

Λύσεις των ασκήσεων

Όριο – Συνέχεια

1.1 Ερωτήσεις στη Θεωρία – Προτάσεις Σ – Λ

1. Συναρτήσεις

1. Σ.
2. Σ.
3. Σ.
4. Σ.
5. Σ.
6. Λ.
7. Λ. $f(x) < 0$
8. Σ.
- 9*. Σ.
10. Λ. Π.χ. η $f(x) = 0$.
11. Λ. Είναι το σύνολο των τετμημένων.
12. Σ.
12. Λ. Και από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων που βρίσκονται κάτω από αυτόν.
14. Σ
15. Σ. Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) \neq 0$ τότε $f^2(x_0) \neq 0$. Άτοπο.
16. Σ. Αν $g(x) = f(-x)$ τότε $g(-x) = f(x)$.
17. Λ. Για $x=1$, $y=0$ είναι $f(1) = f^2(1) + f^2(0) + 1$
Για $x=0$, $y=1$ είναι $f(1) = f^2(0) + f^2(1) - 1$
18. Σ.
19. Σ.
20. Λ. Π.χ. $f(x) = x^2$ για $\alpha = -1$ και $\beta = 1$.

2. Πράξεις συναρτήσεων

1. Λ. Μπορεί η μία να μηδενίζεται εκεί που δεν μηδενίζεται η άλλη.
Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$
και $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$.
2. Λ. Το $A \cap B$.
3. Λ.

4. Λ. Μπορεί να είναι

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Delta \\ -g(x), & x \notin \Delta \end{cases}.$$

3. Ίσες συναρτήσεις

1. Λ. Πρέπει να έχουν και ίδιο πεδίο ορισμού.
2. Σ.
3. Λ. $f(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in [0, +\infty)$ και $g(x) = x$, $x \in [0, +\infty)$
4. Λ. Π.χ.: Οι $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ δεν είναι ίσες γιατί $D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [0, +\infty)$.
5. Λ. Π.χ.: Οι $f(x) = \ln x^{2k}$ και $g(x) = 2k \ln x$ δεν είναι ίσες γιατί $D_f = (0, +\infty) \cup (0, +\infty)$ και $D_g = (0, +\infty)$.
6. Λ. Π.χ.: Οι $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$ με πεδίο ορισμού το $A = \{-1, 0, 1\}$ είναι ίσες αλλά δεν έχουν τον ίδιο τύπο.
7. Λ. Π.χ. $f(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ και $g(x) = 1$

4. Σύνθεση συναρτήσεων

1. Λ. Π.χ. Για τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$ ισχύει:
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \sqrt{x}$
με $x \in (0, +\infty)$ και
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\ln x}$
με $x \in [1, +\infty)$.
2. Λ. Π.χ. Για τις συναρτήσεις $f(x) = g(x) = x$ με $x \in \mathbb{R}$ είναι
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = x$ και
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) = x$ για $x \in \mathbb{R}$.
3. Σ.

4. Λ.

5. Σ.

6. Λ.

7. Λ.

8. Σ.

9. Σ.

10. Λ.

11. Λ. Π.χ. $f(x) = \sqrt{x}$ με

$$D_f = [0, +\infty) \text{ και } g(x) = x^2 + 3 \text{ με } D_g = \mathbb{R}$$

13. Λ. Και η $\varphi(x) = -\eta\mu x$,

$$\varphi_\lambda(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < \lambda \\ -\eta\mu x, & x \geq \lambda \end{cases}$$

5. Μονοτονία

1. Λ. Πρέπει για κάθε x_1, x_2 .
2. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^2$ για $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.
3. Λ. Η σχέση $f(x_1) < f(x_2)$ ισχύει για κάθε διάστημα αλλά όχι για την ένωσή τους.
4. Σ.
5. Λ. Π.χ. η $f(x) = \frac{1}{x}$.
6. Λ. Π.χ. Η $f(x) = \frac{1}{x}$
7. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^2 - 3x + 2$ η οποία δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
8. Λ. Σε ένα το πολύ σημείο.
9. Λ.
10. Λ. Π.χ.: Οι $f(x) = x$ και $g(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ ενώ η $f(x) \cdot g(x) = x^4$ δεν είναι γνησίως αύξουσα.
11. Σ.
12. Λ. Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$
Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ είναι και

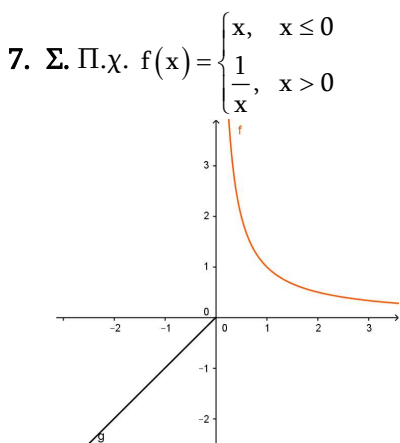
$x_1 < x_2$. Όμως η f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

6. Ακρότατα

1. Σ.
2. Σ.
3. Σ.
4. Λ. Παρουσιάζει ακρότατο στα $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
5. Σ.
6. Σ.
7. Λ. Π.χ. η $f(x) = e^x$
8. Λ.
9. Λ. Πρέπει να υπάρχουν και $x_1, x_2 \in D_f$ ώστε $f(x_1) = \kappa$ και $f(x_2) = \lambda$.
Π.χ.: $-3 \leq \eta\mu x \leq 7$ και το -3 και 7 δεν είναι ακρότατα
10. Λ. Π.χ. $f(x) = \eta\mu x$
11. Σ.
12. Λ. Π.χ. $f(x) = x$, $x \in [0, 3]$.

7. Συνάρτηση 1 – 1

1. Σ.
2. Λ. Π.χ. η $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. Λ. Η συνεπαγωγή που πρέπει να ισχύει είναι η:
αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$
4. Σ.
5. Λ. Μόνο αν η f είναι 1-1.
6. Σ.



8. Σ.
9. Λ. Αν υπήρχαν σημεία με ίδια τετμημένη, έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ τότε σε διαφορετικά x

αντιστοιχεί το ίδιο y άρα η f δεν είναι 1-1.

10. Λ. Ισχύει για κάθε συνάρτηση.
11. Λ. Μόνο αν η f είναι 1-1.
12. Λ. Αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.
13. Λ.
14. Λ. Π.χ.: Οι $f(x) = x^3$ και $g(x) = 1 - x^3$ είναι 1-1 αλλά η $(f+g)(x) = 1$ δεν είναι 1-1
15. Σ.
16. Λ.

8. Αντίστροφη συνάρτηση

1. Σ.
2. Σ.
3. Σ.
4. Σ.
5. Λ. Μία συνάρτηση μπορεί να είναι 1-1 χωρίς να είναι γνησίως μονότονη.
6. Λ. Μόνο αν η f είναι γνησίως αύξουσα.
7. Λ. Οι f και f^{-1} δεν έχουν κατ' ανάγκη το ίδιο πεδίο ορισμού.
8. Λ. Τα κοινά σημεία της C_f και $C_{f^{-1}}$ δεν βρίσκονται κατά ανάγκη πάνω στην $y = x$.
Π.χ. Η $f(x) = \frac{1}{x}$.
9. Λ. $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $x \in A_f$ ενώ $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $x \in f(A)$.
Π.χ. Έστω $f(x) = e^x$, $f^{-1}(x) = \ln x$
Είναι $(f^{-1} \circ f)(x) = \ln e^x = x$, $x \in \mathbb{R}$
και $(f \circ f^{-1})(x) = e^{\ln x} = x$, $x > 0$.
10. Σ.
11. Λ. Π.χ.: $f(x) = x$
12. Λ. Π.χ.: $f(x) = -x$
13. Λ. Δεν είναι 1-1.

9. Ορισμός ορίου στο x_0

1. Σ. Με την προϋπόθεση ότι ορίζονται τα όρια από αριστερά και δεξιά στο x_0 .
2. Σ.
3. Λ.
4. Σ.
5. Λ. Δεν ορίζεται το όριο κοντά στο 4.
- 6*. Λ. Μπορεί η f να ορίζεται μόνο δεξιά ή αριστερά του x_0 .
Π.χ. $f(x) = \sqrt{x-3}$ δεν έχει νόημα το όριο από αριστερά στο 3.
7. Σ.
8. Λ. Π.χ. Π.χ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.
9. Λ.
10. Λ
11. Λ. Π.χ.: $A_f = [0, 2] \cup \{3\}$
τότε δεν ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.
12. Σ. Π.χ. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

10. Όριο και διάταξη

1. Σ.
2. Σ.
3. Σ.
4. Σ.
5. Λ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \geq 1$
6. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει το όριο.
7. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει το όριο. Αλλά και αν υπάρχει το όριο τότε το όριο μπορεί να είναι ίσο με 0.
8. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει το όριο. Αλλά και αν υπάρχει είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.
9. Λ. Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$.
Π.χ.: $f(x) = x^2$ κοντά στο 0.
10. Λ. Μπορεί να μην υπάρχουν τα όρια.
11. Λ. Μπορεί τα δύο όρια να είναι ίσα.
12. Λ. $1 \leq m$. Π.χ.: $f(x) = x^2$ και $g(x) = -x^2$ στο $x_0 = 0$.

11. Ιδιότητες ορίων

$$1. \text{ Π.χ. } f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 1 \\ 3x+1, & x < 1 \end{cases} \text{ στο } x_0 = 1.$$

$$\text{Υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x)) = 0$$

$$\text{ενώ δεν υπάρχουν τα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x).$$

2. Σ.

3. Σ.

4. Λ.

5. Λ. Π.χ.: Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - \frac{|x|}{x} \text{ και } g(x) = 1 + \frac{|x|}{x}.$$

$$f(x) \cdot g(x) = 1 - 1 = 0$$

$$\text{Υπάρχει το } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$$

$$\text{ενώ δεν υπάρχουν τα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

6. Λ. Μπορεί να μην υπάρχουν τα δύο όρια.

$$\text{Π.χ.: } f(x) = g(x) = \sqrt{x} \text{ στο } 0.$$

$$7. \text{ Λ. Π.χ.: Αν } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty \text{ τότε το ζητούμενο}$$

όριο είναι απροσδιόριστη μορφή.

$$\text{Π.χ.: Το } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x} + \sqrt{-x}) \text{ δεν έχει}$$

νόημα.

8. Λ. Πρέπει να είναι θετικό.

9. Σ. Πράγματι

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \text{ και από το}$$

κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

10. Λ. Το όριο πάντα υπάρχει.

11. Σ.

12. Λ. Π.χ.: Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -5, & x < 2 \\ 5, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Είναι } |f(x)| = 5 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 2} |f(x)| = 5.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -5 \text{ άρα δεν υπάρχει το}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ επομένως ούτε το}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |f(x)|.$$

Άρα αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$ υπάρχει τότε

δεν ισχύει πάντα ότι

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|.$$

13. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει το όριο.

$$\text{Π.χ.: } f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}.$$

14. Λ. Ισχύει μόνο αν $\alpha \geq 0$

15. Λ. Μπορεί η f να μην έχει όριο

$$\text{στο } x_0. \text{ Π.χ. η } f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ δεν έχει}$$

$$\text{όριο στο } 0 \text{ ενώ } \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$$

16. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει το όριο.

$$\text{Π.χ. } f(x) = \begin{cases} -2, & x < x_0 \\ 2, & x \geq x_0 \end{cases}$$

17. Σ. Ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f^2(x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

18. Λ. Λόγω συμμετρίας της f είναι $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \kappa.$

19. Λ.

20. Σ.

21. Σ. Με την προϋπόθεση να ορίζονται σε κοινό διάστημα.

22. Σ. Με την προϋπόθεση να ορίζονται σε κοινό διάστημα.

23. Λ.

24. Λ. Μπορεί το όριο του παρονομαστή να είναι 0.

25. Σ.

12. Κριτήριο παρεμβολής

1. Σ.

2. Σ.

3. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει το όριο.

4. Λ. Μπορεί η f να μην έχει όριο

$$\text{στο } x_0, \text{ Π.χ.: Ισχύει } 2 < \frac{|x|}{x} < 3,$$

υπάρχουν τα ακριανά όρια και δεν υπάρχει το μεσαίο.

5. Λ. Μπορεί να υπάρχει και μπορεί να μην υπάρχει.

6. Λ.

13. Τριγωνομετρικά όρια

1. Σ.

$$2. \text{ Λ. Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0.$$

3. Σ.

4. Λ. Το όριο είναι ίσο με α .

5. Σ.

14. Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

1. Σ.

$$2. \text{ Λ. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

3. Σ.

$$4. \text{ Λ. } f(x) > 0$$

5. Σ.

6. Σ.

$$7. \text{ Λ. Για } f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0.$$

$$\text{Για } f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 \text{ και } g(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = 1.$$

Επομένως ανάλογα με τις f και g βρίσκω διαφορετικό όριο άρα είναι απροσδιόριστη μορφή.

8. Σ.

$$9. \text{ Λ. } f(x) < 0$$

$$10. \text{ Λ. Π.χ.: } f(x) = x. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

$$11. \text{ Λ. } f(x) = x \text{ για } x_0 = 0$$

12. Σ.

13. Λ.

$$14. \text{ Λ. Π.χ.: Έστω } f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\text{και } g(x) = -\frac{1}{x}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ ενώ}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 1$$

$$15. \text{ Λ. } x_0 = 1$$

16. Λ. Π.χ.: Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$ και

$$g(x) = x - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0.$$

17. Λ. $f(x) > 0$ κοντά στο α .

18. Λ. Π.χ.: $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $g(x) = |x|$

15. Όριο στο $+\infty$

1. Σ

2. Λ. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

3. Λ. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$.

4. Λ. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty$.

5. Σ.

6. Σ.

7. Λ. -8

8. Σ.

9. Λ. Π.χ.: $f(x) = \lambda x + 1$.

10. Λ. Για $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = x^2$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 1.$$

Για $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(x) = 2x^2$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 2.$$

Επομένως ανάλογα με τις f και g βρίσκω διαφορετικό όριο άρα είναι απροσδιόριστη μορφή.

11. Λ. Για $f(x) = x^2$ και $g(x) = x$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Για $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x^2$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως ανάλογα με τις f και g βρίσκω διαφορετικό όριο άρα είναι απροσδιόριστη μορφή.

12. Λ.

16. Συνέχεια συνάρτησης

1. Λ. Έπρεπε η συνάρτηση g να είναι συνεχής στο $f(x_0)$.

2. Σ.

3. Σ. $f(x_0) > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$

4. Λ.

5. Σ.

$$6. \Lambda. f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Είναι συνεχής στο $[0,1]$ αλλά δεν είναι συνεχής στο 0

$$7. \Lambda. f(x) = \begin{cases} 1-3x, & x < -1 \\ x^2+5, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$$

Είναι συνεχής στο $[-1,1]$ αλλά δεν είναι συνεχής στο -1.

8. Λ. Μόνον αν οι συναρτήσεις είναι συνεχείς.

9. Λ.

10. Σ.

11. Λ.

12. Λ. Η σύνθεση της f με την g .

13. Σ.

14. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ

15. Λ.

17. Θεώρημα Bolzano

1. Λ.

2. Σ.

3. Σ.

4. Σ.

5. Σ.

6. Σ.

7. Λ. Πρέπει οι ρίζες να είναι διαφορετικές.

8. Λ. Όχι αναγκαστικά. Δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Bolzano.

9. Σ.

10. Λ. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano πρέπει να είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

11. Λ. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano πρέπει να είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

12. Λ.

13. Λ. Μπορεί να έχει ρίζα αλλά μπορεί και να μην έχει ρίζα.

14. Λ. Πρέπει το A να είναι διάστημα.

15. Λ. Πρέπει η f να είναι συνεχής.

16. Λ.

17. Λ.

18. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

1. Σ.

2. Λ.

Πρέπει να είναι και μη σταθερή.

3. Σ. Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών της.

4. Σ.

5. Λ.

$$6. \Lambda. \text{Π.χ.: } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$$

19. Θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής

1. Λ. Πρέπει να είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

2. Λ. Είναι $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$.

3. Λ. Είναι το (B, A) .

4. Σ.

5. Λ. Πρέπει να είναι συνεχής.

6. Σ.

7. Λ. Π.χ. η $f(x) = x$.

8. Λ. Έχει σύνολο τιμών το

$$\left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right) \text{ που είναι } \alpha-$$

νοικτό διάστημα.

9. Σ. Είναι συνεχής και αν $\alpha > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ άρα } P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Ομοίως για $\alpha < 0$.

10. Λ.

11. Λ. Μόνο αν η f είναι γνησίως αύξουσα.

12. Λ. Μπορεί να είναι σταθερή ή όχι γνησίως αύξουσα.

