κάθε $x > 0$

2. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

- $f'(x) = e^x + e^x(f(x) - e^x)^2$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$
- $f(x) \neq e^x$

3. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

- $(f(x) - e^x)(f'(x) - e^x) = 2x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$

4. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $e^{f(x)} \neq -x$, $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x)e^{f(x)} + 1 = \dfrac{x}{x + e^{f(x)}}$, $x \in \mathbb{R}$

5. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = 1 + (1 - e^x)e^{f(x)-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x - \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $α \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $3α^2 f(α) = (1 - α^2)f'(α)$

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

46. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. (Σχέσεις με f και g)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

- $f(0) = g(0) = 1$, $f(x) \cdot g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{g(x)}$, $g'(x) = \dfrac{e^{2x}}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τις f και g.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$, $g''(x) = g(x)$, $f'(0) = g'(0) = 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$

β) υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = cg(x)$

2. Έστω $f,g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

$$f(0) = g(0) = 1,\ f(x) \neq x \text{ και } g(x) \neq x,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) - 1 = \frac{x}{g(x) - x} \text{ και } g'(x) - 1 = \frac{x}{f(x) - x},\ x \in \mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι $f = g$ και στη συνέχεια να βρείτε την f.

3. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες για τις οποίες ισχύουν:

$f'(x) \neq -g(x)$, $g(x) \neq 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{g'(x) - f(x)}{g(x) + f'(x)} = εφx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι οι $f(x)ημx$, $g(x)συνx$ διαφέρουν κατά σταθερά

β) Να δείξετε ότι $g(x) = f(x) \cdot εφx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

4. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$h(x) = f^2(x) + g^2(x)$$

είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή $h(2010)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$φ(x) = (f(x) - ημx)^2 + (g(x) - συνx)^2$$

είναι σταθερή

γ) Να βρείτε τους τύπους των f και g

47. Πόρισμα συνεπειών Θ.Μ.Τ. $\left(f(x) \text{ και } f'\left(\frac{1}{x}\right) \text{ ή } f'(-x)\right)$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ ώστε $f(x) \cdot f'(-x) = 2$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x > 0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0 + \infty)$ ώστε

$$f'(1) = 2 \text{ και } f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot f'(x) = \frac{2}{x},\ x > 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(0) = 1$ και $f(x) \cdot f'(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να βρείτε την f

48. Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. (Συναρτησιακές σχέσεις)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

2. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή. (ΣΧ.)

3. Αν $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, η f συνεχής στο 1 με $f(1) \neq 0$ και $f'(1) = 2$ τότε $f(x) = x^2$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις η f είναι σταθερή ($x, y \in \mathbb{R}$).

α) $\sqrt{|f(x) - f(y)|} \leq |g(x) - g(y)|$, g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

β) $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{ν+1}$, $ν \in \mathbb{N}^*$

γ) $|f(x) - f(y)| + συν(x - y) \leq 1$

δ) $f(x) - f(y) + συν(x - y) \leq 1$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $f(x + y) = f(x)συνy + f(y)συνx + α$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$ τότε $f(x) = ημx$

β) Αν $f(xy) = xf(y) + yf(x)$, $x, y > 0$ με $f'(1) = 2$ τότε $f(x) = 2x\ln x$

γ) Αν $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 1$ τότε $f(x) = e^x$

δ) Αν $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $f'(0) = 1$ τότε $f(x) = 2x$

ε) Αν $f(x + y) = f(x) + κxy - 4y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$ με $f(1) = -8$ τότε $f(x) = -4x^2 + 8$

στ) Αν $f(xy) = f(x) + f(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^*$ με $f'(1) = 3$ τότε $f(x) = 3\ln|x|$

ζ) Αν $|yf(x) - xf(y)| \leq |x^3y - 2x^2y^2 + xy^3|$, $x, y > 0$ τότε $f(x) = cx$

3. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 0$ και

$$f(xy) = f(x) + f(y) + α(x - 1)(y - 1),\ x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η $g(x) = f(x) - α(x\ln x)$, $x > 0$ είναι σταθερή

γ) Να βρείτε την $f(x)$

4. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$ για την οποία ισχύει

$$f(x-y)=f(x)f(y)+\eta\mu x\cdot\eta\mu y \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=1$

β) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$

49. Μονοτονία συνάρτησης με χρήση πρώτης παραγώγου

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^3+3x^2+6x+1$ β) $f(x)=2x^3-3x^2$

2. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{4x^2+1}{x}$$

3. Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-1}$$

4. Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$e^{2f(x)}+e^{f(x)+1}+f(x)-2e^2=x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

5. Να βρείτε την μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}x-\eta\mu x, & x\le 0\\ x+\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\le 3\\ 2x-3, & x>3\end{cases}$

6. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}x(\ln x-1), & 0<x\le e\\ x^2-2\ln x, & x>e\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$

7. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+3x^2+x+1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

β) $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x$

γ) $f(x)=2\ln x-x^2$

δ) $f(x)=\ln(-x^2+4x-3)$

ε) $f(x)=e^{x^3-3x^2}$

στ) $f(x)=e^x(x^2-7x+11)$

2. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{x-2}{x+1}$ β) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

γ) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ δ) $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x-2}$

ε) $f(x)=x^2\cdot e^{1-x}$ στ) $f(x)=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-1}$

3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)>0$ και

$$f^3(x)+\ln(f(x))+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^2)$.

4. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3, & x\le 2\\ -x^2+6x+5, & x>2\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+2, & x\le 4\\ -2x^2+16x+3, & x>4\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}e^x(x-3), & x\le 2\\ x^3-3x^2+1, & x>2\end{cases}$

δ) $f(x)=(2-x)\cdot|x-2|+2x-1$

5. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}x-\eta\mu x, & x\le 0\\ x+\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}2x+\sigma\upsilon\nu x, & x\le 0\\ e^x(x^2-5x+7), & x>0\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}2x^3+3x^2-1, & x\le 1\\ x\ln x-2x, & x>1\end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases}-e^{1-x}(x^2+x+1), & x\le 1\\ x^2-8\ln x-5, & x>1\end{cases}$

6. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+3, & x\le 2\\ \beta x^2-3\alpha x-5, & x>2\end{cases} \text{ με } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

7. Να προσδιορίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε οι επόμενες συναρτήσεις να είναι γνησίως μονότονες με το αντίστοιχο είδος μονοτονίας:

α) $f(x)=3x^3-\alpha x^2+9x-2$, γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) $f(x)=-x^3+(2\alpha-1)x^2-3x+2$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ) $f(x)=(\alpha-4)x^3-2\alpha x^2-4\alpha x+3$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

8. Να προσδιορίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι επόμενες συναρτήσεις να είναι γνησίως μονότονες με το αντίστοιχο είδος μονοτονίας:

α) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+\alpha^2}$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) $f(x)=2\ln(x^2+\alpha^2)+2\alpha x+3$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

γ) $f(x)=\dfrac{\alpha e^x-(\alpha+1)e^{-x}}{e^x+1}$, γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

9. Να προσδιοριστεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε η $f(x)=\dfrac{x+\alpha}{3x+6}$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-2,+\infty)$.

10. Να προσδιοριστεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε η $f(x)=\dfrac{\alpha^2-1}{x+1}$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-1,+\infty)$.

11. Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha^2x^3-\alpha x^2+x+\alpha-1$$

50. Μονοτονία συνάρτησης με δεύτερη παράγωγο ή βοηθητική συνάρτηση

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=5+x-x^2-e^x$ β) $f(x)=2x\ln x-x^2$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

β) $\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x>0$, για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

γ) η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ (ΣΧ.)

3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=1$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x+\dfrac{f(x)-1}{x}$, $x>0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-2x+2e^x$ β) $f(x)=2e^x-x^2-2x+1$

γ) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+x^2$ δ) $f(x)=5+x-x^2-e^x$

ε) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ στ) $f(x)=\dfrac{1-x}{\ln\sqrt{x}}$

ζ) $f(x)=e^x+x\ln x-(e+1)x$

η) $f(x)=2ex(\ln x-1)-x^2$

θ) $f(x)=x^3-6\sigma\upsilon\nu x-3x^2$

2. Να βρείτε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{e^{x-1}}{x-1}$ β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$

γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-2}$ δ) $f(x)=\dfrac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$

ε) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$, $x\in(0,\pi]$ στ) $f(x)=(x+1)^x$, $x>-1$

3. Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, μία συνάρτηση με $f(1)=0$, $f'(1)=1$ η οποία είναι συνεχής και $f'\uparrow(1,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1}, & x>1\\ 1, & x=1\end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα.

4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln 2)=\ln\dfrac{1}{4}$ και:

$$f'(x)=2e^{-2x-f(x)}-e^{-x-f(x)} \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

51. Μονοτονία συνάρτησης και ρίζες

Θεωρητική εφαρμογή

1. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει μία το πολύ ρίζα.

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+x=1$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

2. Να λυθεί η εξίσωση $\ln\dfrac{x^2+3}{4x}=2\sqrt{x}-\sqrt{x^2+3}$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\ln x-2=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,e)$.

4. Να λύσετε την εξίσωση $5^x+12^x=13^x$.

5. Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x^2=x+1$.

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=f(1)$ και $f'\uparrow\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση

α) $f(x+1)-f(x)=0$ β) $f(e^x)=f(e^x-1)$

7. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta=\beta-\alpha$ για κάθε $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε είναι $\alpha=\beta$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς ρίζα.

α) $\ln x+x=1$ β) $\ln(x+1)+\frac{x-3}{x+2}=-\frac{3}{2}$

γ) $2x\ln x+1=x^2$ δ) $2^x+x^5+x^3+x=1$

ε) $\sqrt{x}+\ln x=1$ στ) $2e^x+2x=x^2+2$

ζ) $e^{2x}+x-1=0$ η) $x^3+\ln(x-1)=8$

θ) $\sqrt{10-x}-\ln x=3$

2. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα.

α) $x^3+2x-1=0$ στο $\mathbb{R}$

β) $2x^7+4x^3+5x-7=0$ στο $\mathbb{R}$

γ) $4\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x=0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

δ) $x^2+x=\eta\mu^2x+1$

ε) $\frac{2x}{x+1}+\ln(1+x)=1$ στο $(0,e-1)$

στ) $\frac{x^2-2}{x+1}+\ln x=0$ στο $(0,+\infty)$

3. Να λύσετε την εξίσωση $e^x=1+\ln(x+1)$.

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu x^2-\sigma\upsilon\nu(2x-1)=2x-1-x^2$

β) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}=e^x$ με $x\ge 0$

γ) $e^{|x|}-e^2=|x|-2$

5. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$, $f^3(x)+\ln f(x)+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η $f\uparrow\mathbb{R}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^2)$

6. Να λύσετε την εξίσωση $x^2=2^x$ στο $(0,+\infty)$.

7. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει

$$\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta=\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*-\left\{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$$

τότε είναι $\alpha=\beta$.

8. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g όταν:

α) $f(x)=2e^{-x}-1$ και $g(x)=e^{-x}+x$

β) $f(x)=x^2+3\ln x$ και $g(x)=1+\ln x$

9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x(x^2+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως αύξουσες

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x^4+2)-f(2x^2+2)=f(x^4+1)-f(x^2+1)$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$$f(e)=\frac{1}{e-1},\ xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x}+f'(x),\ x>1$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(2e^x+\sqrt{x}+1\right)^{e^x+1}=\left(e^x+2\right)^{2e^x+\sqrt{x}}$$

11. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε

$$xf''(x)=4x-f'(x),\ x>0$$

και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=3x-5$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(1,e)$

52. Πρόσημο συνάρτησης – Λύση ανισώσεων – Απόδειξη ανισοτήτων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^x>ex$, $x\in(1,+\infty)$.

2. Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}>\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-1}{\sigma\upsilon\nu\beta-1}$ με $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$.

3. Έστω οι συναρτήσεις f, g, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f'(x)<g'(x)+\alpha$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=g(0)$. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f(x)<g(x)+\alpha x \text{ για κάθε } x>0$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

α) $\ln(x+1)<x$, $x\in(0,+\infty)$

β) $2\sigma\upsilon\nu x\ge 2-x^2$, $x\in[0,+\infty)$

γ) $\frac{x}{x+1}\le\ln(1+x)$, $x\in[0,+\infty)$

δ) $\frac{1}{x+1}<e^x$, $x\in(0,+\infty)$ ε) $\ln x<5\frac{1-x}{1+x}$

στ) $2x^2-8>\eta\mu4-\eta\mu x^2$ ζ) $x^5+47x>48$

η) $x^2+\ln x>1$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) $\ln\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}>\alpha+\beta$ με $0<\alpha<\beta$

β) $\alpha^{\beta-1}>\beta^{\alpha-1}$ με $1<\alpha<\beta$

γ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}>\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$ με $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

δ) $\ln\dfrac{\alpha+1}{\beta+1}>e^{\alpha}-e^{\beta}$ με $0<\alpha<\beta$

ε) $\ln\alpha-\ln\beta>\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$ με $0<\alpha<\beta$

στ) $\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}>\dfrac{3}{2}$ με $1<\alpha<\beta$

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln(x-1)}{\ln x},\ x>2$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι

$$\ln(x-1)\ln(x+1)<\ln^2 x,\ \ x>2$$

4. Να δείξετε ότι $e^x>x^2+1$ για κάθε $x>0$.

5. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x-\ln(x^2+1)$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\dfrac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}<e^{\beta-\alpha}$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^x>x^2+1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $(4x^2+1)e^{-2x}=1$

ε) Να λύσετε την ανίσωση

$$x-2<\ln\frac{(2x-1)^2+1}{x^2+2x+2}$$

στ) Να δείξετε ότι

$$f\left(\ln\left(x^4+1+\frac{1}{x^4+1}\right)\right)<f\left((x^4+1)-x^2\right),\ x\in\mathbb{R}$$

6. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\dfrac{x}{\eta\mu x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\pi)$. Αν είναι $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ τότε:

α) $\dfrac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha}<\dfrac{\beta}{\alpha}$ β) $\dfrac{\beta}{\alpha}\cdot\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$

7. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g, όταν:

α) $f(x)=x^2+7+\ln x$ και $g(x)=8x-7\ln x$

β) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=x-\dfrac{1}{x}$

8. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$ και

$$xf'(x)>2x^2+1 \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>x^2+\ln x$ για κάθε $x>1$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-x^2=\ln x$

9. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f''(x)<1 \text{ για κάθε } x\geq 0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+4}-2}=-4$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)<\dfrac{x^2}{2}$ για κάθε $x>0$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x-3)f(x)=5x-12$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(2,4)$

10. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)<0$. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ και $f(\beta)<f(\gamma)$ τότε να αποδείξετε ότι είναι

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{f(\gamma)-f(\beta)}>\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\beta}$$

11. Αν $f''(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$, $f(1)=1$ να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)<\dfrac{x}{2-x}$

12. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)\leq g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(0)=g(0)$ τότε να αποδείξετε ότι είναι $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x>0$.

13. Αν είναι $f'(x)>2x$ για κάθε $x\in(0,1)$ τότε είναι $f(1)-f(0)>1$. [Λ. Θ.]

53. Σύνολο τιμών και αντίστροφη συνάρτηση

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{x} \text{ στο } (0,1)$$

2. Αν $f'(x)=\ln^2(\eta\mu^2 x)$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ τότε να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το $(f^{-1})'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ στο $(-\infty,-1]$

β) $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$ στο $(0,e-1]$

γ) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x+4$ στο $[1,2]$

δ) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$ στο $(-\infty,-1]$

ε) $f(x)=x^3-9x^2+15x-1$ στο $(-\infty,-1]$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$

β) $f(x)=\ln(-x^2+4x-3)$

γ) $f(x)=x^2+x+1+\ln x$

δ) $f(x)=3^{2-x}-3\cdot 2^x+1$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις αντιστρέφονται και να βρείτε την αντίστροφή τους.

α) $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

β) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

γ) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x-\ln(x^2+1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(f(x)-2017)=0$ έχει μοναδική λύση

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2e^{x-1}-x^2-1)>0$

54. Τοπικά ακρότατα συνάρτησης – Θεώρημα Fermat

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η

$$f(x)=x+\ln(x-\alpha)^2$$

να έχει ακρότατο στο $x_0=-1$.

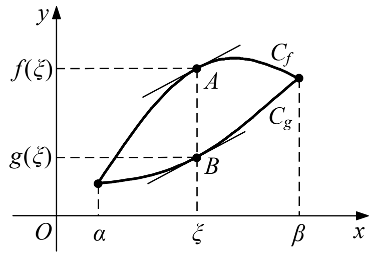
2. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση

$$f(x)=\ln|x|+\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

έχει ακρότατα στο $x=-1$ και $x=1$ τότε ισχύει $\beta^2=4\alpha^2-1$.

