Περιεχόμενα

1. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης

1.1 Ερωτήσεις στη Θεωρία – Προτάσεις Σ – Λ

1. Συναρτήσεις

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 15

1. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;
Παν. (Επ.) 2018 – 2019

2. Τι είναι τα Α και Β στο συμβολισμό $f:A\to B$;

3. Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών μίας συνάρτησης f;

4. Τι αρκεί για να ορίσουμε μία συνάρτηση;

5. Ποιο θεωρούμε συμβατικά ότι είναι το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης;

σελ. 16

1. Τι ορίζουμε ως γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f;

σελ. 17

1. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της συνάρτησης;

2. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης μέσω της γραφικήςπαράστασης;

3. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μέσω της γραφικήςπαράστασης;

4. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την αριθμητική τιμή μιας συνάρτησης μέσω τηςγραφικής παράστασης;

σελ. 18

1. Ποια είναι η γραφική παράσταση της $-f$ σε σχέση με τη C_f;

2. Ποια είναι η γραφική παράσταση της $|f|$ σε σχέση με τη C_f;

3. Ποια είναι η γραφική παράσταση της $f(-x)$ σε σχέση με τη C_f;

4. Έστω $f(x)=\alpha x+\beta$. Τι γνωρίζεις για
   α) το α
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα
   γ) ειδικές περιπτώσεις

5. Έστω $f(x)=\alpha x^2$, $\alpha\neq 0$. Τι γνωρίζεις για
   α) το α
   β) πώς ονομάζεται
   γ) την κορυφή της
   δ) την μονοτονία και τα ακρότατα
   ε) τη συμμετρία της

σελ. 19

1. Έστω $f(x)=\alpha x^3$, $\alpha\neq 0$. Τι γνωρίζεις για
   α) την μονοτονία και τα ακρότατα
   β) τη συμμετρία της

2. Έστω $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $\alpha\neq 0$. Τι γνωρίζεις για
   α) πώς ονομάζεται
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα
   γ) τις συμμετρίες της
   δ) τις ασύμπτωτές της

3. Έστω $f(x)=\sqrt{x}$. Τι γνωρίζεις για
   α) την μονοτονία και τα ακρότατα

4. Έστω $f(x)=\sqrt{|x|}$. Τι γνωρίζεις για
   α) την μονοτονία και τα ακρότατα

σελ. 20

1. Έστω $f(x)=\eta\mu x$. Τι γνωρίζεις για
   α) την περίοδο
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα

2. Έστω $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Τι γνωρίζεις για
   α) την περίοδο
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα

3. Έστω $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Τι γνωρίζεις για
   α) την περίοδο
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα

4. Έστω $f(x)=\alpha^x$. Τι γνωρίζεις για
   α) το α
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα
   γ) τις ασύμπτωτες

σελ. 21

1. Έστω $f(x)=\log_\alpha x$. Τι γνωρίζεις για
   α) το α
   β) την μονοτονία και τα ακρότατα
   γ) τις ασύμπτωτες

2. Με τι είναι ίσο το $e^{\ln\alpha}$;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f. Επ. 2012

2. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f. 2018

3. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα. Επ. 2019

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$. 2020 (Νέο)

5. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ένα το πολύ σημείο.

6. Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

7. Αν $f(A)=(-\infty,0)$ τότε

$$f(x)\le 0 \text{ για κάθε } x\in A$$

8. Αν $0\in f(A)$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο A.

9*. Αν $\alpha\notin f(A)$ τότε η C_f δεν τέμνει την $y=\alpha$.

10. Δεν υπάρχει συνάρτηση που να είναι ταυτόχρονα άρτια και περιττή.

11. Το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f.

12. Αν $f(x)=\varepsilon\varphi x$ με $D_f=\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε

$$f(D_f)=[0,+\infty)$$

13. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$.

14. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f:A\to\mathbb{R}$ με τον άξονα $x'x$, αν υπάρχουν, είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x\in A$.

15. Αν $f^2(x)=0$ $x\in\mathbb{R}$, τότε $f(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$

16. Η γραφική παράσταση της $f(-x)$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$ της C_f.

17. Υπάρχει συνάρτηση f με

$$f(x+y)=f^2(x)+f^2(y)+x^2-y,\ x,y\in\mathbb{R}$$

18. Κάθε καμπύλη f η οποία τέμνεται σε δύο ή περισσότερα σημεία από μία κατακόρυφη ευθεία δεν είναι συνάρτηση.

19. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τότε για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha=\beta$ είναι $f(\alpha)=f(\beta)$.

20. Αν $f:A\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τότε για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\ne\beta$ είναι $f(\alpha)\ne f(\beta)$.

2. Πράξεις συναρτήσεων

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 24

1. Τι ορίζουμε ως άθροισμα $f+g$, δύο συναρτήσεων f, g;

2. Τι ορίζουμε ως διαφορά, $f-g$, δύο συναρτήσεων f, g;

3. Τι ορίζουμε ως γινόμενο, $f\,g$, δύο συναρτήσεων f, g;

4. Τι ορίζουμε ως πηλίκο, $\frac{f}{g}$, δύο συναρτήσεων f, g;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν $f(x)\cdot g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε

$$f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ ή}$$
$$g(x)=0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

2. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα σύνολα A και B αντίστοιχα. Η συνάρτηση $f-g$ έχει πεδίο ορισμού το $A-B$

3. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα σύνολα A και B αντίστοιχα. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $A\cap B$.

4. Αν $f^2(x)=g^2(x)$ τότε

$$f(x)=g(x) \text{ για κάθε } x\in A \text{ ή}$$
$$f(x)=-g(x) \text{ για κάθε } x\in A$$

3. Ίσες συναρτήσεις

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 23

1. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Παν. 2007 – 2016

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν f, g έχουν ίδιο τύπο τότε είναι ίσες.

2. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα και Γ ένα υποσύνολο των Α και Β. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$ τότε οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο Γ.

3. Δύο συναρτήσεις που δεν έχουν τον ίδιο τύπο αποκλείεται να είναι ίσες.

4. Είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt[\nu]{x^{\mu}} \text{ και } g(x) = x^{\frac{\mu}{\nu}} \ (\mu, \nu \in \mathbb{N}^*)$$

5. Είναι ίσες οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x^{2\kappa} \text{ και } g(x) = 2\kappa \ln x \ (\kappa \in \mathbb{N}^*)$$

6. Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο.

7. Αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες τότε έχουν τον ίδιο τύπο.

4. Σύνθεση συναρτήσεων

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 25

1. Τι ονομάζουμε σύνθεση της συνάρτησης f με τη συνάρτηση g;

2. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$;

σελ. 26

1. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g ισχύει

$$f \circ g = g \circ f;$$

2. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g, h ισχύει

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Επ. 2004 – Επ. 2010 – 2015

2. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

3. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν

$$f(A) \cap B \neq \varnothing$$ 2017 – 2020 (Παλαιό)

4. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

Επ. 2018

5. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν ορίζεται η $f \circ (g \circ h)$ τότε ορίζεται και η $(f \circ g) \circ h$ και ισχύει

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

6. Αν $D_f = A$, $D_g = B$ τότε $D_{f \circ g} = A \cap B$.

7. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, \ x \in \mathbb{R}^*$$

8. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

$$(f \circ g)(x) = -x, \ x \in \mathbb{R}$$

9. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα σύνολα Α και Β αντίστοιχα. Αν $f(A) \cap B = \varnothing$ τότε δεν ορίζεται η $g \circ f$.

10. Για κάθε ζεύγος f, g για τις οποίες ορίζο-νται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

Επ. (Παλ.) 2020

11. Αν η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε ισχύει πάντοτε $D_f = D_g = \mathbb{R}$.

5. Μονοτονία

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 31

1. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

4. Ποια είναι η μονοτονία της $f(x) = x^2$;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε

$$f(x_1) < f(x_2)$$ Επ. 2017

Επ. 2005

2. Αν μία συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ τότε για κάθε

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

4. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \alpha]$ και στο $[\alpha, +\infty)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

5. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \alpha)$ και στο $(\alpha, +\infty)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

6. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα A και B τότε είναι γνησίως αύξουσα και στο $A \cup B$.

7. Αν μία συνάρτηση δεν είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε είναι γνησίως φθίνουσα σε αυτό το διάστημα.

8. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα σημείο.

9. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και $0 \in \Delta$ τότε η f έχει ακριβώς μία ρίζα στο Δ.

10. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ τότε και η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

11. Μία άρτια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι γνησίως μονότονη.

12. Έστω συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Αν για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq A$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

6. Ακρότατα

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 32

1. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; *Παν. 2014*

2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in \Delta$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;

3. Τι είναι το (ολικό) ακρότατο μίας συνάρτησης;

4. Τι γνωρίζετε για τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων;

α) $f(x) = -x^2 + 1$

β) $f(x) = |x - 1|$

γ) $f(x) = ημx$

δ) $f(x) = x^3$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν

$$f(x) \ge f(x_0) \text{ για κάθε } x \in A$$ 2009

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A$. Επ. 2011

3. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα. 2014

4. Η συνάρτηση $f(x) = ημx$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου. 2018

5. Αν μία συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τότε δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.

6. Αν μία συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[\kappa, \lambda]$ τότε η f έχει ολικό μέγιστο το λ και ολικό ελάχιστο το κ.

7. Όλες οι συναρτήσεις παρουσιάζουν (ολικό) μέγιστο ή (ολικό) ελάχιστο.

8. Αν $f(x) \le \kappa$ για κάθε $x \in A$ όπου A το πεδίο ορισμού της f τότε η f έχει μέγιστο το κ.

9. Μία συνάρτηση f έχει ελάχιστο και μέγιστο, αν και μόνο αν, υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ με

$$\kappa \le f(x) \le \lambda \text{ για κάθε } x \in D_f$$

10. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ή ελάχιστο αυτό θα ισχύει σε μοναδικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

11. Υπάρχουν συναρτήσεις που δεν παρουσιάζουν ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.

12. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε δεν έχει ακρότατα.

7. Συνάρτηση 1 – 1

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 32

5. Πότε μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται «1–1»;
Παν. (Επ.) 2005 – 2015

σελ. 34

1. Ποια είναι η αντιθετοαντίστροφη πρόταση του ορισμού της 1–1 συνάρτησης;

2. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι 1–1;

α) $f(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha \neq 0$

β) $f(x)=\beta$

γ) $f(x)=x^2$

3. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης 1–1 και ένα παράδειγμα συνάρτησης που δεν είναι 1–1.

4. Αν μία συνάρτηση είναι 1–1 τότε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x;

5. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι 1–1;

6. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

7. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία μίας 1–1 συνάρτησης;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι 1–1 στο διάστημα αυτό.
Επ. 2011

2. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. 2002– 2018

3. Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση «1–1» αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ Επ. 2003

4. Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$ 2011

5. Αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε πάντα $x_1=x_2$.

6. Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι «1–1», αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.
Επ. 2006 – 2012 - 2016

7. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες. Επ. 2008

8. Η συνάρτηση f είναι 1–1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο. Επ. 2009 – Επ. 2018

9. Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη. Επ. 2013

10. Αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ μόνο αν η f είναι 1–1.

11. Αν $x_1\neq x_2$ τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$.

12. Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1–1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $f(x_1)\neq f(x_2)$, τότε $x_1\neq x_2$

13. Αν η συνάρτηση f είναι 1–1 στο σύνολο Α τότε η f είναι είτε γνησίως φθίνουσα είτε γνησίως αύξουσα στο Α.

14. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1–1 τότε και η $f+g$ είναι 1–1.

15. Αν δύο συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ είναι 1–1 και ορίζεται στο $B\subseteq A$ η $f\circ g$ τότε είναι και αυτή 1–1.

16. Μία σταθερή συνάρτηση είναι 1–1.

8. Αντίστροφη συνάρτηση

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 35

1. α) Πότε μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;
β) Αν οι ισχύουν οι προϋποθέσεις του α), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f; Παν. 2019

σελ. 36

1. Στη σχέση $f^{-1}(f(x))=x$ σε ποιο σύνολο ανήκει το x;

2. Στη σχέση $f(f^{-1}(y))=y$ σε ποιο σύνολο ανήκει το y;

3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικέςως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

σελ. 37

1. Τι γνωρίζετε για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1};

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Οι γραφικές παραστάσεις C και C’ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
Επ. 2004 – 2011 – 2018

2. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευ-

θεία $y=x$, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}. 2005

3. Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1 – 1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A \quad \text{και}$$

$$f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$$ 2008

4. Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Επ. 2017

5. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη τότε δεν είναι αντιστρέψιμη.

6. Αν $f^{-1}(\alpha)=f(\alpha)$ τότε $f(\alpha)=\alpha$.

7. $f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$

8. Αν η f είναι αντιστρέψιμη τότε ισχύει η συνεπαγωγή $f^{-1}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=x$;

9. Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη τότε οι συναρτήσεις $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ είναι ίσες.

10. Αν μία συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε και η αντίστροφή της είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $f(\Delta)$.

11. Για κάθε συνάρτηση f που είναι 1–1 ισχύει ότι $f(x)\neq f^{-1}(x)$.

12. Τα κοινά σημεία δύο αντίστροφων συναρτήσεων βρίσκονται πάντα πάνω στην ευθεία $y=x$.

13. Υπάρχει περιοδική συνάρτηση που είναι αντιστρέψιμη.

9. Ορισμός ορίου στο x_0

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 41

1. Τι σημαίνει ότι η f ορίζεται κοντά στο x_0;

2. Όταν αναζητούμε το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε το x_0 πρέπει να ανήκει στο A_f;

3. Είναι πάντα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$;

4. Τι σημαίνει το $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$;

5. Τι σημαίνει το $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$;

6. Τι σημαίνει το $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$;

σελ. 42

1. Τι ονομάζουμε πλευρικά όρια της f στο x_0;

2. Αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια μίας συνάρτησης f στο x_0 τότε τι πρέπει να ισχύει για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

σελ. 43

1. Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-\lambda)=......$$

2. Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=.....$$

σελ. 45

1. Ποιο είναι το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων κοντά στο x_0;

α) $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$

β) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$

γ) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$

2. Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

$$\lim_{x\to x_0} x=......$$

3. Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

$$\lim_{x\to x_0} c=......$$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$$ 2004

2. Το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ έχει νόημα μόνο αν η f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής

$$(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta) \text{ ή } (\alpha,x_0) \text{ ή } (x_0,\beta)$$

3. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε το x_0 ανήκει οπωσδήποτε στο πεδίο ορισμού της f.

4. Έστω συνάρτηση f με $D_f=(x_0,\beta)$.

Αν $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\ell$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$.

5. Έστω $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+8}+\sqrt{x^2-5x+4}$ με $D_f=[-2,1]\cup\{4\}$. Είναι $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$.

6*. Αν η f ορίζεται κοντά στο x_0 με $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda$ τότε και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lambda$.

7. Το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ είναι ανεξάρτητο από τα άκρα α, β των διαστημάτων (α,x_0) και (x_0,β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

8. Για κάθε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο Α, το $\lim_{x\to \alpha} f(x)$ υπάρχει μόνο αν $\alpha\in A$.

9. Έστω f, g δύο συναρτήσεις ορισμένες στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

10. Αν δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τότε δεν υπάρχουν και τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

11. Αν το $x_0\in D_f$ τότε μπορούμε πάντοτε να αναζητούμε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

12. Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να υπάρχει χωρίς το x_0 να ανήκει στο A_f.

10. Όριο και διάταξη

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 47

1. α) Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)$.....0 κοντά στο x_0

β) Ποια είναι η αντίστροφη πρόταση;

γ) Ισχύει η αντίστροφη πρόταση; Αν όχι, γιατί; Τι ισχύει;

2. α) Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$ τότε $f(x)$.....0 κοντά στο x_0

β) Ποια είναι η αντίστροφη πρόταση;

γ) Ισχύει η αντίστροφη πρόταση; Αν όχι, γιατί; Τι ισχύει;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Έστω μία συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\ell\right)=0$$ **Επ. 2008**

2. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

2002 – 2006 – Επ. 2019

3. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

2010

4. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$ **Επ. 2015 – 2016**

5. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x\to 0} f(x)>1$.

6. Αν $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)\ge 0$

7. Αν $f(x)\ge 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$

8. Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$

9. Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$

10. Αν $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x)$$

11. Αν $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)<\lim_{x\to x_0} g(x)$

12. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$, $l,m\in\mathbb{R}$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $l<m$. **Επ. 2020**

11. Ιδιότητες ορίων

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 48

1. Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;.....\; \lim_{x\to x_0} g(x)$$

2. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε συμπληρώστε τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=$........................

β) $\lim_{x\to x_0}\left(\kappa\cdot f(x)\right)=$........................

γ) $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=$........................

δ) $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$........................

ε) $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=$........................

στ) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=$ ....

ζ) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu}=$ ....

3. Ισχύουν τα αντίστροφα των παραπάνω προτάσεων; Αν όχι, τότε δώστε κατάλληλα αντιπαραδείγματα.

σελ. 49

1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$$

2. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)},\ \text{για } Q(x_0)\neq 0$$

σελ. 50

1. Ποιες μεθόδους εφαρμόζουμε όταν στον υπολογισμό ενός ορίου $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ είναι

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}Q(x)=0;$$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\ \text{και}\ \lim_{x\to x_0}g(x)$$ 2005

2. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε:

$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\kappa]{f(x)}=\sqrt[\kappa]{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$ εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0, με $\kappa\in\mathbb{N}$ και $\kappa\geq 2$. Επ. 2004

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. 2002

4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)$$

5. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

6. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ τότε υπάρχουν και τα

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\ \text{και}\ \lim_{x\to x_0}g(x)$$

7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x)=0$$

8. Όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=\sqrt[\nu]{\lim_{x\to x_0}f(x)}$$

9. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$

10. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ ή δεν υπάρχει.

11. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$ τότε $|f(x)|=-f(x)$ κοντά στο x_0.

12. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|$ υπάρχει τότε ισχύει πάντα

$$\left|\lim_{x\to x_0}f(x)\right|=\lim_{x\to x_0}|f(x)|$$

13. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\lambda|$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lambda\ \text{ή}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=-\lambda$$

14. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\alpha$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\alpha$.

15. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\lambda\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lambda\ \text{ή}\ -\lambda$$

16. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=4$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=2\ \text{ή}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=-2$$

17. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

18. Αν η f είναι άρτια και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\kappa$ τότε

$$\lim_{x\to -x_0}f(x)=-\kappa$$

19. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}=0$$

20. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1\in\mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

21. Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$.

22. Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ τότε υπάρχει και το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$.

23. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ τότε υπάρχουν και τα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

24. Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

25. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0\in\mathbb{R}$ και $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0 τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(u)=\lambda$.

12. Κριτήριο παρεμβολής

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 51

1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Παν. (Επ.) 2016 – 2020

2. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το κριτήριο παρεμβολής.

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν $0\le f(x)\le |g(x)|$ σε μία περιοχή του x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

2. Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2 f(x)\right)=0$$

3. Αν $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(\alpha,+\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

4. Αν κοντά στο x_0 ισχύει $g(x)\le f(x)\le h(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lambda$ και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\mu>\lambda$, όπου $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\in[\lambda,\mu]$

5. Αν κοντά στο x_0 ισχύει $g(x)\le f(x)\le h(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

6. Αν ισχύει $|f(x)|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

13. Τριγωνομετρικά όρια

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 52

1. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$$

2. Συμπληρώστε την παρακάτω σχέση

$$|\eta\mu x| \ldots\ldots |x|$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

σελ. 53

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\ldots\ldots$ β) $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\ldots\ldots$

2. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=\ldots\ldots$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\ldots\ldots$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. 2013

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$ 2009 – 2013 – Επ. 2016

3. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$. 2018

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{x}=1$ με $\alpha\neq 0,1$

5. $|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$

14. Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 60

1. Συμπληρώστε τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $f(x)\ldots\ldots 0$ κοντά στο x_0

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $f(x)\ldots\ldots 0$ κοντά στο x_0

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=\ldots\ldots$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}(-f(x))=\ldots\ldots$

ε) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = ...$

στ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = ...$

ζ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = ...$

η) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = ...$

θ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = ...$

2. Με τι είναι ίσα τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = ...$ και γενικά $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = ...$

β) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = ...$ και γενικά $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = ...$

σελ. 61

1. Συμπληρώστε τα παρακάτω θεωρήματα:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$	
$\alpha \in \mathbb{R}$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$+\infty$	

2. Συμπληρώστε τα παρακάτω θεωρήματα:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))$
$\alpha > 0$	$+\infty$	
$\alpha < 0$	$+\infty$	
$\alpha > 0$	$-\infty$	
$\alpha < 0$	$-\infty$	
0	$+\infty$	
0	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	

σελ. 62

1. Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ τότε το $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

2. Να αποδείξετε ότι αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ τότε το $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$ είναι απροσδιόριστη μορφή.