13. Λ. Η εικόνα κλειστού διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα.

14. Λ.

15. Λ. Π.χ. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in (0, 6\pi)$

16. Σ.

17. Σ.

18. Σ. Π.χ. $f(x) = x$, $x \geq 0$ και $g(x) = \eta\mu x$, $x \geq 0$

19. Σ. Π.Χ. $f(x) = x\eta\mu x, x \geq 0$

20. Σ.

21. Σ.

$$21. \text{ Σ. Π.Χ. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

$$\text{και } g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

22. Λ.

23. Λ.

24. Λ.

25. Λ.

26. Λ.

27. Λ. Μόνο αν η f είναι συνεχής.

28. Λ.

29. Λ. Πρέπει το πεδίο ορισμού να είναι κλειστό διάστημα.

30. Σ.

31. Λ. Πρέπει το πεδίο ορισμού να είναι κλειστό διάστημα.

32. Σ.

1.3 Ασκήσεις για λύση

1. α) Έστω ότι δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα και $f^3(x_1) < f^3(x_2)$.

Προσθέτω κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις και προκύπτει:

$$f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow -2x_1 < -2x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

.

Ατοπο, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Για $x = -x$ προκύπτει $f^3(-x) + f(-x) - 2x = 0$

Προσθέτουμε κατά μέλη την δοσμένη σχέση και την παραπάνω και προκύπτει:

$$f^3(x) + f^3(-x) + f(x) + f(-x) = 0$$

$$\Rightarrow (f(x) + f(-x))(f^2(x) - f(x)f(-x) + f^2(-x) + 1) = 0 \Rightarrow 2x \cdot f^3(x) - \frac{2x}{f(x)} = 0 \Rightarrow 2x \left(f^3(x) - \frac{1}{f(x)} \right) = 0$$

Η δεύτερη παρένθεση είναι μεγαλύτερη του μηδενός άρα

$f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ άρα η f είναι περιττή.

$$\gamma) f(\alpha^2 + \beta^2) + f(2\alpha - 4\beta + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha^2 + \beta^2) = -f(2\alpha - 4\beta + 5)$$

$$\Leftrightarrow f(\alpha^2 + \beta^2) = f(-2\alpha + 4\beta - 5) \quad (f: 1-1)$$

1-1)

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = -2\alpha + 4\beta - 5 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^2 + (\beta - 1)^2 = 0$$

$$\alpha = -1 \text{ και } \beta = 1.$$

δ)

$$f^3(x) + 3x > 0 \Rightarrow -2x - f(x) + 3x > 0 \Rightarrow f(x) < x$$

Η f είναι περιττή άρα $f(0) = 0$.

Επομένως

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0 < x$$

και

$$x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0 > x.$$

$$\text{Άρα } x > 0 \Rightarrow x > f(x)$$

ε)

$$f^3(x) + f(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = -2x \Big|_{x \in A_g} \Rightarrow \Big|_{g(x) \in A_f} \Rightarrow \Big|_{x > 0} \Rightarrow \ln\left(\frac{e}{x}\right) \in [-1, 5]$$

Για $x \neq 0$ είναι $f(x) \neq 0$ άρα

$$f^2(x) + 1 = -\frac{2x}{f(x)}.$$

$$\text{Επομένως } 2x \cdot f^3(x) + f^2(x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^{-4} \leq x < e^2. \text{ Άρα } A_{f \circ g} \neq \emptyset \text{ επομένως ορίζεται η } f \circ g.$$

$$\Rightarrow f^4(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \pm 1$$

• Από τη δοσμένη σχέση για $f(x) = 1$ προκύπτει

$$1^3 + 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1 \quad \text{άρα } f(-1) = 1$$

• Η f είναι περιττή άρα $f(1) = -f(-1) = 1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $x = 1$ ή $x = -1$.

$$2. \text{ Α. } \alpha) A_f = [-1, 5),$$

$$f(A_f) = (-1, 4]$$

$$\beta) [-1, 0] \uparrow, [0, 1] \downarrow, [1, 3] \uparrow, (3, 5) \downarrow$$

γ) Υπάρχει οριζόντια ευθεία που τέμνει σε περισσότερα από ένα σημεία άρα δεν είναι 1-1.

δ) Δύο.

$$\epsilon) f(f(1)) = f(0) = 1$$

$$B. \alpha) g'(x) = \frac{x}{e} \cdot \left(-\frac{e}{x^2}\right) = -\frac{e}{x} < 0$$

άρα $g \downarrow$.

β) Είναι

$$\Big|_{x \in A_g} \Rightarrow \Big|_{x > 0} \Rightarrow \Big|_{g(x) \in [-1, 5]} \Rightarrow \ln\left(\frac{e}{x}\right) \in [-1, 5]$$

$$\Rightarrow \Big|_{x > 0} \Rightarrow \Big|_{-1 \leq \ln\left(\frac{e}{x}\right) < 5} \Rightarrow \Big|_{e^{-1} \leq \frac{e}{x} < e^5} \Rightarrow \Big|_{\frac{1}{e^5} \leq \frac{x}{e} < e} \Rightarrow \frac{1}{e^5} \leq \frac{x}{e} < e$$

$$\Rightarrow e^{-4} \leq x < e^2. \text{ Άρα } A_{f \circ g} \neq \emptyset \text{ επομένως ορίζεται η } f \circ g.$$

γ)

$$(f \circ g)(x) = 4 \Rightarrow f(g(x)) = f(3) \Rightarrow g(x) = 3$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{e}{x}\right) = 3 \Rightarrow \frac{e}{x} = e^3 \Rightarrow x = e^{-2}$$

3. Για $y = f(x)$ προκύπτει

$$f(y) + x = -1 \Rightarrow x = -f(y) - 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(y) \in \mathbb{R}$$

4. α) Πρέπει $f(x) > 0$.

Στη δοσμένη σχέση το δεύτερο μέλος είναι θετικό άρα και το πρώτο.

Επομένως

$$\ln f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 1.$$

πρέπει

β) Για $x=1$ προκύπτει $f(1) \cdot \ln f(1) = e$.

Έστω η συνάρτηση $g(x) = x \ln x - e$ για $x > 1$ η οποία έχει προφανή ρίζα το e .

Είναι $g'(x) = \ln x + 1 > 0$ για $x > 1$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μία το πολύ ρίζα.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το e άρα και από τη δοσμένη προκύπτει $f(1) = e$.

γ) Δεν γνωρίζουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$0 < f(x_1) < f(x_2) \xrightarrow{\ln \uparrow}$$

$$0 < \ln f(x_1) < \ln f(x_2)$$

$$\Rightarrow f(x_1) \cdot \ln f(x_1) < f(x_2) \cdot \ln f(x_2) \Rightarrow$$

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

Επομένως είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται.

$$\text{Έστω } y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$y \cdot \ln y = e^{f^{-1}(y)} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln(y \ln y)$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \ln(x \ln x)$$

5. α) Για $x=y=0$:

$$f(0) = f(0) + f(0) - \alpha \Rightarrow f(0) = \alpha$$

β) Για $y=-x$ είναι

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha = f(x) + f(-x) - \alpha \Leftrightarrow f(-x) = 2\alpha - f(x) \Rightarrow f(x) = g(x)(x^2+x) + 2 + \eta\mu x.$$

(1)

Για $y=-y$ είναι

$$f(x-y) = f(x) + f(-y) - \alpha \xrightarrow{(1)} \Leftrightarrow$$

$$f(x-y) = f(x) + 2\alpha - f(y) - \alpha$$

$$\Leftrightarrow f(x-y) = f(x) - f(y) + \alpha$$

γ) Για $y=x$ είναι

$$f(x+x) = f(x) + f(x) - \alpha \Rightarrow f(2x) = 2f(x) - \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)(x+1) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} =$$

(2)

Για $x=y=\frac{x}{2}$ είναι

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) - \alpha \Rightarrow f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - \alpha$$

(3)

Από τις (2) - (3) προκύπτει

$$f(2x) = 4f\left(\frac{x}{2}\right) - 3\alpha.$$

δ) i) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Από το (β) για $x=x_1$ και $y=x_2$ προκύπτει

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) + \alpha \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = \alpha$$

Από το (α) ξέρουμε ότι η $f(0) = \alpha$ και

η $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση (το 0)

$$\text{άρα } x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Επομένως η f είναι $1-1$.

ii) Αν θέσουμε όπου $x = f^{-1}(x)$ και

όπου $y = f^{-1}(y)$ στη δοσμένη σχέση

προκύπτει

$$f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y)) - \alpha$$

$$\Leftrightarrow f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) = x + y - \alpha \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(x + y - \alpha)$$

6. γ) Πρέπει

$$x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ή } x \geq 1.$$

Άρα $x=4$.

δ) Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 1 \geq f(x) \Rightarrow x^2 + 1 \geq \sqrt{x} + x^2 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$$

7. Έστω $g(x) = \frac{f(x) - 2 - \eta\mu x}{x^2 + x}$ άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3.$$

$$g(x) = \frac{f(x) - 2 - \eta\mu x}{x^2 + x} \Rightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \alpha = f(x) + f(-x) - \alpha \Leftrightarrow f(-x) = 2\alpha - f(x) \Rightarrow f(x) = g(x)(x^2+x) + 2 + \eta\mu x.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \cdot 0 + 2 + 0 = 2.$$

α)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(x^2+x) + 2 + \eta\mu x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(x^2+x) + \eta\mu x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(x^2+x) + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(x^2+x) + \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)(x^2+x) + \eta\mu x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} g(x)(x+1) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} =$$

$$3 \cdot 1 + 1 = 4$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ άρα

$$5 - 3f(x) < 0 \text{ κοντά στο } 0.$$

Επομένως είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 3f(x)| - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 5 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3f(x) - 6}{x^2 - x} =$$

8. • Για $x > 0$ είναι

$$\eta\mu(\alpha x) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} \leq \beta \frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x} + \gamma \frac{\eta\mu(\gamma x)}{\gamma x}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\gamma x)}{\gamma x} = 1$$

άρα η παραπάνω σχέση μας δίνει $\alpha \leq \beta + \gamma$. (1)

• Για $x < 0$ είναι

$$\eta\mu(\alpha x) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$$

$$\Rightarrow \alpha \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} \geq \beta \frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x} + \gamma \frac{\eta\mu(\gamma x)}{\gamma x}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\beta x)}{\beta x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\gamma x)}{\gamma x} = 1$$

άρα η παραπάνω σχέση μας δίνει $\alpha \geq \beta + \gamma$. (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\alpha = \beta + \gamma$.

Παρατήρηση: Λύνεται και με Θεώρημα Fermat.

9. $g(x) = \frac{f(3+h)}{h}$ άρα $f(3) = 0$.

$$A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 5$$

10.

$$f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) + 5 \leq 4g(x) + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

$$\Rightarrow [f(x) + 1]^2 + [g(x) - 2]^2 \leq \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι

$$\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \right]^2 + \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \right]^2 \leq \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq \left[f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \right]^2 + \left[g\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2 \right]^2 \leq 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\text{και } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$$0 \leq [f(x) + 1]^2 + [g(x) - 2]^2 \leq \sigma\upsilon\nu^2 x$$

και

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^2 x = 0$ άρα σύμφωνα με το

κριτήριο παρεμβολής

είναι και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left([f(x)+1]^2 + [g(x)-2]^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)+1] = \lim_{x \rightarrow 0} [g(x)-2] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι

οι f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$11. \alpha) i) \quad g(x) = \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x-1)}{(x-1)^2}$$

άρα

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 g(x)}{\eta\mu(x-1)} \Rightarrow \frac{f(x)}{x-1} = \frac{(x-1)g(x)}{\eta\mu(x-1)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}} = \frac{3}{1} = 3$$

ii) $+\infty$

$$\beta) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\alpha(x+3) - \beta(x-3) - 5}{x^2 - 3x + 2} = 7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\alpha - \beta)x + 3\alpha + 3\beta - 5}{(x-1)(x-2)} = 7 \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow (\alpha - \beta)2 + 3\alpha + 3\beta - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5\alpha + \beta = 5$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\alpha - 5\alpha - 5)x + 3\alpha + 3(5 - 5\alpha) - 5}{(x-1)(x-2)} = 7$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(6\alpha - 5)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = 7 \Rightarrow \alpha = 2,$$

$$\beta = -3$$

$$\gamma) \quad |f(x) - \eta\mu(x-1)| \leq x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - \eta\mu(x-1)| \leq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow -(x-1)^2 \leq f(x) - \eta\mu(x-1) \leq (x-1)^2$$

Για $x=1$ προκύπτει $f(1)=0$ και από

κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

Για $x > 1$:

$$-(x-1) \leq \frac{f(x)}{x-1} - \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \leq (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} - (x-1) \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} + (x-1)$$

Από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1.$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1.$$

12. Για $\lambda = 1$ η f είναι συνεχής στο 1 άρα στο $\mathbb{R}$

Για $\lambda \neq 1$: Για να είναι η f συνεχής στο λ αρκεί

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} f(x) \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2 \eta\mu \frac{1}{1 - \lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1) \eta\mu \frac{1}{1 - \lambda} \leq \lambda - 1$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 3 \leq 0 \text{ αδύνατο}$$

13.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x - \beta \eta\mu 2x}{x} = \alpha - 2\beta \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{2x} = \alpha - 2\beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt{4+x}}{\beta x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\beta x(2 + \sqrt{4+x})} = -\frac{1}{4\beta}$$

Για να είναι συνεχής πρέπει

$$\alpha - 2\beta = -\frac{1}{4\beta} = \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

14. Είναι

$$x\eta\mu x \leq \alpha x^2 + \beta(x+1) - 4 + \alpha \leq x$$

Για $x = 0$ είναι

$$0 \leq \alpha + \beta - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4$$

Για $x > 0$ είναι

$$\frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{\alpha x^2 + \beta(x+1) - 4 + \alpha}{x} \leq 1$$

και από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha x^2 + \beta(x+1) - 4 + \alpha}{x} = 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow$$

Άρα

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2(x+1) - 4 + 3}{x} = 3x + 1.$$

Επομένως $f(0) = 1$

15. α) Για να είναι συνεχής στο α πρέπει να ισχύει:

$$\Leftrightarrow \frac{2000}{2001} \alpha^2 \eta\mu \frac{1}{\alpha} = \alpha^3 + \alpha \Leftrightarrow \frac{2000}{2001} \eta\mu \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Για $x \neq 0$ ισχύει

$$|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -|x| < \eta\mu x < |x|.$$

Για $x > 0$ είναι

$$-x < \eta\mu x < x \Leftrightarrow \eta\mu x - x < 0$$

$$\text{Άρα αν } \alpha > 0 \text{ τότε } \eta\mu \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2000}{2001} \eta\mu \frac{1}{\alpha} < \frac{2000}{2001} \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} < \frac{2000}{2001} \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

(2)

$$2001\alpha^2 < -1 \text{ άτοπο.}$$

Για $x < 0$ είναι

$$x < \eta\mu x < -x \Leftrightarrow \eta\mu x - x > 0$$

$$\text{Άρα αν } \alpha < 0 \text{ τότε } \eta\mu \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2000}{2001} \eta\mu \frac{1}{\alpha} > \frac{2000}{2001} \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} > \frac{2000}{2001} \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$2001\alpha^2 < -1 \text{ άτοπο.}$$

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $\alpha \neq 0$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2000}{2001} x^2 \eta\mu \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + x)$$

άρα η f είναι συνεχής στο 0.

(το όριο με κριτήριο παρεμβολής, μη-δενική επί φραγμένη)

16. α)

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2xf(x) + 2g(x)$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + g^2(x) - 2g(x) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 + g^2(x) - 2g(x) + 1 = x^2$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - x)^2 + (g(x) - 1)^2 = x^2$$

β) Για $x = 0$ είναι

$$\Leftrightarrow f(0)^2 + (g(0) - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0 \text{ και } g(0) = 1.$$

$$\gamma) \quad \text{Είναι } 0 \leq (f(x) - x)^2 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq f(x) - x \leq |x|$$

$$\Leftrightarrow -|x| + x \leq f(x) \leq |x| + x$$

Το $x \rightarrow +\infty$ άρα για $x > 0$ προκύπτει

$$\frac{-|x| + x}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{|x| + x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{-x + x}{x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{x + x}{x^2}$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

δ) Έστω η συνάρτηση $h(x) = g(x) + 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } 0 \leq (g(x) - 1)^2 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow |g(x) - 1| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq g(x) - 1 \leq |x|$$

$$\Leftrightarrow -|x| + 1 \leq g(x) \leq |x| + 1$$

$$\text{Για } x > 0 \text{ είναι } -x + 1 \leq g(x) \leq x + 1$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \leq g(x) + 2x \leq 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \leq h(x) \leq 3x + 1$$

Από τη σχέση $h(x) \leq 3x + 1$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \quad (\text{αφού})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 1) = -\infty$$

και από τη σχέση $x + 1 \leq h(x)$ προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty \quad (\text{αφού})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1) = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της h είναι το $\mathbb{R}$.