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και $f(0)=f(2)<f(1)$ και το $\dfrac{1}{2}$ είναι η μοναδική ρίζα της $f'(x)$ στο $[0,2]$ τότε $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>f(1)$.

4. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.



Το σημείο $\xi\in(\alpha,\beta)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi,f(\xi))$ και $B(\xi,g(\xi))$ είναι παράλληλες. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x+\alpha}{(x-\alpha)^2}$ να έχει ακρότατο στο $x_0=-1$.

2. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ αν η συνάρτηση

$$f(x)=e^x(x^2+\alpha x+\beta)$$

παρουσιάζει ακρότατο στο $x_1=2$ και $x_2=3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \text{ με } \alpha\neq 0$$

Αν τα σημεία στα οποία παρουσιάζει ακρότατα ορίζουν ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων να αποδειχτεί ότι ισχύει: $\beta\gamma=9\alpha\delta$.

4. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\alpha<\beta<\gamma<\delta$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\delta]$ με $f(\gamma)<f(\alpha)<f(\delta)<f(\beta)$ τότε υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\delta)$ με $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(\alpha)<0<f'(\beta)$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=0$ (όμοια $f'(\alpha)>0>f'(\beta)$)

γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(0)=0, f(1)=-1, f(2)=4$, $f(3)=2$ τότε υπάρχει $\xi\in(0,3)$ με $f''(\xi)=0$

δ) Αν $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)+f(\beta)=f(\gamma)$ για $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f'(x_0)=0$

55. Απόδειξη μη ύπαρξης ακρότατου

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι δεν έχει ακρότατα η
$$f(x)=-x^3+3x^2-5x+11$$

2. Να αποδείξετε ότι δεν έχει ακρότατα η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:
$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (\Sigma X.)$$

3. Έστω συνάρτηση
$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \text{ με } \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0$$
Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατο αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2\leq 3\alpha\gamma$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι δεν έχουν ακρότατα οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=2x^3-3x^2+4x-10$

β) $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln x+1}$

2. Να αποδείξετε ότι δεν έχουν ακρότατα οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει:

α) $f^3(x)+f(x)=x^3+3x^2+4x+30$

β) $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=2\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}$ με $x\neq 0$

γ) $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=x^3+2x^2+2x+1$

δ) $f^3(x)+3f(x)=x^3-3x^2+3x+1$

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες δεν έχει τοπικό ακρότατο η συνάρτηση
$$f(x)=x^3-(\alpha-1)x^2+(\alpha+5)x+1$$

56. Απόδειξη ισότητας από ανισότητα

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Αν ισχύει $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\geq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\beta\gamma=1$.

2. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f(1)=1$ και τέτοια ώστε
$$2f(x)+e^{x-1}\geq \ln x+x^2-2x+4 \text{ για κάθε } x>0.$$
Να βρείτε το $f'(1)$.

3. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)=|\eta\mu\alpha x-3x|$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Αν ισχύει $x^\alpha\geq\alpha^x$ για κάθε $x>0$ με $\alpha>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ αν ισχύει
$$x-\alpha\sqrt{x}\ln x\geq 1 \text{ για κάθε } x>0$$

3. Να βρείτε το $f'(1)$ αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει $x\ln x+1\geq f(x)$, $x>0$ και $f(1)=1$.

4. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $(\eta\mu\alpha)^{x-1}+(2\sigma\upsilon\nu\alpha)^{\ln x}\geq 2,\ x>0,\ \alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τότε $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

β) Αν $2^x+3^x+\alpha^x-5^x-6^x\leq 1,\ \alpha>0$ τότε $\alpha=5$

γ) Αν $f(x)\leq e^x+\ln(x^2+1)$, f παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε $f'(0)=1$

δ) Αν $x^\alpha\leq\alpha^x,\ x>0,\ 0<\alpha\neq 1$ τότε $\alpha=e$

ε) Αν $\alpha^{\frac{\ln x}{x}}+e^{\frac{x-1}{x}}\leq 2,\ x>0,\ \alpha,\beta>0$ τότε $\alpha\beta=1$

στ) Αν $\dfrac{\alpha^{3x}+1}{\beta^{2x}+\gamma^x}\geq 1,\ x\in\mathbb{R},\ 0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1$ τότε $\alpha^3=\beta^2\gamma$

ζ) Αν $\alpha^x+\beta^x+\gamma^x\geq 2+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ τότε $\alpha\beta\gamma=1$

η) Αν $3+xf(x)\leq g(x)\eta\mu(2x)+3^{x+1}$ και οι f,g είναι παραγωγίσιμες για κάθε $x\in(-\alpha,\alpha)$ τότε $f(0)-2g(0)=3\ln 3$

θ) Αν $(\alpha\beta)^x+\beta^{-x}+(\beta\gamma)^x\geq 3\beta^x,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta,\gamma>0$ τότε $\beta^2=\alpha\gamma$

ι) Αν f,g παραγωγίσιμες, $f(0)+2=g(0)$ και
$$f(x)+2e^{-x}\geq g(x)+\ln(x+1),\ x>-1$$
τότε $f'(0)=g'(0)+3$

5. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και
$$f(x)+f(2x)\leq 2e^{\eta\mu 3x}-2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$
Να βρείτε:

α) την $f'(0)$

β) το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)}{\eta\mu^2 x}$

6. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=3$ και $g(0)=0$ για τις οποίες ισχύουν
$$f(x)\leq x^2+2x+3 \text{ και } f(x)e^{g(x)}\leq e^x+7x+2$$
για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στο $x_0=0$ είναι παράλληλες.

7. Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^x+2\beta^x\leq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\alpha\beta^2=1$ και ότι $\alpha=\beta=1$.

57. Εύρεση τοπικών ακροτάτων συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των πολυωνυμικών συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

β) $f(x)=x^3-x^2+3x-4$

2. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των ρητών συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-3}$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+3x+1}$

3. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων της

$$f(x)=\sqrt{8-x^2}$$

4. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi]$

β) $f(x)=\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in[0,\pi)$

5. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ β) $f(x)=x^2e^{-x}$

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 \text{ με } \alpha<\beta<\gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα. (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=-x^3-6x^2-9x-3$

β) $f(x)=x^4-8x^2+8$

γ) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x-12$

δ) $f(x)=-x^3+12x^2-5$

2. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x}$ β) $f(x)=\dfrac{x^3+26}{x^2-1}$

γ) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ δ) $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$

3. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$ β) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

γ) $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$

4. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^2-2\ln x$ β) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x}$

γ) $f(x)=e^x-x+3$ δ) $f(x)=3^x+x-1$

ε) $f(x)=e^{2x}-3e^x+x-1$ στ) $f(x)=x\ln x$

ζ) $f(x)=x\ln^2 x-3x+2$ η) $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}-\ln x$

θ) $f(x)=x^2(2\ln x-1)-8x(\ln x-1)$

ι) $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x}-2\sqrt{x}-\dfrac{4}{\sqrt{x}}$

5. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^x+x+\sigma\upsilon\nu x$ β) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$

γ) $f(x)=2x-x^2-2\eta\mu x$

6. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=x+e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)-2\eta\mu x$, $x\in(-\pi,\pi)$

β) $f(x)=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu x$, $x\in(0,\pi)$

γ) $f(x)=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x}e^x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

7. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)-2x(\ln x-1)$$

α) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

58. Εύρεση ακροτάτων σε κλειστό διάστημα και σε πολλαπλή συνάρτηση

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τα ακρότατα της

$$f(x)=x+\ln(\sigma\upsilon\nu x) \text{ στο } \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+7, & x\le 3 \\ 3-5x, & x>3 \end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+3, & x\le 0 \\ x^2-6x+3, & x>0 \end{cases}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τα σημεία των τοπικών ακροτάτων παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=x^3-12x+7$ στο $[0,3]$

β) $f(x)=3\eta\mu^2 x-1$ στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$

γ) $f(x)=x^3-3x+7,\ x\in[0,2]$

δ) $f(x)=|x^2-x|$

ε) $f(x)=\dfrac{\alpha-|x|}{\alpha+|x|},\ \alpha>0$

στ) $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+3, & x\le 0\\ x^2-6x+3, & x>0\end{cases}$

ζ) $f(x)=\begin{cases}x^3-12x+3, & x\le 3\\ x^2-8x+6, & x>3\end{cases}$

η) $f(x)=\begin{cases}1+2x^2-x^4, & x<2\\ x^2-6x+7, & x\ge 2\end{cases}$

59. Προσδιορισμός παραμέτρων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση

$f(x)=-x^3-3\alpha x^2-(\beta+3)x-\alpha-1$, $x\in\mathbb{R}$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατα στα $x=-1$ και $x=-3$

β) Να βρείτε το είδος των τοπικών ακροτάτων

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=e^x(x^2-\alpha x+\alpha+3),\ x\in\mathbb{R} \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε:

i) η f να έχει τοπικό μέγιστο και τοπικό ελάχιστο

ii) η τιμή για την οποία έχει τοπικό ελάχιστο είναι τριπλάσια από την τιμή για την οποία έχει τοπικό μέγιστο

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^3-\alpha^2x^2+5\alpha x+\alpha$, $x\in\mathbb{R}$ να έχει ακρότατο στη θέση $x=5$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+x$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η συνάρτηση να παρουσιάζει ακρότατα στα $x=1$ και $x=\frac{1}{2}$

β) Να βρείτε το είδος των τοπικών ακροτάτων

3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln(x-1)-\beta x^2-4x+1$, $x\in\mathbb{R}$, $x>1$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=3$.

4. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x+\beta x^2+x$, $x\in\mathbb{R}$, $x>0$ να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=\frac{1}{2}$.

5. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x^2+1}$, $\beta>0$, $x\in\mathbb{R}$ να έχει ελάχιστο το -1 και μέγιστο το 4.

6. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^3-2(\alpha-1)x^2+(10-\alpha)x-3$ να έχει τοπικό μέγιστο σε θετικό σημείο.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^2-\alpha-\sqrt{x^2-4x+8}$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει μέγιστο

β) Να βρείτε την τιμή του α όταν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 0

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^3+3x^2-12x+\alpha^2-16$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του α αν το άθροισμα του τοπικού μέγιστου και του τοπικού ελάχιστου είναι -1.

9. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{x^2+\alpha x+\beta}$ να έχει ακρότατο στη θέση $x=2$ και η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

10. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x^2+\alpha^2-\alpha$, $x\in\mathbb{R}$ να έχει τοπικό μέγιστο αντίθετο από το τοπικό ελάχιστο.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln x-x^2$ με $\alpha\in\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$.

α) Να βρείτε την τιμή του α

β) Να λύσετε την ανίσωση

$$(3|x|+1)^2-(|x|+9)^2<2\ln\frac{3|x|+1}{|x|+9}$$

12. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,3)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x)-x^2f(x)=-2x^3+4x^2$ για κάθε $x\in(0,3)$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in(0,3)$ να βρείτε το x_0.

60. Το ελάχιστο (μέγιστο) παίρνει μέγιστη (ελάχιστη) τιμή

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\alpha x+\alpha$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης να πάρει την μέγιστη τιμή του.

2. α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=e^x-\lambda x,\ \lambda>0,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει $e^x\ge\lambda x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Για την τιμή του λ που θα βρείτε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=e^x$ (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}\cdot e^{\alpha-x}$ με $x>0$ και $\alpha>0$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α ώστε το μέγιστο της συνάρτησης να πάρει την ελάχιστη τιμή του.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+8\alpha-\alpha^2$ με $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης να πάρει την μέγιστη τιμή του.

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}+1-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την μέγιστη τιμή της f

β) Να βρείτε το ελάχιστο λ, ώστε $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Αν $\lambda>\frac{1}{e}+1$ τότε η $g(x)=(1-\lambda)x-\frac{x+1}{e}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\lambda x+1$, $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f

β) Να βρείτε την μεγαλύτερη τιμή του λ, για την οποία ισχύει $x\ln x\ge\lambda x-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β) να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x-1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=x\ln x$

61. Εξισώσεις με μοναδική λύση στο ακρότατο

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{\sigma\upsilon\nu x}=\sigma\upsilon\nu x+1$, $x\in[0,\pi]$.

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\ne 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$

3. α) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln x+x-1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $\varphi(x)=2x\ln x+x^2-4x+3$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x\ln x \text{ και } h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=(x-3)e^{x-1}+\kappa x+2,\ \kappa>1,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\ge\kappa-1$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\kappa$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x^{2\nu+1}+\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \nu\in\mathbb{N}^*$$

α) Αν $\alpha>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\nu=1$, $\alpha=-3$, $\beta<-2$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu x=1-\frac{x^2}{2}$

β) $(x^2+1)^{x^2+1}=e^{x^2}$

γ) $e^{x^2}-e^{2x^2}=\ln\frac{x^2+1}{2x^2+1}$

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2xe^{2x}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

5. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=-x^2-2x+2e^x-2,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h(x)=2e^x-2x \text{ και } \varphi(x)=x^2+2$$

δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε το διάστημα που η C_h είναι κάτω από τη C_φ

62. Απόδειξη ανισοτήτων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $e^x\ge 1+x$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι για $x>0$ ισχύει:

i) $e^x>1+x$

ii) $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$

2. Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+x^2 \text{ και } g(x)=\frac{2ex}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι $2xe^{-x}-2\sigma\upsilon\nu x\le x^2$, $x\in\mathbb{R}$

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ είναι:

α) $x\ln x\ge x-1$

β) $x^2\ge 1+2\ln x$

γ) $e^x\ge x^e$

δ) $4e^{2x}>4+x^2$

ε) $x^x\ge e^{x-1}$

στ) $ex^{ex}\ge 1$

2. Να αποδείξετε ότι για τα αντίστοιχα x ισχύει:

α) $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\ge 2$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

β) $e^x\ge 1+\ln(1+x)$, $x>-1$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

α) $e^x+e^{-x}\ge x^2+2$

β) $(1-x)e^x\le 1$

4. Έστω οι συναρτήσεις

$f(x)=e^{1-x}\cdot x$ και $g(x)=2\eta\mu x+(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι $e^{1-x}\cdot x-2\eta\mu x\le(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

63. Πλήθος ριζών εξίσωσης με σύνολο τιμών

Ασκήσεις Α′ ομάδας

1. Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x+1=e^x$.

2. α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+\alpha$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο $[-1,1]$

γ) Αν $-2<\alpha<2$, να αποδείξετε ότι έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1,1)$ η εξίσωση $x^3-3x+\alpha=0$ (ΣΧ.)

3. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x=e^{\alpha x}$, $x>0$,

Ασκήσεις Β′ ομάδας

1. Να βρείτε το $f(A)$ των συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$

β) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x}$

γ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}}$

δ) $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\sqrt{-x^2+4x+5}$

β) $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+3, & 1\le x\le 3\\ x^2-2x-3 & 3\le x\le 5\end{cases}$

γ) $f(x)=\sqrt{1-x}-\ln x+2$

δ) $f(x)=\begin{cases}2x^3+3x^2-7, & -2\le x\le 1\\ x\ln x-2x, & 1\le e^x\end{cases}$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν μοναδική λύση:

α) $f(x)=\ln x+e^x=1-x$

β) $f(x)=x^3-6x^2+12x+\ln x-2010$

γ) $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}-x+\ln x$ στο $(0,1)$

4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων:

α) $x^3-9x=4-3x^2$

β) $4\eta\mu x+3x^2-4x=2016$

γ) $\ln(e^x-x)=\sigma\upsilon\nu x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

5. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$:

α) $e^{x^3+2}=\lambda e^{3x^2}$ β) $x^2=\alpha e^x$

6. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x+x$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1–1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της g^{-1}

β) Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$ για κάθε $x>0$

i) Να βρείτε τον τύπο της f

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)\cdot f\left(\frac{e}{x}\right)=-2010$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$

7. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(e^{-x})=f(x+\alpha)$.

8. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1,1)$ η εξίσωση $f(x^3+\alpha)=f(3x)$.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)-3)=2$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

10. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$, με $x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x$, $\lambda>0$. Να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της C_f και της ε για τις διάφορες τιμές του λ.

11. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=\alpha x$, $\alpha>0$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=(x-1)e^x$ ακριβώς δύο κοινά σημεία

64. Θεωρητικές εφαρμογές

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με μέγιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$ το $f(\alpha)$. Δείξετε ότι $f'(\alpha)\le 0$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x)\neq 0$ και $f(x)=f(2-x)$ για κάθε $x\in[0,2]$ και $f(0)<f(1)$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0,2]$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με τοπικό μέγιστο στο x_0. Αν είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

2. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με τοπικό ακρότατο το $f(0)=0$. Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>f''(x)$ τότε να αποδείξετε ότι για κάθε $x<0$ ισχύει $f(x)<f'(x)$.

3. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και μία ρίζα x_0 της $f(x)$ που δεν είναι ρίζα της $f'(x)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f^2(x)$ έχει στη θέση x_0 τοπικό ελάχιστο.

4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $f'(x)>f(x)$ και ότι $f(x_0)=0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>f(x_0)$ για όλα τα $x>x_0$.

(Εξετάσεις Πανεπιστημίου Berkeley 1977, 1982)

65. Προβλήματα ακροτάτων σε συναρτήσεις, αποστάσεις, ταχύτητες

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x)=-x^3+6x^2-9x+1$$

η εφαπτομένη έχει το μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης;

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ να είναι το πλησιέστερο στο $B(2,0)$.

3. Η θέση ενός κινητού σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$x=s(t)=t^4-8t^3+18t^2-16t+38,\ 0\le t\le 7$$

α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού

β) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

γ) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά;

δ) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

4. Έστω δύο θετικοί αριθμοί x,y. Αν ισχύει $3x+y=4$ τότε να βρείτε τις τιμές των x,y για τις οποίες το $x^3\cdot y^2$ γίνεται ελάχιστο.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω δύο θετικοί αριθμοί x,y. Αν ισχύει $x+y=6$ τότε να βρείτε τις τιμές των x,y για τις οποίες το άθροισμα x^2+xy+y^2 γίνεται ελάχιστο.

2. Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από την αρχή των αξόνων Ο και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού είναι $x'(t)=4m/s$, $t\ge 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$, όπου $\Pi(0,1)$ γίνεται ελάχιστη.

3. Η θέση ενός κινητού σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$x=s(t)=t^4-12t^3+48t^2-80t+1,\ 0\le t\le 6.$$

α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού

β) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

γ) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά;

δ) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

4. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y=-2x+4$.

α) Να βρείτε τα σημεία Κ και Λ στα οποία η ευθεία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα β) Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, από το οποίο φέρουμε τις ΜΑ και ΜΒ κάθετες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να βρείτε το σημείο Μ (δηλαδή τα x και y) ώστε το ΟΑΜΒ να έχει μέγιστο εμβαδόν, όπου Ο η αρχή των αξόνων

5. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^x \text{ και } g(x)=\sqrt{x}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η C_f είναι πάνω από τη C_g

β) Υπάρχουν μοναδικά σημεία Α, Β των C_f, C_g αντίστοιχα με κοινή τετμημένη $\alpha \in (0,1)$, ώστε η κατακόρυφη απόσταση (AB) μεταξύ των C_f και C_g να παίρνει την μικρότερη τιμή

γ) Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\alpha,g(\alpha))$ είναι παράλληλες

66. Προβλήματα ακροτάτων στην Γεωμετρία

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα να βρείτε αυτό που έχει:
α) μεγαλύτερο εμβαδόν β) μεγαλύτερη περίμετρο

2. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερό εμβαδόν να βρείτε αυτό που έχει τη μικρότερη:
α) διαγώνιο β) περίμετρο

3. Έστω ημικύκλιο διαμέτρου $AB=3\sqrt{2}$ cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του εγγεγραμμένου ορθογωνίου ΚΛΜΝ που έχει την πλευρά του ΚΛ πάνω στη διάμετρο και έχει μέγιστο εμβαδόν.

4. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο $A(\alpha,\beta)$ του 1ου τεταρτημορίου. Μία ευθεία ε διέρχεται από το Α και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα p και q αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $p+q$ είναι ίση με $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^2$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

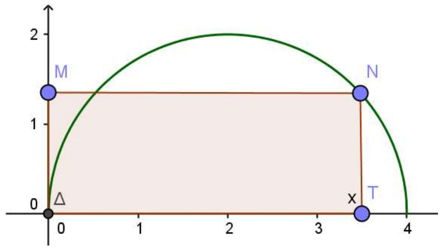
1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma=4\sqrt{3}$ cm και ύψος $A\Delta=8$ cm. Να βρείτε σημείο Μ στο ύψος ΑΔ ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τις κορυφές του τριγώνου να είναι ελάχιστο.

2. Δίνεται τετράγωνο με πλευρά α. Να εγγραφεί ισοσκελές τρίγωνο με την κορυφή του να συμπίπτει με μία κορυφή του τετραγώνου τέτοιο ώστε να έχει το μέγιστο εμβαδόν. Ποιο είναι το μήκος της βάσης του;

3. Δίνεται ένα ισοσκελές τραπέζιο. Η μικρή βάση και κάθε μία από τις δύο μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες με α. Να βρείτε την κλίση φ των ίσων πλευρών ως προς την μικρή βάση ώστε το τραπέζιο να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

4. Έστω ημικύκλιο με διάμετρο $AB=2R$. Έστω Μ τυχαίο σημείο της ΑΒ. Γράφουμε δύο ημικύκλια διαμέτρων ΑΜ και ΜΒ αντίστοιχα εσωτερικά του αρχικού ημικυκλίου. Να βρείτε το μήκος ΑΜ ώστε η επιφάνεια μεταξύ των τριών ημικυκλίων να είναι μέγιστη.

5. Το ημικύκλιο του σχήματος έχει διάμετρο 1 και το Μ είναι μεταβλητό σημείο του. Να βρείτε το x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΜΝΤ να είναι μέγιστο.



(πρόβλημα του Johann Bernoulli)

67. Προβλήματα ακροτάτων στην Οικονομία

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Η ωριαία κατανάλωση καυσίμων ενός τρένου είναι

$$K(x)=20+0{,}02x^2 \text{ €}$$

όπου x η ταχύτητά του σε Km/h. Τα υπόλοιπα έξοδα κίνησης ανέρχονται σε 30 € την ώρα. Να βρείτε την ταχύτητα του τρένου για διαδρομή 500 Km ώστε να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος.

2. Η ναύλωση μιας κρουαζιέρας απαιτεί συμμετοχή τουλάχιστον 100 ατόμων. Αν δηλώσουν ακριβώς 100 άτομα, το αντίτιμο ανέρχεται σε 1.000 € / άτομο. Για κάθε επιπλέον άτομο το αντίτιμο ανά άτομο μειώνεται κατά 5 €. Πόσα άτομα πρέπει να δηλώσουν συμμετοχή για να έχουμε τα περισσότερα έσοδα; (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Σε ένα αμπέλι, η παραγόμενη ποσότητα στα-φυλιών $T(E)$ (σε εκατοντάδες κιλά) δίνεται από τη σχέση

$$T(E)=\frac{3}{4}E^2-\frac{\alpha E^2}{6},\ \frac{1}{6}\le\alpha<2$$

όπου Ε ο αριθμός των αποσχολούμενων εργατών και α παράμετρος εξαρτώμενη από διάφορους παράγοντες (π.χ. ποιότητα εδάφους, λίπανση κ.λπ.).
α) Να βρείτε μέχρι πόσοι εργάτες πρέπει να εργάζονται στην καλλιέργεια ώστε να έχουμε αύξηση του παραγόμενου προϊόντος
β) Να βρείτε μέχρι πόσοι εργάτες πρέπει να εργάζονται ώστε η παραγόμενη ποσότητα να αυξάνει με αύξοντα ρυθμό
γ) η μέγιστη ποσότητα παραγόμενων σταφυλιών, έστω $\Sigma(\alpha)$. Για ποια τιμή του α η $\Sigma(\alpha)$ γίνεται μέγιστη;

2. Μια βιομηχανία μπορεί να διαθέσει στην αγορά 30.000 μηχανήματα δικής της εφεύρεσης σε όποια τιμή θέλει. Αν η τιμή του μηχανήματος είναι x ευρώ θα ζητηθούν $100(400-x)$ μηχανήματα από τους καταναλωτές. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η τιμή ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος και πόσα μηχανήματα θα πουλήσει.

3. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$f(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}},\ \text{με } t\geq 0,\ \text{όπου } A>0$$

Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$ από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση

$$k'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{1}{7}}\ \text{ με } t\geq 0.$$

Υποθέτουμε ότι $K(0)=0$. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν, συν την αξία της μηχανής, να γίνεται μέγιστο.

68. Κυρτότητα συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=-x^4+2x^3-x+3$ είναι κυρτή ή κοίλη.

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x^2+1, & x\leq 1\\ x^3-6x^2+8, & x>1\end{cases}$ είναι κυρτή ή κοίλη.

3. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η

$$f(x)=x^4-2\alpha x^3+6x^2+\alpha-1$$

4. Να αποδείξετε ότι για $\alpha\in(-2,2)$ η συνάρτηση $f(x)=x^4-2\alpha x^3+6x^2+2x+1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

(ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες.

α) $f(x)=-x^3+3x^2+1$ β) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x}$

γ) $f(x)=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^4}{12}-3x+1$ δ) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

ε) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ στ) $f(x)=e^x(x^2+1)$

ζ) $f(x)=\ln(x^2+1)$ η) $f(x)=x\ln\dfrac{1}{x}$

ι) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3}{4}x^2,\ x>0$ κ) $f(x)=x^x$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3(x-\gamma)^4\ \text{ με } \alpha<\beta<\gamma$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{2}{x-\alpha}+\dfrac{3}{x-\beta}+\dfrac{4}{x-\gamma}$

β) Η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ είναι κοίλη στα (α,β) και (β,γ)

3. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=g(e^x\text{συν}x)$$

Αν η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g'(x)>0$, $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

β) η f είναι κυρτή στο $[\pi,2\pi]$

4. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες.

α) $f(x)=\begin{cases}-3x^2-x^3, & x<0\\ 6x^2-x^3, & x\geq 0\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{2-x}, & x\leq 2\\ \sqrt{x-2}, & x>2\end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases}x^2+4x+3, & x\leq 0\\ x^2-2x+3, & x>0\end{cases}$

5. Για ποια $\alpha\in\mathbb{R}$ οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κοίλες στο $\mathbb{R}$;

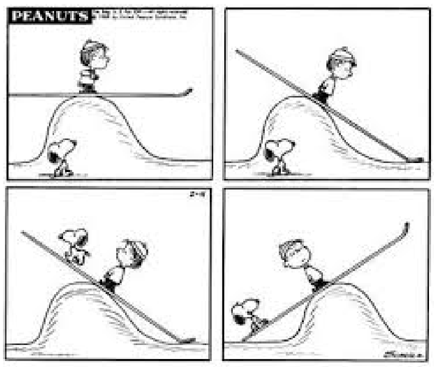
α) $f(x)=-x^4+2\alpha x^3-6x^2+3x-1$

β) $f(x)=-2x^4+4\alpha x^3-3(8\alpha-7)x^2+3$

6. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές στο $\mathbb{R}$;

α) $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\alpha x^3+2x^2+5$

β) $f(x)=2x^4-4(\alpha-1)x^3+9(\alpha-1)x^2+1$



69. Ιδιότητες κυρτών – κοίλων συναρτήσεων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M(-1,e)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα

γ) Να δείξετε ότι $f(x)\geq -3ex-2e \quad x\in\left(-\infty,2-\sqrt{2}\right]$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln x)$.

α) Να βρείτε το A_f

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο A_f

γ) Αν $\alpha,\beta\in A_f$ τότε $\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\geq\sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\beta}$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση με ρίζες x_1,x_2 ($x_1<x_2$). Να δείξετε ότι $f(x)<0$, $x\in(x_1,x_2)$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. α) Να αποδείξετε ότι $e^x>2x$, $x\in\mathbb{R}$

β) i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=e^x-\frac{x^3}{3}-1$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=0$ και να αποδείξετε ότι $e^x\geq\frac{x^3}{3}+x+1$, $x\in\mathbb{R}$

2. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, κυρτή με ακρότατο στο x_1. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

3. Έστω η συνάρτηση f, κοίλη σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι: $\left(\frac{1}{x}\right)^x\left(\frac{1}{6-x}\right)^{6-x}<\frac{2}{27}$, $x\in(1,5)$.

4. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(e^\alpha+2\right)^\nu+\left(e^{-\alpha}+2\right)^\nu>2\cdot3^\nu$, $\alpha\neq0$, $\nu>1$, $\nu\in\mathbb{N}$

β) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\leq\sqrt{\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta}$, $\alpha,\beta>0$

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\left(f'(x)\right)^2+f''(x)>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η $g(x)=e^{f(x)}$ είναι κυρτή

β) Αν $\alpha\neq\beta$ τότε $e^{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}<\frac{e^{f(\alpha)}+e^{f(\beta)}}{2}$

70. Απόδειξη ανισοτήτων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και κυρτή με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

$$2f(x)>3f\left(\frac{2x}{3}\right) \text{ για } x>0$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$ και $B(4,8)$. Αν η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι:

α) $f'(4)>3$ β) $f(3)<5$

2. Έστω η συνάρτηση f. Να αποδείξετε ότι

α) αν η f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ τότε:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\geq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),\ x_1,x_2\in\Delta,$$
$$\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_1+\lambda_2=1$$

β) αν η f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leq\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),\ x_1,x_2\in\Delta,$$
$$\lambda_1,\lambda_2>0,\ \lambda_1+\lambda_2=1$$

3. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη και κυρτή με $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)>\frac{4}{3}f\left(\frac{3x}{4}\right)$ για $x>0$

β) $f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{f(x)}{2}$ για $x>0$

4. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε

$$\nu f(x)>(\nu+1)f\left(\frac{\nu x}{\nu+1}\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

5. Έστω η συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[0,4]$ με $f(1)=f(2)=0$ και η f στρέφει τα κοίλα πάνω στο $(0,4)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)\cdot f(4)>0$

β) η f έχει ελάχιστο στο $(0,4)$

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\ln x-x-\frac{1}{x}+2,\ x>0$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη

β) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f στο $x_0=1$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^x<e^{2x^2-3x+1}$ στο διάστημα $(0,+\infty)$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha),\ \alpha>0$$

έχει μοναδική λύση

71. Σημεία καμπής συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες καθώς και τα σημεία καμπής τους (αν υπάρχουν).

α) $f(x)=x^4-6x^2$ β) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5, & x\le 0 \\ x^3-6x^2+5, & x>0 \end{cases}$$

είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.

3. Να βρείτε τα α, β ώστε η

$$f(x)=x^4-\alpha x^3+\beta x^2+2$$

να παρουσιάζει σημείο καμπής στα $x_1=1$, $x_2=2$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες καθώς και τα σημεία καμπής τους (αν υπάρχουν).

α) $f(x)=\dfrac{x^5}{20}-\dfrac{x^3}{6}$ β) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

γ) $f(x)=xe^{-x^2}$ δ) $f(x)=(1+x^2)e^{-x}$

ε) $f(x)=\dfrac{1}{4}e^{2x}-3e^x+2$ στ) $f(x)=x^2\ln x$

ζ) $f(x)=x^4-6x\ln x^2-12$ η) $f(x)=\ln(\ln x)$

θ) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}$

ι) $f(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{x^2}{2}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες καθώς και τα σημεία καμπής τους.

α) $f(x)=\begin{cases} x^2+5, & x\le 0 \\ x^3-6x^2+5, & x>0 \end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases} x^3+6x^2-2, & x\le 1 \\ x^3-9x^2+13, & x>1 \end{cases}$

γ) $f(x)=\begin{cases} -3x^2-x^3, & x\le 0 \\ 6x^2-x^3, & x>0 \end{cases}$

δ) $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+3x-1, & x\le 2 \\ (x-3)^5+2, & x>2 \end{cases}$

3. Έστω η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+3, & x<1 \\ \dfrac{\alpha}{x}-\beta x+1, & x\ge 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=2$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις θέσεις των σημείων καμπής της f

4. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}^*$ αν η $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}\ln\dfrac{x}{\alpha}$ παρουσιάζει καμπή στο $x_0=1$.

5. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σημείο $A(1,3)$ να είναι σημείο καμπής της

$$f(x)=(\mu-5\lambda)x^3+(17\lambda-4\mu)x^2$$

6. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+(\alpha-1)x-2$$

Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=1$ και καμπή στο $x_2=\dfrac{1}{2}$.

7. Αν η συνάρτηση f με

$$f(x)=x^5+5\alpha x^4+10\beta x^3+x^2+x+1$$

παρουσιάζει τρία σημεία καμπής, να δείξετε ότι $\alpha^2>\beta$.

8. Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ με $\alpha\in(0,1)$ και η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha^x-x \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

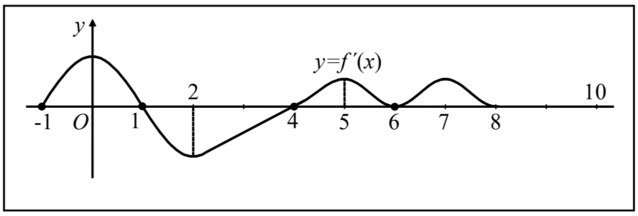
β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ γα τις οποίες ισχύει

$$\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\lambda^2-\lambda-2$$

72. Γεωμετρική προσέγγιση κυρτότητας και σημείων καμπής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης f στο διάστημα $[-1,10]$.

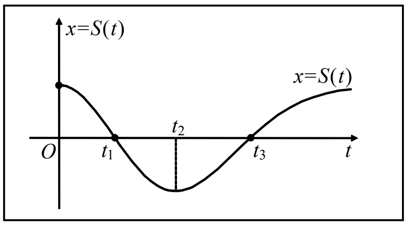


Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής.**(ΣΧ.)**

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C της συνάρτησης θέσεως $x=S(t)$ ενός κινητού που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν η C παρουσιάζει καμπή τις χρονικές στιγμές t_1 και t_3, να βρείτε:

α) Πότε το κινητό κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική φορά;

β) Πότε η κίνηση του κινητού είναι επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη; **(ΣΧ.)**



3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x-x$, $x>0$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-1}=\dfrac{1}{x}$

γ) Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f προς την ευθεία $\varepsilon: y=-x-1$ και την ελάχιστη απόσταση των σημείων της C_f από την ευθεία ε

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι κυρτή και η ευθεία $y=1$ τέμνει τη C_f στα σημεία A, B με τετμημένες x_1, x_2 ($x_1<x_2$) αντίστοιχα. Να δείξετε ότι

$$f(x)<1,\ x\in(x_1,x_2)$$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln(\ln x)$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=e$

γ) Να δείξετε ότι $\ln(\ln x)\le\dfrac{x}{e}-1$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $e\ln x-e^{\frac{x}{e}}=0$ στο $(1,+\infty)$

ε) Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της C_f προς την ευθεία $\zeta: x-ey=0$

73. Κυρτότητα, σημεία καμπής και συναρτησιακές σχέσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)\ge 2f'(x), x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{-x}\cdot f(x)$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$$\left[f'(x)\right]^3+\left[f'(x)\right]^2+f'(x)=e^x+x^2-x-1\quad x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) H f δεν έχει τοπικό ακρότατο

β) H C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$\left[f'(x)\right]^3+\left[f'(x)\right]^2+f'(x)=e^x+x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι:

α) υπάρχει ακριβώς ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f με οριζόντια εφαπτομένη

β) η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής

γ) η f έχει ένα τοπικά ακρότατα

2. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Αν $f'(0)=3$ να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

3. Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε

$$f^3(x)+f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της f και να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα

β) Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x}{f(x)-x}$

74. Συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα σημεία καμπής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει τρία σημεία καμπής

β) Να αποδείξετε ότι τα τρία σημεία είναι συνευθειακά

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας από την οποία διέρχονται τα τρία παραπάνω σημεία

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$. Να δείξετε ότι η C_f έχει τρία σημεία καμπής τα οποία είναι συνευθειακά.

2. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ x\in\mathbb{R}$$

x_1 και x_2 οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της και x_0 η θέση του σημείου καμπής της. Να αποδείξετε ότι

$$x_1+x_2=x_0$$

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^3-3x^2+3$. Να δείξετε ότι η ευθεία που ορίζεται από τα δύο σημεία τοπικών ακροτάτων διέρχεται από το σημείο καμπής της .

4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x+\eta\mu x$ έχει άπειρα σημεία καμπής που ανήκουν στη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων.

75. Συναρτήσεις που δεν έχουν σημεία καμπής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να δείξετε ότι δεν έχει κανένα σημείο καμπής η

$$f(x)=x^4-2\alpha x^3+6\alpha^2x^2+3\alpha \text{ με } \alpha\ne0$$

2. Έστω f μία συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ για την οποία ισχύει

$$f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής
β) Για ποιο λόγο ορίζουμε την f δύο φορές παραγωγίσιμη ακριβώς στο $(-2,2)$; (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x)\cdot f''(x)=1$ για κάθε $x\geq 1$. Να αποδείξετε ότι:
α) Η C_f δεν έχει σημεία καμπής
β) Αν $f(1)=1$ τότε η f είναι κοίλη στο $[1,+\infty)$

2. Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)=x^2-2x$ για κάθε $x\leq 0$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.

3. Έστω η συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f^2(x)+(x-4)f(x)+x=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(0)=1 \text{ και } f(x)\cdot f'(x)=e^{2x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:
α) η f δεν έχει τοπικά ακρότατα
β) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
γ) η C_f δεν έχει σημεία καμπής

5. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$$f^2(x)+e^x=3f(x)-\alpha^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ με } 0<\alpha\neq 1$$

Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

76. Θεωρητικές εφαρμογές

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
α) αν η f έχει τοπικό ελάχιστο, τότε αυτό είναι ολικό ελάχιστο της f
β) η f δεν έχει περισσότερα από ένα τοπικό ελάχιστο
γ) η f δεν έχει τοπικό μέγιστο
δ) η $g(x)=f(x)+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ δεν έχει μέγιστο

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$ τότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

2. Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι δεν έχει περισσότερα από ένα ακρότατα.

3. Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν έχει μέγιστο στο x_0 τότε είναι σταθερή συνάρτηση.

4. Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και όχι μονότονη στο $[\alpha,\beta]$. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta]$.

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:
- η f'' είναι συνεχής και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)-f'(1)<f(0)$

Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Τα μαθηματικά μας λένε τρεις από τις πιο θλιβερές ιστορίες αγάπης:

Παράλληλες γραμμές: Ποτέ δεν θα συναντηθούν.

Τεμνόμενες γραμμές: Συναντήθηκαν για μία στιγμή και μετά χωρίστηκαν για πάντα.

Ασύμπτωτες γραμμές. Καταδικασμένες να πλησιάζουν όλο και πιο κοντά, αλλά ποτέ να μη φτάσουν η μία την άλλη.

77. Κατακόρυφη ασύμπτωτη γραφικής παράστασης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2-5x+6}$. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτές της.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων.

α) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$ β) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-3}{2-x}\right)$

γ) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$ δ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2+x+2\alpha}{x-\alpha^2}$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $\varepsilon: x=1$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

78. Οριζόντια ασύμπτωτη γραφικής παράστασης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{4x^2+x+1}{2x^2-x-1}$ β) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{2-x}}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2-2}{x+1}$

β) $f(x)=\dfrac{2x-|x-3|}{x+1}$

γ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{x-3}$

δ) $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$

ε) $f(x)=x-\sqrt{x^2-4x+5}$

στ) $f(x)=\dfrac{x\text{συν}x}{x^2+1}$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$

β) $f(x)=\ln(x+1)-\ln x$

3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=3$. Να αποδείξετε ότι και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{xf(x)+x^2\text{ημ}\dfrac{1}{x}}{2x-2011}$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την οποία και να βρείτε.

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\alpha x^3+\beta x^2+4x-6}{x^2-3x+2},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$. Να βρείτε:

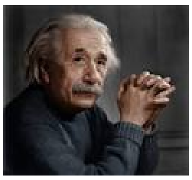
α) τις τιμές των α και β

β) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f

I think 99 times and find nothing,

I stop thinking, swim in silence,

And the truth comes to me.



Albert Einstein

79. Ορισμός πλάγιας ασύμπτωτης γραφικής παράστασης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-2}$.

2. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y=3x-2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\alpha x^2-\beta x+9}{x-3},\ x\neq 3 \text{ όταν } x\to+\infty$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να δείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις έχουν πλάγιες ασύμπτωτες τις αντίστοιχες ευθείες:

α) $f(x)=\dfrac{3x^2+5}{x-1}$, $\varepsilon: y=3x+3$, $x\to-\infty$

β) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}$, $\varepsilon: y=x+2$, $x\to+\infty$

γ) $f(x)=3x+2+\sqrt{x^2-1}$, $\varepsilon: y=4x+2$, $x\to+\infty$

δ) $f(x)=x\left(1+e^{-x}\right)$, $\varepsilon: y=x$, όταν $x\to+\infty$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=2x-1+\ln\left(e^x+1\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-5x+6}{x-1}$. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτές της.

4. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x-1-\dfrac{5}{e^x+2\ln x}$

β) $f(x)=\dfrac{2x^3+4x^2-5x+18}{x^2+3}$

5. Να βρείτε αν υπάρχει την ασύμπτωτη στο $-\infty$ της C_f με $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3+5x^2-7x-2}{x^3-2x^2+7x-6}+e^{x-1}$, $x\neq 1$

6. Α. Να αποδείξετε ότι

$$x^2-2\ln x-1\geq 0 \text{ για κάθε } x>0$$

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$, $x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f. Να βρείτε το σημείο $M\in C_f$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην $y=x$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

7. Να προσδιορίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y=\beta x-1$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{\alpha x^2-8x+7}{2x-3},\ x\neq 3 \text{ όταν } x\to+\infty$$

8. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η C_f με

$$f(x)=\frac{3x^2-5x+7}{x+1}+\alpha x+\beta \text{ για κάθε } x\neq -1$$

έχει την ίδια ασύμπτωτο και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ με την γραφική παράσταση της

$$g(x)=\frac{5x^2-18x+11}{x-3} \text{ για κάθε } x\neq 3$$

80. Θεώρημα πλάγιας ασύμπτωτης γραφικής παράστασης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x^2-2x-7}{x-2}$. Να βρείτε τις πλάγιες ασύμπτωτές της.

2. Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x+x^2}-\lambda x-\mu\right)=0$$

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}, & x<1\\[2mm] \dfrac{6x-2}{3x-9}, & 1\le x\neq 3\end{cases}$$

4. Έστω ότι η ευθεία $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$

β) Να βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ
1. $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$	Α. $y=2$
	Β. $y=x-1$
2. $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}$	Γ. $y=-x+1$
	Δ. $y=x$
3. $f(x)=2+\dfrac{3}{x-2}$	Ε. $y=-x$

2. Η ευθεία $y=2x-4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της C_f. Να δείξετε ότι έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=\frac{f(x)(x-x^2)+2x^3}{2x^2-x+1}$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+7}{x+\gamma}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε η C_f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=1$ και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=2x+3$,

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-1}-x\right)=2$$

5. Αν η ευθεία $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $-\infty$, να βρείτε το λ, ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xf(x)-2x^2+\lambda x-1}{\lambda f(x)-4x+5}=1$

6. Αν η ευθεία $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$ να βρείτε το $\mu\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x}=1$$

7. Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$e^x(1-x)<1$$

Β. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\alpha>\beta>0$ τότε $\alpha(e^\beta-1)<\beta(e^\alpha-1)$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g

8. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+x-1+\eta\mu x}{x+1}$. Να βρείτε:

α) την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

β) τα σημεία τομής της (ε) και της C_f

9. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(3)=g(3)+1$ και

$$f'(x)-g'(x)=2,\ x\in\mathbb{R}$$

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε να βρείτε:

α) την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

β) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)+xg(x)-4x^2}{f(x)+g(x)+\eta\mu x}$

10. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις πλάγιες ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $2x-1\le f(x)\le 2x-1+\dfrac{17}{x^2+21}$, $x\in\mathbb{R}$

β) $\dfrac{3x^2+1}{x}\le f(x)\le 3x+\dfrac{\eta\mu x}{x^2}$, $x>1$

81. Κανόνας De l' Hospital (Απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$ β) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x\cdot\eta\mu x}$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}$ β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$

3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim_{x\to 1}\frac{\alpha e^{2x}+\beta x+\gamma}{(x-1)^2}=2$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^3-8}$ β) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}$

γ) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ δ) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ β) $\lim_{x\to}\frac{x^2+x}{e^x-1}$

γ) $\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x^2-4}$ δ) $\lim_{x\to}\frac{e^x-1}{\eta\mu x}$

ε) $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{\ln(1+x)}$ στ) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\ln x-1}{e^{x-1}-x}$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}$ β) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$

γ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln x}{e^x}$ δ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}$

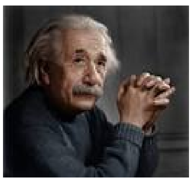
4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sigma\varphi x}$ β) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\eta\mu x)}{\ln(\varepsilon\varphi x)}$

5. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\alpha e^x+\beta\eta\mu x+\gamma x-2\gamma}{x^2}=1$$

Μόνο δύο πράγματα είναι άπειρα, το σύμπαν και η ανθρώπινη βλακεία, και ως προς το σύμπαν διατηρώ κάποιες αμφιβολίες.



Albert Einstein

82. Απροσδιόριστη μορφή $0\cdot(\pm\infty)$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x\cdot\ln x)$

β) $\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln(e^x-1)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)$ β) $\lim_{x\to 0^+}(x^2\ln x)$

γ) $\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x}\ln x)$ δ) $\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

ε) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x-1}\right)$ στ) $\lim_{x\to 0^+}\left[x\ln(\ln(x+1))\right]$

ζ) $\lim_{x\to-\infty}(xe^x)$ η) $\lim_{x\to 0}\left(x\ln(e^x-1)\right)$

θ) $\lim_{x\to 0^+}(\varepsilon\varphi x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$ ι) $\lim_{x\to}\left(\eta\mu x\cdot\ln(e^x-1)\right)$

κ) $\lim_{x\to 0^+}(\varepsilon\varphi x\cdot\ln x)$ λ) $\lim_{x\to 0^+}(x-\eta\mu x)\ln x$

83. Απροσδιόριστη μορφή 0^0, $1^{\pm\infty}$, $(\pm\infty)^0$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}x^x$

β) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

γ) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x)^x$ β) $\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x}$

γ) $\lim_{x\to 0^+}(e^x-1)^{\eta\mu x}$ δ) $\lim_{x\to 2^+}(x-2)^{x^2-3x+2}$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ β) $\lim_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

γ) $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ δ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\varepsilon\varphi x)^{\varepsilon\varphi 2x}$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^x$ β) $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

γ) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}$ δ) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{e^{-x}}$

84. Απροσδιόριστες μορφές $(+\infty)-(+\infty)$, $(-\infty)-(-\infty)$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\eta\mu^2 x}\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x+1\right)-x\right]$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-e^x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln x^2\right)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-e^{x+1}\right)$ δ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^x-1\right)-x+1\right]$

ε) $\lim\limits_{x\to+0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\eta\mu x}\right)$ στ) $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

ζ) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$ η) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$

85. Εφαρμογή στην συνέχεια και παραγωγισιμότητα συναρτήσεων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x-\alpha}-e^{\alpha x}-x}{x^2}\in\mathbb{R}$.

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{\eta\mu x}-1, & x\le 0\\ \frac{\ln x}{\sigma\varphi x}, & x>0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$.

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x\le 2\\ e^{x-2}+x, & x>2\end{cases}$$

Να υπολογίσετε το $f'(2)$.

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \alpha e^x-1, & x\le 0\\ \eta\mu x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x>0\end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο x_0:

α) $f(x)=\begin{cases} e^{2x}-x+1, & x\le 0\\ \frac{\varepsilon\varphi x-x}{x-\eta\mu x}, & x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

β) $f(x)=\begin{cases} e^x-e^{-x}-x, & x\le 0\\ \frac{x-\eta\mu x}{x\eta\mu x}, & x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

γ) $f(x)=\begin{cases} e^{\eta\mu x}-1, & x\le 0\\ \frac{\ln x}{\sigma\varphi x}, & x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

δ) $f(x)=\begin{cases} \ln\left(2-e^x\right), & x\le 0\\ \frac{1}{\varepsilon\varphi x}-\frac{1}{x\sigma\upsilon\nu x}, & x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

2. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0:

α) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1\\ e^{x-1}, & x>1\end{cases}$ στο $x_0=1$

β) $f(x)=\begin{cases} \ln(4-x)+2x, & x\le 3\\ x+3, & x>3\end{cases}$ στο $x_0=3$

3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ όταν ισχύει:

α) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu 2x-1}{x^2}=4$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{\alpha}{e^x-1}-\frac{\beta}{2}\right)=0$

γ) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x^3}+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{6}\right)=0$

δ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}-\varepsilon\varphi x}{x^2}=\frac{3}{2}$

4. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω συναρτήσεις να είναι παραγωγίσιμες στο x_0:

α) $f(x)=\begin{cases} e^x+\alpha x, & x\le 0\\ \ln(x+1)+\beta-2, & x>0\end{cases}$ στο $x_0=0$

β) $f(x)=\begin{cases} \alpha e^{x-\pi}-1, & x\le \pi\\ -\eta\mu x-\beta\sigma\upsilon\nu x, & x>\pi\end{cases}$ στο $x_0=\pi$

γ) $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta-\alpha-1, & x<2\\ \ln(x-1), & x\ge 2\end{cases}$ στο $x_0=2$

δ) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+\alpha x-\alpha, & x\le 1\\ \ln x+\beta-1, & x>1\end{cases}$ στο $x_0=1$

5. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$.

α) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x(2\ln x-1), & x>0\\ \alpha, & x=0\end{cases}.$$

α) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2+\ln x}$

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=2$ και η $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

α) Να βρείτε την $g'(0)$

β) Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0=0$

86. Θεωρητικές εφαρμογές

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=1$. Να βρείτε το

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f''(x)$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\eta\mu\dfrac{1}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\eta\mu^4 x}{\left(e^x-1\right)^5}$

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\eta\mu x}{x+\eta\mu x}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν $f(x)>f(\alpha)$, $f'(\alpha)=1$ και $f'(\alpha)=-2$ να βρείτε το

$$\lim_{x\to\alpha^+}\left[\frac{1}{f(x)-f(\alpha)}-\frac{1}{x-\alpha}\right]$$

2. Έστω συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f(0)=f'(0)=-1$ και $f'(0)=2$ τότε να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x-1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

3. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left[f(x_0+5h)\right]^2-\left[f(x_0-3h)\right]^2}{16h}=f(x_0)\cdot f'(x_0)$$

4. Έστω δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f''(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(x-h)}{h}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+2h)-3f(x)+2f(x-h)}{h^2}=3f''(x)$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(e^x-1\right)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\ln x\right)$

6. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}}{\eta\mu x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$

7. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει

$$(x-\eta\mu x)f(x)=e^x-e^{\eta\mu x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε το $f(0)$.

87. Γενικές ασκήσεις

1. Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\alpha, & x=0\\ \dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0<x<1\\ \beta, & x=1\\ \dfrac{x\ln x}{1-x}, & x>1\end{cases}.$$

α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε την f'

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=\dfrac{1}{2}$ και

$$f'(x)\left(x^2+1\right)=2x\left(1-f(x)\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f

β) το σύνολο τιμών της f

γ) το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{x^2}$

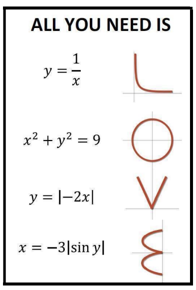
3. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\cdot\eta\mu x+e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

4. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$f(x)=xf(-\ln x),\ 0<x\neq 1$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$.



88. Μελέτη συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x)=xe^{-\frac{1}{x}}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^3-8x$ β) $f(x)=x^3-6x^2-15x$

γ) $f(x)=x^4-4x^2+3$ δ) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

ε) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ στ) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{3x^2-1}$

ζ) $f(x)=x\ln x$ η) $f(x)=xe^x$

θ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ ι) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

κ) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ λ) $f(x)=\dfrac{1-ημx}{ημx}, [-2π, 2π]$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=2x+e^x\cdot ημx+\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ x\le 0 \text{ και}$$

$$g(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-1},\ x\ne 2$$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

β) Να βρείτε τα σημεία τομής των ασύμπτωτων της C_f με τη C_g

γ) Να μελετήσετε τη g ως προς μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα και σημεία καμπής

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g

89. Γραφική λύση εξίσωσης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να διερευνήσετε γραφικά την εξίσωση

$$x^3-αx+2=0 \text{ για κάθε } α\in\mathbb{R}$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

α) Να μελετήσετε την f και να κάνετε τη C_f

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$\frac{x^3}{x^4-1}=\frac{α}{x^2+1}$$

για τις διάφορες τιμές του $α\in\mathbb{R}$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$.

α) Να μελετήσετε και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$λe^{-\frac{1}{x}}=x$$

για τις διάφορες τιμές του $λ\in\mathbb{R}$

3. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$ και

$$xf(x)+x^2f'(x)=1 \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$ για κάθε $x>0$

β) Να μελετήσετε και να κάνετε τη C_f

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $ex=e^{αx}$ για τις διάφορες τιμές του $α\in\mathbb{R}$

90. Επαναληπτικά θέματα

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ στο οποίο η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής;

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι κοίλη σε όλο το $\mathbb{R}$ ή κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε οποιαδήποτε ευθεία έχει το πολύ δύο κοινά σημεία με την C_f.

3. Έστω δύο συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'=g$ και $g'=f$ για τις οποίες ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(-x)\cdot g(x)<0$ για $x<0$.

α) Να μελετήσετε τις f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά τους.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x)>x\cdot f(0)$ για κάθε $x>0$

γ) Να μελετήσετε τις f, g ως προς την κυρτότητα

δ) Να αποδείξετε ότι είναι σταθερές οι συναρτήσεις

$$h(x)=e^{-x}(f+g)(x) \text{ και } φ(x)=e^x(f-g)(x)$$

ε) Αν $f(0)=1$ τότε να βρείτε τους τύπους των f και g

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{α^x-x^3β^x}{β^x}$, $0<α<β$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να λύσετε ως προς $λ\in R$ την ανίσωση:

$$\left(αλ^3-λ^9β^{λ^3}\right)β^{7λ-6}>\left[α^{7λ-6}-(7λ-6)^3β^{7λ-6}\right]β^{λ^3}$$

2. α) Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f'(x)+f(x)=0$.

Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=ce^{-x}, \text{ όπου c σταθερά}$$

β) Έστω η συνάρτηση $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=\frac{-g(x)(\ln x^x+1)}{\ln x^x} \text{ και } g(2)=1$$

Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(\ln x)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $κ\ge 2$ ισχύει

$$0<\ln(\ln(κ+1))\ln(\ln κ)<\frac{1}{\ln k^k}$$

4. Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=συν1$ και $x^2f'(\ln x)=-xημx-2συνx$. Να αποδείξετε ότι

$$f(\pi)=\frac{συνe^{\pi}}{e^{2\pi}}.$$

5. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=\ln\left(\frac{α^x+β^x}{2}\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, α>0, β>0, α\neq β$$

για την οποία ισχύει

$$f(x)\geq x \text{ κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $α\cdot β=e^2$

β) η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

6. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $f(0)=0$ και

$$f'(x)=(2x-α)ημ(x-β)+(x^2-αx)συν(x-β)$$

όπου $α,β\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση f

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $ξ\in(α,β)$ ώστε

$$εφ(ξ-β)=\frac{αξ-ξ^2}{2ξ-α}$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x}{x-1}+\frac{2x^2}{x-2}=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(1,2)$.

8. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $xf'(x)=(x+1)f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $f(1)=e$. Να βρείτε τον τύπο της f.

9. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\ln\left(e^x+me^{-x}\right), \text{ όπου } m\in(0,+\infty)$$

Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

10. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^{x^2-(α+β)x} \text{ και } g(x)=x^3-(α+β)x+2$$

Να αποδείξετε ότι αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1=1$ τότε η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$ και τοπικό μέγιστο στο $x_3=-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(A)=(0,+\infty)$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=1+e^x, x\in\mathbb{R}, f(\ln 3)=3$$

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

12. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f''(x)=e^{-x} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,f(0))$ είναι η $y=2x-1$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

13. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και

$$f(f(x))=α\cdot e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } α>0$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1–1.

β) Να δείξετε ότι $f(αe^x)=αe^{f(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Έστω ότι η εξίσωση $f(f(x))=x$ έχει λύση την $x=x_0$. Τότε: i) $α<\frac{1}{e}$ ii) $f(x_0)e^{x_0}=x_0e^{f(x_0)}$

14. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+1}}-e^x\right)$.

15. Να συγκρίνετε το e^{π} με το π^e.

16. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την f' να είναι 1–1. Να αποδείξετε ότι η C_f και η εφαπτομένη της δεν έχουν κανένα άλλο κοινό σημείο εκτός από το σημείο επαφής τους.

17. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[0,1]$ και ισχύει

$$g'(x)f(x)\neq f'(x)g(x) \text{ για κάθε } x\in(0,1)$$

Αν η g έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $[0,1]$ τότε να δείξετε ότι και η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

18. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις

α) $f(x)=-x^4+18x^2-45$

β) $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}$

γ) $f(x)=x+ημx$, $x\in[-2\pi,2\pi]$

19. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1+συνx}{ημx}, \quad x\in A=(0,\pi)$$

α) Να μελετήσετε την f και να κάνετε τη C_f

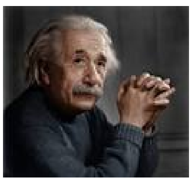
β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $1-ληµx+συνx=0$ για τις διάφορες τιμές του $λ\in\mathbb{R}$

Αν μου έδιναν μόνο μια ώρα για να λύσω ένα πρόβλημα από το οποίο να εξαρτάται η ζωή μου, θα αφιέρωνα

40 λεπτά για να το μελετήσω,

15 λεπτά για να το αναθεωρήσω και

5 λεπτά να το λύσω.



Albert Einstein

Ολοκληρωτικός λογισμός

1. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε τις αρχικές, στο $\mathbb{R}$, της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=e^{|x|}$.

2. Να βρείτε συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=\frac{1-f(x)}{\sigma\upsilon\nu^2x}$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(0)=-3$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^3+4x^2-7x+11$ β) $f(x)=(x+3)(x^2-1)$

γ) $f(x)=\frac{x^3-2x}{x}$ δ) $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^6}$

ε) $f(x)=3\sqrt{x}-5\sqrt[7]{x^3}$ στ) $f(x)=\frac{3x^3-x^2+x-3}{x-1}$

2. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3e^x+2\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$ β) $f(x)=\frac{1}{\eta\mu^2x}-\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2x}$

3. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x)=3e^{x+2}-\frac{1}{x-4}$

β) $f(x)=(x-3)^2-2\sigma\upsilon\nu 3x$

γ) $f(x)=\frac{e^{\varepsilon\varphi x}}{\sigma\upsilon\nu^2x}$

δ) $f(x)=(x+1)\sigma\upsilon\nu(x^2+2x)$

4. Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\frac{\eta\mu^3x+1}{\eta\mu^2x}$ β) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$

γ) $f(x)=\varepsilon\varphi^2x$ δ) $f(x)=x\sqrt{3x^2+2}$

5. Να βρείτε τις παράγουσες των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2xe^x+x^2e^x$ β) $f(x)=\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}$

6. Να βρείτε τις παράγουσες της $f(x)=\frac{1}{x}$.

7. Να βρείτε τις παράγουσες της $f(x)=|x+1|$

8. α) Να δείξετε ότι έχει αρχικές στο $\mathbb{R}$ η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

β) Να βρείτε το σύνολο των αρχικών συναρτήσεων της f

9. Να βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)-2x=(x^2-f(x))\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$.

10. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(3)=7$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)=\frac{2+f(x)}{x},\ x\neq 0$$

α) Να βρείτε την αρχική της συνάρτησης $g(x)=\frac{2}{x^2}$

β) Να βρείτε την συνάρτηση f

11. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot F(2-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να βρείτε το $F(1)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(2-x)\cdot F(x)=1$

γ) Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση

$$g(x)=F(x)\cdot F(2-x)$$

δ) Να βρείτε τον τύπο της f

12. Να βρείτε συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να είναι $f''(x)=-\frac{2}{x^3}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση να έχει, για $x\to+\infty$, ασύμπτωτη την ευθεία $y=3x-4$.

13. Έστω ότι η συνάρτηση f έχει παράγουσα στο $\mathbb{R}$, μία συνάρτηση F που δεν είναι 1–1 στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ με $f(\xi)=0$.

14. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

α) $\int_0^1\frac{1}{x-1}dx$ β) $\int_0^{\pi/2}\eta\mu x dx$

γ) $\int_0^{\pi}\varepsilon\varphi x dx$ δ) $\int_0^1\ln x dx$

ε) $\int_0^2\sqrt{1-x^2}dx$ στ) $\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$

2. Εύρεση συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση.

α) Να βρείτε την αρχική συνάρτηση F της f στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$F(0)=0 \quad \text{και} \quad 2xF(x)+f(x)=e^{-x^2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Να βρείτε την συνάρτηση f

2. Έστω μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=1$ και έστω F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$F(x)\cdot f(2-x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η συνάρτηση

$$g(x)=F(x)\cdot F(2-x)$$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε τις παράγουσες της $h(x)=\dfrac{f(x+1)}{f(x)+1}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$ για την οποία ισχύει:

$$2xF(x)+x^2f(x)=4x^3-f(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f

β) την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0)=2$ και F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$, ώστε:

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{F(x)-x}+1,\ x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε την συνάρτηση f.

3. Θεωρήματα ύπαρξης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2)=2016$ και έστω F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η εφαπτομένη της C_F στο $M(1,F(1))$ να έχει εξίσωση $2x+y-2=0$

α) Να βρείτε τις τιμές της $F(1)$ και $f(1)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x)\eta\mu f(x)+F(x)f'(x)\sigma\upsilon\nu f(x)=0$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(1,2)$

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και έστω F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$F(0)=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-2F(x)}{(x-1)^2}=f'(1)$$

α) Να βρείτε τις τιμές $F(1)$ και $f(1)$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=0$$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f^2(x)+F(x)f'(x)=2x-1$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\theta\in(0,\alpha)$, ώστε

$$2F(\theta)=\frac{\alpha F(\alpha)}{\theta}-\theta f(\theta)$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και F μία παράγουσα της f στο $[0,1]$ με $F(0)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$2F(\xi^2-\xi)=-\xi(2\xi-1)f(\xi^2-\xi)$$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f(x)\geq 0,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν F μία παράγουσα της f με $F(0)=0$, να δείξετε ότι υπάρχει $\beta\in(0,\alpha)$ τέτοιο, ώστε $F(\alpha)>\beta f(\beta)$.

3. Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσα της f με $F(0)=F(1)=0$. Έστω επιπλέον η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{x}, & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Να δείξετε ότι:

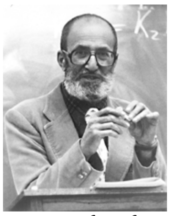
α) η συνάρτηση g είναι συνεχής

β) υπάρχει $\alpha\in(0,1)$, ώστε $F(\alpha)=\alpha f(\alpha)$

γ) υπάρχει $\beta\in(0,\alpha)$, ώστε

$$\alpha^2F(\beta)=\beta(\alpha^2f(\beta)-\beta F(\alpha))$$

Τα προβλήματα συνιστούν την καρδιά των μαθηματικών.



Paul Halmos

4. Μονοτονία, κυρτότητα παράγουσας – Θεώρημα Fermat

Ασκήσεις Α’ ομάδας

1. Έστω $F(x)$ μία αρχική της

$$f(x)=\frac{\ln x-\ln 3}{e^x+1}\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

και η συνάρτηση $G(x)=F(4-x^2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της G

β) Να μελετήσετε την G ως προς την μονοτονία

2. Έστω F μία αρχική στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης

$$f(x)=e^{x^2}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα την συνάρτηση $g(x)=(2x+5)F(x)$.

3. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν, επιπλέον, η F είναι μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$ και για την συνάρτηση

$$G(x)=F(x)-x^3+2\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

ισχύει $G(x)\geq G(1)$, $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη μονοτονία της F.

Ασκήσεις Β’ ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x}$ και F μία παράγουσα της f στο διάστημα $[0,+\infty)$ με $F(1)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και να λύσετε την ανίσωση

$$F(x^2+1)>0$$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση F ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_F

2. Έστω συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3)=2$. Αν F είναι μία αρχική της f τότε να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την συνάρτηση

$$g(x)=F(x^3+2x)-2x^3-4x$$

3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(4)=6,\ f(5)=9\ \text{και}\ f'(x)>-2,\ x\in\mathbb{R}$$

Αν F είναι μία αρχική της f, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x)=F(x)+x^2-5x$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

β) $5<F(5)-F(4)<10$

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=(x-1)e^{x^2}$$

και F μία παράγουσά της στο $\mathbb{R}$ με $F(1)=0$.

α) Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $F(F'(x)-2015)=0$ έχει μοναδική ρίζα

γ) Να δείξετε ότι η F είναι κυρτή και στη συνέχεια ότι

$$F(x-1)+F(x+1)>2F(x)\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}$$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0)=0$, η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και F μία παράγουσά της στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$. Να δείξετε ότι:

α) $F(x)<xf(x)$ για κάθε $x>0$

β) η συνάρτηση

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{F(x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

6. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσα της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(1)=0$. Αν ισχύει

$$F(x)\leq e^{-x^2}\ln x\text{, για κάθε } x>0$$

τότε να αποδείξετε ότι $f(1)=\frac{1}{e}$.

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και έστω F μία αρχική της f για την οποία ισχύει

$$F(6)=0\ \text{και}\ xF(x^2+x)+10\ln(x-1)\geq 4-x^2\ ,\ x\geq 1$$

Να βρείτε το $f(6)$.