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

2005 – Επ. 2011 – 2015

2. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Επ. 2009

3. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Επ. 2010 – 2014

4. Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

2012

5. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

2013

6. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty$.

Επ. 2013

7. Ισχύει $(+\infty) + (-\infty) = 0$.

8. Έστω μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

Επ. 2014

9. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Επ. 2015

10. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τότε

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = 0$$

2017

11. Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty$

12. Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0. 2020 (Νέο)

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right)=+\infty$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

14. Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$

15. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε $x_0=-1$

16. Αν οι f και οι g δεν έχουν όριο στο 0 τότε δεν έχει όριο στο 0 ούτε η f + g.

17. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=+\infty$ τότε $f(x)>0$.

Λ. Είναι $f(x)>0$ κοντά στο α.

18. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha} f(x)=+\infty$ και $g(x)>0$ κοντά στο α τότε $\lim\limits_{x\to \alpha}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=+\infty$.

Λ. Π.χ.: $f(x)=\frac{1}{|x|}$ και $g(x)=|x|$.

15. Όριο στο $+\infty$

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 65

1. Συμπληρώστε τις παρακάτω ιδιότητες:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = ...$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\nu} = ...$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} ..... , & \nu \text{ άρτιος} \\ ..... , & \nu \text{ περιττός}\end{cases}$

δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^\nu} = ...$

σελ. 66

1. Ποιες ιδιότητες ισχύουν για όρια στο $+\infty$ και στο $-\infty$;

2. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)= ....$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)= ....$

σελ. 67

1. Έστω ρητή συνάρτηση 2020 (Παλαιό)

$$Q(x)=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0}{\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0},\ \alpha_\nu\neq 0,\ \beta_\kappa\neq 0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)= ....$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} Q(x)= ....$

2. Συμπληρώστε τις παρακάτω ιδιότητες:

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = ...$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = ...$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x = ...$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x = ...$

β) Αν $\alpha>1$ τότε

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = ...$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x = ...$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\log_\alpha x = ...$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_\alpha x = ...$

σελ. 68

1. Τι ονομάζουμε ακολουθία;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν $\alpha>1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$. 2007

2. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$. 2011

3. Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$; Επ. 2012

4. Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$ Επ. 2014

5. Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$. 2017

6. Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=1$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}=8$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}=0$

9. Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ τότε $f(x)=\lambda x$.

10. $(+\infty)\cdot 0=0$

11. $\frac{0}{0}=1$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=-\infty$ Επ. 2020

16. Συνέχεια συνάρτησης

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 70

1. Έστω μία συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0; Παν. (Επ.) 2009 – 2015

σελ. 71

1. Πότε μία συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
2. Πότε μία συνάρτηση λέγεται συνεχής συνάρτηση;
3. Ποιες από τις γνωστές συναρτήσεις είναι συνεχείς;
4. Ποιων ειδών συναρτήσεις είναι δυνατόν να μην είναι συνεχείς σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού τους;

σελ. 72

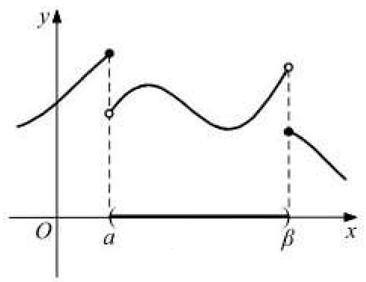
1. Με ποιες πράξεις δύο συνεχών συναρτήσεων f και g προκύπτουν συνεχείς συναρτήσεις;

σελ. 73

1. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].
Παν. (Επ.) 2004 – 2017
2. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;
Παν. 2008 – Παν. 2012

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0. 2007
2. Αν $f(x)=g(x)-h(x)$ και f συνεχής στο $x_0\in\mathbb{R}$ τότε η $g(x)$ και $h(x)$ είναι συνεχείς στο x_0.
3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.
4. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, τότε ισχύει πάντα
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$
5. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x\neq 4$ ισχύει $f(x)=\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε $f(4)=1$.
6. Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι συνεχής στο α και στο β.
7. Αν η f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $x_0\in[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
8. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 6}(f(x)\cdot g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$.
9. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
10. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής.
11. Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα, είναι συνεχής.
12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση της g με την f είναι συνεχής στο x_0.
13. Αν μία συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε και η $|f|$ δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
14. Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λάθος καθεμία από τις προτάσεις:

α) η f είναι συνεχής στο (α,β)
β) η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
γ) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
δ) η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\alpha]$

15. Έστω δύο συναρτήσεις f, g και x_0 κοινό σημείο των πεδίων ορισμού τους. Αν η g είναι συνεχής στο x_0 και η $f-g$ είναι συνεχής στο x_0 τότε και η f είναι συνεχής στο x_0.

17. Θεώρημα Bolzano

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 74

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Παν. (Επ.) 2014 – (Παλαιό) 2020

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$ 2005

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. 2005

3. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. 2008

4. Μία συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουνε το πεδίο ορισμού της. 2013

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. Επ. 2013 – Επ. 2020

6. Μία πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Επ. 2019

7. Μία συνεχής συνάρτηση f μεταξύ δύο ριζών της διατηρεί σταθερό πρόσημο.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$ τότε $f(x)\neq 0$, $x\in(\alpha,\beta)$.

9. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ ώστε $f(x_0)=\pi$.

10. Αν $f(x_0)=0$ με $x_0\in[\alpha,\beta]$ τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

11. Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=0$

12. Αν $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ και η f είναι συνεχής στο (α,β) τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=0$

13. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)>0$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $[\alpha,\beta]$.

14. Αν μία συνεχής συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ δεν μηδενίζεται στο σύνολο A τότε διατηρεί πρόσημο στο A.

15. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\kappa\in\mathbb{R}$ με $f(\alpha)<\kappa<f(\beta)$ τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f(x_0)=\kappa$.

16. Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

17. Αν υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

18. Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 76

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών.

2. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν
- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o)=\eta$. Παν. 2005 – 2015 – 2020

3. Ποια είναι η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα. 2006 – 2017 – 2020 (Παλαιό)

2. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα. Επ. 2007

3. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ τότε παίρνει και όλες τις ενδιάμεσες τιμές.

5. Αν μία συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

6. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

19. Θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 77

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.

2. Ποιο είναι το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$;

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) τότε ποιο είναι το σύνολο τιμών της σε αυτό το διάστημα;

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) τότε ποιο είναι το σύνολο τιμών της σε αυτό το διάστημα;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή. 2006

2. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)$.

Επ. 2007

3. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ 2010

4. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή Μ και μία ελάχιστη τιμή m. 2016

5. Αν η f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ τότε έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

6. Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε κλειστό διάστημα τότε έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

7. Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (α,β) παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

8. Κάθε συνεχής συνάρτηση στο (α,β) παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

9. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

10. Κάθε γνησίως φθίνουσα και συνεχής συνάρτηση στο (α,β) παρουσιάζει ελάχιστη και μέγιστη τιμή, την $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ αντίστοιχα.

11. Αν η f είναι συνεχής και μη σταθερή στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το $[f(\alpha),f(\beta)]$.

12. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(\alpha),f(\beta)]$.

13. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f([0,1])=(0,1]$$

14. Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f([\alpha,\beta])=[f(\alpha),f(\beta)]$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$;

15. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ανοιχτό διάστημα, έχει σύνολο τιμών ανοιχτό διάστημα.

16. Κάθε συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ανοιχτό διάστημα, έχει σύνολο τιμών ανοιχτό διάστημα.

17. Κάθε συνεχής και 1 – 1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού ανοιχτό διάστημα, έχει σύνολο τιμών ανοιχτό διάστημα.

18. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ημίκλειστο διάστημα και σύνολο τιμών κλειστό ή ημίκλειστο διάστημα.

19. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού ημίκλειστο διάστημα και σύνολο τιμών ανοιχτό διάστημα.

20. Κάθε συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ημίκλειστο διάστημα, έχει σύνολο τιμών ημίκλειστο διάστημα.

21. Κάθε συνεχής και 1 – 1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού ημίκλειστο διάστημα, έχει σύνολο τιμών ημίκλειστο διάστημα.

22. Υπάρχει συνάρτηση με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα και σύνολο τιμών ανοιχτό διάστημα ή ημίκλειστο διάστημα.

23. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα και σύνολο τιμών ανοιχτό διάστημα ή ημίκλειστο διάστημα.

24. Υπάρχει συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα που παίρνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή της σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

25. Υπάρχει συνεχής και $1-1$ συνάρτηση με πεδίο ορισμού κλειστό διάστημα που παίρνει την ελάχιστη ή τη μέγιστη τιμή της σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της.

26. Αν η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα, τότε και το πεδίο ορισμού της είναι κλειστό διάστημα.

27. Αν για συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

28. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}^*$.

29. Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης είναι πάντα κλειστό διάστημα.

30. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής στο (α,β) τότε και το σύνολο τιμών της θα είναι ανοικτό διάστημα.

31. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε έχει ελάχιστο και μέγιστο στο διάστημα αυτό.

32. Αν μία σταθερή συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ τότε έχει σύνολο τιμών κλειστό διάστημα.

1.2 Θέματα Πανελλαδικών

1. *Πανελλήνιες 2000 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & , \quad 0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)e^{5-x}, & x\geq 5 \end{cases}$

α) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$. Μον. 6

β) Να βρεθούν τα α, β $\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=5$. Μον. 10

γ) Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος (β) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. Μον. 9

2. *Πανελλήνιες 2020 – 2ο θέμα*

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=e^x$

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ Μον. 5

β) Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ με $x>0$ τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντίστροφή της Μον. 8

γ) Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1}$ με $x>1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία Μον. 6

δ) Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος γ) να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}\varphi(x)$$ Μον. 6

3. *Πανελλήνιες 2020 (Παλαιό) – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{3x+1}{x-3},\ x\in\mathbb{R}-\{3\}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}-\{3\}$ Μον. 5

β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες Μον. 8

γ) Να αποδείξετε ότι $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ Mon. 6

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)$ Μον. 6

4. *Πανελλήνιες 2020 Επαναληπτικές – 2ο θέμα*

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$(f\circ g)(x)=x^2-2x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=-1$ Μον. 5

β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1–1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει Μον. 6

γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}\circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$\varphi(x)=\sqrt{(g^{-1}\circ f)(x)}$$ Μον. 6

δ) Έστω η συνάρτηση $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)+2\leq h(x)\leq g(x)+2 \text{ για κάθε } x\in[0,1]$$

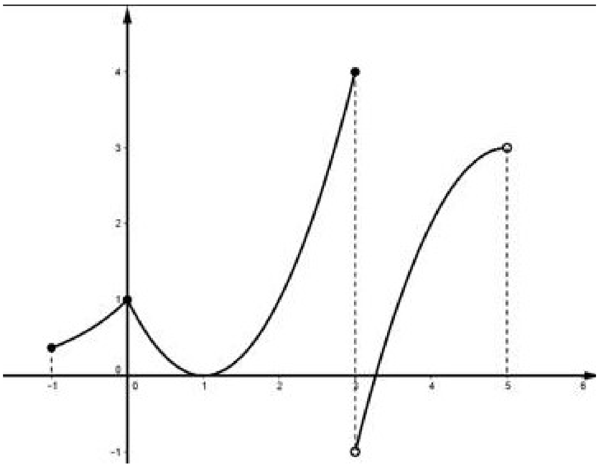
i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=2$ Μον. 3

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$ **Μον. 5**

1.3 Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:
$$f^3(x)+f(x)+2x=0,\ x\in\mathbb{R}$$
α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή
γ) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:
$$f(\alpha^2+\beta^2)+f(2\alpha-4\beta+5)=0$$
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^3(x)+3x>0$
ε) Να λύσετε την εξίσωση $2x\cdot f^3(x)+f^2(x)+1=0$

2. Α. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η C_f.



α) Να βρείτε το A_f και το $f(A_f)$
β) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία
γ) Να εξετάσετε αν η f είναι 1–1
δ) Πόσες ρίζες έχεις η f;
ε) Να υπολογίσετε το $(f\circ f)(1)$

Β. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\dfrac{e}{x}\right),\ x>0$.
α) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1–1
β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η $f\circ g$
γ) Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ g)(x)=4$

3. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει
$$f(f(x))+x=-1,\ x\in\mathbb{R}$$
α) Να δείξετε ότι $f(A)=\mathbb{R}$
β) Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

4. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)\cdot\ln f(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
β) Να αποδείξετε ότι $f(1)=e$
γ) Να βρείτε την μονοτονία της f και την $f^{-1}(x)$

5. Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει
$$f(x+y)=f(x)+f(y)-\alpha \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$
α) Να βρείτε το $f(0)$
β) Να αποδείξετε ότι
$$f(x-y)=f(x)-f(y)+\alpha \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$
γ) Να αποδείξετε ότι $f(2x)=4f\left(\dfrac{x}{2}\right)-3\alpha$
δ) Αν η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
i) η f είναι 1–1
ii) ισχύει $f^{-1}(x+y-\alpha)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y),\ x,y\in\mathbb{R}$

6. Έστω η συνάρτηση f με
$$f(x)=\sqrt{x}+x^2 \text{ και } A=f(A)=[0,+\infty)$$
α) Να εξετάσετε αν αντιστρέφεται
β) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^2+x-2)=x$
δ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x^2+1)>x$

7. Αν $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2-\eta\mu x}{x^2+x}=3$ να υπολογίσετε τα:
α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|5-3f(x)|-1}{x^2-x}$ Ε.Μ.Ε.

8. Αν $\eta\mu(\alpha x)\le\eta\mu(\beta x)+\eta\mu(\gamma x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta+\gamma$. Ε.Μ.Ε.

9. Αν $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+h)}{h}=5$ και η f είναι συνεχής στο 3, να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:
$$f^2(x)+g^2(x)+2f(x)+5\le4g(x)+\sigma\upsilon\nu^2x \quad x\in\mathbb{R}$$
Να δείξετε ότι οι f,g είναι συνεχείς στο $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

11. α) i) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ αν
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)\cdot\eta\mu(x-1)}{(x-1)^2}=3$$
ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ αν
$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)\cdot(9x^2-4)}{3x+2}=+\infty$$

β) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha|x+3|+\beta|x-3|-5}{x^2-3x+2}=7$$

γ) Αν $|f(x)-\eta\mu(x-1)|\le x^2-2x+1, x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ και $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$

12. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x^2-2x+2), & x\le\lambda\\ (x-1)^2\eta\mu\frac{1}{1-x}, & x>\lambda\end{cases}$$

Να βρείτε το λ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=\lambda$.

13. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x-\beta\eta\mu 2x}{x}, & x<0\\ \alpha-1, & x=0\\ \frac{2-\sqrt{4+x}}{\beta x}, & x>0\end{cases}$$

Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο 0.

14. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta(x+1)-4+\alpha}{x} \text{ για } x<0 \text{ και}$$

$$\eta\mu x\le xf(x)\le x \text{ για } x\ge 0$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, καθώς και το $f(0)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2000}{2001}x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x<\alpha\\ x^3+x, & x\ge\alpha\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\neq 0$ τότε η f είναι ασυνεχής στο $x_0=\alpha$

β) Είναι η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha$ όταν $\alpha=0$;

16. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες

$$f^2(x)+g^2(x)+1=2xf(x)+2g(x),\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$(f(x)-x)^2+(g(x)-1)^2=x^2,\ x\in\mathbb{R}$$

β) Να δείξετε ότι η f,g είναι συνεχείς στο $x_0=0$

γ) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$

δ) Αν η g είναι συνεχής τότε η εξίσωση $g(x)=-2x$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$

17. Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν κοινά σημεία μόνο τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,3)$. Να δείξετε ότι:

α) Ισχύει: $f(x)>g(x)$ για κάθε $x>2$ ή $f(x)<g(x)$ για κάθε $x>2$

β) Η $y=x+1$ τέμνει την C_f σε δύο τουλάχιστον σημεία

γ) Η $y=-x+\alpha$ τέμνει την C_g σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1,2)$, $\alpha\in(3,5)$ **Λ. Θ.**

18. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$2(f\circ f)(x)-2\alpha f(x)-\alpha^2x=0,\ \alpha>0,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1

β) Να αποδείξετε ότι αν $f(f(x))=x$ τότε

i) η f είναι συνεχής

ii) η εξίσωση $\alpha f(x)=x$ έχει μοναδική λύση που ανήκει στο $(-1,1)$

19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2\alpha^2+2-\frac{2\ln(2x^2-1)}{\ln 53},\ 1\le f(x)\le 3,\ x\in[1,3]$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2=\frac{1}{2}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[1,3]$ ώστε $f(x_0)=2$

γ) Θεωρούμε την $g(x)=5x+f(1)$. Να βρείτε το

$$\lim_{x\to-2}\frac{g(x)\cdot\eta\mu(x+2)}{\left(3-\sqrt{-1-5x}\right)^2}$$

20. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$$f^3(x)+f(x)=x^3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι 1–1

β) στο $(-1,1)$ έχει μοναδική λύση η εξίσωση $f(x)=0$

γ) για $x>0$ είναι $f(x)<x$

δ) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$

ε) να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

21. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι είναι συνεχείς και ισχύει $f\circ g=g\circ f$. Αν η εξίσωση

$$(f\circ f)(x)=(g\circ g)(x)\quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει λύση.

2. Διαφορικός Λογισμός

2.1 Ερωτήσεις στη Θεωρία – Προτάσεις Σ – Λ

1. Παράγωγος και συνέχεια

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 91

1. Τι ορίζουμε ως στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0;

σελ. 94

1. Πώς ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;

σελ. 95

1. Πότε μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
Παν. 2004 – 2009
2. Ποιοι είναι οι τύποι με τους οποίους υπολογίζουμε την $f'(x_0)$;
3. Αν η f είναι πολλαπλού τύπου και αλλάζει τύπο στο x_0 τότε τι πρέπει να ισχύει για να είναι η f παραγωγίσιμη στο x_0;

σελ. 96

1. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης πολλαπλού τύπου που είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αλλαγής τύπου.
2. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης πολλαπλού τύπου που δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αλλαγής τύπου.
3. Με τι είναι ίσος ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο της $A(x_0, f(x_0))$;
4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$. Παν. 2000
5. Τι ονομάζουμε κλίση της C_f στο x_0;

σελ. 97

1. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

σελ. 99

1. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.
2. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
Παν. 2002 – 2002 – Επ.2007 – Επ.2013 – 2018

σελ. 100

1. Ποια είναι η αντιθετιαντίστροφη της πρότασης: «Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό»

σελ. 104

1. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη;
2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) του πεδίου ορισμού της;
3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; Παν. (Επ.) 2010 – 2013 – (Παλαιό) 2020
4. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
2000 – Επ. 2004 – 2009 – Επ. 2011 – 2017
2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0. 2000
3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
Επ. 2012 – Επ. 2016
4. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. 2000

5. Αν η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$;

6. Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

8. Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά τότε κοντά στο t_0 ισχύει $u(t_0)\geq 0$.

9. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, μόνο αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

10. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, μόνο αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι ίσα.

2. Πράξεις παραγώγων

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 105

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x)=0$$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x)=1$$

σελ. 105

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x)=\nu x^{\nu-1}$$

2. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Παν. (Επ.) 2005 – (Επ.) 2009

***3.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x$.

Παν. 2002 – (Επ.) 2010

σελ. 106

***1.** Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Παν. (Επ.) 2006 – 2011

σελ. 111

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Παν. 2020 (Παλαιό)

2. Αν οι συναρτήσεις $f_1, f_2,\ldots, f_\nu$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ, τότε:

$$(f_1+f_2+\ldots+f_\nu)'(x_0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

σελ. 112

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f\cdot g\cdot h$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f\cdot g\cdot h)'(x_0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

σελ. 113

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει:

$$(c\cdot f(x))'=\ldots\ldots\ldots$$

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$$

σελ. 114

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x / \sigma\upsilon\nu x=0\}$ και

$$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x / \eta\mu x=0\}$ και ισχύει

$$f'(x)=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

σελ. 116

1. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f\circ g)'(x_0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει

$$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$$

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει

$$f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$$

σελ. 117

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

Παν. (Επ.) 2008

σελ. 123

1. Τι ορίζουμε ως ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0;

2. Πώς συνδέεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού με τη συνάρτηση θέσης του κατά τη στιγμή t_0;

3. Πώς συνδέεται η στιγμιαία επιτάχυνση ενός κινητού με τη συνάρτηση θέσης του και τη στιγμιαία ταχύτητά του κατά τη χρονική στιγμή t_0;

σελ. 124

1. Τι ονομάζουμε οριακό κόστος στο x_0;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g'(x_0)$

2004

2. Οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)=\ln x^2$ και $y(x)=2\ln x$ είναι ίσες.