Το O ανήκει στο σύνολο τιμών άρα η h έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

17. α) Είναι $f(1) = g(1) = 2$ και $f(2) = g(2) = 3$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $h(x) = 0$ μόνο για $x = 1$ και $x = 2$.

Για $x > 2$

- h συνεχής
- $h(x) \neq 0$

επομένως η h διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα για κάθε $x > 2$ είναι $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

ή για κάθε $x > 2$ είναι $h(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

β) Τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) - x - 1 = 0 \text{ το οποίο}$$

έχει λύση για $x = 1$ και για $x = 2$.

γ) Τα κοινά σημεία της C_g και της ευθείας προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = -x + \alpha \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow g(x) + x - \alpha = 0.$$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = g(x) + x - \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

• k είναι συνεχής

$$\bullet \quad k(1) \cdot k(2) = (3 - \alpha)(5 - \alpha) < 0$$

άρα από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η ευθεία $y = -x + \alpha$ τέμνει την C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο με τη τμημένη στο $(1, 2)$ για κάθε $\alpha \in (3, 5)$.

18. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\text{Άρα } f(f(x_1)) = f(f(x_2)).$$

Επομένως

$$2(f(f(x_1))) - 2\alpha f(x_1) = 2(f(f(x_2))) - 2\alpha f(x_2)$$

$$\Rightarrow \alpha^2 x_1 = \alpha^2 x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f^{-1} 1 - 1.$$

β) i) Η δοσμένη σχέση δίνει

$$2x - 2\alpha f(x) - \alpha^2 x = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha} x$$

.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

ii) Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \alpha f(x) - x = \alpha \frac{2 - \alpha^2}{2\alpha} x - x = -\frac{\alpha^2}{2} x$$

.

Για την g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[-1, 1]$
-

$$g(-1) \cdot g(1) = \frac{\alpha^2}{2} \cdot \left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) < 0$$

επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano εξίσωση

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha f(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-1, 1)$. Όμως η f είναι 1-1 άρα έχει μία το πολύ λύση. Επομένως η εξίσωση έχει μία ακριβώς λύση.

19. α)

$$1 \leq x \Rightarrow 1 \leq x^5 \Rightarrow 2 \leq 2x^5 \Rightarrow 1 \leq 2x^5 - 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2x^5 - 1 \xrightarrow{\ln x \uparrow}$$

$$\ln 1 \leq \ln(2x^5 - 1) \Rightarrow 0 \leq \ln(2x^5 - 1)$$

$$\Rightarrow -2\ln(2x^5 - 1) \leq 0$$

$$\xrightarrow{\ln 53 > 0} \frac{-2\ln(2x^5 - 1)}{\ln 53} \leq 0$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 + 2 - \frac{2\ln(2x^5 - 1)}{\ln 53} \leq 2\alpha^2 + 2 \Rightarrow f(x) \leq 2\alpha^2 + 2$$

$$\text{Άρα } 2\alpha^2 + 2 = 3 \Rightarrow 2\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2}.$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και έχει σύνολο τιμών το $[1, 3]$. Το 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$ ώστε $f(x_0) = 2$.

γ) Είναι

$$f(x) = 2\alpha^2 + 2 - \frac{2\ln(2x^2 - 1)}{\ln 53}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 - \frac{2\ln(2x^2 - 1)}{\ln 53} \text{ άρα } f(1) = 3.$$

Επομένως είναι $g(x) = 5x + 3$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) \cdot \eta\mu(x+2)}{(3 - \sqrt{-1-5x})^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(5x+3) \cdot \eta\mu(x+2)}{(3 - \sqrt{-1-5x})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(5x+3) \cdot \eta\mu(x+2)(3 + \sqrt{-1-5x})^2}{(3 - \sqrt{-1-5x})^2 (3 + \sqrt{-1-5x})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(5x+3) \cdot \eta\mu(x+2)(3 + \sqrt{-1-5x})^2}{(9+1+5x)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(5x+3) \cdot \eta\mu(x+2)(9+2\sqrt{-1-5x}-1-5x)}{5^2(2+x)^2}$$

$$\frac{1}{25} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\eta\mu(x+2)}{x+2} \cdot \lim_{x \rightarrow -2} [(5x+3) \cdot (3 + \sqrt{-1-5x})]$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\eta\mu(x+2)}{x+2} \lim_{x \rightarrow -2} [(5x+3) \cdot (3 + \sqrt{-1-5x})^2]$$

$$= 1 \cdot (-7) \cdot 6 = -42$$

ενώ το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2}$ δεν υπάρχει άρα δεν υπάρχει το ζητούμενο όριο.

20. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\text{Άρα } f^3(x_1) = f^3(x_2).$$

Επομένως

$$f^3(x_1) + f(x_1) = f^3(x_2) + f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f^{-1} 1 - 1.$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) < f(x_2)$.

$$\text{Άρα είναι και } f^3(x_1) < f^3(x_2).$$

Επομένως ισχύει

$$f^3(x_1) + f(x_1) < f^3(x_2) + f(x_2) \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως έχει μία το πολύ ρίζα.

Για $x = 0$ η δοσμένη σχέση δίνει

$$f^3(0) + f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$f(0) \cdot [f^2(0) + 1] = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

άρα το 0 είναι η μοναδική λύση της f .

Άρα η f έχει μοναδική λύση, το 0, στο $(-1, 1)$.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

άρα $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$.

Είναι

$$f^3(x) + f(x) = x^3 \Rightarrow f^3(x) - x^3 = -f(x)$$

$$\Rightarrow (f(x) - x)(f^2(x) + xf(x) + x^2) = -f(x)$$

Είναι $x > 0$ και $f(x) > 0$ άρα

$$f^2(x) + xf(x) + x^2 > 0, \quad x > 0.$$

Άρα το $f(x) - x$ είναι ομόσημο του

$$-f(x) < 0.$$

Άρα $f(x) - x < 0 \Rightarrow f(x) < x$.

δ) Από το (γ) για $x > 0$ είναι

$$0 < f(x) < x \Rightarrow 0 < \frac{f(x)}{x} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{1}{x^2}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ άρα σύμφωνα με το

$$\text{κριτήριο παρεμβολής} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0.$$

ε) Η δοσμένη σχέση δίνει

$$f^3(x) + f(x) = x^3 \Rightarrow \frac{f^3(x)}{x^3} + \frac{f(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x^3} + 0 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right)^3 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

21. Έστω x_0 η ρίζα της (1) Άρα

$$(f \circ f)(x_0) = (g \circ g)(x_0) \Leftrightarrow f(f(x_0)) = g(g(x_0))$$

$$\stackrel{f: \text{συνάρτηση}}{\Leftrightarrow} f(f(f(x_0))) = f(g(g(x_0)))$$

$$\stackrel{f \circ g = g \circ f}{\Leftrightarrow} f(f(f(x_0))) = g(f(g(x_0)))$$

$$\stackrel{f \circ g = g \circ f}{\Leftrightarrow} f(f(f(x_0))) = g(g(f(x_0)))$$

$$\Leftrightarrow (f \circ f)(f(x_0)) = (g \circ g)(f(x_0))$$

Όμως η (1) έχει μοναδική ρίζα το x_0

$$\text{άρα } f(x_0) = x_0$$

Ομοίως συμπεραίνουμε ότι

$$g(x_0) = x_0.$$

Άρα η $f(x) = g(x)$ έχει λύση το x_0 .

2. Διαφορικός λογισμός

2.1 Ερωτήσεις στη Θεωρία – Προτάσεις Σ – Λ

1. Παράγωγος και συνέχεια

1. Λ. Π.χ. η $f(x) = |x|$ στο 0.

2. Λ. Π.χ. η

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

3. Σ.

4. Σ. Η f' είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

5. Σ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

6. Λ. Π.χ. η $f(x) = |x|$

7. Λ. Το όριο πρέπει όχι μόνο να υπάρχει αλλά και να ανήκει στο $\mathbb{R}$, δηλαδή να είναι πραγματικός αριθμός.

2. Πράξεις παραγώγων

1. Λ. Ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) =$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

2. Λ. Έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

3. Λ. Ισχύει $(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$.

4. Λ. Είναι $(f \cdot g)'(x_0) =$
 $= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$

5. Λ. Είναι $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) =$
 $= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$

6. Λ. Ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$.

7. Λ. Ισχύει $(\sin x)' = \cos x$.

8. Λ. Ισχύει $(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha$.

9. Λ. Ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$.

10. Λ. Ισχύει $(\sigma \phi x)' = -\frac{1}{\eta \mu^2 x}$.

11. Σ.

12. Λ. Π.χ. Οι $f(x) = x\sqrt{x}$ και $g(x) = x\sqrt{-x}$ είναι παραγωγίσιμες

στο 0 με $f'(0) = g'(0) = 0$ ενώ η συνάρτηση $(f+g)(x) = x\sqrt{x} + x\sqrt{-x}$

ορίζεται μόνο στο 0 άρα δεν έχει νόημα η παράγωγος.

13. Σ. $f'(-x) = -f'(x)$

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x) + c.$$

Για $x = 0$ είναι $c = 2f(0)$.

Άρα είναι άρτια μόνο αν $f(0) = 0$.

14. Σ. $f'(-x) = f'(x)$

$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) + c.$$

Για $x = 0$ είναι $c = 2f(0)$.

Άρα είναι περιττή μόνο αν $f(0) = 0$.

15. Λ. $\frac{4}{3}$

16. Σ

17. Λ. Ισχύει $5^{3x} \ln 125$.

18. Σ. $D_f = \begin{cases} [0, +\infty), & \alpha > 0 \\ (0, +\infty), & \alpha < 0 \end{cases}$

Για $\alpha > 0$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ +\infty, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

19. Σ.
20. Λ. Είναι 0.
21. Σ.
22. Σ.
23. Λ. Τουλάχιστον $\kappa - 1$ ρίζες.
24. Σ.
25. Σ.
26. Λ. Π.χ. $f(x) = x, g(x) = \ln x$
27. Λ. Π.χ. Η $f(x) = \sqrt{x}$ και η $g(x) = -\sqrt{x}$ στο 0.

3. Εφαπτομένη

1. Λ. $\frac{1}{2}$
2. Σ. Η παράγωγος είναι περιττού βαθμού άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
3. Λ. Η παράγωγος είναι άρτιου βαθμού άρα δεν έχει πάντοτε ρίζα.
4. Λ. Μπορεί να έχουν κοινή εφαπτομένη.
5. Λ. Π.χ. Η $f(x) = x^3$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $A(1,1)$.
6. Σ.
7. Λ. Π.χ. Η $f(x) = x^2$ και η ευθεία $x = 0$.
8. Λ. Δεν ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

4. Θ.Μ.Τ. – Rolle

1. Λ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον.
2. Σ.
3. Λ. Με θεώρημα Rolle προκύπτει $f'(x_0) = 0$ (άτοπο).
4. Λ. Π.χ. η $f(x) = (x-1)^2 + 1$.
5. Λ.
6. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3 + 3$.
7. Σ.
8. Σ.
9. Σ.
10. Σ.
11. Σ.
12. Λ. Π.χ.: Η $f(x) = x^3$.
13. Σ.
14. Σ.

5. Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

1. Λ. Πρέπει το A να είναι διάστημα. Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 4, & x > 0 \end{cases}$.
2. Λ. $f(x) = g(x) + c, x \in \Delta$.
3. Λ. Πρέπει το A_f να είναι διάστημα. Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} 1, & x < x_0 \\ 4, & x > x_0 \end{cases}$.
4. Λ. $f(x) = ce^{-x}$
5. Σ
6. Λ. Είναι σταθερή στο A και στο B αλλά όχι σίγουρα με την ίδια τιμή.
7. Λ. Πρέπει το A να είναι διάστημα.
8. Σ
9. Σ

6. Μονοτονία

1. Λ. $f'(x) = -e^{1-x} < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
2. Λ. Ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Π.χ.: $f(x) = x^3$.
3. Σ. Είναι $\frac{1}{\eta\mu^2 x} > 0$ και $-2 \leq -2\eta\mu x \leq 2$ άρα $f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3 > 0$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
4. Λ. $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 3 > 0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
5. Λ. Πρέπει να είναι $f'(x) = 0$ σε διακεκριμένα σημεία που δεν σχηματίζουν διάστημα. Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x^3, & x > 1 \end{cases}$
6. Σ. Π.χ. η $f'(x) = x^3$ με $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(0) = 0$.

7. Λ. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = -x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η παράγωγός της, $f'(x) = -3x^2$ δεν είναι πάντα αρνητική στο $\mathbb{R}$ (μηδενίζεται για $x = 0$).
8. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά $f'(0) = 0$.
9. Λ. Μπορεί να είναι $f'(x) \leq 0$
10. Λ. Πρέπει να ορίζεται στο $x_0 = \beta$ και να είναι συνεχής.
11. Λ. Αν ισχύει $f'(x_0) > 0$ σε κάποιο εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
12. Λ. Πρέπει να είναι συνεχής και στα άκρα α, β .
13. Λ. Μπορεί να είναι σταθερή σε κάποιο υποσύνολο στο οποίο να είναι $f'(x) = 0$.
14. Λ. Μπορεί η f να μην είναι παραγωγίσιμη.
15. Σ.
16. Λ. Π.χ.: $f(x) = x^3$.
17. Σ.

7. Τοπικά ακρότατα

1. Λ. Τοπικό μέγιστο.
2. Σ
3. Λ. Πρέπει η f να είναι συνεχής στο x_0 .
4. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3$ για την οποία ισχύει $f'(x) = 3x^2$ και $f'(0) = 0$ χωρίς όμως το 0 να είναι τοπικό ακρότατο αφού $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
5. Σ.
6. Σ.
7. Σ.
8. Λ. Π.χ. Η $f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x \in (0, \pi] \\ 0 & \end{cases}$ δεν παρουσιάζει ακρότατο στο 0
9. Λ. Μπορεί να έχει στα άκρα.

10. Λ. Ίσως 4.
 11. Λ. Το πολύ 4.
 12. Λ. Το πρόσημο της f' είναι το ίδιο αριστερά και δεξιά του 1 άρα στο 1 δεν παρουσιάζει ακρότατο.
 13. Σ.
 14. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει ολικό μέγιστο.
 15. Λ. Πρέπει επιπλέον το x_0 να είναι ακρότατο και εσωτερικό σημείο (Θεώρημα Fermat).
 16*. Λ. Π.χ.:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(2 + \eta \mu \frac{1}{x} \right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Είναι $f(x) \geq f(0) = 0$ άρα η f έχει ακρότατο στο 0.

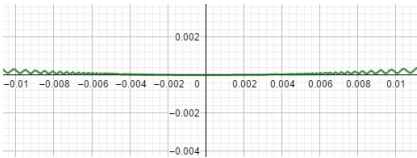
$$\text{Για } x_1 = \frac{1}{2\nu\pi} \text{ και } x_2 = \frac{1}{2\nu\pi + \pi},$$

$\nu \in \mathbb{N}^*$ όταν $\nu \rightarrow +\infty$ τότε αυτά τείνουν στο 0 ενώ

$$f'(x_1) = \frac{2}{\nu\pi} - 1 < 0 \text{ και}$$

$$f'(x_2) = \frac{6}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}} > 0 \text{ άρα η } f' \text{ δεν}$$

διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο 0.



Ομοίως και αριστερά του 0.

17. Λ. Αν η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη είναι δυνατόν να μην έχει τοπικό ακρότατο.

$$\text{Π.χ.: Η } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ εί-}$$

ναι συνεχής στο $[0, +\infty)$. Για

$$x_1 = \frac{1}{2\nu\pi} \text{ και } x_2 = \frac{1}{2\nu\pi + \pi}, \nu \in \mathbb{N}^*$$

όταν $\nu \rightarrow +\infty$ τότε αυτά τείνουν στο 0 ενώ $f(x_1) > 0$ και $f(x_2) < 0$ άρα η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο κοντά στο 0.

Άρα το $f(0)$ δεν είναι ακρότατο.

8. Θεώρημα Fermat

1. Σ.
 2. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3$ στο 0.

3. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3$ στο 0.
 4. Λ. Μπορεί το x_0 να είναι άκρο του πεδίου ορισμού.
 5. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3$.
 6. Λ. Μπορεί να μην ορίζεται η παράγωγος.
 7. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^3$ στο $O(0,0)$.