8. Δίνεται συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Έστω F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_F στο $M(0,F(0))$ να έχει εξίσωση

$$2x-y+4=0$$

α) Να βρείτε τις τιμές $F(0)$ και $f(0)$

β) Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα

γ) Να αποδείξετε ότι $F(3)+F(-7)>0$

δ) Να αποδείξετε ότι $F(x+2)-F(x)>4$, $x>0$

Οι μαθηματικοί στηρίζονται ο ένας στους ώμους του άλλου.

Carl Friedrich Gauss

5. Υπολογισμός ορίου παραγουσών

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1)=0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{x^2-2x+1}$.

2. Αν F μία αρχική στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x)=e^{x^2}$ με $F(0)=0$ να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)\eta\mu x}{x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)x}{\eta\mu^2 x}$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x\ln x}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Αν F μία παράγουσα της f στο $(0,+\infty)$ να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[F(x+1)-F(x)\right]=0$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Αν F είναι μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τα:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(x+1)-F(x)\right)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(F(2x)-F(x)\right)$

2. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(1)=0$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η γραφική παράσταση της f' εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο $x_0=1$. Αν F είναι μία παράγουσα της f με $F(1)=0$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)}{(x-1)^3}$.

3. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και

$f^2(x)-4f(x)+\dfrac{4x^2+3}{x^4+2x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Αν F είναι μία αρχική της f, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(F(2x)-F(x)\right)\eta\mu x\right]$

4. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με $f(0)=0$ και $f'(0)=1$. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0)=0$, να βρείτε το

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xF(x)}{x-\eta\mu x}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[F(x+1)-F(x)\right]=1$$

6. Ορισμένο ολοκλήρωμα (Ορισμός – Ιδιότητες)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το κ έτσι, ώστε

$$\int_1^{\kappa}\frac{x^2-4}{x^2+1}dx-\int_{\kappa}^{1}\frac{5}{x^2+1}dx=3 \quad (\Sigma X.)$$

2. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln t\,dt=\int_e^1 \ln\dfrac{1}{t}dt$. (ΣΧ.)

3. Αν $\int_1^3 f(x)dx=5$ και $\int_1^3 g(x)dx=-2$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^3\left(2f(x)-6g(x)\right)dx$ β) $\int_3^1\left(2f(x)-g(x)\right)dx$ (ΣΧ.)

4. Αν $\int_1^4 f(x)dx=9$, $\int_3^4 f(x)dx=11$, $\int_1^8 f(x)dx=13$, να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_4^3 f(x)dx$ β) $\int_4^8 f(x)dx$

γ) $\int_1^3 f(x)dx$ δ) $\int_3^8 f(x)dx$ (ΣΧ.)

5. Έστω συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε α, β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\gamma^\delta f(x)dx\Rightarrow\int_\alpha^\gamma f(x)dx=\int_\beta^\delta f(x)dx$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να λύσετε την εξίσωση

$$\int_2^x(x-7)dx+\int_x^3(3x-1)dt=1$$

2. Αν οι αριθμοί $\int_0^\alpha dx$, $\int_0^\beta dy$ και $\int_0^\gamma dz$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\int_0^{\kappa^\alpha}du$, $\int_0^{\kappa^{2\beta}}dt$, $\int_0^{\kappa^\gamma}dh$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

3. Να υπολογίσετε τις τιμές των αθροισμάτων:

α) $\displaystyle\int_1^4\frac{4x^3+5x-5}{x^2+x+1}dx+\int_4^1\frac{x^2+2x-8}{x^2+x+1}dx$

β) $\displaystyle\int_2^4\frac{x+1}{x^3-1}dx+\int_4^2\frac{x-1}{x^3+1}dx+\int_4^2\frac{2x(x^2+1)}{x^6-1}dx$

4. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ όταν

$$\int_{\alpha+1}^{\alpha^2+1}\frac{3x^2-x+2}{x^2+1}dx+\int_{\alpha^2+1}^{\alpha+1}\frac{2x^2-x+1}{x^2+1}dx=2$$

5. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{\gamma}^{\alpha} f(x)dx - \int_{\delta}^{\beta} f(x)dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

β) $\int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx - \int_{\gamma}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

6. Αν $\int_{2}^{4} f(x)dx = 2$, $\int_{3}^{6} f(x)dx = 1$, $\int_{3}^{4} f(x)dx = 5$ τότε να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{4}^{3} f(x)dx$

β) $\int_{2}^{6} f(x)dx$

γ) $\int_{4}^{6} f(x)dx$

7. Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $F(x) = \int_{2}^{x} \frac{1}{(t+4)^2(t-1)}dt$

β) $F(x) = \int_{1}^{x^2} \frac{e^t}{t-4}dt$

γ) $F(x) = \int_{x+2}^{4-x} \sqrt{t^2-1}dt$

2. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-2} - \ln(x-1)$ και $F(x) = \int_{1}^{f(x)} \sqrt{t^2-1}dt$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

3. Αν ισχύει $0 < \alpha < \beta < 1$ και η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο [α, β] τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $(\xi - 1)\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = \xi \int_{\beta}^{\xi} f(t)dt$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Α. α) $F(x) = \int_{3}^{x} \frac{1}{t^2 - t}dt$

β) $F(x) = \int_{-5}^{x} \sqrt{t^2 - 5t + 6}dt$

γ) $F(x) = \int_{1}^{x} \ln(t-2)dt$

δ) $F(x) = \int_{x}^{1} \sqrt{t^2-1}dt$

Β. α) $F(x) = \int_{2}^{x^2-3} \frac{t-2}{t-1}dt$

β) $F(x) = \int_{1}^{x} \ln(t-2)dt$

γ) $F(x) = \int_{2}^{x^2} \sqrt{9-t^2}dt$

δ) $F(x) = \int_{2}^{3x+4} \frac{5t}{t^2+9}dt$

ε) $F(x) = \int_{1}^{x^2} \text{τημ}t\,dt$

στ) $F(x) = \int_{1}^{x-1} \frac{t^2+1}{t-2}dt$

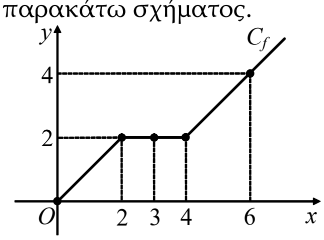
Γ. α) $F(x) = \int_{x-1}^{x+1} t\ln\sqrt{t-1}dt$

β) $F(x) = \int_{x-2}^{x-3} \frac{\ln(t-1)}{\sqrt{3-t}}dt$

γ) $F(x) = \int_{x^2-1}^{2x-3} \sqrt{t^2-4}dt$

δ) $F(x) = \int_{e^x}^{x} \frac{\sqrt{e^{t^2-1}-1}}{e^t+1}dt$

2. Έστω τη συνάρτηση $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του παρακάτω σχήματος.



Να υπολογίσετε τα $F(0)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(6)$

3. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^{\beta} f(t)dt.$$

8. Θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Η συνάρτηση f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και η καμπύλη $y = f(x)$ διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(5,3)$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{1}^{5} f'(x)dx$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $\int_{e}^{x} \frac{\ln t}{t}dt = \frac{15}{2}$.

3. Να προσδιορίσετε την παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\int_{-1}^{3} (\alpha x^2 - 5x + 1)dx = 12$$

4. Να βρείτε μία πολυωνυμική συνάρτηση f τρίτου βαθμού που έχει ακρότατα στις θέσεις $x = 1$ και $x = -2$, η καμπύλη αυτής $y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(0, -7)$ και ισχύει

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = -12$$

5. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν για κάθε $x \in [1,2]$ ώστε $f'(x^2) = 5x^3$ και $f(1) = 42$. Να βρείτε το $f(4)$.

6. Αν $\alpha > 0$, τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \left| x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha) \right| dx$$

ισούται με:

α) $7\alpha^5$ β) $8\alpha^5$ γ) $9\alpha^5$ δ) $10\alpha^5$

(Διαγωνισμός Α.Σ.Ε.Π. Εκπαιδευτικών 2008)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-2}^{3} \left(5x^3 - 4x^2 + 3x - \frac{1}{2} \right) dx$

β) $\int_{1}^{e} \frac{3(1+\ln x)^7}{x} dx$

γ) $\int_{3}^{7} \left(e^x x^3 + 3x^2 e^x \right) dx$

δ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} dx$

ε) $\int_{5}^{7} \frac{x^3 - 7x - 6}{x+1} dx$

στ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 - \eta\mu x} dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{-2}^{\pi} f(x) dx$ με $f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 4, & x > 0 \end{cases}$

β) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\eta\mu x - x| dx$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\int_{e}^{x} \frac{\ln t}{t} dt = x - 2$

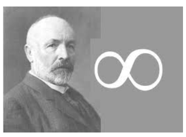
β) $\int_{0}^{1} 2t \ln x dt = \int_{1}^{e} \frac{x}{t} dt - 1$

4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{\ln x}{t^2} dt$.

5. Να προσδιορίσετε πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)$ τρίτου βαθμού τέτοια ώστε το σημείο $A(1,-2)$ να είναι ακρότατο της καμπύλης $y = f(x)$ και να ισχύουν:

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = 4 \text{ και } \int_{0}^{2} f(x) dx = -2$$

Στα μαθηματικά, η τέχνη του να διατυπώνεις σωστά το ερώτημα, βρίσκεται ψηλότερα από το να δίνεις σωστά την απάντηση.



George Cantor

9. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες Ι (Παραγοντική ολοκλήρωση)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ β) $\int_{0}^{1} xe^{-x} dx$ γ) $\int_{0}^{\pi/2} e^x \sigma\upsilon\nu 2x dx$ (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{0}^{3} x^2 e^{2x} dx$ β) $\int_{0}^{\pi} x\eta\mu x dx$

γ) $\int_{0}^{3} \frac{x}{e^x} dx$ δ) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2x+3) \cdot \eta\mu 3x dx$

ε) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ στ) $\int_{1}^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

ζ) $I = \int_{0}^{1} (2x+3) \cdot e^{3x} dx$

η) $I = \int_{1}^{2} \left(x^3 + 2x^2 - 3x + 7 \right) \cdot e^{2x} dx$

θ) $\int_{1}^{e} 2x \ln x dx$ ι) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu 3x \cdot e^{2x} dx$

κ) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu 2x \cdot e^{3x} dx$

λ) $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^3 + 2x^2 - 3x + 7 \right) \cdot \sigma\upsilon\nu 2x dx$

μ) $I = \int_{1}^{2} \ln 2x \cdot e^{3x} dx$ ν) $I = \int_{1}^{2} \ln 3x \cdot e^{2x} dx$

ξ) $I = \int_{1}^{3} (2x+3) \cdot \ln 3x dx$

ο) $I = \int_{1}^{3} \left(x^3 + 2x^2 - 3x + 7 \right) \cdot \ln 2x dx$

10. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες ΙΙ

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{1}^{e} \eta\mu(\ln x) dx = \frac{1}{2} + \frac{e}{2}(\eta\mu 1 - \sigma\upsilon\nu 1).$$

2. Αν $I = \int_{0}^{\pi/2} x\eta\mu^2 x dx$, $J = \int_{0}^{\pi/2} x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I + J$, $I - J$, I, J. (ΣΧ.)

3. Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και για την οποία ισχύει $\int_{0}^{\pi} \left(f(x) + f''(x) \right) \eta\mu x dx = 2$. Αν $f(\pi) = 1$, με τη βοήθεια της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες, να υπολογίσετε το $f(0)$. (ΣΧ.)

4. Έστω οι συναρτήσεις f, g, με f'', g'' συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ και $f'(\beta) = g'(\beta)$, να αποδείξετε ότι

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left(f(x) g''(x) - f''(x) g(x) \right) dx = g'(\beta) \left(f(\beta) - g(\beta) \right)$$

(ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το $I=\int_0^1 F(x)dx$, όπου F μία παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ με $F(1)=0$.

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $I+J$, $I-J$ και στη συνέχεια τα I και J αν:

α) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta\mu^2 x dx$ και $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

β) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\eta\mu x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}dx$ και $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}dx$

3. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$I=\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=f(\pi)+f(0)$$

4. Έστω η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^1\left[2f'(x)xf''(x)\right]dx=2$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $x=1$ να αποδείξετε ότι διέρχεται και από το σημείο $B(1,5)$.

5. Έστω η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αν η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη στα σημεία $A(-1,0)$ και $B(1,1)$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{-1}^1\left[f(x)-f''(x)\right]e^x dx=e$$

6. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\int_0^1\left[xf''(x)-2f'(x)\right]dx=0$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=0$$

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f(x)+f''(x)\right)\sigma\upsilon\nu x dx=4$. Να βρείτε:

α) την τιμή $f'(0)$

β) το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\left(e^x-x-1\right)}{x^2\eta\mu x}dx$

8. Έστω συνάρτηση $f:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f''(x)\right]\sigma\upsilon\nu x dx=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f'(0)=0$

β) υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)+f'(0)=f\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$

9. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1}2x\ln x dx$$

11. Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων $\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^4 \dfrac{x^3+2x^2-5}{x}$ β) $\int_3^5 \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$ (ΣΧ.)

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \dfrac{x}{x+2}dx$ β) $\int_0^1 \dfrac{3x-2}{x+2}dx$ (ΣΧ.)

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_3^5 \dfrac{3x+2}{x^2-3x+2}dx$ β) $\int_1^2 \dfrac{x^3-2x}{x^2+3x+2}dx$ (ΣΧ.)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $I=\int_1^2 \dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}dx$ β) $I=\int_7^{12} \dfrac{2x-3}{x^2-3x+1}dx$

γ) $I=\int_4^6 \dfrac{2x-5}{x^2-3x+2}dx$ δ) $\int_3^4 \dfrac{x^3+4}{x^2-1}dx$

ε) $I=\int_4^5 \dfrac{x^3+5x^2-4}{x-3}dx$

στ) $I=\int_4^7 \dfrac{x^3+x^2-17x+19}{x^2-4x+3}dx$

ζ) $I=\int_4^5 \dfrac{2x^3+5x^2-4}{x^3-6x^2+11x-6}dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x^2\ln(x+1)dx$ β) $\int_0^1 \ln\left(4-x^2\right)dx$

Τα μαθηματικά δεν είναι μία δομή από ατσάλι η οποία βασίζεται πάνω στα θεμέλια της αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά ένας ιστός αράχνης που πάλλεται μαζί μα άλλες σκέψεις στους μερικά μόνο εξερευνήσιμους χώρους του ανθρώπινου μυαλού.

Morris Kline

12. Μέθοδος αντικατάστασης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu(e^x)dx+\int_0^{-1} e^{-x}\sigma\upsilon\nu(e^{-x})dx=0$$

2. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Να δείξετε ότι:

α) $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx=\frac{\pi}{4}$

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $3f(x)-5f(-x)=4$ να υπολογίσετε το

$$\int_{-1}^1 f(x)dx$$

4. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει $f(3+x)+f(3-x)=2\beta$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$I=\int_0^6 f(x)dx$$

5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{\pi/2}\left[\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\eta\mu x-\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x+x)\right]dx \quad (\text{ΣΧ.})$$

6. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^x f(2x-t)dt=\int_x^{2x} f(u)du$

β) $2x\int_0^1 f(2xt)dt=\int_0^{2x} f(t)dt$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 x(x^2+3)^6 dx$ β) $\int_1^3 \sqrt{2x+5}dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx$ δ) $\int_{-4}^{-9} \sqrt{-x}dx$

ε) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}dx$ στ) $\int_e^{2e} \frac{1}{x\ln^2 x}dx$

2. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 e^x \sigma\upsilon\nu(e^x)dx+\int_0^{-1} e^{-x}\sigma\upsilon\nu(e^{-x})dx=0$$

3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^x t\sigma\upsilon\nu(x-t)dt=x\eta\mu x-\int_0^x u\sigma\upsilon\nu u du$

β) $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt=x\int_1^x f(t)dt$

γ) $\int_x^{\frac{x}{2}} f\left(\frac{x}{t}\right)dt=-x\int_1^2 \frac{f(t)}{t^2}dt$

13. Βασικές αντικαταστάσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 (3x+2)(x+1)^4 dx$ β) $\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx$

γ) $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$ δ) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-e^x-2}dx$

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $I=\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ β) $I=\int_0^1 x\sqrt[3]{1+x}dx$

γ) $I=\int_2^7 \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}dx$ δ) $I=\int_0^2 (2x-1)\sqrt[3]{x+2}dx$

ε) $I=\int_2^3 \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

στ) $I=\int_1^2 \left(x^2+2+\sqrt{x^2+1}\right)xdx$

ζ) $I=\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

η) $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$

θ) $I=\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$

ι) $I=\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}$ με $\alpha>0$

κ) $I=\int \frac{dx}{\eta\mu x}$ λ) $I=\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x}$

μ) $I=\int \frac{x-\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x}dx$ ν) $I=\int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$

14. Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^\pi \eta\mu^2 x dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\eta\mu^2 x dx$ δ) $\int_0^\pi \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\varepsilon\varphi^2 x}{\varepsilon\varphi x}dx$ β) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

γ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu x}dx$ δ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$

Ασκήσεις Β’ ομάδας

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

γ) $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^4 x dx$ δ) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$

ε) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx$ στ) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^4 x \cdot \sigma\upsilon\nu^3 x dx$

ζ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx$ η) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx$

15. Ολοκλήρωμα άρτιας – περιττής συνάρτησης

Ασκήσεις Α’ ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [−α, α] με $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν η f είναι άρτια τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

β) Αν η f είναι περιττή τότε

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

γ) Να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu x \cdot \ln\left(x^2 \sigma\upsilon\nu x\right)dx = 0$$

Ασκήσεις Β’ ομάδας

1. Έστω η περιττή συνάρτηση στο $[-1,1]$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\int_{-1}^{1}\left[x^2 f''(x) - 2f(x)\right]dx = 0$$

2. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f είναι άρτια και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} x f''(x)dx = 0$$

3. Έστω $h, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με h άρτια και r περιττή. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(x)}{1 + k^{r(x)}} dx = \int_0^{\alpha} h(x)dx, \quad \alpha, k \in (0, +\infty)$$

4. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι ισχύει η ισότητα

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(x^2 f'(x) + 2xf(x)\right)dx = 0$$

Από τα πρώτα κιόλα στάδια της εκπαίδευσης, πρέπει να δωθεί η ευκαιρία στο παιδί να νιώσει τη χαρά της ανακάλυψης.