3. Ισχύει ο τύπος $(3^x)'=x\cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

2006

4. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)$ Επ. 2013

5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f(x_0)g'(x_0)-f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Επ. 2006

6. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x\,|\,\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει

$$f'(x)=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$ Επ. 2009 - 2011

7. $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$. 2010 - 2014

8. Αν $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$, τότε ισχύει

$$(\alpha^x)'=x\alpha^{x-1}$$ Επ. 2010

9. Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε

$$f'(x)=\frac{1}{|x|} \text{ για κάθε } x\neq 0$$ Επ. 2016

10. $(\sigma\varphi x)'=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$. 2012

11. Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $[\ln|x|]'=\frac{1}{x}$. Επ. 2006

12. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε και η $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

13. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ισχύει f' περιττή $\Rightarrow$ f άρτια

14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ισχύει f' άρτια $\Rightarrow$ f περιττή

15. $$\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}=\frac{3}{4}$$

16. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=-\dfrac{1}{x^2}$

17. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)=3\cdot 5^{2x}$.

18. Αν $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ τότε η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0 μόνο όταν $\alpha>1$.

19. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε

$$f'(\pi)=-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$$

20. Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 δεν υπάρχει.

21. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε το $\beta=\dfrac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

22. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε $f(1)>0$.

23. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει κ ρίζες τότε η f' έχει $\kappa-1$ ρίζες.

24. Αν είναι $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x)=0$ να έχει μία ακριβώς λύση στο (α,β) τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α,β);

25. Αν για τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g ισχύουν $f(0)=4$, $f'(0)=3$, $f'(5)=6$, $g(0)=5$, $g'(0)=1$, $g'(4)=2$ τότε

$$(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$$

26. Αν είναι $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$f'(x)\ge g'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

27. Αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

28. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g'(x_0)$$

29. Αν η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία για τα οποία ισχύει $g(x)\ge 0$.

30. Αν δύο συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$ τότε και η $f+g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

31. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

32. Αν η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό, και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$ τότε η συνάρτηση $f\circ g$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

33. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα διάστημα Δ, τότε $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$.

3. Εφαπτομένη

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων

$$f(x)=\ln x \text{ και } g(x)=2x^2$$

στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το $x_0=0$.

2. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

3. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

4. Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε οι C_f, C_g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο σημείο με τετμημένη x_0 αν και μόνο αν ισχύει

$$f'(x_0)=g'(x_0)$$

5. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f σε ένα σημείο της Α δεν έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f.

6. Αν $f'(x_0)=0$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

7. Αν η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης και μία ευθεία έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο τότε η ευθεία αυτή είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

8. Η ευθεία $y=0$ είναι εφαπτομένη της $f(x)=|x|$ στο $x_0=0$.

9. Κάθε ευθεία που τέμνει την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f σε μοναδικό σημείο είναι εφαπτομένη της.

4. Θ.Μ.Τ. – Rolle

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 128

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.
Παν. (Επ.) 2012 – 2020

2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού; Παν. (Επ.) 2007

3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.) Παν. 2013 – 2016

σελ. 129

1. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;
Παν. 2003 – (Επ.) 2008 – 2019

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ Επ. 2017

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$. 2020 (Παλαιό)

3. Μπορεί η f να μην είναι 1–1 και $f'(x)\neq 0$.

4. Αν η $f'(x)=0$ έχει μία ρίζα τότε η $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$.

6. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ τότε $f'(x)\neq 0$.

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και άρτια στο $\mathbb{R}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $f'(\xi)=0$.

8. Αν οι f,g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(\beta)=g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

9. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

10. Αν για μία συνάρτηση ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε ισχύει και το Θ.Μ.Τ. στο $[\alpha,\beta]$.

11. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ρίζες τότε η $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

12. Δεν μπορεί για μία συνάρτηση να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle χωρίς να ισχύουν οι προϋποθέσεις του.

13. Αν η f είναι άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $f'(\xi)=0$.

14. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$ και δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)=f(\beta)$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$ τότε η f παραγωγίσιμη στο (α,β).

16. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β).

5. Συνέπειες Θ.Μ.Τ.

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 133

1. Να διατυπώσετε τη συνέπεια του Θ.Μ.Τ. για σταθερή συνάρτηση.

2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. Παν. (Επ.) 2004 – 2009 – 2014

3. Να διατυπώσετε τη συνέπεια του Θ.Μ.Τ. για δύο συναρτήσεις ίσες κατά μία σταθερά.

4. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)=g(x)+c$.

σελ. 134

1. Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα ότι η συνέπεια του Θ.Μ.Τ. για σταθερή συνάρτηση ισχύει μόνο σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

2. Αν είναι $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε τι συμπέρασμα προκύπτει;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A. 2019

2. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$. Επ. 2007

3. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. 2016

4. Αν $f(x)+f'(x)=0$ για κάθε $x>0$, τότε
$$f(x)=ce^{x},\ x>0$$

5. Αν $\left[f'(x)\right]^2+\left(f(3)-2\right)^2=0$ για κάθε $x>0$, τότε $f(x)=2,\ x>0$.

6. Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A\cup B$ τότε $f(x)=c$.

7. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν ισχύει $f'(x)=g'(x)$ για κάθε $x\in A$ τότε ισχύει $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in A$.

8. Αν $f''(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε
$$f'(x)=c,\ x\in\mathbb{R}$$

9. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε ισχύει η ισοδυναμία
$$f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=c,\ x\in(\alpha,\beta)$$

10. Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και είναι ίσες με την πρώτη παράγωγό τους.

6. Μονοτονία

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 135

1. Να διατυπώσετε τη συνέπεια του Θ.Μ.Τ. (Θεώρημα) για γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

2. Να διατυπώσετε τη συνέπεια του Θ.Μ.Τ. (Θεώρημα) για γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

3. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

β) Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f;

Παν. (Επ.) 2000–2006–2012–2017–2019

σελ. 136

1. Ποιο είναι το αντίστροφο των παραπάνω θεωρημάτων; Ισχύει; Αν όχι δώστε ένα αντιπαράδειγμα και γράψτε τι ισχύει.

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Η συνάρτηση $f(x)=e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξου-σα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Επ. 2000

2. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$ 2018

3. Η συνάρτηση f με: $f'(x)=-2\eta\mu x+\frac{1}{\eta\mu^2 x}+3$, όπου $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επ. 2000

4. Αν είναι: $f'(x)=g'(x)+3$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. Επ. 2000

5. Αν μία συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ με $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

6. Έστω συνάρτηση f, συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ. 2010

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ. 2014

8. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής σε ένα διά-στημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του

Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. 2007

9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο (α,β) τότε $f'(x)<0$.

10. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β) και γνησίως φθίνουσα στο (β,γ) τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=\beta$.

11. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνε-χής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x_o)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. 2004

12. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

13. Αν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

14. Μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ όταν $f'(x)\geq 0$.

15. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

16. Αν μία συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό τα σημείο $x_0\in\Delta$ με $f'(x_0)=0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

17. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,0)$.

7. Τοπικά ακρότατα

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 140

1. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Παν. 2015

σελ. 141

1. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο;

Παν. 2012 – Επ. 2020

2. Τι ονομάζουμε τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης;

3. Τι ονομάζουμε θέσεις τοπικών ακρότατων μίας συνάρτησης;

σελ. 142

1. Είναι δυνατόν ένα τοπικό ελάχιστο να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο; Δώστε παράδειγμα.

2. Το ολικό μέγιστο είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μίας συνάρτησης; Δώστε παράδειγμα;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f. Επ. 2003

2. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ. Επ. 2005

3. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,+\infty)$ τότε το α είναι τοπικό ελάχιστο;

4. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

5. Ένα τοπικό μέγιστο μίας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

Επ. 2019

6. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. 2020 (Παλαιό)

7. Αν η f είναι πολυωνυμική συνάρτηση και x_o απλή ρίζα της $f'(x)$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o.

8. Στα άκρα κλειστών διαστημάτων οι συνεχείς συναρτήσεις παρουσιάζουν τοπικό ακρότατο.

9. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε η $f(x)$ δεν έχει ακρότατα.

10. Αν η $f'(x)=0$ έχει δύο λύσεις στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f έχει δύο ακρότατα.

11. Αν $f'(x)=0$ έχει δύο λύσεις στο $[\alpha,\beta]$ τότε η f έχει τέσσερα ακρότατα.

12. Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

13. Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

14. Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε το (ολικό) μέγιστο της συνάρτησης.

15. Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f τότε

$$f'(x_0)=0$$

16*. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος $\Delta\subseteq D_f$ τότε η f αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του x_0

17. Μία συνεχής συνάρτηση έχει πάντα τοπικό ακρότατο σε άκρο διαστήματος.

18. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Οι μόνες πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων της f είναι τα κρίσιμα σημεία της.

19. Κάθε περιοδική συνάρτηση έχει άπειρα τοπικά ακρότατα.

20. Αν μία περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει ένα τοπικό ακρότατο τότε θα έχει άπειρα τοπικά ακρότατα του ίδιου είδους.

8. Θεώρημα Fermat

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 142

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μίας συνάρτησης.

Παν. 2013 (Επ.) – (Επ.) 2017 – 2019

2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0, ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

Παν. 2002 – (Επ.) 2010

3. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Fermat.

σελ. 143

1. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων μίας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ;

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Παν. (Επ.) 2013

σελ. 144

1. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Παν. (Επ.) 2012 – 2016 – (Επ.) 2020

2. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Παν. (Επ.) 2014 – Επ. 2018

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει

$f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ 2017

2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και είναι $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0;

3. Αν $f'(x_0)=0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0.

4. Αν το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι παραγωγίσιμη τότε $f'(x_0)=0$.

5. Αν $f'(x_0)=0$ τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ακρότατο της f.

6. Στα σημεία που μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ακρότατα η παράγωγος είναι ίση με 0.

7. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης σε ένα σημείο της, είναι οριζόντια τότε η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο αυτό.

8. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και $x_0 \in \Delta$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

9. Κυρτότητα

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 155

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; Παν. 2006

2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ; Παν. 2010 – 2014

σελ. 156

1. Ποια είναι η σχετική θέση της C_f και της εφαπτομένης της σε ένα τυχαίο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ αν η f είναι κυρτή;

2. Ποια είναι η σχετική θέση της C_f και της εφαπτομένης της σε ένα τυχαίο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ αν η f είναι κοίλη;

3. Πώς διαπιστώνουμε την κυρτότητα μίας συνάρτησης με τη βοήθεια της 2ης παραγώγου της συνάρτησης;

4. Ποια είναι η αντίστροφη της παραπάνω πρότασης; Ισχύει; Αν δεν ισχύει δώστε ένα αντιπαράδειγμα. Τι ισχύει;

σελ. 157

1. Τι ορίζουμε ως σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης;

2. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του σημείου καμπής μίας συνάρτησης;

3. Αν το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε

$$f'(x_0)=\ldots\ldots$$

4. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μίας συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. 2003

2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

3. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο C_f, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f. Επ. 2017

4. Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. 2003

5. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν η f κυρτή στο (α,x_0) και κοίλη στο (x_0,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f. Επ. 2005

6. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει

$$f''(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$$ 2008

7. Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ, βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους. Επ. 2008

8. Αν το $(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\mathbb{R}$$

9. Αν το $(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f τότε ορίζεται η $f''(x_0)$.

10. Αν $f''(x_0)=0$ τότε το $(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f.

11. Αν η f είναι κυρτή και $\alpha<\beta<\gamma$ τότε μπορεί

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

12. Αν η f είναι κυρτή στο (α,β) τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο.

13*. Αν το $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της f τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

14. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

15. Στα σημεία καμπής η εφαπτομένη της C_f "δια-περνά" την καμπύλη.

16. Αν οι f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

17. Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

18. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής

10. Ασύμπτωτες

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 161

1. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f; Παν. (Επ.) 2003 – 2015 – 2010 – Επ. 2020

2. Δώστε ένα παράδειγμα κατακόρυφης ασύμπτωτης.

σελ. 162

1. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;
Παν. 2007 – (Επ.) 2016

2. Δώστε ένα παράδειγμα οριζόντιας ασύμπτωτης.

3. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης f στο $+\infty$.
Παν. 2005 – 2011

3. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

.... και ....

4. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ αν και μόνο αν

.... και ....

σελ. 163

1. Ποιες πολυωνυμικές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες;

2. Ποιες ρητές συναρτήσεις δεν έχουν ασύμπτωτες;

3. Που ψάχνουμε για ασύμπτωτες;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μία ασύμπτωτή της.
Επ. 2018

2. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη. Επ. 2015 – Επ. 2016

3. Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$ δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία με μία ασύμπτωτη αυτής.

4. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

5. Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$$

6. Η C_f μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.

7. Κατακόρυφη ασύμπτωτη αναζητάμε στα άκρα του πεδίου ορισμού μίας συνάρτησης στα οποία η συνάρτηση δεν ορίζεται.

8. Αν το πεδίο ορισμού μίας συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

9. Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$ τότε η $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια (ή οριζόντια αν $\lambda = 0$) ασύμπτωτη στο $-\infty$.

10. Αν $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$ τότε η $y = \kappa$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ στην C_f.

11. Αν $f(x) = \kappa x + \mu + g(x)$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ τότε η C_f έχει στο $-\infty$ πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \kappa x + \mu$.

12. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

13. Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = +\infty$$

14. Αν $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

15. Η C_f μπορεί να έχει ταυτόχρονα πλάγια και οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

16. Πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες αναζητάμε μόνο στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

17. Η C_f μπορεί να έχει κοινά σημεία με μία κατακόρυφη ασύμπτωτή της.

18. Μία συνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

19. Δεν υπάρχει συνάρτηση που να έχει περισσότερες από μία κατακόρυφες ασύμπτωτες.

20. Κάθε ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή $Q(x)$ δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

21. Αν μία συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]$ τότε δεν μπορεί να έχει ασύμπτωτες.

11. Κανόνας De l' Hospital

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 164

1. Ποιες είναι οι προϋποθέσεις για να μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του de L' Hospital και να γράψουμε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Αν στον υπολογισμό ενός ορίου προκύπτει απροσδιόριστη μορφή μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του de L' Hospital διαδοχικά περισσότερες από μία φορές;

3. Ποιες είναι οι διαφορετικές απροσδιόριστες μορφές που μπορούμε να συναντήσουμε;

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\overset{g'(x_0)\neq 0}{=}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α τότε

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)+xf'(x)}{1}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$$

3. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ έχει την απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{0}{0}$ και δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ τότε δεν υπάρχει και το πρώτο όριο.

12. Μελέτη συνάρτησης

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 169

1. Ποια είναι τα βήματα που πρέπει να κάνουμε ώστε να μελετήσουμε μία συνάρτηση;

2.2 Θέματα Πανελλαδικών

1. *Πανελλήνιες 2000 (Θετική Κατεύθυνση) – 3ο θέμα*

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0, 1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α) η ευθεία y = 3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,1)$ **Μον. 7**

β) υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ **Μον. 12**

γ) υπάρχει $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$ **Μον. 6**

2. *Πανελλήνιες 2000 (Θετική) – 4ο θέμα*

Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t)=\frac{\alpha t}{1+\left(\frac{t}{\beta}\right)^2},\ t\geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β **Μον. 15**

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά **Μον. 10**

3. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$$

α) Να βρείτε το $f(0)$ **Μον. 7**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ **Μον. 9**

γ) Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων στα σημεία $A(0,f(0))$ και $B(0,h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες **Μον. 9**

4. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 4ο θέμα*

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο:

$$P(t)=4+\frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}$$

α) Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά **Μον. 2**

β) Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται **Μον. 10**

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη **Μον. 8**

δ) Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά **Μον. 5**

5. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-\alpha},\text{ όπου α πραγματικός αριθμός.}$$

α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=4$. **Μον. 5**

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1, 0) να διέρχεται από το σημείο Α(–2, 3). **Μον. 10**

γ) Αν $\alpha>2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0\in(1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0, να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. **Μον. 10**

6. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2000 – 4ο θέμα*

Σε έναν διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για την διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επιπλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α) Να αποδείξετε ότι το κόστος $K(x)$ σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών δίνεται από τη συνάρτηση

$$K(x)=10\left(x+\frac{16}{x}+40\right)$$

όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

Μον. 13

β) Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο; **Μον. 8**

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του ερωτήματος (β) και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών. **Μον. 4**

7. *Πανελλήνιες 2001 – 3ο θέμα*

Για μία συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. **Μον. 10**

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. **Μον. 8**

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$ **Μον. 7**

8. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2001 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\le 1\\ \left(1-e^{-x+1}\right)\cdot\ln(x-1), & x\in(1,2]\end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$ **Μον. 7**

β) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ **Μον. 8**

γ) Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ **Μον. 7**

9. *Πανελλήνιες 2002 – 3ο θέμα*

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1–1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1–1 **Μον. 7**

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα **Μον. 18**

10. *Πανελλήνιες 2003 – 4ο θέμα*

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma\in(\alpha,\beta)$, $\delta\in(\alpha,\beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β) **Μον. 8**

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$ **Μον. 9**

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f **Μον. 8**

11. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – 4ο θέμα*

Δίνεται μία συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)=-f(2-x) \text{ και } f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη **Μον. 8**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα **Μον. 8**

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° **Μον. 9**

12. *Πανελλήνιες 2004 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα **Μον. 10**

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής **Μον. 8**

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **Μον. 7**

13. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 **Μον. 7**

β) Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1,2005)$ και $B(-2,1)$, να λύσετε την εξίσωση: $f^{-1}\left(-2004+f\left(x^2-8\right)\right)=-2$ **Μον. 9**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y=-\dfrac{1}{668}x+2005$ **Μον. 9**

14. *Πανελλήνιες 2006 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f **Μον. 8**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της **Μον. 5**

γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ με $\beta\in\mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ **Μον. 9** δ) Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες. Μον. 3

15. *Πανελλήνιες 2008 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. Μον. 3

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μον. 9

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. Μον. 6

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$ για κάθε $x>0$. Μον. 7

16. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$. Μον. 6

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μον. 6

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)}, & x>0 \\ k, & x=0 \end{cases}$.

i) Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής. Μον. 6

ii) Αν $k=-\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, e). Μον. 7

17. *Πανελλήνιες 2009 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, όπου $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.

Α. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. Μον. 8

Β. Για $\alpha=e$,

α) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Μον. 5

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$. Μον. 6

γ) αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,2)$. Μον. 6

18. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2),\ x>-1,\ \text{όπου } \lambda \text{ ένας πραγματικός αριθμός με } \lambda\geq -1$$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Μον. 5

Β. Έστω ότι $\lambda=-1$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μον. 10

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μον. 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$. Μον. 4

19. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2010 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $x>0$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. **Μον. 5**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. **Μον. 6**

δ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος (γ) με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)=0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **Μον. 9**

20. *Πανελλήνιες 2011 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$. **Μον. 8**

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μον. 3**

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. **Μον. 7**

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **Μον. 7**

21. *Πανελλήνιες 2012 (Επαναληπτικές) – 3ο θέμα*

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x)+1=e^x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$. **Μον. 6**

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. **Μον. 6**

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=x+2$, $x\in\mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση. **Μον. 8**

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\cdot(\ell n x)\cdot \ell n(f(x))\right]$ **Μον. 5**

22. *Πανελλήνιες 2016 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία f η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f. **Μον. 6**

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία f η είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. **Μον. 9**

γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. **Μον. 7**

δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **α**, **β**, **γ** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) **Μον. 3**

23. *Πανελλήνιες 2016 – 3ο θέμα*

α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$. Μον. 4

β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μον. 8

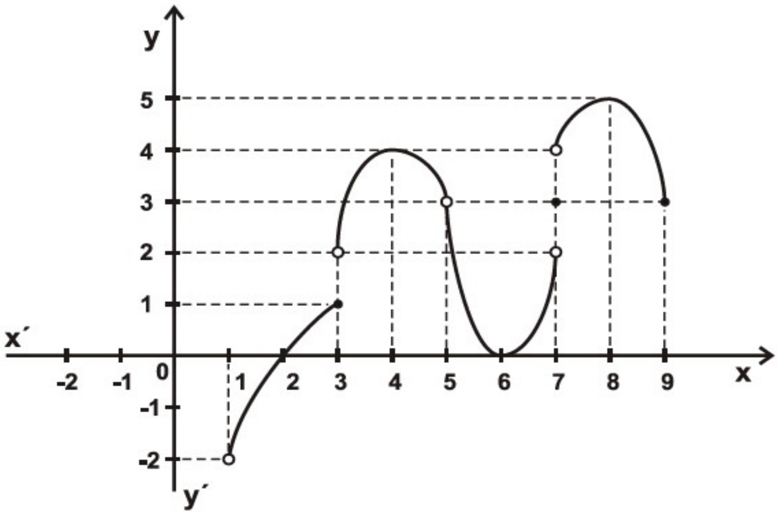
γ) Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή Μον. 4

δ) Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος γ, να λυθεί η εξίσωση

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x) \text{ όταν } x\in[0,+\infty)$$ Μον. 9

24. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2016 – 2ο θέμα*

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. Μον. 2

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to3}f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to5}f(x)$ iv) $\lim\limits_{x\to7}f(x)$ v) $\lim\limits_{x\to9}f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μον. 7

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{f(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{1}{f(x)}$ iii) $\lim\limits_{x\to8}f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μον. 9

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μον. 3

ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0)=0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μον. 4

25. *Πανελλήνιες 2017 – 2ο θέμα*

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq1$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ Μον. 5

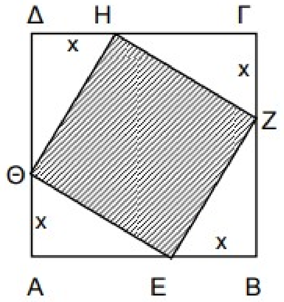
β) Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της Μον. 6

γ) Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής Μον. 7

δ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) Μον. 7

26. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2017 – 2ο θέμα*

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm.



Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:

α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x **Μον. 6**

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4\,,\ 0 \le x \le 2$$ **Μον. 4**

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο **Μον. 9**

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1$ cm^2 **Μον. 6**

27. *Πανελλαδικές 2018 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα **Μον. 8**

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής **Μον. 4**

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f **Μον. 6**

δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f **Μον. 7**

28. *Πανελλαδικές 2018 – 3ο θέμα*

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο το κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι

$$E(x) = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}\,,\ x \in (0,8)$$ **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου **Μον. 10**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 **Μον. 10**

29. *Πανελλαδικές 2018 (Επαναληπτικές) – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x > 1 \\ x^2 + \alpha, & x \le 1 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής **Μον.3**

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$ **Μον. 6** γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά **Μον. 7**

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση **Μον. 9**

30. *Πανελλαδικές 2019 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$ **Μον. 3**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$ **Μον. 7**

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1–1 (**Μον. 2**) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη της (**Μον. 4**) **Μον. 6**

δ) Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (**Μον. 3**) και στη συνέχεια να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (**Μον. 6**) **Μον. 9**

31. *Πανελλαδικές 2019 – 3ο θέμα*

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$ **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της **Μον. 4**

γ) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική (**Μον. 4**)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ (**Μον. 4**) **Μον. 8**

δ) Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $M\overset{\Delta}{O}K$ τη χρονική στιγμή t_0, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$ **Μον. 8**

32. *Πανελλαδικές 2019 (Επαναληπτικές) – 2ο θέμα*

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$$ **Μον. 5**

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$ **Μον. 6**

γ) Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=\frac{(g\circ f)(x)}{x-2}$$ **Μον. 6**

δ) Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,2]$ **Μον. 8**

33. *Πανελλαδικές 2020 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases},\ \text{με } \lambda>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$ η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$ **Μον. 6**

γ) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f **Μον. 6**

δ) Ένα σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, με $\alpha\le 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 **Μον. 8**

34. *Πανελλαδικές 2020 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$$ **Μον. 7**

β) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος α) που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο **Μον. 6**

γ) Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος α) που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

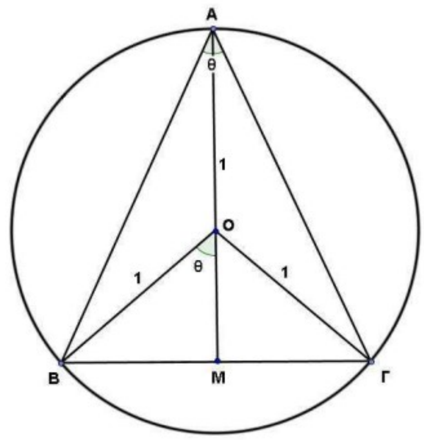
$$f(x)+x=x_0 \text{ για } x\in(x_0,1)$$

έχει μοναδική ρίζα ρ **Μον. 5**

δ) Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος α) που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος γ), να αποδείξετε ότι

$$f(x_0)>f(\rho)(f'(\kappa)+1) \text{ για κάθε } \kappa\in(\rho,1)$$ **Μον. 7**

35. *Πανελλαδικές 2020 (Παλαιό) – 3ο θέμα*



Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M = \theta$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:

$$E(\theta) = (1 + \text{συν}\theta)\text{ημ}\theta\,,\ \theta \in (0, \pi)$$ **Μον. 5**

β) Να βρείτε τη τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται **Μον. 8**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$ για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$ **Μον. 6**

δ) Για τις γωνίες θ_1, θ_2 του ερωτήματος γ) να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right)E'(\xi_2)$$ **Μον. 6**

36. *Πανελλαδικές 2020 (Επαναληπτικές) – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους **Μον. 8**

β) Έστω $(\varepsilon): y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος α). Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ με $-2 < \alpha < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f **Μον. 9**

γ) Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του; **Μον. 8**

37. *Πανελλαδικές 2020 (Επαναληπτικές) – 4ο θέμα*

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot \text{συν}^3 x + f'(x) \cdot \text{συν}^2 x \cdot \text{ημ}x - 1 = 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \text{ημ}x - \text{εφ}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\text{ημ}x} + \frac{1}{\text{συν}x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **Μον. 6**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε **Μον. 6**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ **Μον. 6** δ) Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος γ) **Μον. 7**

38. *Πανελλαδικές 2020 (Επαναληπτικές) – Παλαιό – 2ο θέμα*

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=(x+\alpha)^2-1,\ x\in[-1,+\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad g(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$ είναι ίση με 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, f^{-1} **Μον. 8**

Αν $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$, $x\in[-1,+\infty)$, τότε:

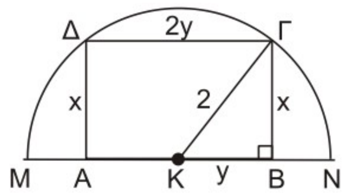
γ) να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$ **Μον. 6**

δ) να βρείτε το όριο

$$\lim_{x\to-1}\frac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1}\circ g)(x)},\ \text{όπου}\ (f^{-1}\circ g)(x)=|x|-1,\ x\in\mathbb{R}$$ **Μον. 6**

39. *Πανελλαδικές 2020 (Επαναληπτικές) – Παλαιό – 3ο θέμα*

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο $MN=4\text{ cm}$. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις $x\,\text{cm}$ και $2y\,\text{cm}$ είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, είναι

$$E(x)=2\sqrt{4x^2-x^4},\ x(0,2)$$

β) Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο

γ) Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

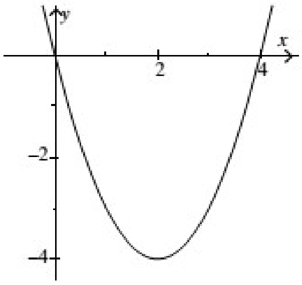
$$f(x)=\left(E(x)-2\sqrt{3}\right)e^x,\ x(0,2)$$

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$

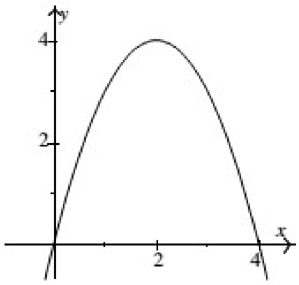
2.3 Γραφική παράσταση συνάρτησης

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha(x-\beta)(x-\gamma)^{\delta}$, $x\in\mathbb{R}$. Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις ανήκουν στη Βρείτε για ποιες τιμές των α, β, γ, $\delta\in\mathbb{Z}$ κάθε μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφική παράσταση της f.

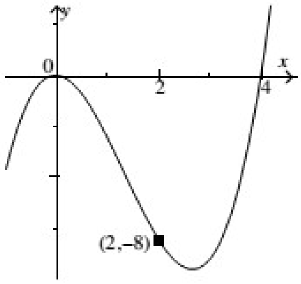
a.



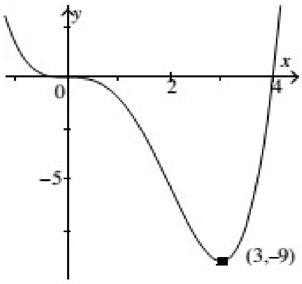
b.



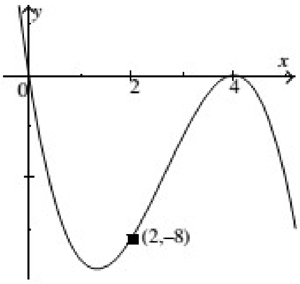
c.



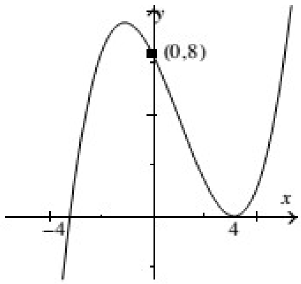
d.



e.

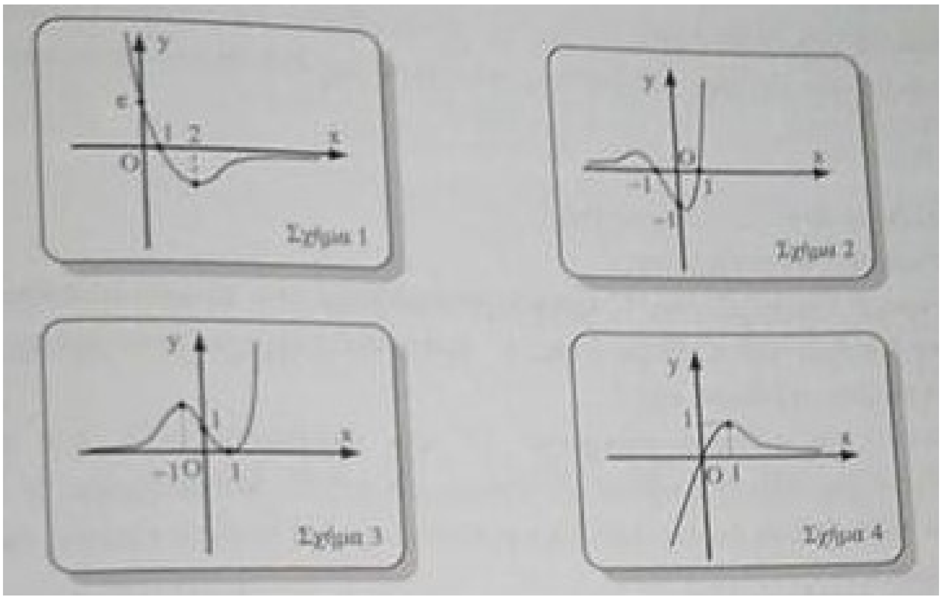


f.



2. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και των f', g'.

α) Αν η f παρουσιάζει μέγιστο τότε να βρείτε σε ποιο σχήμα είναι η f, g, f' και g'



β) Να μελετήσετε τις f, g ως προς την μονοτονία

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των $f\circ g$ και $g\circ f$

δ) Να υπολογίσετε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{\ln x}$ iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{g(x)}{x+1}$ iv) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\eta\mu(\pi x)}$

2.4 Ασκήσεις για λύση

1. Έστω η παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ συνάρτηση f με $f'(1)=2$ και $f(1)=1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} f^2(x), & x\ge 1 \\ 2\alpha x^2+\beta x, & x<1 \end{cases},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η g να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

2. Είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^{\nu}\eta\mu\frac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},\ \nu\in\mathbb{N},\ \nu>1$$

3. Έστω f παραγωγίσιμη στο 0 και

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ f'(0)=2006$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=2006$

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=2006$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|f(x)-x|}{x-1}\in\mathbb{R}$ τότε:

α) $f(1)=1$ β) $f'(1)=1$

5. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής, ώστε:

$$\eta\mu^2 2x-x^4\le xf(x)\le \eta\mu^2 2x+x^4 \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

6. Αν f,g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_0=1$ με $f(1)-g(1)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\le g(x)+x^2$ τότε $f'(1)-g'(1)=2$.

7. Να εξετάσετε αν η $f(x)=\sqrt{x}\cdot\ln(3^x+1)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

8. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=2x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο $A(1,3)$

β) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y=25x-11$

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης που να σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον $x'x$

ii) Υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ [Λ. Θ.]

9. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h με

$$f(x)=x^2-x+1,\ g(x)=-x^2+3x-1,$$
$$h(x)=\ln x,\ \text{με } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, h έχουν κοινή εφαπτομένη [Λ.Θ.]

10. α) Να αποδείξετε ότι έχουν κοινή εφαπτομένη οι C_f, C_g με $f(x)=x^2$ και $g(x)=-x^2+4x-3$

β) Αν $f(x)=x^5+\sqrt{2}x$ και $g(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$ να βρείτε την εφαπτομένη της C_f για την οποία υπάρχει παράλληλη προς αυτήν, εφαπτομένη της C_g

γ) Αν f παραγωγίσιμη και $g(x)=(x+3)f(x)$ για $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)=0$ να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη

δ) Έστω $f(x)=x^2-3x+5$ και $g(x)=x^2-5x+8$. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η $(\varepsilon): y=(\lambda-3)x+4$ να είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g

ε) Έστω $f(x)=x^5+x+2$ και $g(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f για την οποία υπάρχει παράλληλη εφαπτομένη της C_g

στ) Έστω $f(x)=x^3+3x^2+6x+1$ και $g(x)=2\eta\mu x$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g

11. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ με $x\ne 0$, παραγωγίσιμη στο $x_0\ne 0$. Να δείξετε ότι:

α) Η f παραγωγίζεται στο x_0

β) Αν η εφαπτομένη της C_g στο $A(x_0,g(x_0))$ είναι $\parallel$ στον $x'x$ τότε η κλίση της C_f στο x_0 είναι $g(x_0)$

12. Έστω $f(x)=x^2+4x+3$ και $(\varepsilon): y=6x+\mu$.

α) Αν η (ε) εφάπτεται στην C_f στο $(x_0,f(x_0))$ να βρείτε το x_0 και το μ

β) Να αποδείξετε ότι το $\lim_{x\to x_0}\frac{6\alpha x^2-\beta x+2}{x^2+3x-4}\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν το $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στην ευθεία (ε)

13. Έστω $f(x)=x^3-3x^2$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ και να εξετάσετε αν η εφαπτομένη τέμνει την C_f και σε άλλο σημείο M

β) Για ποιο x_0 η εφαπτομένη έχει με την C_f ένα μόνο κοινό σημείο;

14. Δίνεται η καμπύλη $C: y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C που τέμνει τους θετικούς ημιάξονες σε σημεία που ισαπέχουν από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

15. Έστω $f(x)=x^3+x+1$ με $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες

$$(3\lambda^2+1)x-y=2\lambda^3-1 \text{ με } \lambda\in\mathbb{R}$$

εφάπτονται στην C_f

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} και να βρείτε την εφαπτομένη της στο $(-1,f^{-1}(-1))$

16. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}=\frac{1}{\alpha-x_0}+\frac{1}{\beta-x_0}$$

17. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ με

$$f'(x_0)=\frac{\alpha+\beta-2x_0}{(x_0-\alpha)(x_0-\beta)}$$

18. Έστω η συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_1\in(\alpha,\beta)$ με

$$f'(x_1)=\varepsilon\varphi\left(x_1-\frac{\pi}{2}\right)$$

19. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο και $f'(0)>0$, $f(1)=2+f(0)$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει $x_0\in(0,1)$ με $f'(x_0)=4x_0$

β) υπάρχει $x_1\in(0,1)$ με $f'(x_1)=5x_1$

20. Αν $f(0)=0$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $x\ge 0$ να δείξετε ότι

$$x\le(x+1)f(x)\le x(x+1)$$

21. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $|f'(x)|\le 1$ για κάθε $x>0$ και η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι

$|f(x)|\le x$ για κάθε $x>0$ [Λ. Θ.]

22. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $0<f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι

$$f(\beta)+\alpha<f(\alpha)+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ με } \alpha<\beta$$

γ) Να αποδείξετε ότι

$$f(x+y)>f(x)+y \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } y<0$$

δ) Αν επιπλέον υπάρχουν α, β με $\alpha>\beta$ και

$$f(\alpha)+\beta\le f(\beta)+\alpha$$

τότε να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς τη διχοτόμο των γωνιών του 1ου και 3ου τεταρτημορίου σε σημείο με $x_0\neq 0$ [Λ. Θ.]

23. Η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ ενώ $f(\gamma)=0$ για κάποιο $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

24. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$, $(l\in\mathbb{R})$. Να δείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

25. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $[0,2]$ με $1\le f'(x)\le 2$ και $1\le g'(x)\le 2$ για κάθε $x\in(0,2)$. Αν ισχύει ακόμη $f(2)=g(0)$ τότε να αποδείξετε ότι $4\le g(2)-f(0)\le 8$. [Λ. Θ.]

26. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμες για τις οποίες είναι

$$f''(x)=g''(x),\ x\in\mathbb{R}$$

$$f(0)=g(0),\ f'(1)=2,\ g'(1)=1$$

Να αποδείξετε ότι:

α) είναι $f(x)-g(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$

β) αν η $f(x)=0$ έχει δύο ετερόσημες ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$ τότε η $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (x_1,x_2)

γ) οι εφαπτομένες των C_f, C_g στο σημείο με την ίδια τετμημένη x_0 τέμνονται πάνω στον $y'y$

27. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x>0$.

α) Να βρεθεί το τοπικό ακρότατο της f

β) Να αποδείξετε ότι $e^{x^2}\geq x^{2e}$, $x>0$

γ) Αν $\alpha^{x^2}\geq x^{2\alpha}$ για $x>0$ τότε $\alpha=e$

28. Έστω η συνάρτηση f με

$$f(x)=2e^x+x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η ευθεία $y=3x+2$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης

β) η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

γ) $f(x)\geq 3x+2$, $x\in\mathbb{R}$ [Λ. Θ.]

29. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ $x>0$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο $A(1,e)$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{1}{x}}+e\cdot x\geq 2e$, $x>0$ [Λ. Θ.]

30. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο. Η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει στο 0 τοπικό ελάχιστο το 0. Να αποδείξετε ότι:

α) το $f(0)$ είναι το ελάχιστο της f

β) η $f^2(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω

31. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ για τις οποίες η f στρέφει τα κοίλα κάτω και η g στρέφει τα κοίλα πάνω στο $[0,1]$ και $f(0)=f(1)=g(0)=g(1)$. Να αποδείξετε ότι:

α) υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)=g'(x_0)$$

β) είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$

32. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha},\ 0<x<1 \text{ και } \alpha>1$$

Αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(0,1)$

β) για $\alpha>1$ ισχύει

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2},\ x,y\in(0,1)$$

γ) αν $x>0$, $y>0$, $\alpha>1$ και $x+y=1$, τότε ισχύει:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}+\left(y+\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\geq\frac{5^{\alpha}}{2^{\alpha-1}}$$

Διαγωνισμός Α.Σ.Ε.Π. Εκπαιδευτικών 2008

33. Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς Oxy ένα κινητό κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, $x>0$. Έστω M η θέση του κινητού στο επίπεδο κάθε στιγμή και έστω A, B οι προβολές του M στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Η τετμημένη του σημείου M μεταβάλλεται με ρυθμό $1\ m/sec$. Κατά τη χρονική στιγμή t_o που το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(1,e)$, να βρείτε τους ρυθμούς μεταβολής:

α) του εμβαδού του τριγώνου OAM

β) της απόστασης (AB)

γ) της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M, με τον άξονα $x'x$

34. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) i) Να υπολογίσετε τα

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty}f(x)$$

ii) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

iii) Να αποδείξετε ότι η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

γ) Να υπολογίσετε την f' για κάθε $x\in D_f$

δ) i) Να αποδείξετε ότι

$$e^x-3\sqrt{e^x}+2=\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right),\ x\in\mathbb{R}$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x$

iii) Να βρείτε το πρόσημο της

$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$$

και να αποδείξετε ότι

$$e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x},\ x\in[0,\ln 4]$$

ε) Αποδείξτε ότι $f(x)\leq x$, $x\in[0,\ln 4]$

στ) Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f

3. Ολοκληρωτικός Λογισμός

3.1 Ερωτήσεις στη Θεωρία – Προτάσεις Σ – Λ

1. Ορισμός ολοκληρώματος

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 184

1. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Παν. (Επ.) 2006 – 2011 – 2014 – 2019

σελ. 185

2. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$

Παν. (Επ.) 2003 – 2015 – 2010

σελ. 212

3. Πώς ορίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα τη f από το α στο β;

σελ. 214

4. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τότε

$$\int_\alpha^\beta \lambda\cdot f(x)dx=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

5. Αν η f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

6. Αν η f,g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ τότε

$$\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7. Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ, $\delta\in\Delta$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\beta^\gamma f(x)dx=\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$ 2008 – 2014

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$. Επ. 2010

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ με $\gamma\notin[\alpha,\beta]$ τότε δεν ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] με $f(x)\geq 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ τότε υπάρχει

$$x_o\in[\alpha,\beta]:f(x_o)>0$$

5. Το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ με f συνεχή είναι μία συνάρτηση.