9. Κυρτότητα

1. Σ
 2. Λ. Π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Είναι $f'(x) = 4x^3 \geq 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως η $f''(x) = 12x^2$ δεν είναι θετική στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(0) = 0$.
 3. Λ. Π.χ.: $f(x) = x^4$.
 4. Λ. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση.
 5. Λ. Για να είναι το $A(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f πρέπει επιπλέον η C_f να έχει εφαπτομένη στο $A(x_0, f(x_0))$.

6. Λ. Π.χ. η $f(x) = x^4$ η οποία είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f''(0) = 0$.

7. Λ.
 8. Λ. Μπορεί να είναι $\pm\infty$.
 9. Λ. Μπορεί να μην υπάρχει η $f''(x_0)$.
 10. Λ. Πρέπει να αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν.
 11. Λ. Η f' είναι γνησίως αύξουσα.
 12. Λ. Π.χ. η $f(x) = e^x$.
 13*. Λ. Μπορεί απλώς να υπάρχει εφαπτομένη.
 14. Σ.
 15. Σ.
 16. Λ. Το ότι οι f και g εναλλάσσονται πρόσημο εκατέρωθεν του x_0

δεν μας εξασφαλίζει ότι και η h εναλλάσσει πρόσημο.

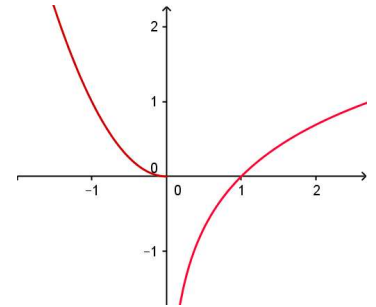
17. Λ. Π.χ.: $f(x) = x^4$.

10. Ασύμπτωτες

1. Σ. Π.χ.: Η $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$ έχει όριο το 0 στο $+\infty$ και στο $-\infty$ άρα έχει ασύμπτωτη τον x' . Όμως έχει άπειρα κοινά σημεία με τον x' .
 2. Λ. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχει ασύμπτωτες.

3. Λ. Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον y' και έχει κοινό σημείο με αυτόν.



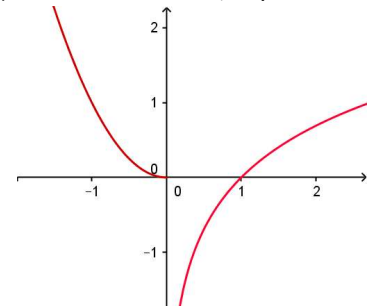
4. Λ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq \pm\infty$.

5. Σ
 6. Σ. Π.χ. Η $f(x) = e^{\phi x}$.
 7. Λ. Και στα σημεία που δεν είναι συνεχής.

8. Λ. Π.χ.: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον y' και έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



9. Λ. Πρέπει $\beta \in \mathbb{R}$.

10. Σ.
 11. Σ.

12. Λ. Μπορεί να έχει οριζόντια ασύμπτωτη. Π.χ. η $f(x) = -\frac{1}{x}$.

13. Λ. Πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$.

14. Σ.

15. Λ. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ τότε ορίζονται.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$ τότε πλάγια.

16. Σ. Με την προϋπόθεση να ορίζεται η συνάρτηση σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$ ή $(\alpha, +\infty)$.

$$17. \Sigma. \text{Π.χ.: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1, & x < 0 \\ x^2 + 3, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$18. \Lambda. \text{Π'χ.: } f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1).$$

11. Κανόνας του De L'Hospital

1. Λ. Πρέπει οι f' , g' , να είναι συνεχείς στο x_0 .

2. Λ. Δεν ξέρω αν η f είναι παραγωγίσιμη κοντά στο 0 και δεν ξέρω αν η f' είναι συνεχής στο x_0 .

3. Λ. Π.χ.:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\text{ενώ το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)'}{x'}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} + \eta \mu \frac{1}{x} \right)$$

δεν υπάρχει.

2.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. α. $f(x) = x(x-4)$ β. $f(x) = -x(x-4)$

γ. $f(x) = (x-4)x^2$ δ. $f(x) = \frac{1}{3}(x-4)x^3$

ε. $f(x) = -x(x-4)^2$ ς.

2. α) Σχ.1: f' , Σχ.2: g' , Σχ.3: g , Σχ.4: f

β) $f: (-\infty, 1]: \uparrow$, $[1, +\infty): \uparrow$

$g: (-\infty, 1]: \uparrow$, $[-1, 1]: \downarrow$, $[1, +\infty): \uparrow$

γ) $f \circ g: y = 0$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$

$g \circ f: y = 0$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$

δ) i) $-e$ ii) 0 iii) $+\infty$ iv) 0

2.4 Ασκήσεις για λύση

1. Για να είναι παραγωγίσιμη πρέπει να είναι συνεχής άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1)$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + \beta = f^2(1) \Leftrightarrow \beta = 1 - 2\alpha$$

Για να είναι παραγωγίσιμη στο 1 πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\alpha x^2 + \beta x - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\alpha x^2 + (1 - 2\alpha)x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2\alpha x + 1)(x - 1)}{x - 1} = 2\alpha + 1 \text{ Εί-}$$

$$\text{ναι } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^2(x) - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - 1}{x - 1} (f(x) + 1) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Άρα πρέπει } 2\alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2} \text{ και } \beta = -2.$$

2. Για να είναι παραγωγίσιμη στο 0 πρέπει το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\nu \eta \mu \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\nu-1} \eta \mu \frac{1}{x} = 0$$

(Μηδενική επί φραγμένη = μηδενική)

3. i) Για $x = y = 0$

$$\text{η δοσμένη σχέση δίνει } f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{ii) } f'(0) = 2006 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 2006$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2006$$

iii) Για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f(h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2006$$

4. α) Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - x|}{x - 1}$ και να είναι πραγματικός αριθμός πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1} |f(x) - x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

(αφού η f συνεχής στο 1).

$$\beta) \text{ Είναι } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \ell$$

• Για $x > 1$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - x|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x) - x}{x - 1} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} \right| =$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \right| = |\ell - 1|$$

• Για $x < 1$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) - x|}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x) - x}{x - 1} \right| = -\left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x - 1} \right| =$$

$$-\left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \right| = -|\ell - 1|$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο 1 πρέπει

$$|\ell - 1| = -|\ell - 1| \Rightarrow \ell - 1 = 0 \Rightarrow \ell = 1 \Rightarrow f'(1) = 1.$$

5. Διαιρούμε με x τη δοσμένη σχέση.

$$\bullet \text{ Για } x > 0 \quad \frac{\eta\mu^2 2x}{x} - x^3 \leq f(x) \leq \frac{\eta\mu^2 2x}{x} + x^3 \Rightarrow$$

$$2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} - x^3 \leq f(x) \leq 2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} + x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} - x^3 \right) = 0 \cdot 1 - 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} + x^3 \right) = 0 \cdot 1 + 0 = 0 \text{ άρα σύμφωνα με το}$$

κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

$$\bullet \text{ Για } x < 0 \quad \frac{\eta\mu^2 2x}{x} - x^3 \geq f(x) \geq \frac{\eta\mu^2 2x}{x} + x^3 \Rightarrow$$

$$2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} - x^3 \geq f(x) \geq 2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} + x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} - x^3 \right) = 0 \cdot 1 - 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2\eta\mu 2x \frac{\eta\mu 2x}{2x} + x^3 \right) = 0 \cdot 1 + 0 = 0 \text{ άρα σύμφωνα με το}$$

κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

Η f είναι συνεχής άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Διαιρούμε με x^2 τη δοσμένη σχέση.

$$\left(\frac{\eta\mu 2x}{x} \right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} \right)^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 4 \left(\frac{\eta\mu 2x}{2x} \right)^2 - x^2 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 4 \left(\frac{\eta\mu 2x}{2x} \right)^2 + x^2$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left[4 \left(\frac{\eta\mu 2x}{2x} \right)^2 - x^2 \right] = 4 \cdot 1 - 0 = 4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[4 \left(\frac{\eta\mu 2x}{2x} \right)^2 + x^2 \right] = 4 \cdot 1 + 0 = 4$$

άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 4.$$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 4$

$$\begin{aligned} 6. \quad f'(1) - g'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x) - f(1) + g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x) - 1}{x - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f(x) \leq g(x) + x^2 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq x^2.$$

• Για $x > 1$ είναι

$$f(x) - g(x) - 1 \leq x^2 - 1 \Rightarrow \frac{f(x) - g(x) - 1}{x - 1} \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - g(x) - 1}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\Rightarrow f'(1) - g'(1) \leq 2 \quad (1)$$

• Για $x < 1$ είναι

$$f(x) - g(x) - 1 \leq x^2 - 1 \Rightarrow \frac{f(x) - g(x) - 1}{x - 1} \geq \frac{x^2 - 1}{x - 1} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - g(x) - 1}{x - 1} \geq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$\Rightarrow f'(1) - g'(1) \geq 2$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει $f'(1) - g'(1) = 2$.

Κανόνες παραγωγίσης

$$7. \text{ Είναι } \ln(3^0 + 1) = \ln 2 \neq 0$$

$$\text{άρα } \sqrt{x} = \frac{f(x)}{\ln(3^x + 1)} \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Η $\ln(3^x + 1)$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 ως σύνθεση συνε-

χών συναρτήσεων (η $3^x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η

$\ln x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\ln(3^0 + 1) = \ln 2$).

Επομένως η $\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Άτοπο, άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Εφαπτομένη

$$8. \alpha) \text{ Είναι } f(1) = 3, f'(x) = 6x^2 + 1 \text{ και } f'(1) = 7,$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $(1, 3)$ είναι

$$y - 3 = 7(x - 1) \Leftrightarrow y = 7x - 4$$

$\beta)$ Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει x_0 ώστε

$$f'(x_0) = 25 \Leftrightarrow 6x_0^2 + 1 = 25 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2.$$

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A(2, 18)$, $B(-2, -18)$.

$\gamma)$ i) Είναι $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$ άρα $\varepsilon\varphi\omega > 0$

άρα $0 < \omega < 90$.

ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει x_0 ώστε

$$\begin{aligned}
 2 - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\
 \Leftrightarrow 2 - 2x_0^2 - x_0 &= (6x_0^2 + 1)(1 - x_0) \\
 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 &= 0.
 \end{aligned}$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$ η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $h(x_0) = 0$ δηλαδή υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

9. Είναι $f'(x) = 2x - 1$, $g'(x) = -2x + 3$ και $h'(x) = \frac{1}{x}$

Τα κοινά σημεία των C_f και C_g προκύπτουν από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ y = -x^2 + 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow (x, y) = (1, 1).$$

Είναι $f'(1) = g'(1) = 1$.

Άρα οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο την $y - 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x$.

β) Πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} f'(\alpha) = h'(\beta) \\ f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = h(\beta) - h'(\beta)\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - 1 = \frac{1}{\beta} \\ \alpha^2 - \alpha + 1 - (2\alpha - 1)\alpha = \ln \beta - \frac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \ln(2\alpha - 1) - \alpha^2 + 2 = 0$$

Έστω $g(\alpha) = \ln(2\alpha - 1) - \alpha^2 + 2$

Είναι $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{1}{2}} g(\alpha) = -\infty$ και $g(1) = 1 > 0$ άρα η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Επομένως οι C_f και C_h έχουν μία τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

10. α) Πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = g(\beta) - g'(\beta)\beta \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha, \beta) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ και}$$

$$(\alpha, \beta) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Άρα υπάρχουν δύο κοινές εφαπτομένες.

β) Πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$f'(\alpha) = g'(\beta) \Leftrightarrow 5\alpha^4 + \sqrt{2} = \text{συν}\beta + \eta\mu\beta$$

$$\text{Είναι } 5\alpha^4 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2} \text{ και } \text{συν}\beta + \eta\mu\beta \leq \sqrt{2}$$

άρα η ισότητα ισχύει μόνο για

$$5\alpha^4 + \sqrt{2} = 2 \text{ και } \text{συν}\beta + \eta\mu\beta = \sqrt{2}.$$

$$\text{Άρα είναι } \alpha = 0 \text{ και } \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$*** \text{συν}\beta + \eta\mu\beta \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow (\text{συν}\beta + \eta\mu\beta)^2 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu\beta\text{συν}\beta \leq 2 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu\beta\text{συν}\beta \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{συν}\beta - \eta\mu\beta)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

$$\gamma) \quad g(-2) = (-2 + 3)f(-2) = f(-2)$$

$$g'(x) = f(x) + (x + 3)f'(x) \Rightarrow$$

$$g'(-2) = f(-2) + (-2 + 3)f'(-2) \Rightarrow g'(-2) = f'(-2)$$

$$\text{Είναι } \begin{cases} g(-2) = f(-2) \\ g'(-2) = f'(-2) \end{cases}$$

άρα οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο -2 .

δ) Πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) = \lambda - 3 \\ f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = g(\beta) - g'(\beta)\beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 1 = \lambda - 3 \\ \beta^2 - \alpha^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \lambda = 2.$$

ε) Είναι $f'(x) = 5x^4 + 1$ και $g'(x) = -\eta\mu x$

Για να δέχονται οι C_f και C_g κοινή εφαπτομένη αρκεί να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε $f'(\alpha) = g'(\beta)$.

$$\text{Δηλαδή } 5\alpha^4 + 1 = -\eta\mu\beta.$$

$$\text{Αυτό ισχύει αν } \alpha = 0 \text{ και } \beta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η

$$y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 2.$$

στ) Πρέπει να υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = g(\beta) - g'(\beta)\beta \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(\alpha^2 + 2\alpha + 2) = 2\text{συν}\beta \\ -2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 2\eta\mu\beta - 2\beta\text{συν}\beta \end{cases}.$$

$$\text{Είναι } 3(\alpha^2 + 2\alpha + 2) = 2\text{συν}\beta \Leftrightarrow 3(\alpha + 1)^2 + 3 = 2\text{συν}\beta,$$

άτοπο γιατί το πρώτο μέλος είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 3 και το δεύτερο μικρότερο ή ίσο του 2.

Άρα δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη.

$$\mathbf{11. \alpha)} \text{ Είναι } g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = xg(x).$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο x_0 .

β) Η εφαπτομένη της C_g στο $A(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον $x'x$ άρα $g'(x_0) = 0$.

$$f(x) = xg(x) \Rightarrow f'(x) = g(x) + xg'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = g(x_0) + x_0 \cancel{g'(x_0)}^0 \Rightarrow f'(x_0) = g(x_0)$$

12. α) Είναι $f'(x) = 2x + 4$.

Η ευθεία έχει εξίσωση $y = g(x) = 6x + \mu$. Πρέπει

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + 4x_0 + 3 = 6x_0 + \mu \\ 2x_0 + 4 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

β) Η εξίσωση της ευθείας είναι $(\varepsilon): y = 6x + 2$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{6\alpha x^2 - \beta x + 2}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6\alpha x^2 - \beta x + 2}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6\alpha x^2 - \beta x + 2}{(x-1)(x+4)}.$$

Για να υπάρχει το όριο και να είναι πραγματικός αριθμός πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow 1} (6\alpha x^2 - \beta x + 2) = 0 \Rightarrow 6\alpha - \beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta = 6\alpha + 2$$

Επομένως οι συντεταγμένες του $M(\alpha, \beta)$ επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας (ε) άρα $M \in \varepsilon$.

13. α) Είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x$ άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από τυχαίο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y - x_0^3 + 3x_0^2 = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f και της εφαπτομένης της λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\text{Είναι } \begin{cases} y = x^3 - 3x^2 \\ y - x_0^3 + 3x_0^2 = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\dots \Rightarrow x = x_0 \text{ ή } x = 3 - 2x_0.$$

Αν είναι $x_0 \neq 3 - 2x_0 \Rightarrow x_0 \neq 1$ τότε η εφαπτομένη τέμνει την C_f και σε άλλο σημείο M .

β) Για $x_0 = 1$ η εφαπτομένη έχει με την C_f ένα μόνο κοινό σημείο.