Alfred North Whitehead

16. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = c$

Ασκήσεις Α’ ομάδας

1. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 f(t)\sigma\upsilon\nu x dt\right)dx = 2$. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^2 f(t)dt$

β) $\int_{-2}^{0}\left(\int_1^2 3t^2 f(x)dx\right)dt$

2. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x)dx$.

Ασκήσεις Β’ ομάδας

1. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α) Αν $\int_1^2 t^2\left(\int_1^2 f(x)dx\right)dt = 14$ να βρείτε το $\int_1^2 f(x)dx$

β) Αν επιπλέον ισχύει $\int_0^3 g(x)dx = 2$ τότε να βρείτε το

$$\int_0^3\left(\int_1^2 f(t)g(x)dt\right)dx$$

2. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = 2x + \int_0^2 f(x)dx$. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 2x - 4, \ x \in \mathbb{R}$$

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει

$$f'(x) = \int_0^1 f(x)dx - f(x), \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την f.

4. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f όταν:

α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \int_0^1 x f(x)dx$

β) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$

γ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \int_0^1 e^x f(x)dx$

δ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \int_0^1 e^{1-x} f(x)dx$

ε) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη,

$$x f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt, \ x \geq 0 \ \text{και} \ f(0) = 1$$

5. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2$ και

$$f'(x) = \int_0^1 f(t)dt \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f και το $\int_{-1}^{0} \frac{f(x)}{2x^2 + 2x + 1}$.

17. Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\in\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha,\beta]$ και αντιστρέψιμη. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx=\beta f(\beta)-\alpha f(\alpha)$

2. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x)+f(x)+1=x\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^3 f(x)dx$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και 1–1 με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=0$ να δείξετε ότι

$$\int_0^x tf(t)dt=\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να υπολογίσετε το $I=\int_0^e f^{-1}(x)dx$

3. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{e^x+x-1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{\sqrt{e}} x\cdot f^{-1}(x)dx$$ (Λ. Θ.)

4. Δίνεται η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)>0$ και $\ln f(x)+e^{f(x)}=x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=1$, $f(x)=e$

γ) Να υπολογίσετε το $\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_e^{e^e+1} f(x)dx$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f^{-1}(x)dx$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(x)}{x^2+1}$

18. Γενικές ασκήσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι αν είναι $I_\nu=\int_0^1 x^\nu e^x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $I_\nu=e-\nu I_{\nu-1}$.

2. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^{x^2-3x} f(t)dt=\int_1^{2x-6} f(t)dt$.

3. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να είναι $f(x_0)=0$.

2. Να αποδείξετε ότι αν είναι $I_\nu=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi^\nu x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ τότε για κάθε $\nu>2$ ισχύει $I_\nu=\dfrac{1}{\nu-1}-I_{\nu-2}$.

3. α) Να αποδείξετε ότι αν $I_\nu=\int_0^\pi x^\nu\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, τότε $I_\nu=-\nu\pi^{\nu-1}-\nu(\nu-1)I_{\nu-2}$ για $\nu\geq 4$

β) Να υπολογίσετε το $I_5=\int_0^\pi x^5\cdot\sigma\upsilon\nu x dx$

4. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=1+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει

$$3+4\eta\mu x+7\sigma\upsilon\nu x=\alpha f(x)+\beta f'(x)\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Να υπολογίσετε το $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{3+4\eta\mu x+7\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}dx$

(Λ. Θ.)

5. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{e^x+x-1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^{\sqrt{e}} x\cdot f^{-1}(x)dx$$ (Λ. Θ.)

6. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=2e^x+3e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύουν

$$e^x=\frac{f(x)+f'(x)}{4} \text{ και } e^{-x}=\frac{f(x)-f'(x)}{6}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^2\frac{4e^x+18e^{-x}}{2e^x+3e^{-x}}dx$$ (Λ. Θ.)

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=f(x)-\dfrac{x^3}{6}$

β) Να υπολογίσετε το $I=\int_0^1 \frac{x^3}{f(x)}dx$ (Λ. Θ.)

8. Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία παίρνει θετικές τιμές και έχει συνεχή παράγωγο. Αν είναι $f(\alpha)=1$ και $f(\beta)=2$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{f^2(x)+f(x)}dx$$ (Λ. Θ.)

19. Εμβαδόν ορισμένο από μία συνάρτηση (και πολλαπλού τύπου)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-8x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\le 1\\ 1-x, & x>1\end{cases}$$

τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-3$ και $x=5$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^3 |x+2|dx$

α) με υπολογιστικό τρόπο

β) μέσω της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις αντίστοιχες ευθείες:

α) $f(x)=4x^3-4x$ και τον άξονα $x'x$

β) $f(x)=1+e^x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

γ) $f(x)=\eta\mu x$ και τις ευθείες $x=\frac{\pi}{2}$ και $x=2\pi$

δ) $f(x)=(x-1)e^x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$

ε) $f(x)=(4x-8)\ln x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x-e, & x<1\\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x\ge 1\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$ (Θ.Ε.)

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x>-1$

β) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x(f(x)-1)$, $x>-1$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία είναι $-1\le x\le 1$ και $0\le y\le f(x)$. (Θ.Ε.)

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$, $\lambda>1$

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+1+\frac{1}{x+1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=5$ (Θ.Ε.)

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2(\ln x)^2-5\ln x+2$.

α) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$

20. Εμβαδόν ορισμένο από δύο συναρτήσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x$ και $g(x)=e^{-x}$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$.

2. Το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τις δύο τεθλασμένες γραμμές $y=|x-1|$ και $y=3-|x|$ ισούται με:

α) 3 β) 4 γ) 5 δ) 6

(Διαγωνισμός Α.Σ.Ε.Π. Εκπαιδευτικών 2008)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=3x^2-2x-20$ και $g(x)=4x+25$
β) $f(x)=(x^3-1)e^x$ και $g(x)=(x-1)e^x$
γ) $f(x)=4x\ln x$ και $g(x)=12\ln x$
δ) $f(x)=4x^2+6x-5$ και $g(x)=x^2+4$
ε) $f(x)=x^2$ και $g(x)=\sqrt{x}$

2. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων και ευθειών:
α) $f(x)=x^2+5x+1$, $g(x)=4x^2-x+1$ και $x=-1$, $x=3$
β) $f(x)=2x$, $g(x)=\eta\mu x$ και $x=\pi$, $x=-\pi$
γ) $f(x)=3x^2-\ln x$, $g(x)=6x-\ln x$ και $x=1$, $x=3$
δ) $f(x)=3x^2+\sqrt{x}$, $g(x)=6x+\sqrt{x}$ και $x=3$
ε) $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x$ και $x=1$, $x=e$

3. Να υπολογίσετε τον εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{-x}$ και τις ευθείες

$$y=-x,\ x=0 \text{ και } x=-1$$

4. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=x(x-1)^2$, $0\le x\le 2$.
Στη συνέχεια να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y=2$ (I.I.T. 1989)

5. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right) \text{ και } g(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$$

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_g, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=-1$

6. Δίνονται οι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f'(1)=g'(1)$, $f(2)=g(2)$ και

$$f''(x)-g''(x)=4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x)=f(x)-g(x)$
β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g (Θ.Ε.)

7. Έστω $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν $f(x)\cdot f'(x)+x=0$ για κάθε $x\in(-2,2)$, $f(0)=2$, και F μία παράγουσα της f στο $[-2,2]$ με $F(1)=0$.
α) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη C_F, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=1$

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2$ και $g(x)=\alpha x$ με $\alpha>0$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g να είναι ίσο με $\frac{1}{3}$.

21. Εμβαδόν ορισμένο από συνάρτηση και εφαπτομένη

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, της εφαπτομένης της στη θέση $x=e$ και των ευθειών $x=\frac{1}{e}$ και $x=e$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+5$, $x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με $x=2$
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την παραπάνω εφαπτομένη και τον άξονα $y'y$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-5x+6$, $x\in\mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και της εφαπτομένης αυτής στα $x=-1$ και $x=3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(\lambda x)$, $\lambda>0$ και ε η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία ε
γ) Να βρείτε το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda^2E(\lambda)}{2-\sigma\upsilon\nu\lambda}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}$.
α) Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f, την ε, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\alpha$, $\alpha>0$
γ) Να βρείτε το $\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$

δ) Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 3 μον./sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = 1$

22. Εμβαδόν ορισμένο από συνάρτηση και ασύμπτωτη, όριο εμβαδού

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x - x$, την πλάγια ασύμπτωτή της και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \le 0 \\ xe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από την C_f, και την οριζόντια ασύμπτωτη αυτής.

3. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ ώστε $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{e^x}$ και $f(1) = \frac{1}{e}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$

β) i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη $x = 1$

ii) Να δείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx > \frac{2}{e}$

γ) Αν $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$, να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_g, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = t$ με $t > 1$

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{t \to +\infty} E(t)$ (Ο.Ε.Φ.Ε. 2009)

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x - x$, της πλάγιας ασύμπτωτής της και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{2\ln x}{x}$, της οριζόντιας ασύμπτωτής της και των ευθειών $x = \frac{1}{e}$ και $x = e$.

3. Δίνεται η $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + x - 1}{x^2}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της C_f στο $+\infty$

β) Να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 1$

γ) Αν το α αυξάνεται με ρυθμό 4 μον./sec τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε ως προς τον χρόνο, τη στιγμή που είναι $\alpha = 2$

4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 4$ για την οποία ισχύουν:

$$f'(x) > f(x) \text{ και } f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) τον τύπο της f

β) τα $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

γ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = -\ln 2$

23. Εμβαδόν ορισμένο από τρεις συναρτήσεις

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = -x^2 - x + 3,\ g(x) = -x^2 + x + 3,\ h(x) = x^2 + 2$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g, C_h με τετμημένες σημείων τομής τα

$$x = 0,\ x = 1,\ x = -1$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ και $h(x) = 3x - 15$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g, C_h.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x \ge 0$ και τις ευθείες

$$y = 1 \text{ και } y = -x + 3$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = 1$.

24. Διαίρεση χωρίου σε ισεμβαδικά χωρία ή σε χωρία με δοσμένο λόγο εμβαδών

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, την εφαπτομένη της στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα $x'x$

β) Να βρείτε την ευθεία $x = \alpha$ η οποία χωρίζει το χωρίο αυτό σε δύο ισεμβαδικά χωρία (ΣΧ.)

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x-3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία Α, Β που η C_f τέμνει τον άξονα των x

β) Αν Γ είναι το σημείο τομής των εφαπτομένων, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι 2 (ΣΧ.)

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3x^2$ και την ευθεία $\varepsilon: y=2\alpha x-1$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη C_f και της ευθείας ε να είναι ίσο με $\frac{4}{27}$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να βρεθεί η κατακόρυφη ευθεία $x=\alpha$ που διχοτομεί την επιφάνεια που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{x}$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=4$. Να βρείτε οριζόντια ευθεία $y=\lambda^2$ με $\lambda>0$ που να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3. Να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha>0$ ώστε η παραβολή $y=x^2+1$ να διχοτομεί το εμβαδόν του ορθογωνίου με κορυφές $(0,0)$, $(\alpha,0)$, $(0,\alpha^2+1)$ και (α,α^2+1). **(Harvard–MIT 2002)**

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3x^2+6x$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$. Να βρείτε ευθεία $y=\alpha x$ με $\alpha>0$ η οποία χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2}$ και οι ευθείες $x=2$ και $x=\alpha>2$. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η C_f να διχοτομεί την επιφάνεια που περικλείεται από τις ευθείες $x=2$ και $x=\alpha$ τον άξονα $x'x$ και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε την οριζόντια ευθεία που διαιρεί σε δύο ισοδύναμα μέρη την επιφάνεια που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f την εφαπτομένη αυτής στο σημείο $(1,1)$ και τον άξονα $x'x$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x$. Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την $y=e^\alpha$, $\alpha>0$ και τον άξονα $y'y$ είναι e^2+1 τότε να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

25. Προσδιορισμός παραμέτρου για μέγιστο – ελάχιστο εμβαδόν

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3\alpha^2x^2-2\alpha x+2$. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=1$ να είναι ελάχιστο.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=8\alpha x^3$, $x\in(0,+\infty)$ με $\alpha>0$. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ για την οποία το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την C_f, την ευθεία $y=\alpha^2$ και τις ευθείες $x=1$, $x=2$ είναι ελάχιστο.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x+3$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: x=\alpha-1$ και $\varepsilon_2: x=\alpha+1$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να είναι ελάχιστο το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες ε_1 και ε_2.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και οι ευθείες $x=0$ και $x=4$. Η ευθεία $y=\alpha>0$ τέμνει τη C_f και τις ευθείες $x=0$ και $x=4$ και ορίζει δύο χωρία με εμβαδά E_1 και E_2. Να προσδιορίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε το άθροισμα των εμβαδών να είναι ελάχιστο.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-1-\ln x$, με $x\in(0,+\infty)$.

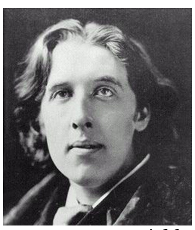
α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$

β) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=\lambda+1$

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{\lambda\to0^+}E(\lambda)$ και $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}E(\lambda)$

δ) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο

Όλοι βρισκόμαστε μέσα στον ίδιο λάκκο, αλλά μερικοί από μας κοιτάζουμε τα άστρα.



Oscar Wilde

26. Εμβαδόν αντίστροφης συνάρτησης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-1+\ln x$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x-\sigma\upsilon\nu x$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=\pi+1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της f^{-1}

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι 1–1

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+3f(x)=x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(-6)$, $f(-2)$ και $f(2)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) $f^3(x)>\dfrac{x+2}{4}$ για κάθε $x>2$

ii) $f^3(x)<\dfrac{x+2}{4}$ για κάθε $x<-6$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ε) Να εξηγήσετε γιατί η f είναι 1–1 και να ορίσετε την f^{-1}

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{7}x^3+\dfrac{6}{7}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y=x$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, $x=2$

27. $f(x)\ge 0\Rightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge 0$ ή αν $f(x)$ όχι παντού 0 $\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx>0$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\int_1^3 f^2(x)dx\ge\int_1^3 6f(x)dx-18$.

2. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_\alpha^\beta\left(\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{x^2+1}\right)dx>0$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συνεχείς συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)\cdot g(x)\ne 0$, $x\in\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως φθίνουσα και $\int_{f(1)}^{f(2)} g(x)dx>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ ισχύει

$$f(x)\cdot\int_\alpha^\beta f(t)dt>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^3 f(x)dx$

β) $\int_4^7 f(x)dx\ge\int_5^6 f(x)dx$

3. Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f^2(x)dx+\int_\alpha^\beta(f'(x))^2dx=\gamma$$

Να αποδείξετε ότι $f^2(\beta)-f^2(\alpha)\le\gamma$

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=35^x+12^x-15^x-28^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $\dfrac{34}{\ln 35}+\dfrac{11}{\ln 12}>\dfrac{14}{\ln 15}+\dfrac{27}{\ln 28}$

28. $f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f με συνεχής παράγωγο στο [0, 1] ώστε να είναι $f(0)=2$, $f(1)=e$,

$$f'(x) \geq 2xe^x + x^2e^x \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ β) $\int_1^2 x^x dx \geq e - 1$

2. Έστω συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{x^2} dx > \frac{4}{3}$.