6. Αν $f'(x)=\eta\mu\pi x$ και $f(0)=0$, τότε $f(1)=\dfrac{2}{\pi}$

7. Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$.

8. $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta g(x)dx$

2. Ανισοτικές σχέσεις

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 212

1. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\ \ldots\ldots\ 0$$

2. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\ \ldots\ldots\ 0$$

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ισχύει $f(x)\geq 0$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$$ 2007

2. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$. 2015

3. Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει: αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$

Επ. 2016

4. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_\beta^\alpha f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Επ. 2017 – 2019

5. Αν $f(x)\geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

6. Αν είναι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

7. Αν $f(x)<g(x)$ τότε

$$\int_\kappa^\lambda f(x)dx<\int_\kappa^\lambda g(x)dx,\ \kappa,\lambda\in\mathbb{R}$$

8. Ισχύει $\int_0^5 f(x)dx<\int_0^6 f(x)dx$

9. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι

$$f(x)=0 \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

10. Αν $f(x)\geq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$

11. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

12. Αν $f'(x)\geq 0$, $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta f'(x)dx>0$$

13. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

14. Ισχύει $\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx\leq\beta-\alpha$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

15. Ισχύει $\int_{-\alpha}^\alpha (x^4+1)dx<\int_{-\alpha}^\alpha (x^4+x^2+1)dx$, $\alpha>0$.

16. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε

$$f(\xi)=0 \text{ για κάποιο } \xi\in(\alpha,\beta)$$

17. Έστω f,g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\leq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

18. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(x)dx$ τότε $f(x)=g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$.

19. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha,\beta]$.

Επ. 2020

3. Συνάρτηση ολοκλήρωμα

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε ι

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x)-f(\alpha) \text{ για κάθε } x\in\Delta$$

2005

2. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)'=f(x) \text{ για κάθε } x\in\Delta$$

Επ. 2007

3. $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)'=f(g(x))g'(x)$ με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Επ. 2014

4. Το $\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι ορισμένο ολοκλήρωμα.

5. Για να ορίζεται η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ στο $\mathbb{R}$ πρέπει η συνάρτηση $f(x)$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$;

4. Θεμελιώδες θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 216

1. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. *Παν. 2018*

2. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Παν. 2002 – 2008 – 2013

σελ. 218

1. Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

2. Να γράψετε τον τύπο της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = G(\beta)-G(\alpha)$. 2004

2. Ισχύει η σχέση

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$$

όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β]. 2006

3. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$. Επ. 2006 – 2016

4. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα. 2007

5. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g'(x)dx$$ Επ. 2007

6. $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g'(x)dx = [f(x)\cdot g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)\cdot g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$. 2012

7. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$. Επ. 2012 – 2015

8. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx = G(\alpha)-G(\beta)$$ Επ. 2017

9. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f'(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta$.

10. Αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 0$.

11. Αν η f είναι περιττή τότε

$$\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = 2\int_0^\alpha f(x)dx$$

12. Αν $f'(x)=g'(x)$, $x\in[-1,1]$ και $f(0)=g(0)+2$ τότε για κάθε $x\in[-1,1]$ ισχύει

$$\int_{-1}^1 (f(x)-g(x))dx = 4$$

13. Ισχύει $\int_{-\alpha}^\alpha \ln|x|dx = 0$

14. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

15. Ισχύει $\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx = 1$.

16. Ισχύει $I=\int_0^{\pi/4}\ln(1-\eta\mu^2 x)dx = 2\int_0^{\pi/4}\ln\sigma\upsilon\nu x dx$

17. Ισχύει $\int_{-1}^1 |x^2-1|dx = \frac{4}{3}$

18. Ισχύει $\int_1^e \ln x dx = 1$

19. Ισχύει $\int_5^6 \frac{1}{4-x}dx = \ln 6 - \ln 5$

20. Ισχύει $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt$.

21. Ισχύει $\int_\alpha^\beta (1+\varepsilon\varphi^2 x)dx = \varepsilon\varphi\beta - \varepsilon\varphi\alpha$.

22. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και παρουσιάζει ακρότατα στα α και β τότε

$$\int_\alpha^\beta f''(x)dx = 0$$

5. Εμβαδόν χωρίου

Ερωτήσεις στη Θεωρία

σελ. 224

1. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα xx'.

σελ. 225

2. Με τι είναι ίσο το εμβαδόν ενός χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f, μίας συνάρτησης g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

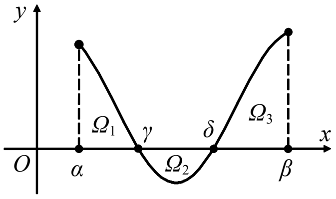
Προτάσεις Σωστό – Λάθος

1. Το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x μείον των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x. Επ. 2008

2. Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ και τον άξονα x'x είναι

$$E(\Omega) = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$ 2009

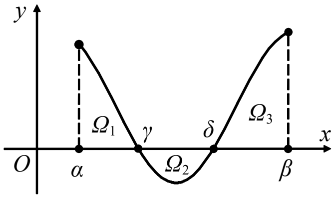
3. Έστω η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος.



Αν $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$ τότε

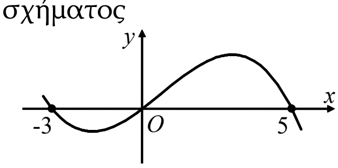
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=6$$

4. Έστω η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος.



Είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=E(\Omega_1)+E(\Omega_2)+E(\Omega_3)$.

5. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος



είναι ίσο με $\int_{-3}^{0} f(x)dx-\int_0^5 f(x)dx$

6. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}\left(x^3-x\right)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^3-x$$

και τον άξονα των x.

7. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ τότε

$$f(x)>0,\ x\in[\alpha,\beta]$$

8. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $f(x)=\ln x$, την $x=\frac{1}{e}$ και την $x=e$ είναι ίσο με $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x dx$.

9. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε το χωρίο $\Omega=\{C_f, x'x, x=\alpha, x=\beta\}$ έχει εμβαδόν $E=\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|$.

10. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ είναι

$$E(\Omega)=\int_\beta^\alpha f(x)dx$$

3.2 Θέματα Πανελλαδικών

1. *Πανελλήνιες 2000 – 4ο θέμα*

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συγκέντρωση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1}-2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$ **Μον. 6**

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη; **Μον. 6**

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t=8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t=10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$) **Μον. 10**

2. *Πανελλήνιες 2001 – 2ο θέμα*

Έστω f μία πραγματική συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3 \end{cases}$.

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha=-\frac{1}{9}$ **Μον. 9**

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4,f(4))$ **Μον. 7**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$ **Μον. 9**

3. *Πανελλήνιες 2001 – 4ο θέμα*

Έστω μία πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x)=1-2x^2 \cdot \int_0^1 t f^2(xt)dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο: $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

*α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2x \cdot f^2(x)$. **Μον. 10**

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή **Μον. 4**

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ **Μον. 4**

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to +\infty}(x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x)$ **Μον. 7**

4. *Πανελλήνιες 2002 – 4ο θέμα*

α) Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x)>g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$ **Μον. 2**

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1,\ x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=0$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f **Μον. 5**

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$ Μον. 12

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x = 0,\ x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι: $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$ Μον. 6

5. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2002 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} Μον. 10

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν Μον. 5

γ) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)dx$ Μον. 10

6. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2002 – 4ο θέμα*

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 2f'(0) = 1$$

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f. Μον. 12

7. *Πανελλήνιες 2003– 3ο θέμα*

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση Μον. 6

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1 + x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Μον. 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, 0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} Μον. 5

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία x = 3 Μον. 8

8. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2003 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ Μον. 5

β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$. Μον. 6

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$ Μον. 6

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$ Μον. 8

9. *Πανελλήνιες 2004– 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x \cdot f(x)$ όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$ Μον. 8

β) Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Μον. 8

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} I(\alpha)$ Μον. 9

10. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2^x+m^x-4^x-5^x$, όπου $m\in\mathbb{R}$ και $m>0$.

α) Να βρείτε τον m ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μον. 13**

β) Αν $m=10$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. **Μον. 12**

11. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2004 – 4ο θέμα*

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)\to R$ τέτοια ώστε $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2x\cdot f(2xt)dt$.

*α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ **Μον. 7**

*β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$ **Μον. 7**

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$ **Μον. 5**

δ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **Μον. 6**

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

12. *Πανελλήνιες 2005 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα **Μον. 3**

β) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda ex$

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. **Μον. 7**

γ) Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y'y, είναι $E(\lambda)=\dfrac{e-2}{2\lambda}$ **Μον. 7**

δ) Υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\dfrac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$ **Μον. 8**

13. *Πανελλήνιες 2005 – 4ο θέμα*

Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(x)=e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=0$$

α) Να δειχθεί ότι: $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$ **Μον. 6**

14. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2005 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$

α) Να δείξετε ότι: i) $f(0)=0$ **Μον. 4**

ii) $f'(0)=1$ **Μον. 4**

β) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$. **Μον. 7**

γ) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i) $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$ **Μον. 6**

ii) $\int_0^1 f(x)dx<f(1)$ **Μον. 4**

15. *Πανελλήνιες 2006 – 2ο θέμα*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x\geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1 Μον. 6

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της Μον. 8

γ) i) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$ Μον. 4

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} Μον. 7

16. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο $\mathbb{R}$ Μον. 9

*β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int\dfrac{1}{f(x)}dx$ Μον. 9

γ) Για κάθε x < 0 να αποδείξετε ότι $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$ Μον. 7

17. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2006 – 3ο θέμα*

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10}=z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x^2+x+\alpha,\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

*α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x = 2. Μον. 7

β) Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x = 2 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $y_0=-3$, τότε:

i) να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). Μον. 9

ii) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα $x'x$ και της ευθείας $x=\dfrac{3}{5}$. Μον. 9

18. *Πανελλήνιες 2007 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x^3-3x-2\eta\mu^2\theta$, όπου $\theta\in\mathbb{R}$ μία σταθερά με $\theta\neq\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. Μον. 7

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες Μον. 8

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$, $\Gamma(x_3,f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ Μον. 3

δ) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y=-2x-2\eta\mu^2\theta$ Μον. 7

19. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007 – 2ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x<0\\ x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0\end{cases}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=3$ Μον. 8

β) Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι α = β = 3 Μον. 9

γ) Αν α = β = 3, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi}f(x)dx$ Μον. 8

20. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2007 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x - e\ln x$, $x>0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1,+\infty)$ **Μον. 10**

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x)\geq e$ για κάθε $x>0$ **Μον. 7**

*γ) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$ **Μον. 8**

21. *Πανελλήνιες 2008 – 4ο θέμα*

Έστω f μία συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$ **Μον. 8**

β) Δίνεται επίσης μία συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$$ **Μον. 4**

γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$ **Μον. 10**

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1 – 1 **Μον. 3**

22. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2008 – 4ο θέμα*

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x>0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x\in[0,+\infty),\qquad h(x)=\frac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt},\quad x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt = F(1)$ **Μον. 6**

*β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$. **Μον. 8**

γ) Αν $h(1)=2$, τότε: i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$ **Μον. 6**

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{2}F(1)$ **Μον. 5**

23. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2009 – 4ο θέμα*

Δίνεται μία συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

- $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$, $0\leq x\leq 2$
- $f'(0)=2f(0)$, $f'(2)=2f(2)+12e^4$, $f(1)=e^2$, όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\frac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0\leq x\leq 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$ **Μον. 4**

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$$ **Μον. 6**

γ) Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$ **Μον. 6** δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$ Μον. 5

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$ Μον. 4

24. *Πανελλήνιες 2010 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f Μον. 5

β) Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ Μον. 7

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$ Μον. 6

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ Μον. 7

25. *Πανελλήνιες 2010 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x \quad \text{και} \quad f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

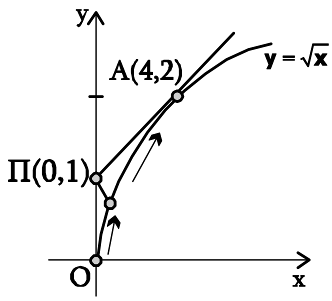
*α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in\mathbb{R}$ Μον. 5

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$ Μον. 6

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Μον. 7

26. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011 – 3ο θέμα*



Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x\ge 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\ge 0$ είναι $x'(t)=16$ m/min.

α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, δίνεται από τον τύπο: $x(t)=16t$ Μον. 5

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή Μον. 6

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α Μον. 6

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$, κατά την οποία η απόσταση $d=(\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη Μον. 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

27. *Πανελλήνιες (Επαναληπτικές) 2011 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1+f(0)$

ii) $f'(0)<f(1)-f(0)$ και

iii) $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ **Μον. 3**

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ **Μον. 5**

Αν επιπλέον $g(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{xg(x)}$ **Μον. 6**

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx>2$ **Μον. 5**

ε) Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=e-\dfrac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi} f(t)dt=2$ **Μον. 6**

28. *Πανελλήνιες 2012– 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot\ln x-1$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f **Μον. 6**

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες **Μον. 6**

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$ **Μον. 6**

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$ **Μον. 7**

29. *Πανελλήνιες 2012 – 4ο θέμα*

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt\geq\dfrac{x-x^2}{e}$
- $\ln x-x=-\left(\int_1^x\dfrac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)|$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της. **Μον. 10**

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$, τότε:

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\eta\mu\dfrac{1}{f(x)}-f(x)\right]$ **Μον. 5**

30. *Πανελλήνιες 2013 – 3ο θέμα*

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$. Μον. 9

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης: $f\left(g(x)\right)=1$ Μον. 8

31. *Πανελλήνιες 2013 – 4ο θέμα*

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(1)=0$ Μον. 4

καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$ Μον. 2

32. *Πανελλήνιες 2013 (Επαναληπτικές) – 3ο θέμα*

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x)+x^2\left(f'(x)-3\right)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=\dfrac{1}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ Μον. 6

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος (α). Μον. 4

γ) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5\left(x^2+1\right)^3-8\right)\le f\left(8\left(x^2+1\right)^2\right)$$ Μον. 7

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi}f(t)\,dt=-\xi\left(3\xi^2-1\right)f\left(\xi^3-\xi\right)$$ Μον. 8

33. *Πανελλήνιες 2013 (Επαναληπτικές) – 4ο θέμα*

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)=x+\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^u\frac{\left(f'(t)\right)^2-1}{f(t)}dt\right)du$
- $f(x)\cdot f'(x)\ne 0$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις: $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ με $x>0$ και $h(x)=\left(f'(x)\right)^3$ με $x\ge 0$

*α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\cdot f''(x)+1=\left(f'(x)\right)^2$ για κάθε $x>0$ Μον. 4

β) i) Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0,+\infty)$ Μον. 4

ii) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$ Μον. 3

γ) Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

i) $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ Μον. 2

ii) $\int_0^1 (2-x)f(x)dx<1$ Μον. 4

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. Μον. 8

34. *Πανελλαδικές 2014 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα Μον. 5

β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))}<\dfrac{e}{e+1}$, $x\in\mathbb{R}$ Μον. 7

γ) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$ Μον. 6

δ) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$, $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ Μον. 7

35. *Πανελλαδικές 2014 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα. Μον. 9

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$ έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x=0$ Μον. 7

ii) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$. Μον. 4

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(xf(x)+1-e)^2(x-2)^2$, $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου. Μον. 7

36. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2014 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{\ln x}{x}}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$. Μον. 4

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. Μον. 7

γ) i) Να αποδείξετε ότι, για $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x)=f(4)\Leftrightarrow x^4=4^x$ Μον. 2

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4=4^x$, $x>0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$ Μον. 6

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)dt=f(\xi)\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)$ Μον. 6

37. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2014 – 4ο θέμα*

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, $A=(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x\text{, για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται — Μον. 4
και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. — Μον. 3

Για τα ερωτήματα (β) και (γ) δίνεται ότι $f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. — Μον. 3
Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$ — Μον. 6

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x,f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x),x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα

i) Να δείξετε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 — Μον. 3

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in\mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους — Μον. 6

38. *Πανελλαδικές 2015– 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$ — Μον. 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\dfrac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα — Μον. 8

39. *Πανελλαδικές 2015 – 4ο θέμα*

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$ — Μον. 5

β) i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. — Μον. 3

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. — Μον. 4

40. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2015 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. — Μον. 6

*β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x)=\int_1^{h(x)}\sqrt{t^2-1}dt$, $h(x)=f\left(x^2+1\right)-f(2)+1$ — Μον. 6

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)-\dfrac{1}{2}\right)=1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 — Μον. 6

δ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος (γ) ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$ **Μον. 7**

41. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2015 – 4ο θέμα*

Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\left(x^2 - x\right) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ **Μον. 6**

42. *Πανελλήνιες 2016 – 4ο θέμα*

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right) \eta\mu x dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ (**Μον. 4**) και $f'(0) = 1$ (**Μον. 3**) **Μον. 7**

β) **i)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$. **Μον. 4**

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Μον. 2**

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$ **Μον. 6**

δ) Να δείξετε ότι $0 < \int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$ **Μον. 6**

43. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2016 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1–1 (**Μον. 2**) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} **Μον. 4**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$ **Μον. 9**

γ) Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$. **Μον. 4**

δ) Αν $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$$ **Μον. 6**

44. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2016 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln x}{x}+1, & 0<x<1 \\ 1, & x=1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (**Μον. 3**) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (**Μον. 2**) **Μον. 5**

β) Να δείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. **Μον. 8**

γ) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$. (**Μον. 3**)

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι $E=\dfrac{-x_0^{\ 2}-2x_0+2}{2}$ (**Μον. 4**) **Μον. 7**

δ) Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2),\ \text{για κάθε } x>1$$ **Μον. 5**

45. *Πανελλήνιες 2017 – 3ο θέμα*

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=-\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε **Μον. 8**

β) Αν $(\varepsilon_1): y=-x$ και $(\varepsilon_2): y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος α), τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$ **Μον. 6**

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$ **Μον. 4**

δ) Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$ **Μον. 7**

46. *Πανελλήνιες 2017 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0) \\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi] \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της **Μον. 5**

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της **Μον. 6**

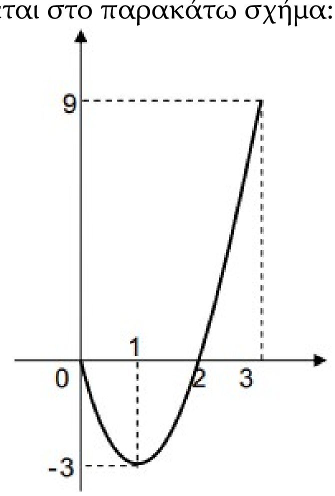
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$ **Μον. 6**

δ) Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$ **Μον. 8**

47. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2017 – 3ο θέμα*

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left[0,3\right]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0)=2$, $f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $\left[0,3\right]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(3)=2$, $f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας **Μον. 8**

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f **Μον. 8**

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$ **Μον. 5**

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f **Μον. 4**

48. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2017 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $\left[0,2\right]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής **Μον. 2**

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ **Μον. 2**

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f **Μον. 8**

δ) Να αποδείξετε ότι: $\pi<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2}f(x)dx<\dfrac{3\pi}{2}-1$ **Μον. 7**

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right)=f\left(\dfrac{-\pi}{2}e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$ **Μον. 6**

49. *Πανελλήνιες 2018 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-\alpha}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>1$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha>1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής **Μον. 3** β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 **Μον. 7**

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2) **Μον. 6**

δ) Αν $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$ **Μον. 9**

50. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2018 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\eta\mu x - x$.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά) **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο **Μον. 5**

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x dx$ **Μον. 8**

δ) i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$ **Μον. 2**

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot \ln x\right]$ **Μον. 5**

51. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2018 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$ **Μον. 5**

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$ **Μον. 5**

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$, για κάθε $x>0$ **Μον. 5**

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0, \text{ όπου } 0<\alpha<1$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$ **Μον. 5**

ε) Αν F είναι μία αρχική της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι

$$\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$$ **Μον. 5**

52. *Πανελλαδικές 2019 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+2$, η οποία εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=2$ **Μον. 4**

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$ **Μον. 5**

γ) i) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq -1$ **(Μον. 3)**

ii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2}$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ **(Μον. 5)** **Μον. 8**

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=-x^3-x+2$, $x\in\mathbb{R}$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της **Μον. 8**

53. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2019 – 3ο θέμα*

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\left[0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M\left(1,1\right)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)=\sqrt{x},\ \ x\in\left[0,+\infty\right)$ **Μον. 6**