14. Αν είναι $(x_0, f(x_0))$ το σημείο στο οποίο η ζητούμενη εφαπτομένη τέμνει την C_f τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

• Για να βρούμε το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον $x'x$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = \frac{-f(x_0) + x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)}$$

Το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον $x'x$ είναι το

$$A\left(\frac{-f(x_0) + x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)}, 0\right)$$

• Για να βρούμε το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον $y'y$ λύνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow y = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Το σημείο που η εφαπτομένη τέμνει τον $y'y$ είναι το $B(0, f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0)$

Είναι $(OA) = (OB)$ άρα

$$\frac{-f(x_0) + x_0 f'(x_0)}{f'(x_0)} = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \Rightarrow$$

$$-f(x_0) + x_0 f'(x_0) = f'(x_0) \cdot [f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0] \Rightarrow$$

$$-f(x_0) + x_0 f'(x_0) = f'(x_0) \cdot f(x_0) - [f'(x_0)]^2 \cdot x_0 \Rightarrow$$

$$f(x_0) \cdot [f'(x_0) + 1] - x_0 f'(x_0) \cdot [f'(x_0) + 1] = 0$$

$$\Rightarrow [f'(x_0) + 1] \cdot [f(x_0) - x_0 f'(x_0)] = 0 \Rightarrow$$

$$\bullet \quad f'(x_0) + 1 = 0 \Rightarrow x_0^2 + x_0 - 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_0^2 + x_0 = 0 \Rightarrow x_0(x_0 + 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = -1$$

Για $x_0 = 0$ η εφαπτομένη είναι

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -x \Rightarrow y = -x + 1$$

Για $x_0 = -1$ η εφαπτομένη είναι

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow 6x + 6y - 7 = 0$$

$$\bullet \quad f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x_0^3 + \frac{1}{2}x_0^2 - x_0 + 1 - x_0(x_0^2 + x_0 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{2}{3}x_0^3 - \frac{1}{2}x_0^2 = 0 \Rightarrow 4x_0^3 + 3x_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_0^2(4x_0 + 3) = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ ή } x_0 = -\frac{3}{4}$$

η εφαπτομένη είναι

$$y - f\left(-\frac{3}{4}\right) = f'\left(-\frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \Rightarrow \dots \Rightarrow 20x - 64y + 23 = 0$$

Απορρίπτεται γιατί για $y = 0$ είναι $x = -\frac{23}{20}$ άρα δεν τέμνει τον $x'x$ στον θετικό ημιάξονα

15. α) Έστω $y = g(x) = (3\lambda^2 + 1)x - 2\lambda^3 + 1$ οι ευθείες.

Είναι $f'(x) = 3x^2 + 1$ και $g'(x) = 3\lambda^2 + 1$. Αρκεί να υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^3 + x_0 + 1 = (3\lambda^2 + 1)x_0 - 2\lambda^3 + 1 \\ 3x_0^2 + 1 = 3\lambda^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0^3 + x_0 + 1 = (3x_0^2 + 1)x_0 - 2\lambda^3 + 1 \\ \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \lambda \\ \rightarrow \end{cases}$$

που επαληθεύει και τη δεύτερη εξίσωση. Άρα για κάθε σημείο $(x_0, f(x_0))$ της C_f υπάρχει $\lambda = x_0$ ώστε να ορίζεται ευθεία $y = g(x)$ η οποία να εφάπτεται στην C_f .

β) Για $x_1 < x_2: x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Επομένως ορίζεται η f^{-1} .

Είναι $f(-1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1$ άρα είναι $f^{-1}(-1) = -1$.

Για $x = f^{-1}(x)$ η σχέση $f(x) = x^3 + x + 1$ δίνει

$$f(f^{-1}(x)) = [f^{-1}(x)]^3 + f^{-1}(x) + 1$$

$$\Rightarrow x = [f^{-1}(x)]^3 + f^{-1}(x) + 1$$

Παραγωγίζουμε την παραπάνω σχέση και έχουμε

$$1 = 3[f^{-1}(x)]^2 [f^{-1}(x)]' + [f^{-1}(x)]' \text{ η οποία για } x = -1 \text{ δίνει}$$

$$1 = 3[f^{-1}(-1)]^2 [f^{-1}(-1)]' + [f^{-1}(-1)]'$$

$$\Rightarrow 1 = 3[(-1)]^2 [f^{-1}(-1)]' + [f^{-1}(-1)]' \Rightarrow$$

$$1 = 4[f^{-1}(-1)]' \Rightarrow [f^{-1}(-1)]' = \frac{1}{4}$$

Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f^{-1}(-1) = [f^{-1}(-1)]'(x - 1) \Rightarrow$$

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

Rolle

16. 1ος τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)(x - \alpha)(x - \beta)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Για την g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $g(\alpha) = g(\beta) = 0$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta) + f(x_0)(x_0 - \beta) + f(x_0)(x_0 - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{\alpha - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}.$$

2ος τρόπος: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (\alpha - x)(\beta - x) \frac{f'(x)}{f(x)} - (\beta - x + \alpha - x).$$

Για τη g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- $g(\alpha) \cdot g(\beta) = -(\beta - \alpha + \alpha - \alpha) \cdot [-(\beta - \beta + \alpha - \beta)] = -(\alpha - \beta)^2 < 0$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - x_0)(\beta - x_0) \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} - (\beta - x_0 + \alpha - x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)} = \frac{1}{\alpha - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}$$

17. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = e^{f(x)} \cdot (x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha \beta)$$

$$\text{Είναι } g(\alpha) = e^{f(\alpha)} \cdot (\alpha^2 - \alpha \cdot \alpha - \beta \cdot \alpha + \alpha \beta) = 0 \text{ και}$$

$$g(\beta) = e^{f(\beta)} \cdot (\beta^2 - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \beta + \alpha \beta) = 0$$

Για την g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha \beta) +$
- είναι $g(\alpha) = g(\beta) = 0$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0)(x_0^2 - \alpha x_0 - \beta x_0 + \alpha \beta) + e^{f(x_0)}(2x_0 - \alpha - \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)(x_0^2 - \alpha x_0 - \beta x_0 + \alpha \beta) + (2x_0 - \alpha - \beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{\alpha + \beta - 2x_0}{(x_0 - \alpha)(x_0 - \beta)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\alpha + \beta - 2x}{(x - \alpha)(x - \beta)} \Leftrightarrow \\ f'(x) \cdot (\alpha - x) \cdot (\beta - x) &= \beta - x + \alpha - x \Leftrightarrow \\ f'(x) \cdot (x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha \beta) + 2x - \alpha - \beta &= 0 \Leftrightarrow \\ e^{f(x)} f'(x)(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha \beta) + e^{f(x)}(2x - \alpha - \beta) &= 0 \Leftrightarrow \\ [e^{f(x)}(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha \beta)]' &= 0 \end{aligned}$$

18. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{f(x)} \cdot \eta_{\mu x}$.

Για την h ξέρουμε ότι είναι:

- συνεχής στο $[0, \pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων
- παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $h'(x) = e^{f(x)} f'(x) \cdot \eta_{\mu x} + e^{f(x)} \sigma_{\nu x}$
- $h(0) = h(\pi)$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\Leftrightarrow f'(x_1) = \varepsilon \varphi \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \varepsilon\varphi\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \\
 f'(x) &= -\sigma\varphi x \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\sigma\eta\mu x}{\eta\mu x} \Leftrightarrow \\
 f'(x) \cdot \eta\mu x + \sigma\eta\mu x &= 0 \Leftrightarrow \\
 e^{f(x)} f'(x) \cdot \eta\mu x + e^{f(x)} \sigma\eta\mu x &= 0 \Leftrightarrow \\
 \left[e^{f(x)} \cdot \eta\mu x \right]' &= 0
 \end{aligned}$$

19. α) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - 2x^2 \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Για τη συνάρτηση g ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0, 1]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $g'(x) = f'(x) - 4x$
- $g(0) = g(1)$ ($g(0) = f(0)$ και $g(1) = f(1) - 2$)

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 4x_0$

β) Έστω η συνάρτηση $h(x) = f'(x) - 5x$ $x \in [0, x_0]$.

Για την h ξέρουμε ότι:

- είναι συνεχής στο $[0, x_0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $h(0) \cdot h(x_0) = [f'(0) - 5 \cdot 0] \cdot [f'(x_0) - 5x_0]$
 $= f'(0) \cdot \left[\cancel{f'(x_0)} - 4x_0 - x_0 \right] < 0$

επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_1 \in (0, x_0) \subset (0, 1)$ ώστε $h'(x_1) = 0 \Leftrightarrow f'(x_1) = 5x_1$.

Θ.Μ.Τ.

20. Είναι $x \leq (x+1)f(x) \leq x(x+1) \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1$ (1)

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[0, x]$ και προκύπτει ότι

$$\text{υπάρχει } \xi \in (0, x) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x)}{x}.$$

$$\text{Από (1)} \quad \frac{1}{x+1} \leq f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{\xi+1} \leq 1 \text{ που ισχύει.}$$

$$\mathbf{21.} \quad |f(x)| \leq x \Leftrightarrow -x \leq f(x) \leq x \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 1 \quad (1)$$

Εφαρμόζω **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[0, x]$ και προκύπτει ότι υ-

$$\text{πάρχει } \xi \in (0, x) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

$$\text{Από την (1) προκύπτει } -1 \leq f'(\xi) \leq 1 \Leftrightarrow |f'(\xi)| \leq 1 \text{ που ισχύει.}$$

22. α) Είναι $\frac{1}{1+x^2} > 0$ και $1+x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2} \leq 1$.

$$\text{Άρα } 0 < f'(x) \leq 1.$$

β) Είναι $f(\beta) + \alpha < f(\alpha) + \beta \Leftrightarrow f(\beta) - f(\alpha) < \beta - \alpha$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < 1.$$

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[\alpha, \beta]$ και προκύπτει ότι

$$\text{υπάρχει } \xi \in (\alpha, \beta) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Άρα $f'(\xi) < 1$ που ισχύει από το α) ερώτημα άρα ισχύει και η αρχική.

γ) Είναι $y < 0$ άρα $x + y < x$.

Για $\alpha = x + y$ και $\beta = x$ από το β) ερώτημα προκύπτει

$$f(x) + x + y < f(x + y) + x \Leftrightarrow f(x) + y < f(x + y)$$

δ) $f(\alpha) + \beta \leq f(\beta) + \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) - f(\beta) \geq \alpha - \beta$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \geq 1.$$

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[\beta, \alpha]$ και προκύπτει ότι

$$\text{υπάρχει } \xi \in (\beta, \alpha) \text{ ώστε } f'(\xi) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

$$\text{Άρα } f'(\xi) \geq 1.$$

Από την παραπάνω σχέση και τη δοσμένη σχέση συμπεραίνουμε ότι $f'(\xi) = 1$ άρα η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς τη διχοτόμο των γωνιών του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου

23. Η f δεν είναι σταθερή άρα υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(x_0) < 0$. Γιατί αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα (άτοπο αφού έχει τρεις ρίζες).

Εφαρμόζουμε το **θεώρημα Rolle** στο $[\gamma, \beta]$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (\gamma, \beta)$ ώστε $f'(x_1) = 0$

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f' στο $[x_0, x_1]$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0, x_1) : f''(\xi) = \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$.

24.

25. Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f και στην g στο $[0, 2]$

και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2) - f(0)}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{f(2) - f(0)}{2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq f(2) - f(0) \leq 4 \quad (1)$$

$$\text{και } g'(\xi_2) = \frac{g(2) - g(0)}{2} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{g(2) - g(0)}{2} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq g(2) - g(0) \leq 4 \quad (2)$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη και προκύπτει ότι $4 \leq g(2) - f(0) \leq 8$. (γιατί $f(2) = g(0)$)

26. α) $f''(x) = g''(x)$ άρα από τις **συνέπειες του θεωρήματος της Μέσης Τιμής** συμπεραίνουμε ότι

$$f'(x) = g'(x) + c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } f'(1) = g'(1) + c \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$$

άρα $f'(x) = g'(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η παραπάνω σχέση δίνει $f'(x) = (g(x) + x)'$ άρα από τις συνέπειες του θεωρήματος της μέσης τιμής συμπεραίνουμε ότι $f(x) = g(x) + x + c_1$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = g(0) + 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$. Άρα είναι

$$f(x) = g(x) + x \Rightarrow f(x) - g(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Για την $g(x)$ έχουμε ότι:

• είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$$\bullet \quad g(x_1) \cdot g(x_2) = \left[\cancel{f(x_1)}^0 - x_1 \right] \left[\cancel{f(x_2)}^0 - x_2 \right]$$

$= x_1 x_2 < 0$ επομένως σύμφωνα με το **θεώρημα Bolzano** η $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2) .

γ) Εφαπτομένη C_f στο $(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Εφαπτομένη της C_g στο $(x_0, g(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y - (f(x_0) - x_0) = (f'(x_0) - 1)(x - x_0).$$

Για να βρούμε το σημείο τομής των δύο παραπάνω εφαπτομένων λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

$$\begin{cases} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y - (f(x_0) - x_0) = (f'(x_0) - 1)(x - x_0) \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 0$$

άρα τέμνονται πάνω στον $y'y$.

Ακρότατα

$$27. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}.$$

x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
f'	+	-	
f			

$$\text{Άρα } f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1 \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Από τον διπλανό πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x = e^{\frac{1}{2}}$ ίσο

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

$$\beta) \quad e^{x^2} \geq x^{2e} \Leftrightarrow \ln e^{x^2} \geq \ln x^{2e} \Leftrightarrow x^2 \geq 2e \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{1}{2e} \text{ που ισχύει από το } (\alpha)$$

$$\gamma) \quad \alpha^{x^2} \geq x^{2\alpha} \Leftrightarrow \ln \alpha^{x^2} \geq \ln x^{2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 \ln \alpha \geq 2\alpha \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x^2} \leq \frac{\ln \alpha}{2\alpha} \Leftrightarrow f(x) \leq f\left(\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

$$\text{Άρα είναι } \alpha^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = e.$$

Κυρτότητα

$$28. \alpha) \text{ Είναι } f'(x) = 2e^x + 1.$$

Αρκεί να υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{cases} f'(\alpha) = 3 \\ f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^\alpha + 1 = 3 \\ 2e^\alpha + \alpha - 3\alpha = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^\alpha = 1 \\ 2 - 2\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

β) Είναι $f''(x) = 2e^x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της εκτός από το σημείο επαφής. Άρα $f(x) \geq 3x + 2, x \in \mathbb{R}$.

$$29. \alpha) \text{ Είναι } f(1) = e, f'(x) = -\frac{e^x}{x^2} \text{ και } f'(1) = -e \text{ άρα η}$$

ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - e = -e(x - 1) \Leftrightarrow y = -ex + 2e.$$

$$\beta) \text{ Είναι } f''(x) = \dots = -\frac{-\frac{e^x}{x^2}x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{\frac{e^x}{x} + e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x(1 + 2x)}{x^4} > 0 \text{ για } x > 0 \text{ άρα η } f \text{ είναι κυρτή.}$$

Επομένως η C_f βρίσκεται «πάνω» από την εφαπτομένη της σε κάθε σημείο της εκτός από το σημείο επαφής.

$$\text{Άρα } f(x) \geq -ex + 2e \Leftrightarrow f(x) + ex \geq 2e.$$

30. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε ένα $x_0 > 0$. Άρα $f(x_0) < f(0)$.

Το 0 είναι τοπικό ελάχιστο της f άρα υπάρχει $x_1 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) > f(0)$.

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[0, x_1]$ και συμπεραίνουμε

$$\text{ότι υπάρχει } \xi_1 \in (0, x_1) \text{ ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} > 0$$

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[x_1, x_0]$

και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_0)$ ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} < 0$$

Η f είναι κυρτή άρα η f' γνησίως αύξουσα

$$\text{Άρα } \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \text{ άτοπο.}$$

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f .

$$\beta) \text{ Έστω } g(x) = f^2(x).$$

$$\text{Είναι } g'(x) = 2f(x)f'(x).$$

$$\text{Είναι } f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) > 0 \text{ για } x \neq 0.$$

$$\text{Για } 0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \text{ και } f(x_1) < f(x_2)$$

$$\text{άρα } g'(x_1) < g'(x_2).$$

$$\text{Για } x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) < 0$$

$$\Rightarrow 0 < -f'(x_2) < -f'(x_1) \text{ και } f(x_1) > f(x_2)$$

$$\text{άρα } -g'(x_1) > -g'(x_2) \Rightarrow g'(x_1) < g'(x_2)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα άρα η g είναι κυρτή.

31. α) Έστω η συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [0, 1].$$

Η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $h(0) = h(1)$ άρα σύμφωνα με το **θεώρημα Rolle** υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$.

Έστω ότι υπάρχει και $x_1 \in (0, 1)$ ώστε $h'(x_1) = 0$.

Ατοπο γιατί $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα (g' γνησίως φθίνουσα άρα η $-g'$ γνησίως αύξουσα).

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = g'(x_0).$$

β) Έστω $f(0) = f(1) = \alpha$ και $x_1 \in (0, 1)$.

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** στην f στο $[0, x_1]$ και στο $[x_1, 1]$ και συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (0, x_1)$ και $\xi_2 \in (x_1, 1)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = \frac{f(x_1) - \alpha}{x_1} \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1) - f(x_1)}{1 - x_1} = \frac{\alpha - f(x_1)}{1 - x_1}.$$

$$\text{Είναι } \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x_1) - \alpha}{x_1} < \frac{\alpha - f(x_1)}{1 - x_1} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f(x_1) > \alpha$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $g(x_1) < \alpha$.