3. Έστω συνάρτηση $f:(-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x+1}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\alpha} f(x)dx > \ln(\alpha+1)$, $\alpha \in (-1,0)$

β) $\int_{\lambda}^{\pi} f(x)dx > \int_{\lambda}^{2\pi} f(x)dx$, $\lambda \in (-1,+\infty)$

4. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $e^{-x}f(x) \geq 3x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = e^{\xi}$$

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ να αποδείξετε ότι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.

6. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2, \ x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα μόνο σημείο

β) Να αποδείξετε ότι $e^x > 2x + e^{-x}$, $x > 0$

γ) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} (e^x - x^2)dx > \int_{\alpha}^{\beta} (2 - e^{-x})dx$$

7. Έστω $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι κυρτή. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2x) - f(x) \geq xf'(x)$, $x \geq 0$

β) $2\int_0^1 f(2x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

γ) $\int_0^2 f(x)dx > 2f(1)$

29. Ανισότητες και ολοκληρώματα (Γνωστές ανισότητες)

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{2x\eta\mu x}{x^2+3}dx < \ln\frac{4}{3}$.

2. Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^2 e^{x^2} dx \geq 6$.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 \eta\mu x^2 dx < \frac{1}{3}$ β) $\int_0^1 \eta\mu^3 x dx < \frac{1}{4}$

γ) $\int_0^1 \frac{2\eta\mu x}{x^2+1}dx < \ln 2$ δ) $\int_0^1 \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}}dx < \sqrt{2} - 1$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^1 \ln(1+x^2)dx < \frac{1}{3}$ β) $\int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{2}{3}$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1+e^x}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι κυρτή

β) $4\int_0^1 f(x)dx > 1$

4. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x^5 - \ln x}{x-1} = -2$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε το $f'(1)$

γ) Έστω ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \ln f(x)$.

i) Να μελετήσετε τη g ως προς την κυρτότητα

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $M(1,g(1))$

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > \frac{e^4 - e^{-4}}{4}$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή

β) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες x'x, y'y και την ευθεία $x = 1$ να δείξετε ότι $\frac{1}{4} + \ln 2 < E < \ln(1+e)$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in (0,1)$ ώστε

$$4\int_0^{\alpha^2-\alpha+1} f(x)dx = f(\alpha) - \alpha + 1$$

30. $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$

1. Θεωρία

- Ανισότητα από μονοτονία της f και $\alpha \le x \le \beta$
- Ανισότητα από ακρότατο x_0: $f(x) \ge f(x_0)$ ή $f(x) \le f(x_0)$
- $m \le f(x) \le M$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$
- Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα της f στο $[\alpha,\beta]$. Ισχύει:

$$m(\beta-\alpha) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le M(\beta-\alpha)$$

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2+2x+6$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+6}dx \le \frac{2}{5}$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{e-1}{e} \le \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx \le \frac{e-1}{2}$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e-1$

3. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[2,4] \to [4,6]$. Να αποδείξετε ότι $2 \le \int_2^4 \frac{f(x)}{x}dx \le 6$.

4. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \sigma\upsilon\nu^2 x dx > \frac{9}{10}$

5. Να αποδείξετε ότι $\frac{\pi}{8} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\eta\mu x}}{3+\eta\mu x}dx \le \frac{\pi e}{6}$.

6. Έστω $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $\min = 2$ και $\max = 4$. Να αποδείξετε ότι:

$$2 < \int_1^3 f(x)dx \cdot \int_1^3 \frac{1}{f(x)}dx < 8$$

31. Εύρεση τύπου συνάρτησης – άκρων ολοκλήρωσης

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $e^{-x}f(x) \ge 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αν $\int_0^1 f(x)dx = e-1$ να βρείτε την f.

2. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) > 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$
- $\int_\alpha^{\eta\mu\alpha} f(x)dx = \eta\mu^3\alpha - \alpha^3$

Να βρείτε το α.

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[1,e] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) \ge \frac{1}{x} + 1$, $x \in [1,e]$
- $\int_1^e f(x)dx = e$

Να βρείτε τη συνάρτηση f.

2. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[1,3] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_1^3 f^2(x)dx = 6\int_1^3 xf(x)dx - 78$. Να βρείτε τον τύπο της f.

3. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x dx - \pi$$

Να βρείτε:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\eta\mu^2 x dx$

β) τον τύπο της f

γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{f'(x)}dx$

4. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ και έστω F μία αρχική της f στο $[0,1]$. Αν ισχύει

$$\int_0^1 \left(f^2(x) + 6F(x)\right)dx = 6F(1) - 3$$

να βρείτε τον τύπο της f.

5. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $f(x) > 2x$, $x \in \mathbb{R}$
- $\int_0^{\alpha-1} f(x)dx = \alpha^2 - 2\alpha + 1$

Να βρείτε το α.

32. Όριο ολοκληρώματος και κριτήριο παρεμβολής

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x)dx$

ii) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)dx$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\frac{dt}{t^2+1}$

β) $\lim\limits_{x\to0^+}\int_{x}^{2x}\frac{e^t}{t}dt$

γ) $\lim\limits_{x\to1^+}\int_{1}^{x}\frac{1}{\ln t}dt$

3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to0^+}\int_{x}^{3x}\frac{e^t}{t}dt=\ln 3$

β) $\lim\limits_{x\to1^+}\int_{x}^{x^3}\frac{1}{\ln t}dt=\ln 3$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

β) Να δείξετε ότι $\frac{x}{4x^2+1}\le\int_{x}^{2x}f(t)dt\le\frac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x>0$

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}f(t)dt$

δ) Να δείξετε ότι $2\int_{1}^{2}\left(\int_{x}^{2x}f(t)dt\right)dx\le\ln\frac{5}{2}$

Τον χρόνο που αφιερώνετε τώρα για να κατανοήσετε τις βασικές έννοιες και να εμβαθύνετε στον τρόπο σκέψης και εργασίας, θα τον κερδίσετε πολλαπλάσιο αργότερα.

Θεόδωρος Ν. Καζαντζής

33. Μελέτη ποσότητας μέσα στο ολοκλήρωμα

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & 0<x\ne1\\ 1, & x=1\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής

β) $\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)dt\ge\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x}tf(t)dt$ για κάθε $x>0$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & 0<x\ne1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής

β) $\int_{x}^{x^2}f(t)dt\le\frac{1}{x}\int_{x}^{x^2}tf(t)dt$ για κάθε $x>0$

34. Ολοκληρώματα και ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου

Ασκήσεις Α' ομάδας

1. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_{0}^{1}f(x)dx=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\alpha\in[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$f(\alpha)=2\alpha$$

2. Έστω μία συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ για την οποία ισχύουν $f(1)=1$ και $2\int_{1}^{2}f(x)dx>3$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,2]$ ώστε

$$f(x_0)>x_0$$

β) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$

Ασκήσεις Β' ομάδας

1. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt=\int_{\xi}^{\beta}f(t)dt$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, ώστε $\int_{x}^{x^2}f(t)dt+\int_{x^2}^{x}g(t)dt\ge x^2-x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f'(x_0)=g'(x_0)$$

Βιβλιογραφία

- Όλα τα βιβλία Μαθηματικών, του Ο.Ε.Δ.Β., όλων των τάξεων Δημοτικού, Γυμνασίου, Τ.Ε.Ε. και Λυκείου.
- Όλα τα βιβλία Φυσικής, του Ο.Ε.Δ.Β., όλων των τάξεων Γυμνασίου, Τ.Ε.Ε. και Λυκείου.
- Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και το Λύκειο. Τεύχος Β' – Μαθηματικά. Ο.Ε.Δ.Β. 2002.
- Άλγεβρα Α' Λυκείου. Χρήστος Γ. Σιωζόπουλος. Εκδόσεις Ζήτη. 1997.
- Άλγεβρα Β' γενικού λυκείου. Τεύκρος Μιχαηλίδης. Αντώνης Σκιαδάς. Εκδόσεις Πατάκης. 2013
- Άλγεβρα Β' λυκείου. Τεύχος 1. Θ. Ν. Καζαντζή. Εκδόσεις Πελεκάνος. 1991.
- Άλγεβρα Β' λυκείου γενικής παιδείας. Αλέξανδρος Τραγανίτης. Εκδόσεις Σαββάλας. 2000
- Ανάλυση για υποψήφιους 1ης Δέσμης. Δημήτρης Γεωργακίλας. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 1998.
- Αξιοσημείωτες επίπεδες καμπύλες. Ζώης Κωνσταντίνος. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 1998.
- Αριθμοί και άλλα. Τάσος Αγάπης. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 1998.
- Εισαγωγή στη Γεωμετρία. Ν. Κ. Στεφανίδης. Εκδόσεις Ζήτη. 1985.
- Εξετάσεις '95 – Θέματα. Θ. Καζαντζής – Ε. Μήτσιου – Γ. Μαυρίδης. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 1995.
- Ευκλείδη "Στοιχεία". Κ.Ε.ΕΠ.Ε.Κ. 2001.
- Θέματα Ε.Μ.Ε. Α', Β', Γ' Λυκείου
- Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας. Θεόδωρος Αραμπατζής, Κώστας Γαβρόγλου και λοιποί. Ο.Ε.Δ.Β. 1999.
- Καγκουρό Ελλάδας.
- Λεξικό Μαθηματικών. Μετάφραση και επεξεργασία : Γ. Ν. Παντελίδης – Δ.Χ. Κραββαρίτης. Εκδόσεις Πατάκη. 1997.
- Λεξικό Μαθηματικών όρων. Αριάδνη Καλογεροπούλου. Εκδόσεις Τροχαλία. 1992.
- Λεξικό Τεχνολογίας και Επιστημών. Εκδόσεις Σταφυλίδη.
- Λεξικό Μαθηματικών όρων. Θεολόγης Καρκαλέτσης
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου. (Επαναληπτικά θέματα και Διαγωνίσματα για λύση). Ν. Ψαθά. 2020
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου. (Η επανάληψη στην ύλη 2021). Ν. Ψαθά. 2020
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου. Χαρ. Στεργίου και άλλοι. Εκδόσεις Σαββάλας. 2006.
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου. Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών σπουδών – Οικονομίας και Πληροφορικής. Βασίλης Παπαδάκης. Εκδόσεις Σαββάλας. 2016.
- Μαθηματικά Γ' Λυκείου. Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών σπουδών – Οικονομίας και Πληροφορικής. Αναστάσιος Χ. Μπάρλας. Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική. 2015.
- Μαθηματικά Β' Λυκείου Κατεύθυνσης. Αναστάσιος Μπάρλας. Αυτοέκδοση. 2009.
- Μαθηματικά Β' Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης. Δημήτρης Γεωργακίλας. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2000.
- Μαθηματικά Β' Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης. Γ. Λ. Μαυρίδης. Εκδόσεις Μαυρίδη. 2009.
- Μαθηματικά 2ου κύκλου Τ.Ε.Ε. Λεωνίδας Θαρραλίδης. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 2002.
- Μαθηματικό τυπολόγιο. Murray R. Spiegel. ΕΣΠΙ, Αθήνα. 1976.
- Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών 1 – έως το 1650. Howard Eves. Εκδόσεις Τροχαλία. 1983.

- Μεγάλες στιγμές των μαθηματικών 2 – μετά το 1650. Howard Eves. Εκδόσεις Τροχαλία. 1990.
- Πως να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των Μαθηματικών. Μπάμπης Τουμάσης. Εκδόσεις Κωστόγιαννος. 1999.
- Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής. Αθ. Τζουβάρας. Εκδόσεις Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ. 1987.

Mathematica.gr

Περιοδικά:
Απολλώνιος
Αστρολάβος
Διάσταση
Ευκλείδης Α', Β', Γ'
Μαθηματική Επιθεώρηση
Μαθηματική Παιδεία
Τα μαθηματικά στο Ενιαίο Λύκειο

Επίσης διατίθενται τα παρακάτω φυλλάδια και βιβλία

Φυλλάδια

Β΄ Γυμνασίου:
- Εξισώσεις α΄ βαθμού και προβλήματα στη Β΄ Γυμνασίου. 2015.

Γ΄ Γυμνασίου:
- Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. 119 διδακτικές ενότητες. 2020.

Α΄ Λυκείου:
- Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. 96 διδακτικές ενότητες . 2021.
- Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. 96 διδακτικές ενότητες (Λύσεις). 2021.
- Γεωμετρία Α΄ Λυκείου. 59 διδακτικές ενότητες. 2020.
- Συνοπτικό φυλλάδιο θεωρίας Ευκλείδειας Γεωμετρίας. 2017.
- Τράπεζα θεμάτων στην Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. 2015.
- Τράπεζα θεμάτων στη Γεωμετρία Α΄ Λυκείου. 2015.

Β΄ Λυκείου:
- Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου. 100 διδακτικές ενότητες. 2021.
- Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου. 100 διδακτικές ενότητες (Λύσεις). 2021.
- Συνοπτικό φυλλάδιο θεωρίας Ευκλείδειας Γεωμετρίας. 2017.
- Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου. 80 διδακτικές ενότητες. 2021.
- Μαθηματικά Προσανατολισμού Β΄ Λυκείου. 80 διδακτικές ενότητες (Λύσεις). 2021.
- Γεωμετρία Γενικής Παιδείας Β΄ Λυκείου. 54 διδακτικές ενότητες. 2018.

Γ΄ Λυκείου:
- Μιγαδικοί αριθμοί. 2015.
- Μαθηματικά Πρ. Γ΄ Λυκείου. 1ο τεύχος. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης: 57 διδακτικές ενότητες. 2017.
- Μαθηματικά Πρ. Γ΄ Λυκείου. 2ο τεύχος. Διαφορικός Λογισμός: 90 διδακτικές ενότητες. 2017.
- Μαθηματικά Πρ. Γ΄ Λυκείου. 3ο τεύχος. Ολοκληρωτικός Λογισμός: 34 διδακτικές ενότητες. 2017.
- Μαθηματικά Πρ. Γ΄ Λυκείου. 4ο τεύχος. Επαναληπτικό φυλλάδιο. 2021.
- Μαθηματικά Πρ. Γ΄ Λυκείου. Συνοπτικό φυλλάδιο. 2021.
- Αναλυτικές λύσεις όλων των θεμάτων στα Μαθηματικά των Πανελλαδικών εξετάσεων 1ης και 4ης Δέσμης 1983 – 2001. 2013.
- Αναλυτικές λύσεις όλων των θεμάτων στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης των Πανελλαδικών εξετάσεων και των Επαναληπτικών εξετάσεων 2000 – 2015. 2015.
- Θέματα Πανελλαδικών και Επαναληπτικών εξετάσεων στα Μαθηματικά Γεν. Παιδείας 2000 – 2017. 2017.
- Αυτονόητες συμβουλές για τις Πανελλήνιες. 2021.

Επιμέλεια Βιβλίων

- **Μαθηματικοί Διαγωνισμοί και Ολυμπιάδες. Ε΄ Δημοτικού.** Σωκράτης Δ. Ρωμανίδης – Έφη Ν. Γυριχίδου. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009
- **Μαθηματικοί Διαγωνισμοί και Ολυμπιάδες. Στ΄ Δημοτικού.** Σωκράτης Δ. Ρωμανίδης – Έφη Ν. Γυριχίδου. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009
- **Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.** Ελένη Μήτσιου – Λεωνίδας Θαρραλίδης. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009.

Βιβλία

- Ένθετο λύσεων στο βιβλίο: **«Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Ελένη Μήτσιου – Λεωνίδας Θαρραλίδης.»** Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009.
- Ένθετο λύσεων στο βιβλίο: **«Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. Ελένη Μήτσιου – Αναστασία Τσιρογιάννη.»** Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009.
- **Λεξικό Μαθηματικών όρων**
- **Μαθηματικές στιγμές**
- **Σωκρατικός διάλογος για τα Μαθηματικά.** Η Φιλοσοφία και τα Μαθηματικά
- **888 στίχοι από τραγούδια**
- **888 σπαζοκεφαλιές / δραστηριότητες.** Αυτοέκδοση. 2021.
- **Τραγούδια για κιθάρα.** Ταξινομημένα κατά είδος συγχορδιών, δρόμων και ρυθμών
- **Στίχοι στα τραγούδια μου.**

e–mail: teokmail@gmail.com
blog: blogs.sch.gr/teomail