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση **Μον. 6**

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα $x'x$ **Μον. 7**

δ) Δίνεται επιπλέον μία συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:\left[0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $0<g\left(x\right)<1$ για κάθε $x\geq0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο $\left(0,1\right)$ **Μον. 6**

54. *Πανελλαδικές (Επαναληπτικές) 2019 – 4ο θέμα*

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ **Μον. 4**

β) Να αποδείξετε ότι η $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(μον. 2)** και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$ **(μον. 4)** **Μον. 6**

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2\left(x\right)dx<1$ **Μον. 6**

δ) Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$f\left(\eta\mu^2x\right)+f\left(\sigma\upsilon\nu^2x\right)=f\left(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}\right)$$ **Μον. 9**

55. *Πανελλαδικές 2020 – Παλαιό – 4ο θέμα*

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f\left(x\right)=x\ln x-\ln\left(\lambda x\right),\ x\in\left(0,+\infty\right),\ \lambda\in\left(0,+\infty\right)\ \text{και}$$

$$g\left(x\right)=x^x,\ x\in\left(0,+\infty\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\left(0,+\infty\right)$ **Μον. 5**

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda>0$ για την οποία ισχύει

$$x^x\geq\lambda x \text{ για κάθε } x>0$$ **Μον. 5**

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων **Μον. 6**

δ) Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h\left(x\right)=\begin{cases}x^x, & x>0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι

i) η h είναι συνεχής **Μον. 3**

ii) η εξίσωση

$$x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g\left(t\right)dt\right)+\left(1-x\right)\int_0^1 h\left(1-t\right)dt=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,1\right)$ **Μον. 6**

56. *Πανελλαδικές 2020 (Επαναληπτικές) – Παλαιό – 4ο θέμα*

Έστω $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει

$$x\cdot f(x)=\text{συν}x-1$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x=0\end{cases}$$ Μον. 3

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$$ Μον. 4

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ Μον. 7

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2020\cdot\text{συν}x-x=2020$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ Μον. 4

ε) Έστω F μία αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0)=\rho$, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος δ). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει

$$\pi\cdot|F(x)|\le 2\cdot|x|$$ Μον. 7

3.3 Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα $\int_2^5 \frac{1}{|x-\alpha|+2}dx$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς μία ρίζα, το 0

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις $y=1$, $x=1$ **Ομογενείς 2012**

3. Μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη. Έστω ότι υπάρχει αρχική F της f ώστε: $2(F(x)-f(x))=f^2(x)$, $x>0$. Να δείξετε ότι:

α) η f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=1$

4. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και F μία αρχική της f ώστε $F(1)=\frac{1}{2}$ και $F(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $F\left(\frac{1}{x}\right)\cdot f(x)=\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$

β) η $g(x)=F(x)\cdot F\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$ είναι σταθερή

γ) $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{4}{x}$ για κάθε $x>0$

δ) $f(x)=2x^3$ για κάθε $x>0$ **[Titu Andreescu]**

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x+\frac{4}{x}$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=\lambda$, $x=\lambda+1$, $\lambda>0$ είναι $E(\lambda)=2\lambda+1+4\ln\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο

6. Έστω η συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Η C_f διέρχεται από τα $A(0,2)$, $B(2,2e^2)$ και $\int_0^2 (f'(x))^2dx+\int_0^2 f^2(x)dx=4e^4-4$.

α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)f'(x)dx$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3f(x^2)dx$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x^2)$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

ii) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1,g(1))$

iv) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^1 g(x)dx>\frac{e}{2}$

7. Έστω οι $g(x)=\ln x$ και $h(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να ορίσετε την συνάρτηση $f(x)=(g\circ h)(x)$

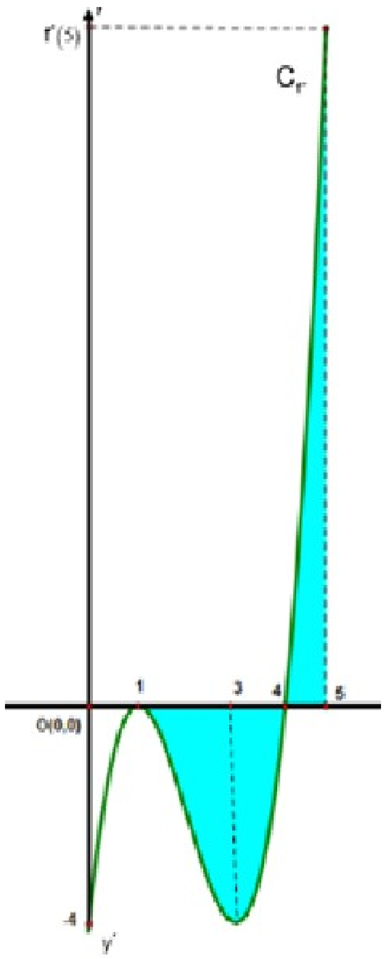
β) Να εξετάσετε αν $f(x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να βρείτε το $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\int_2^{\kappa}\frac{x^3-5x}{x^2-1}dx-\int_{\kappa}^2[h(x)-h(-x)]dx=6$$

8. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $A_f=[0,5]$, $f(4)=-8$, $f(0)=0$, $f(1)=-\frac{5}{4}$. Δίπλα φαίνεται η $C_{f'}$ και τα δύο εμβαδά είναι ίσα.



α) Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f

β) Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες 0 και 1

δ) Να δείξετε ότι $f(5)=-\frac{5}{4}$

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

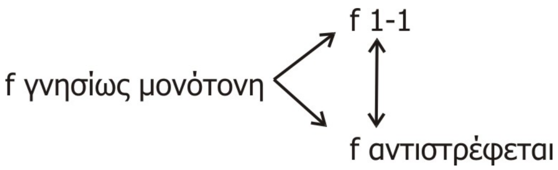
4. Ειδικά θέματα

4.1 Ειδικό θέμα Α: Αντίστροφη συνάρτηση

- Η $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται 1–1 όταν: $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, αν $x_1\neq x_2$ τότε $f(x_1)\neq f(x_2)$ (ΟΡΙΣΜΟΣ).
- Η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1–1 όταν: $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}$, αν $f(x_1)=f(x_2)$ τότε $x_1=x_2$ (ΠΡΟΤΑΣΗ).
- Για να δείξουμε ότι η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι 1–1
  - Θεωρούμε τυχαία $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)$ και αποδεικνύουμε ότι $x_1=x_2$.
  - Δείχνω ότι η f είναι γνησίως μονότονη αφού:
    Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι (1–1) (ΠΡΟΤΑΣΗ)
  - Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι 1–1. Άρα θα υπάρχουν $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$. Έτσι θα υπάρχει ξ με $f'(\xi)=0$, ... και καταλήγουμε σε άτοπο.
- Για να δείξουμε ότι η $f:A\to\mathbb{R}$ δεν είναι 1–1: βρίσκουμε $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν η f είναι 1–1 τότε ορίζεται η f^{-1} με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f από την ισοδυναμία:
  $f(x)=y\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$.
- Για να βρούμε τον τύπο της f^{-1}, λύνουμε την ισότητα $f(x)=y$ ως προς x, οπότε $x=f^{-1}(y)$.
- Δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης οποιασδήποτε συνάρτησης
  $f^2(x)-2f(x)=x\Rightarrow y^2-2y=x\Rightarrow f^{-1}(y)=y^2-2y\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2-2x$
  $f(x)=x^5-4x^3-7$. Δεν μπορούμε να βρούμε την αντίστροφη

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1. Ισχύει το εξής σχήμα:



2. Αν η f είναι 1–1 τότε:

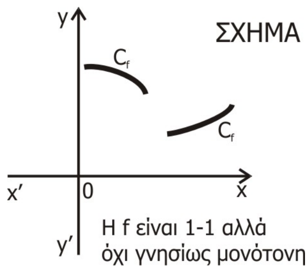
α) **Για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$ του συνόλου τιμών, υπάρχει ένα $x_0\in D_f$ με $f(x_0)=y_0$.**

β) **Για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$ του συνόλου τιμών, η εξίσωση $f(x)=y_0$ έχει μοναδική λύση.**

γ) **Για κάθε $y_0\in\mathbb{R}$, εξίσωση $f(x)=y_0$ έχει το πολύ μία λύση.**

δ) **Κάθε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ [της μορφής $y=c$, c σταθερά] τέμνει την C_f σε ένα το πολύ σημείο.**

3. Δεν ισχύει το αντίστροφο της (1), δηλαδή είναι λανθασμένη η συνεπαγωγή:
«Αν η f είναι 1–1, τότε η f είναι γνησίως μονότονη». (Δες σχήμα)
Ισχύει όμως η πρόταση:
«Αν η f είναι 1–1 και συνεχής τότε η f είναι γνησίως μονότονη».
[ΔΕΝ περιέχεται στο σχολικό βιβλίο].



4. Όταν η f αντιστρέφεται στο Α, ισχύουν:

α) $f^{-1}(f(x))=x,\quad \forall x\in A$

β) $f(f^{-1}(y))=y,\quad \forall y\in f(A)$

γ) Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$, που είναι η διχοτόμος των γωνιών του 1ου και 3ου τεταρτημορίου. Επομένως $\begin{cases}y=f(x)\\y=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\y=x\end{cases}$ (χωρίς απόδειξη)

5. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ, τότε και η αντίστροφή της έχει το ίδιο είδος μονοτονίας στο $f(\Delta)$.

Απόδειξη

Έστω ότι $f\uparrow\Delta$. Θεωρούμε τυχαία $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2$. Άρα $f\left(f^{-1}(y_1)\right) < f\left(f^{-1}(y_2)\right) \overset{f\uparrow\Delta}{\Rightarrow} f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Επομένως $f^{-1}\uparrow f(\Delta)$. Η απόδειξη γίνεται όμοια αν $f\downarrow\Delta$.

6. Αν $f\uparrow\Delta$ και η C_f βρίσκεται πάνω από την $y = x$ τότε η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y = x$.

7. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο A, τότε η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$.

Απόδειξη

Αν $f\uparrow$ τότε $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow f(x) + x = f(y) + y \qquad (1)$

Έστω $g(x) = f(x) + x$. Είναι $g\uparrow$ άρα (1) → $g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y$.

Επομένως $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$

8. Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$

Αν $\begin{cases} g(f(x)) = x,\ x \in A \\ g: 1-1 \\ g(B) = A \end{cases}$, τότε $\begin{cases} f(A) = B \\ f^{-1}(x) = g(x), \quad x \in B \end{cases}$

9. Αν μία συνάρτηση είναι περιττή τότε και η αντίστροφή της είναι περιττή.

Απόδειξη

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ είναι $f^{-1}(-y) = f^{-1}(-f(x)) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$. Άρα η f^{-1} είναι περιττή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν μία συνάρτηση είναι άρτια τότε δεν αντιστρέφεται.

10. Σε ένα όριο της παρακάτω μορφής πηγαίνω από το πρώτο στο δεύτερο μέλος ή αντίστροφα ανάλογα με το αν ξέρω την f ή την f^{-1}.

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f^{-1}(x)+x}{f^{-1}(x)-x} \underset{y\to f^{-1}(\alpha)}{\overset{f^{-1}(x)=y\Leftrightarrow x=f(y)}{=}} \lim_{y\to f^{-1}(\alpha)}\frac{y+f(y)}{y-f(y)}$$

11. Αν οι f, f^{-1} είναι παραγωγίσιμες τότε ισχύουν:

α) $\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$, $\forall x \in A$ (με $f'(x) \neq 0$).

β) $f'\left(f^{-1}(y)\right) = \dfrac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)}$, $\forall y \in f(A)$ (με $\left(f^{-1}\right)'(y) \neq 0$).

12. Αν $f\uparrow\mathbb{R}$, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν οι C_f, $C_{f^{-1}}$ διχοτομείται από την ευθεία $y = x$ άρα είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου μεταξύ των C_f και $y = x$ [ή μεταξύ των $C_{f^{-1}}$ και $y = x$].

13. Αν η f αντιστρέφεται στο [α, β], έχει συνεχή αντίστροφη και παραγωγίζεται, τότε:

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta x f'(x)\,dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Ασκήσεις για λύση

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$f^3(x)+f(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να Αποδείξετε ότι:
i) η f είναι 1–1
ii) η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

β) Να βρείτε:
i) τον τύπο της f^{-1}
ii) το πρόσημο των f, f^{-1}
iii) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(f^{-1}(x)+20\right)>3$

δ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη και θέσουμε:

$$\varphi(x)=\int_x^{f(x)}f^{-1}(t)dt+\int_{f^{-1}(x)}^{x}f(t)dt$$

i) Αποδείξετε ότι: $\dfrac{\varphi(x)}{x}=f(x)-f^{-1}(x)$

ii) Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{x}$

2. Αν $f(x)=\sqrt{e^x+x-1}$,

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το: $I=\int_0^{\sqrt{e}}x\cdot f^{-1}(x)dx$

3. Έστω $f(x)=x^5-2x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f, $C_{f^{-1}}$

4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f(x)>0 \text{ και: } \ln f(x)+e^{f(x)}=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία

β) Αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=1$, $f(x)=e$

δ) Υπολογίστε το $I=\int_1^e f^{-1}(x)dx+\int_e^{e+1}f(x)dx$

5. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,\alpha]$ με $\alpha>0$ και $f(0)=0$, $f(\alpha)=\beta$.
Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha}f(x)dx+\int_0^{\beta}f^{-1}(x)dx=\alpha\beta$$

6. Έστω η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ και ισχύει:

$$e^{f(x)}-f(x)=x^2,\ \text{για κάθε } x\geq 1$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

β) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται

γ) Αν $f(5)>0$, μελετήστε τη μονοτονία της f

δ) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου, μεταξύ της C_φ, των αξόνων $x'x$, $y'y$ και της ευθείας $x=1$, όπου $\varphi(x)=\left[f^{-1}(x)\right]^2$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να δείξετε ότι η f έχει αντίστροφη

β) Να αποδείξετε ότι: $f\left(e^x\right)\geq f(1+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

γ) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον $x'x$ και την $x=3$

8. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=\alpha$ και $f(\beta)=\beta$ να δείξετε ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)}f^{-1}(x)dx=\beta^2-\alpha^2$$

9. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3+6x^2+12x+10,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την αντίστροφή της

β) Να λύσετε την εξίσωση $(f\circ f)(x)=3$

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln x+x,\ x\in(0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της αντίστροφής της στο σημείο $B(e+1,e)$

11. Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που έχουν την ιδιότητα:

$$f(g(x))=g(f(x))=-x,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι συναρτήσεις f, g είναι περιττές και $f(0)=g(0)$

β) Οι συναρτήσεις f, g είναι αντιστρέψιμες

γ) Οι συναρτήσεις f, g έχουν σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως μονότονες, δεν μπορεί έχουν την ίδια μονοτονία

ε) Ισχύουν οι σχέσεις:

$$f^{-1}(x)=-g(x) \text{ και } g^{-1}(x)=-f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

4.2 Ειδικό θέμα Β: Ανισοτικές σχέσεις

Συνοπτικός πίνακας ανισοτήτων

- Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει: $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha - \beta > 0$
- Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
- Αν α και β ομόσημοι τότε $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} > 0$
- Αν $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
- Αν α και β ετερόσημοι τότε $\alpha \cdot \beta < 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} < 0$
- Αν $0 < \alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$
- $\alpha^2 \geq 0$ και $|\alpha| \geq 0$

- Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$
- Για κάθε $\alpha < 0$ ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

- $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.
- Για $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ισχύει $\varepsilon\varphi x > x$.
- Για $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi x < x$.

- $\ln x \leq x - 1 < x < x + 1 \leq e^x$

ΠΡΟΣΟΧΗ:
Μία ανίσωση μπορούμε να την ολοκληρώσουμε.
Μία ανίσωση δεν μπορούμε να την παραγωγίσουμε.

Η ανισοτική σχέση ως ζητούμενο

1. **Μονοτονία** Αν $f \uparrow \Delta$ τότε για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
2. **Ακρότατα** Ολικό μέγιστο το $f(x_0)$ αν υπάρχει $x_0 \in A$ ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
3. **Θ.Μ.Τ.** Αν $f' \uparrow [\alpha, \beta]$ τότε $\alpha < x_0 < \beta \Rightarrow f'(\alpha) < f'(x_0) < f'(\beta)$
4. **Θεώρημα Fermat** (Από καθολική ανισοϊσότητα σε ισότητα)
5. $e^x \geq x + 1 > x > x - 1 \geq \ln x$
6. **1η ιδιότητα κυρτής – κοίλης (C_f και εφαπτομένη)** Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε η C_f στο $[\alpha, \beta]$ βρίσκεται «πάνω» («κάτω») από την εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της $(x_0, f(x_0))$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του $[\alpha, \beta]$.
7. **2η ιδιότητα κυρτής – κοίλης (C_f και χορδή)** Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή (κοίλη) και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε η C_f στο $[\alpha, \beta]$ βρίσκεται «κάτω» («πάνω») από τη χορδή που έχει άκρα τα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$.

8. **3η ιδιότητα κυρτής – κοίλης (ενδιάμεση τιμή)** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ. Αν $\alpha,\beta\in\Delta$ με $\alpha\neq\beta$ τότε **α)** αν η συνάρτηση είναι κυρτή τότε ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)>2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

β) αν η συνάρτηση είναι κοίλη τότε ισχύει $f(\alpha)+f(\beta)<2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

9. Αν $f(x)\geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$ με $\alpha<\beta$
10. Έστω f μία συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι
    - είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
    - είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$
    - δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$
11. Αν $f(x)\geq g(x)$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$
12. Αν m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμής της συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τότε

$$m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$$

Η ανισοτική σχέση ως δεδομένο

1. Αν $f(x)\geq 0$ και $f(x)\leq 0$ για κάθε $x\in A_f$ τότε $f(x)=0$
2. $\alpha^2+\beta^2\leq 0\Rightarrow\alpha=0$ και $\beta=0$
3. Πρόσημο τριωνύμου
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

   Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.
5. Αν είναι $f(x)>0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geq 0$.

   Αν είναι $f(x)<0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leq 0$.
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ και $f(x)\leq g(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.

   Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ και $f(x)\geq g(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$.
7. Κριτήριο παρεμβολής Αν $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.
8. Η $|\eta\mu x|\leq 1$, η $|\sigma\upsilon\nu x|\leq 1$ (φραγμένες) και η $|\eta\mu x|\leq|x|$ οδηγούν συνήθως σε κριτήριο παρεμβολής.
9. Σχέσεις της μορφής $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|$ μας βοηθούν να βγάλουμε συμπέρασμα για τη συνέχεια της συνάρτησης, την μονοτονία της και αν είναι σταθερή.
10. Αν $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε $f\uparrow\Delta$.

    Αν $f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε $f\downarrow\Delta$.
11. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε f κυρτή στο Δ.

    Αν $f''(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε f κοίλη στο Δ.
12. Δοσμένη ανισοτική σχέση μπορεί να προσδιορίσει το $f(\alpha)\cdot f(\beta)$ (θεώρημα Bolzano)
13. Δοσμένη ανισοτική σχέση της μορφής $\kappa\leq f'(x_0)\leq\lambda$ μπορεί με το Θ.Μ.Τ. να προσδιορίσει το $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.
14. Δοσμένη ανισοϊσότητα μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πρώτο μέλος, αν θεωρηθεί συνάρτηση, έχει ακρότατο (άρα Fermat).
15. Αν $f(x)\geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$

Ασκήσεις για λύση

1η μέθοδος (Μονοτονία συνάρτησης)

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5} \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty)$$

4η δέσμη 1999

2. Να αποδείξετε ότι:

$$e^{\frac{1}{x^2}} \le e^{\frac{t}{x^2}} \le e^{\frac{4}{x^2}} \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } t\in[1,4]$$

1η δέσμη 1999

3. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0,6]$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f περνά από το σημείο $A(0,1)$ και ισχύει $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0,6]$, να δείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,6]$

β) Είναι $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [0,6]$

γ) Το σημείο $B(6,8)$ δεν ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f **Κ.Ε.Ε.**

4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$e^{\sqrt{\pi}} < \pi^{\sqrt{e}}$$

5. Για κάθε $x>0$ να αποδείξετε ότι:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$$

2η μέθοδος (Ολικό ακρότατο συνάρτησης)

6. Να αποδείξετε ότι $2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \ge 3$ για κάθε $x>0$

Ανάλυση 1ης δέσμης

7. α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x>0$

β) Να αποδείξετε ότι: $x^x \ge e^{x-1}$ για κάθε $x>0$

Ανάλυση 1ης δέσμης

8. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ και } g(x) = 2x + f(x)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\ln x < x \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ **Κ.Ε.Ε.**

9. α) Να βρείτε το διάστημα $\Delta \subseteq (0,+\infty)$ για το οποίο ισχύει $x^{x+1} > (x+1)^x$ για κάθε $x \in \Delta$

β) Να αποδείξετε ότι

$$\left(1+\frac{1}{e}\right)^e < e$$

10. Να αποδείξετε ότι: $e^x \ge x^e$ για κάθε $x>0$

3η μέθοδος (Θ.Μ.Τ. και μονοτονία πρώτης παραγώγου)

11. Να αποδείξετε ότι $2 - \frac{e}{2} < \ln 2 < \frac{2}{e}$

Ανάλυση 1ης δέσμης

12. Να αποδείξετε ότι: $\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x-1$, $x>0$

Ανάλυση 1ης δέσμης

13. Να αποδείξετε ότι

$$\eta\mu(\alpha+h) < \eta\mu\alpha + h\sigma\upsilon\nu\alpha \text{, όπου } 0<\alpha<\alpha+h<\frac{\pi}{2}$$

Κ.Ε.Ε.

14. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{x+1} < \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$, $x>0$

2η ανισότητα του Napier

15. Αν $0<\alpha<\beta$ να αποδείξετε ότι

$$\alpha \cdot e < \left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta \cdot e$$

4η μέθοδος (1η ιδιότητα κυρτότητας (ενδιάμεση τιμή))

16. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ. Αν $\alpha,\beta \in \Delta$ με $\alpha \ne \beta$ τότε:

α) f κυρτή άρα $f(\alpha)+f(\beta) > 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

β) f κοίλη άρα $f(\alpha)+f(\beta) < 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

5η μέθοδος (2η ιδιότητα κυρτότητας (C_f και χορδή))

17. Η συνάρτηση f είναι κυρτή και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση στο $[\alpha,\beta]$ βρίσκεται κάτω από τη χορδή που έχει άκρα τα σημεία $(\alpha,f(\alpha))$, $(\beta,f(\beta))$.

6η μέθοδος (3η ιδιότητα κυρτότητας (C_f και εφαπτομένη))

18. Η συνάρτηση f είναι κυρτή και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι η C_f στο $[\alpha,\beta]$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο της $(x_0,f(x_0))$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$.

19. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=xe^x-3e^x+x^2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)+2x\geq -3$, $x\in\mathbb{R}$

7η μέθοδος ($\ln x\leq x-1<x<x+1\leq e^x$)

20. α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)=e^x$ είναι κυρτή

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$

γ) Να αποδείξετε ότι $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ΣΧ.

21. α) Να αποδείξετε ότι είναι κοίλη η $g(x)=\ln x$

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $B(1,0)$

γ) Να αποδείξετε ότι $\ln x\leq x-1$, $x>0$ ΣΧ.

22. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x^2)\leq x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

23. Να αποδείξετε ότι $xe^x\geq e^x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

8η μέθοδος (Από καθολική ανισοϊσότητα σε ισότητα (Θεώρημα Fermat))

24. Αν $\alpha,\beta>0$ και ισχύει $\alpha^x+\beta^x\geq 2$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=1$.

25. Αν $\alpha>0$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^x\geq x+1$ να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. ΣΧ.

26. α) Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$e^x+e^{2x}+e^{-3x}\geq 3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

β) Αν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_\nu$ είναι θετικοί αριθμοί και ισχύει $\alpha_1{}^x+\alpha_2{}^x+...+\alpha_\nu{}^x\geq\nu$ $(\nu\in\mathbb{N},\nu\neq 0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot...\cdot\alpha_\nu=1$

27. Έστω ότι $x^\alpha\geq\alpha^x,(\alpha>0)$ για κάθε $x>0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fermat να αποδείξετε ότι $\alpha=e$. Κ.Ε.Ε.

9η μέθοδος (Αν $f(x)\geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$)

28. Αν $1\leq\alpha<\beta$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta^\nu-\alpha^\nu}{\nu}<\frac{\beta^{\nu+1}-\alpha^{\nu+1}}{\nu+1} \text{ για κάθε } \nu\in\mathbb{N},\ \nu\neq 0$$

29. Να αποδείξετε ότι $\frac{\pi}{15}\leq\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\eta\mu x}\leq\frac{\pi}{3}$.

10η μέθοδος

(Αν $f(x)\geq g(x)$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta g(x)dx$)

(Αν m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμής της f τότε $m(\beta-\alpha)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M(\beta-\alpha)$)

30. Να δείξετε ότι

$$1-e\leq\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^0 e^{1-x^2}dx\leq e-1$$

Ανάλυση 1ης δέσμης

31. Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα

β) για $k\geq 1$ ισχύει

$$\sqrt{k}\leq\int_k^{k+1}\sqrt{x}dx,\ \int_{k-1}^k\sqrt{x}dx\leq\sqrt{k}$$

4η δέσμη – 1989

11η μέθοδος (Συνδυαστικά θέματα)

32. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=0$$

α) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f

β) Να δείξετε ότι

$$\frac{x}{2}<f(x)<xf'(x) \text{ για κάθε } x>0$$

γ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=0$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)$$

Πανελλήνιες 2002

4.3 Ειδικό θέμα Γ: Εξισώσεις

Πολυωνυμικές

1ου βαθμού: Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

2ου βαθμού: Διακρίνουσα και ρίζες εκτός αν είναι ελλιπής μορφή

3ου βαθμού και πάνω: Παραγοντοποίηση, θεώρημα ακέραιων ριζών και σχήμα Horner.

Θεμελιώδες θεώρημα Άλγεβρας (De l' Alembert)

Κάθε εξίσωση ν βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει ν (πραγματικές και μιγαδικές) ρίζες.

Παρατήρηση: Αν κάποιες ρίζες δεν είναι πραγματικές αυτές είναι μιγαδικές. Οι μιγαδικές ρίζες πάνε πάντα ανά δύο (κάθε μιγαδική ρίζα έχει και την αντίστοιχη συζυγή της). Επομένως μία τρίτου βαθμού πολυωνυμική εξίσωση μπορεί να έχει

- Τρεις πραγματικές ρίζες
- Μία πραγματική και δύο μιγαδικές ρίζες

Γενικές μέθοδοι λύσης

$A\cdot B=0\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ \text{ή}\\ B=0\end{cases}$. Μία εξίσωση με δύο αγνώστους: $A^2+B^2=0\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ \text{και}\\ B=0\end{cases}$ $|A|+|B|=0\Rightarrow\begin{cases}A=0\\ \text{και}\\ B=0\end{cases}$

1. Εξισώσεις και συναρτήσεις 1–1

Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x-1=0$.

Λύση

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=e^x+1>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1–1.

Επομένως $f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow}x=0$

2. Λύση εξίσωσης στο σημείο επαφής εφαπτομένης και κυρτής – κοίλης συνάρτησης

Να λύσετε την εξίσωση $e^x-x-1=0$.

Λύση

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$. Είναι $f'(x)=f''(x)=e^x>0$ άρα η f είναι κυρτή και η κάθε εφαπτομένη της βρίσκεται πάνω από τη C_f.

Η εφαπτομένη της C_f στο $(0,1)$ είναι η $y=x+1$ άρα $e^x\geq x+1$ (το ίσον ισχύει μόνο στο σημείο επαφής, το $x=1$)

3. Λύση εξίσωσης στο ακρότατο

Να λύσετε την εξίσωση $e^x-x-1=0$.

Λύση

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(x)=e^x-1$ και $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

$f''(x)=e^x>0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως
- $x\leq0\Rightarrow f'(x)\leq f'(0)=0$ άρα η f γνησίως φθίνουσα
- $x\geq0\Rightarrow f'(x)\geq f'(0)=0$ άρα η f γνησίως αύξουσα

Άρα
- $x\leq0\Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$
- $x\geq0\Rightarrow f(x)\geq f(0)=0$

επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$ δηλαδή $f(x)\geq f(0)$ και το «=» ισχύει μόνο για $x=0$.

4. Εύρεση προφανούς λύσης και απόρριψη των μικρότερων και μεγαλύτερων

Έστω συνάρτηση $f\downarrow(0,1]$ και $f\uparrow[1,+\infty)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)=f(x)$.

Λύση

Το $x=1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης.

Για $0<x<1$ είναι $x^2<x \overset{f:\downarrow}{\Rightarrow} f(x^2)>f(x)$.

Για $x>1$ είναι $x^2>x \overset{f:\uparrow}{\Rightarrow} f(x^2)>f(x)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το ίσον ισχύει μόνο για $x=1$.

5. (Μικρότερο ή ίσο) και (Μεγαλύτερο ή ίσο) άρα ίσο

Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{1+x^2}=1+y^2$.

Λύση

Είναι $1+x^2\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}\leq 1$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Είναι $1+y^2\geq 1$ και το ίσον ισχύει μόνο για $y=0$.

Άρα $\frac{1}{1+x^2}\leq 1\leq 1+y^2$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x=y=0$ άρα $\frac{1}{1+x^2}=1+y^2 \Leftrightarrow x=y=0$.

6. Λύση εξίσωσης σε συναρτησιακή σχέση

Να βρείτε τις ρίζες της συνάρτησης $f^3(x)+f^2(x)+f(x)=x^2-1$.

Λύση

$f^3(x)+f^2(x)+f(x)=x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-1}{f^2(x)+f(x)+1}$. Επομένως $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Παρατήρηση: Η διακρίνουσα του παρονομαστή είναι αρνητική άρα ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός

- Αν δεν μπορούμε να λύσουμε μία εξίσωση
  τότε την θέτουμε συνάρτηση και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε ένα διάστημα στο οποίο η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

- Προσδιορισμός αριθμού ριζών συνάρτησης
  Βρίσκουμε μονοτονία, ακρότατα και στη συνέχεια το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Από αυτό βρίσκουμε τον αριθμό των ριζών της συνάρτησης.

- Εξισώσεις και διπλή συνεπαγωγή
  Γενικώς στις εξισώσεις χρησιμοποιούμε διπλές συνεπαγωγές γιατί κατά τη διαδικασία λύσης μίας εξίσωσης μετακινούμαστε από μία εξίσωση σε μία (συνήθως απλούστερη) ισοδύναμη εξίσωση (δηλαδή με ίδιο αριθμό λύσεων).
  Διπλές συνεπαγωγές δεν χρησιμοποιούμε πάντα. Π.χ. Αν υψώσουμε και τα δύο μέλη μίας εξίσωσης σε δύναμη τότε προκύπτει εξίσωση με περισσότερες ρίζες κάποιες από τις οποίες θα απορρίψουμε (συχνά με επαλήθευση).

- Γεωμετρική λύση εξίσωσης
  Τα κοινά σημεία μίας συνάρτησης και μίας οριζόντιας ευθείας

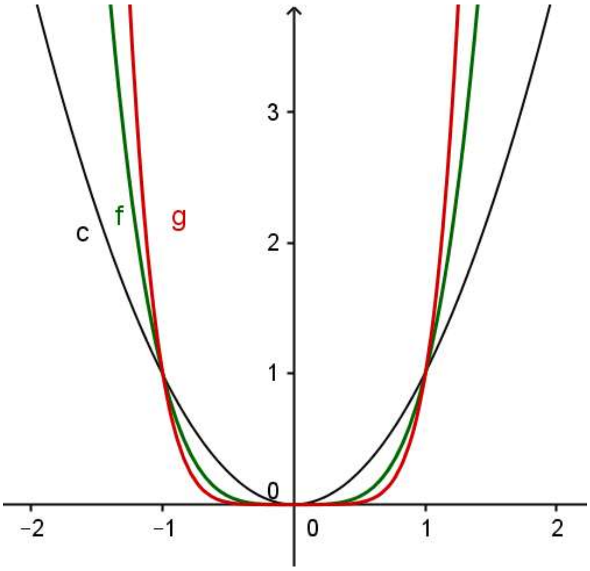
- Υπάρχει σαφής διαφορά ανάμεσα στις εκφωνήσεις:
  «Να λυθεί η εξίσωση» και «Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα»
  Στην δεύτερη περίπτωση δεν απαιτείται να βρούμε λύση απλά να βεβαιώσουμε ότι υπάρχει λύση.

- Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η f έχει δύο **ρίζες αντίθετες ή αντίστροφες** τότε αποδεικνύουμε ότι έχει μία ρίζα ρ και στη συνέχεια με δεδομένο ότι $f(\rho)=0$ αποδεικνύουμε ότι $f(-\rho)=0$ ή $f\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$.

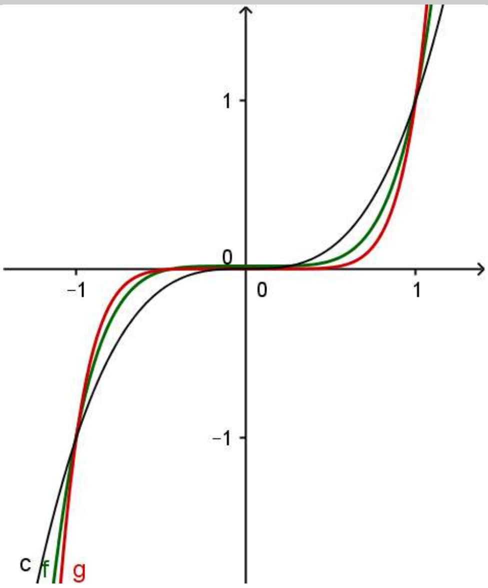
4.4 Ειδικό θέμα Δ: Γραφικές παραστάσεις

1. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=x\,,\ g(x)=x^2,\ h(x)=x^3,\ k(x)=\sqrt{x}\,,\ k(x)=\sqrt[3]{x}\,,\ \ldots$$



$c: y=x^2,\ f(x)=x^4,\ g(x)=x^6$



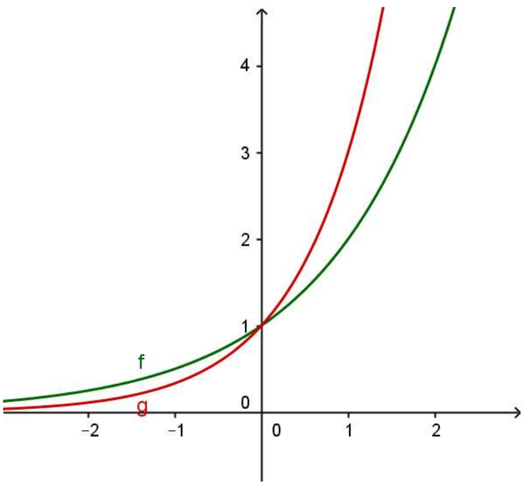
$c: y=x^3,\ f(x)=x^5,\ g(x)=x^7$

Για $0<x<1$: $\quad x<1 \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ x>0}{\Rightarrow} x^2<x \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ x>0}{\Rightarrow} x^3<x^2 \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ x>0}{\Rightarrow} x^4<x^3$. Άρα $x^4<x^3<x^2<x<1$

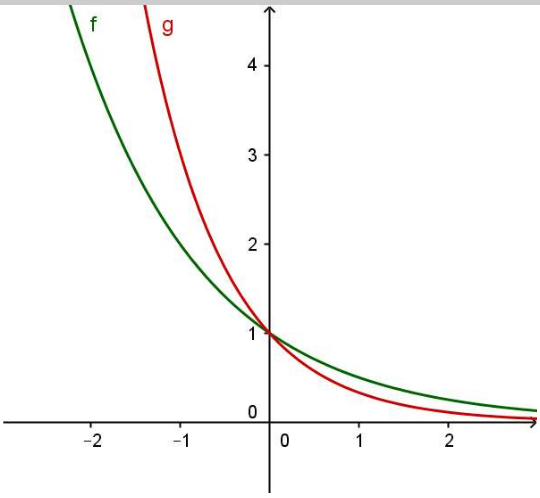
Για $x>1$: $\quad x>1 \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ x>0}{\Rightarrow} x^2>x \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ x>0}{\Rightarrow} x^3>x^2 \overset{\varepsilon\pi\acute{\iota}\ x>0}{\Rightarrow} x^4>x^3$. Άρα $x^4>x^3>x^2>x>1$

2. Να κάνετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=2^x,\ g(x)=3^x \ \text{ και } \ f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$$



$f(x)=2^x,\ g(x)=3^x$



$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Για $x>0$: $\quad 2^x<3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}<1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x>0$

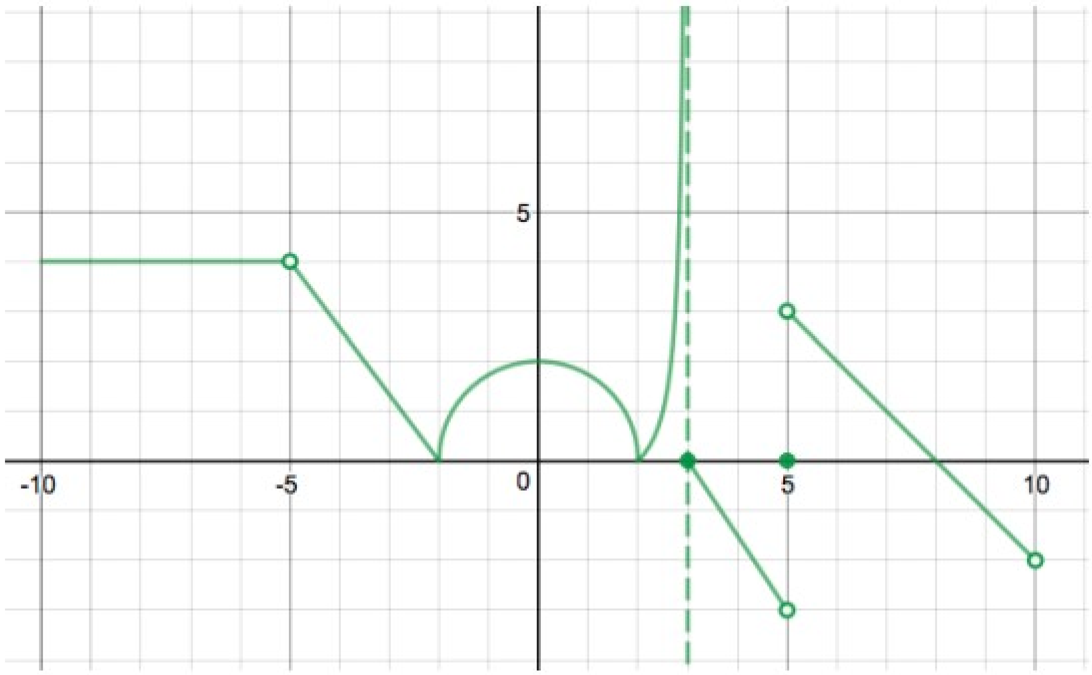
Για $x<0$: $\quad 2^x>3^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}>1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x>\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x<0$

Για $x<0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}>1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x>\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x<0$

Για $x>0$: $\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{3}\right)^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{3^x}<1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x<\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x>0$

Ασκήσεις για λύση

1. Χρησιμοποίησε την ακόλουθη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις.



α) $\lim\limits_{x\to 5}\left|f(x)\right| =$

β) $\lim\limits_{x\to -5} f'(x) =$

γ) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} =$

δ) Για να είναι μία συνάρτηση συνεχής σε ένα σημείο $x=\alpha$ πρέπει να ικανοποιούνται τρεις συνθήκες. Ποια συνθήκη δεν ικανοποιείται στο $x=-5$;

ε) Είναι $f'(0)=0$;

στ) Αν $g(x)=f\left(x^2\right)$ τότε $g'(-3)=$

ζ) Αν $y^2+\left[f(x)\right]^2=2$ τότε $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(7,1)} =$

η) Διαλέξτε την σωστή απάντηση:

i) $f''\left(\sqrt{3}\right)>0$

ii) $f''\left(\sqrt{3}\right)<0$

iii) $f''\left(\sqrt{3}\right)=0$

iv) Δεν ορίζεται $f''\left(\sqrt{3}\right)$

θ) Στο διάστημα $[3,10]$

i) η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο

ii) η f δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο

iii) δεν ορίζεται ολικό μέγιστο

ι) Υπάρχει $x_0\in[-2,0]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\sqrt{2}$

i) Αληθές

ii) Ψευδές

iii) Δεν μπορούμε να ξέρουμε

κ) Στο διάστημα $[0,2]$ υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

i) Αληθές

ii) Ψευδές

iii) Δεν μπορούμε να ξέρουμε

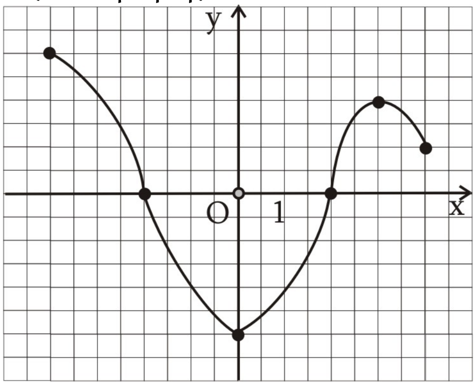
λ) Για ποια τιμή του x_0 στο διάστημα $[-10,10]$ ορίζεται η f'';

μ) Αν $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ τότε $g(2)=$

ν) $\int_6^9 f(x)\,dx =$

ξ) $\int_3^8 f(x)\,dx =$

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

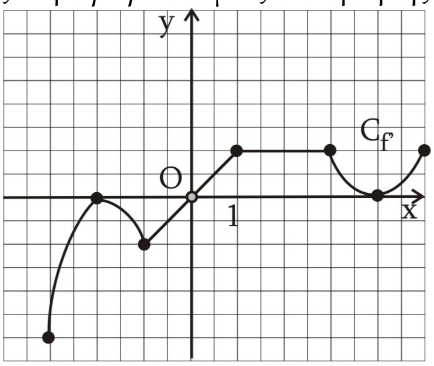


α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
$$f(x)=\kappa\,,\ \kappa\in[1,+\infty)$$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-4,4)$ τέτοιο ώστε
$$f(x_0)=\frac{2f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+4f\left(\frac{3}{2}\right)}{7}$$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f.