Άρα για κάθε $x_1 \in (0, 1)$ ισχύει $f(x_1) > g(x_1)$,

δηλαδή $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

32. α) Είναι $f'(x) = \alpha \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$ και

$$f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\alpha-2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \alpha \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} \left(-\frac{2}{x^3}\right) > 0$$

για κάθε $0 < x < 1$ και $\alpha > 1$.

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(0, 1)$.

β) Έχει αποδειχθεί στην Βασική εφαρμογή 1.

γ) Από τη σχέση του ερωτήματος (β) συμπεραίνουμε ότι

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$$\text{Επομένως είναι } \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha + \left(y + \frac{1}{y}\right)^\alpha \geq 2 \left(\frac{x+y}{2} + \frac{1}{\frac{x+y}{2}}\right)^\alpha.$$

$$\text{Είναι } x + y = 1 \text{ άρα } \left(x + \frac{1}{x}\right)^\alpha + \left(y + \frac{1}{y}\right)^\alpha \geq 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^\alpha =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} + 2\right)^\alpha = 2 \left(\frac{5}{2}\right)^\alpha = 2 \frac{5^\alpha}{2^\alpha} = \frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}}$$

33.

34.

6.1. Βασικές ασκήσεις

1.

2.

3.

4.

5.

6.2. Ασκήσεις στο πνεύμα των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου

1. α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορι-

σμού της με $f'(x) = \frac{-\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x}$, $x \in (0, \pi)$.

• Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} = 0 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

• Λύνουμε την ανίσωση:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{-\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} > 0 \Leftrightarrow \sigma \nu \nu x < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Κατασκευάζουμε πίνακα μονotonίας:

x	0	$\pi/2$	π
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

Άρα f γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Η f' είναι επίσης παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της οπότε:

$$f''(x) = \frac{\eta\mu^3 x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x (-\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu^4 x} = \frac{\eta\mu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \pi)$$

άρα η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0, \pi)$ οπότε θα εξετάσουμε τι συμβαίνει στα άκρα του διαστήματος.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{\eta\mu x} = +\infty$$

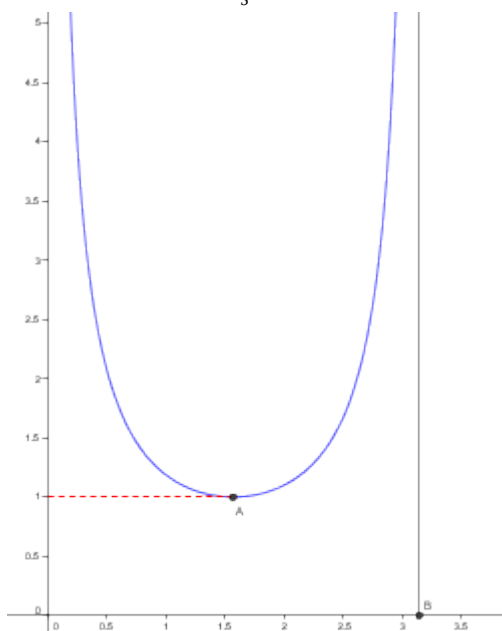
άρα οι ευθείες $x=0$ και $x=\pi$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f .

$$\begin{aligned} \gamma) \quad f((0, \pi)) &= f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right) \\ &= [1, +\infty) \cup (1, +\infty) = [1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\delta) \quad E = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{1}{\eta\mu x} \right| dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\eta\mu x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2 \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}}{2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}} dx$$

$$= \left[\ln \left(2\eta\mu \frac{x}{2} \right) - \ln \left(2\sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \right) \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ln 3}{2}$$



$$2. \quad f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1-x}{e^x} \Leftrightarrow (f(g(x)))' = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2}$$

$$\Leftrightarrow (f(g(x)))' = \left(\frac{x}{e^x} \right)' \Leftrightarrow f(g(x)) = \frac{x}{e^x} + c.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ προκύπτει } f(g(0)) = c \Leftrightarrow f(1) = c.$$

$$\text{Για } x=0 \text{ στην (1) προκύπτει } f(g(0)) = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

$$\text{Άρα } f(g(x)) = \frac{x}{e^x}.$$

$$\text{Από την (1) προκύπτει } f(g(x)) \cdot g(x) = x \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} \cdot g(x) = x$$

$$\Leftrightarrow g(x) = e^x.$$

$$\alpha) \quad \text{Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι } y - g(1) = g'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e = e(x-1) \Leftrightarrow y = g(1)x.$$

$$\beta) \quad \text{Από την (1) προκύπτει } f(g(x)) \cdot g(x) = x \Leftrightarrow f(e^x) \cdot e^x = x.$$

$$\text{Θέτουμε } u = e^x \Leftrightarrow x = \ln u \text{ και προκύπτει}$$

$$f(u) \cdot u = \ln u \Leftrightarrow f(u) = \frac{\ln u}{u} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$\text{Είναι } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e\sqrt{e}$$

άρα για κάθε $x \in (0, e\sqrt{e})$ η f είναι κοίλη.

$$\text{Είναι } g'(x) = g''(x) = e^x \text{ άρα η } g \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

$$\gamma) \quad \text{Είναι } y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

$$\delta) \quad \text{Είναι } E = \int_1^{\ln 3} \left(e^x - \frac{\ln x}{x} \right) dx.$$

$$(\text{Για } x > 0 \text{ είναι } e^x > 1 \text{ και } \frac{\ln x}{x} < 1 \text{ άρα } e^x > \frac{\ln x}{x}).$$

$$\text{Είναι } E = \left[e^x - \frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^{\ln 3} = 3 - \frac{1}{2} \ln^2(\ln 3) - e \text{ τ.μ.}$$

$$\epsilon) \quad e^{\sqrt{6-2e}} > \ln 3 \Leftrightarrow \sqrt{6-2e} > \ln(\ln 3) \Leftrightarrow 6-2e > \ln^2(\ln 3)$$

$$3 - \frac{1}{2} \ln^2(\ln 3) - e > 0 \Leftrightarrow E > 0$$

που ισχύει γιατί η $e^x - \frac{\ln x}{x}$ δεν είναι παντού μηδέν.

3.

$$4. \quad \beta) \quad f(x) \geq -\frac{\ln \lambda}{\lambda}. \text{ Η συνάρτηση } \varphi(\lambda) = -\frac{\ln \lambda}{\lambda} \text{ παίρνει}$$

τη μέγιστη τιμή της 1 για $\lambda = 1$.

$$\gamma) \quad \text{i) } f(2x^2 + 3) > f(x^2 + 4) \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

$$\text{ii) } \Theta.\text{M.T. στην } f \text{ στο } [x+2, 2x+1]. \text{ Τελικά } x = 1.$$

$$\delta) \quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow 1 + f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 \\ \Leftrightarrow x_0 e^{x_0} - e^{x_0} - 1 = 0$$

Θέτω συνάρτηση η οποία $[0, +\infty)$ έχει μοναδική λύση.

5. α)
β)
γ)
δ)

6. α)
β)
γ)
δ)

7. α)
β)
γ)
δ)

8. α)
β)
γ)

9. α)
β)
γ)
δ)

10. α)
β)
γ)
δ)

11. α) Είναι $\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f(1) = g(1) \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - x - 1 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$.

Είναι $e^x \geq x+1$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$ άρα $\alpha=0$.

β) Είναι $f(x) = 2^x$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 1$.

Τα κοινά σημεία τους είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2^x + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $h'(x) = 2^x \ln 2 + 2x - 2$ και $h''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0$.

Η h έχει δύο ρίζες, το 0 και το 1. Έστω ότι έχει και τρίτη ρίζα.

Για τις τρεις ρίζες, ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στην h στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$ και $[\rho_2, \rho_3]$. Προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ και $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ ώστε

$$h'(\rho_1) = h'(\rho_2) = 0.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στην h' στο $[\xi_1, \xi_2]$ και προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $h''(\xi) = 0$.

Άτοπο γιατί $h''(x) > 0$ άρα η h έχει δύο το πολύ ρίζες επομένως δύο ακριβώς.

γ) Είναι $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0$, $x \in [0, 1]$.

Έστω $\varphi(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in [0, 1]$.

Η φ είναι συνεχής και $\varphi(x) \neq 0$ για $x \in (0, 1)$ άρα η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, 1)$.

$$\text{Είναι } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -0,35 < 0$$

άρα $\varphi(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$, $[0, 1]$

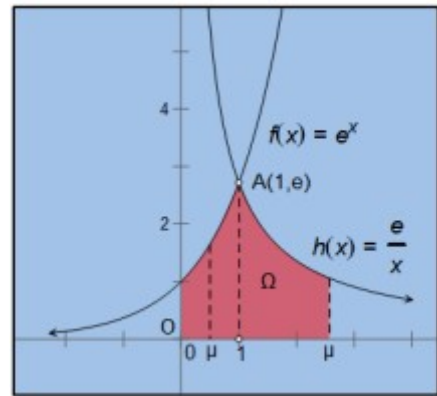
$$\begin{aligned} \delta) \text{ Είναι } E &= \int_0^1 g(x) - f(x) dx = \int_0^1 (-x^2 + 2x + 1 - 2^x) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + x - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^1 = \left(-\frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{2}{\ln 2} \right) - \frac{1}{\ln 2} \\ &= \frac{5}{3} + \frac{1}{\ln 2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

12. α) $2f(x) - 2g(x) > x^2 \Leftrightarrow 2e^x - 2x - 2 - x^2 > 0$.

Έστω $\varphi(x) = 2e^x - 2x - 2 - x^2$, $x \in [0, +\infty)$.

Είναι $\varphi'(x) = 2(e^x - x - 1) > 0$ για $x > 0$ άρα $\varphi \uparrow$ στο $[0, +\infty)$ επομένως $x > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

β)



Η C_f βρίσκεται στο 1^ο και 2^ο τεταρτημόριο και η C_g στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο. Άρα τα κοινά τους σημεία, αν υπάρχουν βρίσκονται στο 1^ο τεταρτημόριο.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = g(1)$ άρα το $(1, e)$ είναι κοινό σημείο. Η f είναι γνησίως αύξουσα και η h γνησίως φθίνουσα άρα έχουν ένα το πολύ κοινό σημείο. Επομένως μοναδικό κοινό τους σημείο είναι το $(1, e)$.

• Αν $0 < \mu \leq 1$ τότε $E(\Omega) = \int_0^\mu e^x dx = [e^x]_0^\mu = e^\mu - 1$ τ.μ.

• Αν $\mu > 1$ τότε $E(\Omega) = \int_1^\mu \frac{e}{x} dx = e[\ln x]_1^\mu = e \ln \mu$ τ.μ.

$$\gamma) \text{ i) } \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{E(\mu) + \ln \mu}{e^\mu - \mu - 1} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{e^\mu - 1 + \ln \mu}{e^\mu - \mu - 1} = (-\infty) \cdot 0^+ = -\infty$$

$$\text{ii) } \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{E(\mu) + \mu^2}{e^\mu + \mu + 1} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{e \ln \mu + \mu^2}{e^\mu + \mu + 1} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\text{D.L.H. } \mu \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e}{\mu} + 2\mu}{e^\mu + 1}$$

$$\stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\text{D.L.H. } \mu \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e}{\mu^2} + 2}{e^\mu} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^\mu} \left(-\frac{e}{\mu^2} + 2 \right) = 0 \cdot 2 = 0$$

13. α)

β)

γ)
δ)

14. α)

β)
γ)
δ)

15. α)

β)
γ)
δ)

16. α)

β)
γ)
δ)

17. α)

β)
γ)
δ)

18. Α. α) Είναι $g'(x) = \left(x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} \right)'$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} + x^2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} + x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} \cdot (-f'(x))$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} (1 + x^2 - xf'(x))$$

$$= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} (1 + x^2 - x^2 - 1 + xe^{f(x)}) = xe^{\frac{x^2}{2}} = \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)', \quad x > 0$$

β) Είναι $g'(x) = \left(e^{\frac{x^2}{2}} \right)'$ άρα $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} + c$.

Για $x = 1$ από τη σχέση (1) προκύπτει

$$g(1) = 1 \cdot e^{\frac{1^2}{2}} \cdot e^{-f(1)} = \sqrt{e}$$

$$\text{Είναι } g(1) = \sqrt{e} + c \Leftrightarrow c = 0 \text{ άρα } g(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

$$\text{Επομένως } x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-f(x)} = e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow x = e^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \ln x$$

Β. Είναι $\alpha'(t) = 2$.

$$\alpha) \quad E(\alpha) = \int_1^\alpha x' \ln x dx = [x \ln x]_1^\alpha - [x]_1^\alpha = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1.$$

Άρα $E(t) = \alpha(t) \ln \alpha(t) - \alpha(t) + 1$ και

$$E'(t) = \alpha'(t) \ln(\alpha(t)) + \alpha'(t) - \alpha'(t)$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που $\alpha(t_0) = e$.

Άρα $E'(t_0) = \alpha'(t_0) \ln(\alpha(t_0)) = 2 \text{ cm}^2 / \text{sec}$.

β) Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t) = f'(\alpha(t)) \Leftrightarrow (\varepsilon\varphi\theta(t))' = f''(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \theta(t)} \cdot \theta'(t) = f''(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\varepsilon\varphi^2 \theta(t) + 1) \cdot \theta'(t) = f''(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon\varphi^2 \theta(t_0) + 1) \cdot \theta'(t_0) = f''(\alpha(t_0)) \cdot \alpha'(t_0). \quad (2)$$

$$\text{Είναι } f'(x) = \frac{1}{x} \text{ άρα } f'(\alpha(t)) = \frac{1}{\alpha(t)} \Leftrightarrow f'(\alpha(t_0)) = \frac{1}{\alpha(t_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(\alpha(t_0)) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta(t_0) = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Είναι } f''(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ άρα } f''(\alpha(t)) = -\frac{1}{\alpha^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow f''(\alpha(t_0)) = -\frac{1}{\alpha^2(t_0)} \Leftrightarrow f''(\alpha(t_0)) = -\frac{1}{e^2}$$

$$\text{Από την (2) προκύπτει } \left(\frac{1}{e^2} + 1 \right) \cdot \theta'(t_0) = -\frac{1}{e^2} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\theta'(t_0) = \frac{-\frac{2}{e^2}}{\frac{1}{e^2} + 1} \Leftrightarrow \theta'(t_0) = -\frac{2}{e^2 + 1} \text{ rad / sec}.$$

19. α)

β)
γ)
δ)

20. α) $f(A) = \mathbb{R}$

$$e^{f(x)+1} > \frac{1}{f(x)+1} + e - 1 \Rightarrow \dots \Rightarrow x > x_0$$

β)

$$\gamma) \quad e^\alpha = \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta = e^{-\alpha} \text{ και } (K\Lambda M N) = e^\alpha (e^{-\alpha} - \alpha)$$

Τελικά $\alpha = 0$.

δ) Για $\alpha = 0$ είναι ΝΛ: $y = -x + 1$.

Αρκεί ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = -x + 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Θέτω συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - 1$, $x \in (0, +\infty)$.

Η g γνησίως αύξουσα και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ άρα υπάρχει μία ακριβώς ρίζα.

6.3. Γενικές επαναληπτικές ασκήσεις

1. α)

β)
γ)

δ)

2. α) Η f είναι συνεχής αφού είναι παραγωγίσιμη και $f(x) \neq 0$, $x \geq 1$ άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Ακόμη είναι $f(1) = e$ άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 1$.

$$\text{Είναι } f''(x) \cdot f(x) > (f'(x))^2 + 2f^2(x)$$

$$\stackrel{f(x)>0}{\Rightarrow} f''(x) > \frac{(f'(x))^2 + 2f^2(x)}{f(x)} > 0$$

άρα η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{x^2}$ με

$$g(1) = f(1) - e^1 = e - e = 0. \text{ Είναι } g'(x) = f'(x) - 2xe^{x^2} \text{ με}$$

$$g'(1) = f'(1) - 2e = 2e - 2e = 0. \text{ Επίσης}$$

$$g''(x) = f''(x) - 2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} = f''(x) - 2e^{x^2}(1 + 2x^2).$$

Για $x > \frac{1}{4}$ άρα και για $x > 1$ είναι $1 - 2x^2 < 0$ άρα

$$g''(x) > 0 \Rightarrow g'(x) \uparrow [1, +\infty). \text{ Επομένως για κάθε } x > 1 \text{ είναι}$$

$$g'(x) > g'(1) \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow [1, +\infty).$$

Άρα για $x > 1$ είναι $g(x) > g(1) = 0 \Rightarrow f(x) > e^{x^2}$.

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} = +\infty$ άρα από το ερώτημα (β) προκύπτει ότι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Για $x > 1$ είναι $x^2 > 1 \Rightarrow e^{x^2} > e \Rightarrow f(x) > e$ και $f(1) = e$.

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $[e, +\infty)$.

3. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα και $e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}$.

$$\text{Επομένως } f(x_1) + e^{f(x_1)} = f(x_2) + e^{f(x_2)} \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f: 1-1 \text{ και επομένως αντιστρέφεται.}$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x_1) < f(x_2)$. Άρα και $e^{f(x_1)} < e^{f(x_2)}$.

$$\text{Επομένως } f(x_1) + e^{f(x_1)} < f(x_2) + e^{f(x_2)}$$

$$\Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}.$$

γ) Η δοσμένη σχέση επαληθεύεται για $f(0) = 0$ και επειδή η f είναι 1-1 σημαίνει ότι το 0 είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 0$. Άρα $f^{-1}(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ομοίως η δοσμένη σχέση επαληθεύεται για $f(e) = 1$ και επειδή η f είναι 1-1 σημαίνει ότι το e είναι η μοναδική ρίζα της $f(x) = 1$. Άρα $f^{-1}(x) = e \Rightarrow x = 1$.

4. Α. i) $e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ άρα $e^{f(x)} \geq f(x) + 1$. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει $f(x) = x - e^{f(x)}$. Άρα

$$e^{f(x)} \geq x - e^{f(x)} + 1 \Rightarrow e^{f(x)} \geq \frac{x+1}{2} \Rightarrow f(x) \geq \ln \frac{x+1}{2}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+1}{2} = +\infty \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

ii) Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Β. i) Για $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι και

$$e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)}. \text{ Άρα } f(x_1) + e^{f(x_1)} = f(x_2) + e^{f(x_2)} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Δηλαδή η f είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται. Από τη σχέση

$$f(x) + e^{f(x)} = x \text{ για } y = f(x) \text{ έχουμε } y + e^y = x \text{ άρα}$$

$$f^{-1}(y) = y + e^y.$$

Επομένως ορίζεται η $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x + x$.

ii)

$$\text{Γ. i)} \text{ Είναι } f^{-1}(0) = 0 + e^0 = 1 \Rightarrow f(1) = 0.$$

Παραγωγίζουμε την (1) και προκύπτει

$$f'(x) + f'(x)e^{f(x)} = 1.$$

Για $x = 1$ είναι

$$f'(1) + f'(1)e^{f(1)} = 1 \Rightarrow f'(1) + f'(1)e^0 = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

ii)

Δ. i)

ii)

5. α) $f'(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, $x > 0$ άρα $f \uparrow (0, +\infty)$.

$f(1) = 0$ άρα το 1 είναι μοναδική ρίζα της f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.

$$\text{β)} \quad g'(x) = 2x + \ln x - \frac{1}{x} - 1 = f(x) \text{ και}$$

$$g''(x) = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0. \text{ Είναι } g(1) = -1 \text{ άρα } g(x) \geq -1.$$

x	0	1	$+\infty$
$g' = f$	-	+	
g			

$$\text{γ)} \quad h(x) - \varphi(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ άρα η g έχει μία ακρι-}$$

βώς ρίζα στο $(0, 1)$ και μία στο $(1, +\infty)$.

$$\text{δ)} \quad \dots \Leftrightarrow g(x) \geq -1 \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{ε)} \quad x^{x-1} = e^{2x-x^2} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \ln x = 2x - x^2 \Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ άρα δύο ρίζες.}$$

6. α) Είναι

$$\left[e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]' = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) + e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \dots = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}.$$

$$\text{Άρα } (f'(x))' = \left[e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]' \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + c \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{β)} \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ και } f(1) = e. \text{ Άρα } f(x) \geq e.$$

x	0	1	$+\infty$
f'	-	+	
f			

$$\gamma) \quad \left(\frac{e}{x}\right)^x \leq e \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{x}\right)^x \geq \ln e \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{e}{x}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x(\ln e - \ln x) \leq 1 \Leftrightarrow x(1 - \ln x) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$x - x \ln x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq x \ln x + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow e \leq e^{\ln x + \frac{1}{x}} \Rightarrow e \leq x \cdot e^{\frac{1}{x}} \text{ που ισχύει.}$$

$$\delta) \quad f(10) + f(12) > 2f(11)$$

$$\Rightarrow f(12) - f(11) > f(11) - f(10)$$

$$\Rightarrow \frac{f(12) - f(11)}{12 - 11} > \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10}.$$

Από το Θ.Μ.Τ. στο $[10, 11]$ και $[11, 12]$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (10, 11)$ και $\xi_2 \in (11, 12)$ ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = f(11) - f(10) \text{ και}$$

$$f'(\xi_2) = \frac{f(12) - f(11)}{12 - 11} = f(12) - f(11).$$

Είναι $f''(x) > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα επομένως $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$
 $\Rightarrow f(11) - f(10) < f(12) - f(11) \Rightarrow f(10) + f(12) > 2f(11)$ Άρα από την (1) προκύπτει ότι

7. α) $f(0) = 1, f'(0) = 2.$

β)

γ) i)

ii)

8. α) $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ και $g''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$

β) $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot e^x - 1 = 0$. Είναι $g(0) = -1$ και $g(1) = e - 1$ άρα από θεώρημα Bolzano έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$. g'' κυρτή άρα $g' \uparrow [0, 1]$ επομένως έχει μία το πολύ ρίζα. Άρα μία ακριβώς.

x	0	ξ	1
g'		-	+
g			

γ) Αρκεί να δείξω ότι $g(x) \geq g(\xi)$ για κάθε $x > 0$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα και έχει ρίζα το ξ .

δ) Είναι $g(\xi) = e^\xi - \ln \xi > 0$ γιατί $e^x > \ln x, x > 0$.

ε)

9.

10. α) $f'(x) = \frac{x}{x+1}$ άρα για $x \in (-1, 0]$ είναι γνησίως φθίνουσα και για $x \in [0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως στο 0 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = 1$.

β) $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty]$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1 > x$ άρα $e^\alpha > \alpha$. Για $x > 0$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και

$$f(e^\alpha) > f(\alpha) \Rightarrow e^\alpha - \alpha > \ln \frac{e^\alpha + 1}{\alpha + 1}.$$

δ) Έστω ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$f(e^\xi) = f(\xi) \Rightarrow e^\xi = \xi, \text{ άτοπο}$$

γιατί $e^x \geq x + 1 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) i)

ii) $\varphi'(x) = x + 1 - \ln(x + 1) - 1 + \frac{1}{x + 1}$

$$= x - \ln(x + 1) + \frac{1}{x + 1} \text{ και } \varphi''(x) = 1 - \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} =$$

$$\frac{(x + 1)^2 - (x + 1) - 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - x - 1 - 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + x - 1}{(x + 1)^2}.$$

Το τριώνυμο έχει ρίζες το $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ και $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ άρα για $x \in (-1, 0)$ είναι $x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow \varphi''(x) < 0$ άρα η φ' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$.

Επομένως για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $\varphi'(x) > \varphi'(0) = 1$ άρα $\varphi \uparrow (-1, 0]$.

11.

12. α) Για την f έχουμε ότι:

- Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Επίσης

$$\left|x \eta \mu \frac{1}{x}\right| = |x| \left|\eta \mu \frac{1}{x}\right| \leq |x| \text{ άρα } -|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Επομένως από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \eta \mu \frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$ άρα η f είναι συνεχής και στο 0.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.
- Είναι $f(\pi) = \frac{1}{\pi} \eta \mu \pi = 0 = f(0)$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η f πληροί τις προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$.

β) Για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ είναι

$$f'(x) = \eta\mu \frac{1}{x} + x \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \eta\mu \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}.$$

Από το θεώρημα Rolle συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\eta\mu \frac{1}{\xi}}{\sigma\upsilon\nu \frac{1}{\xi}} = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi}, \text{ άρα η εξίσωση } \varepsilon\varphi \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ έχει}$$

μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$.

$$\mathbf{13. \alpha)} \quad h'(x) = f(x) \cdot F\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{F(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \frac{3}{x} - \frac{3x}{x^2} = 0$$

άρα σύμφωνα με τις **συνέπειες του Θ.Μ.Τ.**

είναι $h(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$.

β) Για $x = 1$ από την δοσμένη σχέση προκύπτει

$$f(1) \cdot F(1) = 3 \Rightarrow F(1) = 1.$$

Επομένως $h(1) = F(1) \cdot F(1) = 1$ άρα $h(x) = 1$ για κάθε

$x > 0$. Άρα $F(x) \cdot F\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x > 0$.

γ) Ισχύει $F(x) \cdot F\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{F(x)}$ και

$$f(x) \cdot F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x} \Rightarrow F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{xf(x)}.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{3}{xf(x)} \Rightarrow F(x) = \frac{xf(x)}{3}.$$

$$\text{Άρα } \varphi'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^3 - 3x^2 F(x)}{x^6}$$

$$= \frac{f(x) \cdot x^3 - 3x^2 \cdot \frac{xf(x)}{3}}{x^6} = 0$$

άρα σύμφωνα με τις συνέπειες του Θ.Μ.Τ. είναι

$\varphi(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ για κάθε $x > 0$.

δ) Για $x = 1$ είναι $\varphi(1) = \frac{F(1)}{1^3} = 1$ άρα $\varphi(x) = 1$, $x > 0$.

$$\text{Άρα } \frac{F(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow F(x) = x^3 \Rightarrow f(x) = F'(x) = 3x^2.$$

14. α) $f'(x) = e^x + 1 > 0$ άρα $f \uparrow \mathbb{R}$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η f συνεχής άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-1, +\infty)$.

β) $f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f: -1 \rightarrow +\infty$ άρα η f αντιστρέφεται με

$$f^{-1}: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

γ) Η C_f είναι συμμετρική ως προς την $y = x$ με την $C_{f^{-1}}$.

Άρα τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την $y = x$ είναι τα ίδια με

τα κοινά σημεία της C_f με την $y = x$, δηλαδή οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = x \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$.

δ) Είναι $f(1) = e + 1 - 1 = e \Leftrightarrow f^{-1}(e) = 1$ και επειδή η f^{-1} είναι 1-1 το e είναι μοναδική λύση.

ε) Το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα. Επίσης είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα έχει μία το πολύ ρίζα. Επομένως έχει μία ακριβώς ρίζα.

στ) $E = \int_0^1 |f(x)| dx$. Είναι $f(0) = 0$ άρα $f(x) > 0$, $x > 0$.

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (e^x + x - 1) dx =$$

$$\left[e^x + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(e + \frac{1}{2} - 1 \right) - (e^0 + 0 - 0)$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

ζ) $I = \int_0^e f^{-1}(x) dx$. Θέτουμε

$$u = f^{-1}(x) \Rightarrow \begin{cases} f'(u) du = dx \\ x = 0 \Rightarrow u = f^{-1}(0) = 0. \\ x = e \Rightarrow u = f^{-1}(e) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } I = \int_0^1 u f'(u) du = \int_0^1 x f'(x) dx =$$

$$\left[x f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f(x) dx = f(1) - \int_0^1 (e^x + x - 1) dx$$

$$= e - \left[e^x + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = e - \left(e + \frac{1}{2} - 1 \right) + 1$$

$$= e - e - \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{3}{4}.$$

η) $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - e = (e + 1)(x - 1)$

$$\Rightarrow y - e = (e + 1)x - e - 1 \Rightarrow y = (e + 1)x - 1.$$

θ) Είναι $f''(x) = e^x > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Επομένως η C_f βρίσκεται «πάνω» από την παραπάνω εφαπτομένη.

$$\text{Άρα } E = \int_0^1 (f(x) - (e + 1)x + 1) dx$$

$$= \int_0^1 (e^x + x - 1 - ex - x + 1) dx = \int_0^1 (e^x - ex) dx =$$

$$\left[e^x - e \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left(e - \frac{e}{2} \right) - (e^0 - 0) = \frac{e}{2} - 1 \text{ τ.μ.}$$

15. α) Η f είναι συνεχής και μη μηδενική στο $(-1, +\infty)$

άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα αφού είναι $f(0) = 1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε

$x \in (-1, +\infty)$. Ομοίως και για την g .

$$\text{Είναι } 2f'(x) + f^2(x)g(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2f'(x) \cdot g(x) + f^2(x)g^2(x) = 0$$

$$\text{και } 2g'(x) + g^2(x)f(x) = 0$$

$$\Rightarrow 2g'(x) \cdot f(x) + f^2(x)g^2(x) = 0.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει $f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0.$$

Άρα είναι $\frac{f(x)}{g(x)} = c$ για κάθε $x > -1$ και $c \in \mathbb{R}$.

Για $x = 0$ είναι $c = 1$ άρα $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow f(x) = g(x)$, $x > -1$.

β)

γ)

δ)

16. α) Για $x = 0$ είναι $f(0) \cdot F(y) \geq f(y) \cdot F(0)$

$$\Rightarrow 2F(y) \geq f(y) \stackrel{x=y}{\Rightarrow} 2F(x) \geq f(x).$$

Για $y = 0$ είναι $f(x) \cdot F(0) \geq f(0) \cdot F(x) \Rightarrow f(x) \geq 2F(x)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $f(x) = 2F(x)$.

β) $F'(x) = 2F(x) \Rightarrow F'(x) - 2F(x) = 0$

$$\Rightarrow e^{-2x} F'(x) - 2e^{-2x} F(x) = 0 \Rightarrow (e^{-2x} F(x))' = 0$$

$$\Rightarrow e^{-2x} F(x) = c$$

Για $x = 0$ είναι $e^0 F(0) = c \Rightarrow c = 1$ άρα $F(x) = e^{2x}$ και

$$f(x) = F'(x) = 2e^{2x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Η εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο $(x_0, f(x_0))$ έχει

$$\text{εξίσωση } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y - 2e^{2x_0} = 4e^{2x_0}(x - x_0).$$

Η ευθεία διέρχεται από το $(0, 0)$ άρα

$$0 - 2e^{2x_0} = 4e^{2x_0}(0 - x_0) \Rightarrow 2e^{2x_0} = 4e^{2x_0}x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}.$$

Άρα η εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y - 2e^{\frac{1}{2}} = 4e^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow y - 2e = 4ex - 2e \Rightarrow y = 4ex.$$

Είναι $f'(x) = 4e^{2x}$ και $f''(x) = 8e^{2x} > 0$ άρα η f είναι κυρτή

στο $\mathbb{R}$. Επομένως η C_f βρίσκεται πάνω από την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης.

Άρα το χωρίο έχει εμβαδό

$$E = \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - 4ex) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2e^{2x} - 4ex) dx$$

$$= \left[e^{2x} - 2ex^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left(e - \frac{e}{2} \right) - 1 = \frac{e-2}{2} \text{ τ.μ.}$$

17. α)

β)

γ)

δ)

18. α) $f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R}$

β) Για $x = 0$ είναι $f'(0) = \frac{2}{1+e^{f(0)}} \Rightarrow f(0) = 0$ μοναδική α-φού $f \uparrow \mathbb{R}$.

$$\gamma) f''(x) = \frac{-2e^{f(x)} \cdot f'(x)}{(1+e^{f(x)})^2} < 0 \text{ άρα η } f \text{ κοίλη στο } \mathbb{R}.$$

Για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ η εφαπτομένη βρίσκεται «πάνω» από την C_f άρα δεν μπορεί να ανήκει σε ευθεία μαζί με άλλα δύο σημεία της C_f .

$$\delta) y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x$$

ε) f κοίλη άρα η εφαπτομένη βρίσκεται «πάνω» από την C_f δηλαδή $f(x) \leq x$.

$$\sigma\tau) f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} \Rightarrow f'(x) + e^{f(x)} f'(x) = 2$$

$$\Rightarrow (f(x) + e^{f(x)} - 2x)' = 0 \Rightarrow f(x) + e^{f(x)} - 2x = c.$$

Για $x = 0$ είναι $c = 1$ άρα $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$

ζ) Είναι $e^{f(x)} > 0$

$$\eta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\theta) f(x) \leq x \Rightarrow f(x) - x \leq 0.$$

$$\text{Είναι } f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow f(x) - x = x + 1 - e^{f(x)}.$$

$$\text{Άρα } x + 1 - e^{f(x)} \leq 0 \Rightarrow e^{f(x)} \geq x + 1 \Rightarrow f(x) \geq \ln(x + 1)$$

$$\iota) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

κ) Από το (η) και το (ι) είναι το $(-\infty, +\infty)$

λ) Παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\mu) f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow f(x) - (2x + 1) = -e^{f(x)}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)} = 0$ άρα η $y = 2x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$

$$\nu) f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} + \frac{e^{f(x)}}{x} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = -\frac{e^{f(x)}}{x} + 2 + \frac{1}{x}. \text{ Είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \stackrel{D.L.H.}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+e^{f(x)}} = 0$$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0x] = +\infty$ άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\xi) \text{ Το } f\left(\frac{e}{2}\right) = 1 \text{ επαληθεύει τη σχέση } f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$$

και επειδή η f είναι 1-1 (γνησίως μονότονη) συμπεραίνουμε ότι $f\left(\frac{e}{2}\right) = 1$

ο) Αν θέσουμε $y = f(x)$ στην $f(x) + e^{f(x)} = 2x + 1$ και λύσουμε ως προς x προκύπτει

$$y + e^y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y + e^y - 1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + e^x - 1}{2} \text{ με}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

$$\pi) \int_0^e f(t) dt = \frac{e}{2} - \int_0^1 f^{-1}(t) dt = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 (t + e^t - 1) dt =$$

$$\frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} + e^t - t \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + e - 1 \right) + \frac{1}{2} (0 + e^0 - 0) =$$

$$\frac{e}{2} - \frac{1}{4} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \tau. \mu.$$

19. Είναι $g(x) \neq 0$ και g συνεχής άρα η g δεν αλλάζει πρόσημο. Δηλαδή είναι παντού θετική ή παντού αρνητική. $f^2(0) + g^2(0) = 1 \Rightarrow f(0) = 0$.

α) i) $2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 0 \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow g'(x) = -g(x)f(x)$ (αφού $g(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$)

ii) Είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα η f

είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως είναι

$x > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow g'(x)$ ετερόσημο του $g(x)$

$x < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow g'(x)$ ομόσημο του $g(x)$

$g'(0) = 0$ και $g(0) = 1$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0], [0, +\infty)$ και έχει ακρότατο το 1.

β) $f'(x) = g^2(x) \Rightarrow f''(x) = 2g(x)g'(x)$

i) Αν είναι $x > 0$ τότε οι $g(x), g'(x)$ είναι ετερόσημες άρα είναι $f''(x) < 0$

Αν είναι $x < 0$ τότε οι $g(x), g'(x)$ είναι ομόσημες άρα είναι $f''(x) > 0$ και $f''(0) = 2g(0)g'(0) = 0$

Άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$, κυρτή στο $[0, +\infty)$ και το σημείο $(0, 0)$ είναι σημείο καμπής.

ii) Είναι $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow \dots \Rightarrow y = x$

γ) $E = \int_0^1 (x - f(x)) dx = \int_0^1 x dx - \int_0^1 f(x) dx$

$= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \frac{1}{2} + [\ln |g(x)|]_0^1 =$

$= \frac{1}{2} + \ln |g(1)| - \ln |g(0)| = \frac{1}{2} + \ln |g(1)|$

20.

21. α) Είναι $g(-x)g(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$

άρα είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Είναι $g'(x) = f(x) > 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η g έχει μία το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Για την g και για τυχαίο αριθμό $\alpha \neq 0$ έχουμε

- συνεχής στο $\mathbb{R}$
- $g(-\alpha)g(\alpha) < 0$

επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της g στο $(-\alpha, \alpha)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η g έχει μία ακριβώς ρίζα η οποία είναι το 0.

β) Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f'(0) = g(0) = 0$.

Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$x < 0 \Rightarrow g(x) < g(0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downarrow$

$x > 0 \Rightarrow g(x) > g(0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \uparrow$

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο 0

γ) Έστω $h(x) = g(x) - xf(0), x \geq 0$.

Είναι $h'(x) = g'(x) - f(0) = f(x) - f(0)$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα για $x > 0$ άρα είναι $h'(x) > 0 \Rightarrow h \uparrow$ στο $[0, +\infty)$. Έτσι για $x > 0$ έχουμε

$h(x) > h(0) \Rightarrow g(x) > xf(0)$

δ) Είναι $f''(x) = (f'(x))' = g'(x) = f(x) > 0$

Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Όμοια $g''(x) = g(x) \dots$

Άρα η g είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$. Στο 0 εμφανίζει σημείο καμπής.

ε) Είναι $h'(x) = -e^{-x}(f+g)(x) + e^{-x}(f'+g')(x) =$

$$e^{-x}(-f(x) - g(x) + g(x) + f(x)) = 0.$$

Ομοίως είναι $f'(x) = 0$

Άρα είναι $h(x) = c_1$ και $f(x) = c_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

στ) Είναι $h(0) = e^{-0}(1+0) = 1$ και $f(0) = 1$ άρα είναι

$h(x) = 1$ και $g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι

$$\begin{cases} h(x) = 1 \\ \varphi(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}[f(x) + g(x)] = 1 \\ e^x[f(x) - g(x)] = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) + g(x) = e^x \\ f(x) - g(x) = e^{-x} \end{cases}$$

Με πρόσθεση και αφαίρεση των παραπάνω σχέσεων έ-

χουμε: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

22. α) Έστω η συνάρτηση

$\Phi(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ με $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ άρα η $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ είναι συνεχής

για $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq x + \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Επομένως η Φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Είναι $\Phi(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)$ και $\Phi\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)$

Είναι $f(0) = f(1)$, άρα

$\Phi(0) \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = -\left[f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1)\right]^2 \leq 0.$

Αν $\Phi(0) \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ τότε για την συνάρτηση Φ ισχύουν οι προϋποθέσεις του **θεωρήματος του Bolzano**.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$\Phi(\xi) = 0.$

Αν $\Phi(0) \cdot \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(0) = 0 \Rightarrow \xi = 0 \\ \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \end{cases}$

Άρα υπάρχει $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi) = 0$.

β) Έστω $y > x$.

$$\text{Άρα } |y - x| = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow y - x = \frac{\beta - \alpha}{2} \Rightarrow y = x + \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Έστω η συνάρτηση

$$\Phi(x) = f(x) - f\left(x + \frac{\beta - \alpha}{2}\right) \text{ με } x \in \left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right].$$

Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα η $f\left(x + \frac{\beta - \alpha}{2}\right)$ είναι συ-

νεχής για $\alpha \leq x + \frac{\beta - \alpha}{2} \leq \beta$

$$\Leftrightarrow \alpha - \frac{\beta - \alpha}{2} \leq x \leq \beta - \frac{\beta - \alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{3\alpha - \beta}{2} \leq x \leq \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Επομένως η Φ είναι συνεχής στο $\left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$.

$$\text{Είναι } \Phi(\alpha) = f(\alpha) - f\left(\alpha + \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = f(\alpha) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

και

$$\Phi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\beta - \alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\beta)$$

Είναι $f(\alpha) = f(\beta)$, άρα

$$\Phi(\alpha) \cdot \Phi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = -\left[f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - f(\beta)\right]^2 \leq 0.$$

Αν $\Phi(\alpha) \cdot \Phi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < 0$ τότε για την συνάρτηση Φ ισχύουν

οι προϋποθέσεις του **θεωρήματος του Bolzano**.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(x_0) = 0.$$

$$\text{Αν } \Phi(\alpha) \cdot \Phi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(\alpha) = 0 \Rightarrow \xi = \alpha \\ \Phi\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \xi = \frac{\alpha + \beta}{2} \end{cases}$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in \left[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0) = 0$.

Δηλαδή υπάρχουν x, y με $|y - x| = \frac{\beta - \alpha}{2}$ ώστε $f(x) = f(y)$

$$\mathbf{23. \alpha)} \quad f(1) - \ln f(1) = 1 \Leftrightarrow \ln f(1) = f(1) - 1$$

Ισχύει $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$. Άρα $f(1) = 1$.

β) Για $f(x) = 1$ από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$1 - \ln 1 = x \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow x = 1$$

Για $f(x) = e$ από τη δοσμένη σχέση προκύπτει

$$e - \ln e = x \Leftrightarrow x = e - 1$$

γ) Παραγωγίζουμε τη δοσμένη σχέση και προκύπτει

$$f'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f'(x) \frac{f(x) - 1}{f(x)} = 1 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad (f(x) \geq 1)$$

και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

δ) Για $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ από τη δοσμένη σχέση προκύπτει $y - \ln y = f^{-1}(y)$.

Άρα είναι $f^{-1}(x) = x - \ln x$, $x \geq 1$.

$$\mathbf{ε)} \quad E = \int_1^e (x - x + \ln x) dx = \int_1^e \ln x dx = \dots = e - 1 \text{ τ.μ.}$$

24.

25.

26.

27.

$$\mathbf{28.} \quad f(0) - e^{-f(0)} = -1 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(0) = 0$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{x}}{x}$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f στο $[0, x]$ και συμπεραίνουμε

$$\text{ότι υπάρχει } \xi \in (0, x) : f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

$$\xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Rightarrow f'(x) - \frac{f(x)}{x} > 0$$

Άρα $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow (0, +\infty)$.

$$\mathbf{29.} \quad \ln(f(0) + 1) = -f(0) \Rightarrow \dots \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 > 0.$$

$$\frac{f'(x)}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - x} - \frac{1}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln(e^x - x) - x + c_1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln(e^x - x) - x + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 άρα και συνεχής.

Άρα $c_1 = c_2 = 0$.

$$\mathbf{30.} \quad \mathbf{\Theta.M.T.} \text{ στα } [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4].$$

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow 2f(1) < f(0) + f(2) \text{ και}$$

$$f'(\xi_3) < f'(\xi_4) \Rightarrow 2f(3) - f(4) > f(2).$$

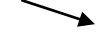
$$\text{Άρα } f(4) - f(0) < 2[f(3) - f(1)].$$

31.

32.

$$\mathbf{33.} \quad \mathbf{\alpha)} \quad \text{Είναι } f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2 \frac{x^2 - 1}{x} \text{ για } x \in (0, +\infty).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Είναι $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^2} > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Η f έχει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 0$.

γ) Είναι $f(x) \geq 0$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

δ) Είναι

$$E = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x^2 - 2 \ln x - 1) dx = \dots$$

34. α) $I = \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx.$

$$\text{Θέτουμε } x = \alpha + \beta - t \Rightarrow \begin{cases} dx = -dt \\ x = \alpha \Rightarrow t = \beta \\ x = \beta \Rightarrow t = \alpha \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } I = - \int_{\beta}^{\alpha} (\alpha + \beta - t) f(\alpha + \beta - t) dt$$

$$= - \int_{\beta}^{\alpha} (\alpha + \beta - x) f(\alpha + \beta - x) dx \stackrel{f(\alpha + \beta - x) = f(x)}{=} =$$

$$(\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - I.$$

$$\text{Άρα } I = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

β) Για $f(x) = \frac{1}{1 + \eta \mu x}$ είναι

$$f(\pi - x) = \frac{1}{1 + \eta \mu(\pi - x)} = \frac{1}{1 + \eta \mu x} = f(x).$$

Επομένως η f πληροί τις προϋποθέσεις του (α) ερωτήματος με $\alpha = 0$ και $\beta = \pi$ άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \eta \mu x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx.$$

$$\text{Θέτουμε } x = \frac{\pi}{2} + t \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \text{ άρα} \\ x = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sigma \nu t} dt$$

$$\text{Θέτουμε } t = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow \begin{cases} dt = -du \\ t = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

$$\text{επομένως } J = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1 + \sigma \nu \left(\frac{\pi}{2} - u\right)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu u} du.$$

$$\text{Άρα } I = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \eta \mu x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2 \epsilon \varphi \frac{x}{2}}{1 + \epsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \epsilon \varphi^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + \epsilon \varphi \frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} dx =$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{1 + \epsilon \varphi \frac{x}{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \pi$$

35. α) Για $x = 0$, $x = 1$

$$\text{βρίσκουμε ότι: } f(1) \cdot f(0) = f(\alpha + \beta) = f(\beta),$$

$$\text{και αφού η } f \text{ είναι 1-1, } \alpha + \beta = \beta \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

β) Ισχύει: $f(x) \cdot f(1 - x) = f(\beta)$.

$$\text{Έστω ότι } f(\beta) = 0, \text{ τότε } f(x) \cdot f(1 - x) = 0.$$

$$\text{Για } x = 0, x = 2, \text{ έχουμε ότι:}$$

- $f(0) = 0$ ή $f(1) = 0$ και

- $f(2) = 0$ ή $f(-1) = 0$.

$$\text{Συνεπώς: } f(0) = f(2) \text{ ή } f(0) = f(-1) \text{ ή } f(1) = f(2) \text{ ή } f(1) = f(-1)$$

$$\text{και αφού η } f \text{ είναι 1-1, θα προκύπτει } 0 = 2 \text{ ή } 2 = -1 \text{ ή } 1 = 2 \text{ ή } 1 = -1, \text{ Άτοπο σε κάθε περίπτωση, άρα } f(\beta) \neq 0.$$

γ) Για $x = \beta$, έχουμε: $f(\beta) f(1 - \beta) = f(\beta) \Leftrightarrow f(1 - \beta) = 1$

δ) $f(x) \cdot f(1 - x) = f(\beta) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ και $f(1 - x) \neq 0$

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα } 0 \notin f(A) \Rightarrow f(A) \neq \mathbb{R}$$

36. α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $f(x_1) = f(x_2)$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Άρα, η } f \text{ είναι "1-1".}$$

β) Έστω η εξίσωση

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(g(x)) = f(y) \Leftrightarrow x^3 = f(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{f(y)}, & f(y) \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-f(y)}, & f(y) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

γ) Έστω $f(g(x)) = x^2 \Rightarrow f(g(f(x))) = f^2(x)$

$$\Rightarrow f(x^3) = f^2(x)$$

$$\text{Για } x = 0, f(0) = 0 \text{ ή } f(0) = 1$$

$$\text{Για } x = 1, f(1) = 0 \text{ ή } f(1) = 1$$

$$\text{Για } x = -1, f(-1) = 0 \text{ ή } f(-1) = 1$$

$$\text{Αν } f(0) = 0 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow f(-1) = f(0) \text{ ή } f(1)$$

$$\text{Αν } f(0) = 1, \text{ αντίστοιχα καταλήγουμε σε άτοπο.}$$

37.**38. α)** Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$xf'(x) = \frac{x+1}{e^{f(x)}+1} \Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x) + f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow (e^{f(x)} + f(x))' = (x + \ln x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x + c$$

$$\text{Είναι } f(1) = 0 \text{ άρα } e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x. \quad (1)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = e^x + x$ που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα άρα 1-1

Για κάθε $x > 0$ από την (1) προκύπτει:

$$g(f(x)) = g(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = \ln x$$

β) Θέτουμε $x = \frac{1}{u}$, $u > 0$ τότε $x^2 + 1 = \frac{u^2 + 1}{u^2}$ και

$$dx = -\frac{1}{u^2} du, \quad u_1 = \alpha \text{ και } u_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

$$I = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} -\ln u \frac{u^2}{u^2 + 1} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = -I \Rightarrow I = 0.$$

γ) Αν $0 < \alpha < \beta \leq 1$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx < 0$ αφού $\frac{\ln x}{x^2 + 1} \leq 0$

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ (το ίσον ισχύει μόνο αν $x = \beta = 1$)

Αν $1 \leq \alpha < \beta$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx > 0$ αφού $\frac{\ln x}{x^2 + 1} \geq 0$ για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$. (το ίσον ισχύει μόνο αν $x = \alpha = 1$)

Επομένως $0 < \alpha < 1 < \beta$.

$$\text{Είναι } \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha\beta = 1$$

αφού αν $\beta \neq \frac{1}{\alpha}$ τότε $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx > 0$ ή $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\beta} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx < 0$ γιατί

$$\frac{1}{\alpha} > 1 \text{ και } \beta > 1.$$

39. $f(x) \geq x \ln x$, $x > 0$ άρα $f(x) - f(1) \geq x \ln x$ (1)

Από την (1) για $x > 1$ προκύπτει

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq \frac{x \ln x}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x \ln x}{x - 1} = 1$$

$$\Rightarrow f'(1) \geq 1 \quad (2)$$

Από την (1) για $x < 1$ προκύπτει

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{x \ln x}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln x}{x - 1} = 1$$

$$\Rightarrow f'(1) \leq 1 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) συνεπάγεται ότι $f'(1) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{\ln x} \right) = 1$$

Από την αρχική έχουμε $\frac{f(x)}{x} - \ln x \geq 0$, $x \in [1, e]$. (*)

Αν στην (*) δεν ισχύει παντού το = θα έχουμε

$$\int_1^e \left(\frac{f(x)}{x} - \ln x \right) dx > 0 \rightarrow 0 > 0, \text{ άτοπο, άρα } f(x) = x \ln x,$$

$$x \in [1, e].$$

Η συνάρτηση αυτή είναι προφανώς δεκτή.

40.**41.****42.****43.**