α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της (αν υπάρχουν)

γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

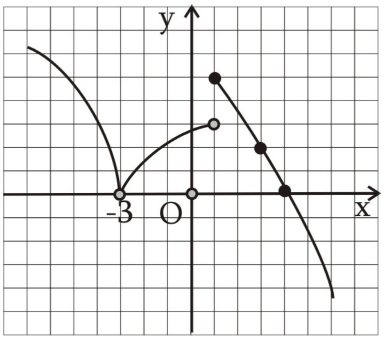
ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h^3}$

iii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x^2+x}$

δ) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες

ε) Αν $f(-3)=5$, $f(0)=-2$ και $f(5)=7$ τότε να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η C_g.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g

β) Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω:

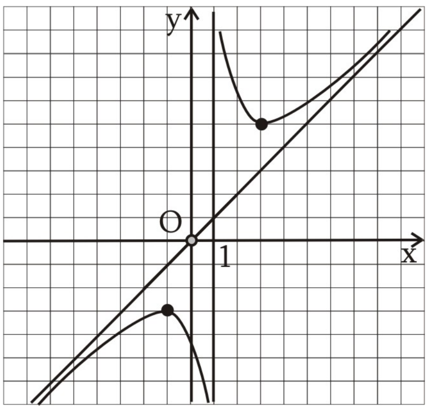
i) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{g(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{1}{g(x)}$ iv) $\lim\limits_{x\to -\infty}g(x)$

v) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{g(x)}$

γ) Να εξετάσετε σε ποιες τιμές η συνάρτηση g δεν είναι συνεχής. [Γ. Σ.]

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτης της C_f

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της (αν υπάρχουν)

ε) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

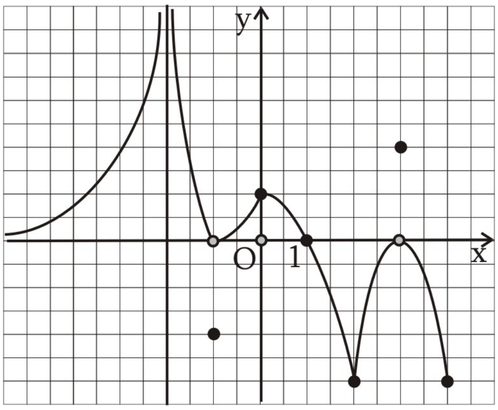
i) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-x\right]$

στ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(f(x)+1)x^2-x^3}{xf(x)+e^{-x}}$

[Πουκαμισάς]

6. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μίας συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο διάστημα $(-\infty,-2)\cup(-2,4]$



α) Να μελετήσετε την f' ως προς την συνέχεια

β) Να μελετήσετε την f και την f' ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f'

ε) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f'

στ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης της f' στο $(-\infty,-2)$

ζ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to-2} f'(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1}{f'(x)}$ iv) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{f'(x)}$

v) $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{1}{f'(x)}$ vi) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

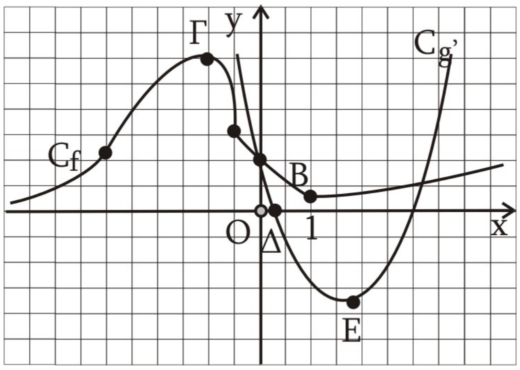
vii) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

η) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $A\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$, $B\left(2,-\dfrac{1}{3}\right)$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από γραφική παράσταση της f', τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=2$ [Μπαχαράκης]

7. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσειςτων παραγωγίσιμων συναρτήσεων f και g'. Η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο στο Γ και ολικό ελάχιστο στο B, το οποίο έχει τεταγμένη $\dfrac{1}{3}$.

Δίνονται τα σημεία $\Delta\left(\dfrac{1}{3},g'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$ και $E\left(\dfrac{5}{3},g'\left(\dfrac{5}{3}\right)\right)$, καθώς και ότι η g'' είναι συνεχής στο $A_{g''}$

α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς την μονοτονία



β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\le0$ ώστε η συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases} f(x), & x\ge\alpha \\ |g'(x)|, & x<\alpha \end{cases}$$

να είναι συνεχής

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $A=\lim\limits_{x\to\frac{5}{3}} \dfrac{f(x)}{(g''(x))^2}$

ii) $B=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(\sigma\upsilon\nu x+\ln x+g(f(x))\right)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right]$

δ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\eta\mu(x-3)}{g'(x)}=\dfrac{1}{g''(3)}$

ε) Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης $g\circ f$

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$(x^2-4)(f\circ g')(\alpha)-(x^2-1)(g'\circ f)(\beta)=0,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα

ζ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση

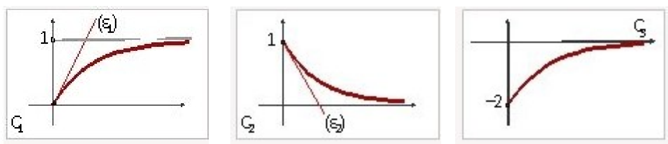
$$d(x)=f(x)-g'(x)$$

έχει μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο $M(x_0,d(x_0))$ με $x_0\in(0,4)$ [Lisari]

8. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των $f,\ f',\ f''$.



α) Να βρείτε ποιες είναι οι γραφικές παραστάσεις των $f,\ f',\ f''$

β) i) Να βρείτε τις εφαπτόμενες ευθείες (ε_1), (ε_2)

ii) Να αποδείξετε ότι

$f(x)\le x$ και $f'(x)\ge-2x+1$ για κάθε $x\ge0$

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx<\int_0^{\frac{1}{2}} f'(x)dx$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f''(x)}{e^{-x}}\right)=1$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)-1}{e^{-x}}\right)$

4.5 Ειδικό θέμα Ε: Συναρτησιακές σχέσεις

Χρήσιμες προτάσεις

- $\lim_{x\to x_0} f(x)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\alpha \Leftrightarrow \lim_{h\to 1} f(x_0\cdot h)=\alpha$
- $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{1}{x_0}\lim_{h\to 1}\dfrac{f(x_0\cdot h)-f(x_0)}{h-1}$

  Θέτουμε $x=x_0+h$ ή $x=x_0\cdot h$

Ασκήσεις για λύση

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) αν η f είναι συνεχής στο $x_0=\alpha\neq 0$ τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. Έστω συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\cdot f(-x)=1$

γ) Αν η εξίσωση $f(x)=1$ έχει μοναδική λύση τότε να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1.

3. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:

$$g(x+y)=e^y g(x)+e^x g(y)+xy+\alpha,\ x,y\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(0)=-\alpha$

β) $g'(x)=g(x)+g'(0)e^x+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(1η δέσμη – 1997)

5. Έστω η συνάρτηση f με $f'(1)=0$ και

$$f(xy)=f(x)+f(y)+\alpha(x-1)(y-1),\ x,y\in(0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

β) Να αποδείξετε ότι είναι σταθερή η

$$g(x)=f(x)-\alpha(x\ln x),\ x>0$$

γ) Να βρείτε την $f(x)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy(x+y),\ x,y\in\mathbb{R}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=-1$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $f'(1)=-3$

β) $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+10h^2)-f(1-h^2)}{11h^2}=-3$

γ) Η f είναι παραγωγισιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ με

$$f'(x_0)=-1-2x_0^{\ 2}$$

δ) Η f είναι περιττή, 1–1 και έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\mathbb{R}$

Δίνονται επιπλέον οι συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $h:[-5,5]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\left|f\left(g(x)-x^4\eta\mu\dfrac{2016}{x}\right)\right|-f(-x^4)\leq 0,\ x\in\mathbb{R}^*$
- $h(x)>0$ για κάθε $x\in[-5,5]$

Αν η g είναι συνεχής στο 0 και η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5,5]$ τότε:

ε) Να δείξετε ότι $\lim_{x\to} g(x)=0$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $g'(0)=0$

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x\cdot h(x)}$ **(Lisari)**

4.6 Ειδικό θέμα Ζ: Σύνολο τιμών

Βασικές μέθοδοι εύρεσης συνόλου τιμών

1. Σύνολο τιμών γνωστών συναρτήσεων.
   Π.χ. Αν $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ τότε $A_f=(0,+\infty)$.
   Αν $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τότε $A_f=\left(-\frac{\Delta}{4\alpha^2},+\infty\right)$ αν $\alpha>0$ και $A_f=\left(-\infty,-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right)$ αν $\alpha<0$.
2. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
3. Λύνοντας των εξίσωση $y=f(x)$ ως προς x και στη συνέχεια λύνοντας την σχέση $x\in A_f$.
4. Με την βοήθεια της πρότασης: Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) σε ένα διάστημα (α,β) και $A=\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to\beta^+}f(x)$ τότε το σύνολο τιμών της f είναι το (A,B) ((B,A)).
5. Από το **θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης τιμής**. Σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης είναι το $[m,M]$, όπου m το ελάχιστο και M το μέγιστο.
   Άρα αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (φθίνουσα) σε ένα διάστημα (α,β) και έχει σύνολο τιμών το (A,B) ((B,A)) τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\beta^+}f(x)=B$.

Χρήσιμα συμπεράσματα

1. Αν η f είναι συνεχής και παίρνει τις τιμές α και β τότε από το **θεώρημα ενδιαμέσων τιμών** προκύπτει ότι ότι $(\alpha,\beta)\subseteq f(\Delta)$.
2. Το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.
3. Αν το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης είναι το (A,B) και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα τότε $\lim\limits_{x\to\alpha^-}f(x)=A$ και $\lim\limits_{x\to\beta^+}f(x)=B$.
4. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
5. Αν η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ, $\alpha,\beta\in\Delta$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta}f(x)=+\infty$ τότε από το **θεώρημα ενδιαμέσων τιμών** προκύπτει ότι $f(\Delta)=\mathbb{R}$.

Ασκήσεις για λύση

1. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο $[0,2]$ η οποία παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, μόνο για $x=1$, το $f(1)=3$ και ολικό μέγιστο, μόνο για $x=2$, το $f(2)=5$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(1,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f(x_o)=f(0)$

3. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Αν οι ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $y=2$ είναι ασύμπτωτες της C_f, να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

4.7 Ειδικό θέμα Η: Άρτιες – Περιττές συναρτήσεις

Ασκήσεις για λύση

1. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)} \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

2. Δίνεται η συνάρτηση f, περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-\alpha,\alpha]$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0)=0$

β) υπάρχει $x_0\in(-\alpha,0)$ με $f'(x_0)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

γ) η f'' έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\alpha,\alpha)$

[Λ. Θ.]

3. Η συνάρτηση f είναι άρτια, με δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και οι εφαπτόμενες ε, ε' της C_f σε δύο σημεία με τετμημένες $\rho,-\rho$ αντίστοιχα, είναι κάθετες. Να αποδείξετε ότι:

α) η f' είναι περιττή

β) μία από τις ε, ε' είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας του 2ου και 4ου τεταρτημόριου

γ) υπάρχουν $x_1,x_2\in(-\rho,\rho):f''(x_1)\cdot f''(x_2)=\dfrac{1}{\rho^2}$

[Λ. Θ.]

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$e^{(f\circ f)(x)}-5=\sqrt{26}$$

έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα

ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, την f^{-1}

στ) Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που είναι κάθετες στην ευθεία

$$\varepsilon: y=-2x+2016$$

ζ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f''(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$

η) Να βρείτε που η f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της

θ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f'(x)+f'(3x)=f'(2x)+f'(5x)$$

ι) Να υπολογίσετε το $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

κ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την $y=x$ και τις $x=0$, $x=1$ [Lisari]

5. α) Έστω συνάρτηση $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής τότε να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^{\alpha}f(x)dx+\int_0^{\alpha}f(-x)dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$

ii) αν η f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=0$ και αν η f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=2\int_0^{\alpha}f(x)dx$

β) Έστω συνάρτηση $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ η οποία έχει συνεχή παράγωγο και είναι άρτια. Αν $g(1)=2$ και $\int_0^1 g(x)dx=\dfrac{1}{2}$ τότε να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g' είναι περιττή

ii) $\int_{-1}^{1}x\left(g(x)+g'(x)\right)dx=3$

6. Έστω $f:[-\pi,\pi]\to R$ συνεχής και περιττή συνάρτηση και η $G(x)=\int_{-\pi}^{\pi}|x-t|f(t)dt$, $x\in[-\pi,\pi]$

α) Να αποδείξετε ότι $G''(x)=2f(x)$, $x\in[-\pi,\pi]$, $G(0)=0$ και $G'(\pi)=0$

β) Αν $G(x)=\eta\mu x+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta\in R$, τότε να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, την $f(x)$ και το $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(t)}{1+t^2}dt$

7. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$f(x)=\ln\left(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}-1\right)$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}-\{f(0)\}$

α) Να βρείτε το πρόσημο, τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f

Να αποδείξετε ότι:

β) Δεν υπάρχει περιττή συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε:

$$e^{\lambda x-g(x)}+\frac{1}{e^{\lambda x+g(x)}}=e^{-g(x)}+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

γ) Οι εφαπτομένες της C_f σε σημεία της με αντίθετες τετμημένες τέμνονται στον άξονα $y'y$

δ) $\int_{-x}^{x}|f(t)|dt=\int_0^x\ln\left(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}-1\right)^2dt$, $x\in\mathbb{R}$

[Lisari]

4.8 Ειδικό θέμα Θ: Πολλαπλές συναρτήσεις

Ασκήσεις για λύση

1. Να εξετάσετε αν είναι 1–1 η $f(x)=|x-2|-5x$.

2. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την παράγωγό της

γ) η παράγωγος είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

3. Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \alpha, & x=0 \\ \dfrac{x\ln x}{1-x}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ \beta, & x=1\end{cases}$$

α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε την f'

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^2-x+\beta, & x\leq 0 \\ x^3+x^2+\alpha x+1, & x>0\end{cases},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

και η συνεχής συνάρτηση $g:[-\pi,0]\to\mathbb{R}$, με

$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ και $g^2(x)+\sigma\upsilon\nu^2 x=1,\ x\in[-\pi,0]$.

α) Να βρείτε τα α, β ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Μέσης Τιμής για την f στο $[-1,1]$

Για $\beta=-\alpha=1$

β) να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ) να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$ και να λύσετε την εξίσωση $f(g(x))=1$

δ) να δείξετε ότι έχει νόημα και να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{g\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{f(g(x)-1)}$$

5. Έστω συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x(\ln x)^2+x, & x>0 \\ \alpha, & x=0\end{cases},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το α

β) Να δείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει σημεία καμπής

ε) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$

6. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}(2\ln x-3), & x>0 \\ 0, & x=0\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και έχει παράγωγο στο 0

β) Να δείξετε ότι η f έχει ελάχιστο για $x=e$ και ότι

$$f(x)+\frac{1}{4}e^2\geq 0 \text{ για } x\geq 0$$

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=+\infty$

7. Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\leq x\leq 1 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-1}}+1, & 1<x\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο A_f

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει μέγιστο για $x=1+e$ και ότι είναι $f(1+e)>2$

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

δ) Έστω η συνάρτηση $\varphi(t)=1-t-\ln t$, $t>0$. Να αποδείξετε ότι είναι

$\varphi(t)>0$ για $0<t<1$ και $\varphi(t)<0$ για $t>1$

ε) Έστω η συνάρτηση

$$g(t)=t^{\frac{1}{t}-1}-1,\ t>0$$

Να αποδείξετε ότι $g(t)\leq 0$ για $t>0$

στ) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει τρία κοινά σημεία με την $y=x$ και εφάπτεται σ' αυτή στο σημείο $(2,2)$

8. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^3+\alpha x+\beta, & x\leq 0 \\ x^2\eta\mu x, & x>0\end{cases},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε

α) τα α, β

β) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=\pi$

4.9 Ειδικό θέμα Ι: Πολυωνυμικές – ρητές συναρτήσεις

Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$

- Η C_f εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο Α
- Η C_f έχει εφαπτομένη (ε) παράλληλη στον $x'x$ στο σημείο που τέμνει τον $y'y$ (σημείο Β)
- Η C_f τέμνει τον $x'x$ και στο σημείο Γ
- Η (ε) τέμνει τη C_f και στο σημείο Δ
- Το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο

Να βρείτε τις συνθήκες για τα α, β, γ, δ.

2. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f'(1)=2 \text{ και } f(x)\cdot f'\left(\frac{1}{x}\right)=2x \text{ για } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2$, $x\in[0,+\infty)$

β) Υλικό σημείο $M(\alpha,\alpha^2)$ με $\alpha>0$ κινείται στη C_f με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\mu/s$. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_f στο Μ, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο $B(x_B,0)$. Τη χρονική στιγμή που το υλικό σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $M(2,4)$ να βρείτε:

i) το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΒΜ

ii) το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω, που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$3f(x)+4\lambda x=2\lambda+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$

δ) i) Να δείξετε ότι η C_g, όπου

$$g(x)=x\ln f(x)+f(x)-2f'(x),\ x\geq 1$$

έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με τον $x'x$

ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f, C_g **Ν.Ψ.**

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases} x^3+\alpha, & x\in[-1,0) \\ \beta x^2+\gamma, & x\in[0,1] \end{cases},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $K(-1,0)$.

Έστω επίσης, η συνάρτηση $g(x)=\ln x$, $x>0$.

α) Να προσδιορίσετε τα α, β, γ ώστε να πληρούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για την h στο $[-1,1]$

β) Για $\alpha=\gamma=-\beta=1$ να ορίσετε τη σύνθεση της g με την h

Έστω $f(x)=\begin{cases} \ln^3 x, & x\in[e^{-1},1) \\ -\ln^2 x, & x\in[1,e) \end{cases}$

γ) Να εξετάσετε την f ως προς το πρόσημο και να δείξετε ότι η C_f εφάπτεται στον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη ίση με 1

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα σε καθένα από τα διαστήματα $(e^{-1},1)$ και $(1,e)$ **Ν.Ψ.**

4. Έστω η συνεχής συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha x^2+\beta x-2}{x+1}, & x\neq -1 \\ -3, & x=-1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$

β) i) Να δείξετε ότ η κατακόρυφη απόσταση των C_g και C_h, όπου $h(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=e^x-x+2$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να κάνετε τη γραφική της παράσταση

δ) Υλικό σημείο $M(x,f(x))$ κινείται στη C_f με την τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\mu/s$. Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Μ με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω, τη χρονική στιγμή που το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο $(1,e+1)$ **Ν.Ψ.**

5. Να βρείτε μη μηδενικό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει

$$4P(x)=(x+1)\left(P'(x)\right)^2$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{P(x)}-x\right)=1$. Να βρείτε:

α) το πολυώνυμο $P(x)$

β) το όριο $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^2+x)\eta\mu(x^2-1)}{P(x)}$

4.10 Ειδικό θέμα ΙΑ: Εύρεση του τύπου της f

Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2)=1=-f(-2)$ και
$$f^2(x)+2\sqrt{2-x}+x=3,\ x\le 2$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\sqrt{2-x}$, $x\le 2$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και
$$x\left(f(x)+xf'(x)\right)=\sqrt{x^2+1}-f'(x),\ x\in\mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

3. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

α) $f(x)=f''(x)$, $f(0)=0$ και $f'(0)=2$

β) $xf'(x)-2f(x)=x$, $f(1)=0$, $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

γ) $f'(x)=e^{\ln x+x^2-f(x)}$, $f(0)=0$

δ) $xf'(x)+f(x)\ln f(x)=2xf(x)$, $f(2)=e^5$, $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$

ε) $3f'(x)-15=5f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=-1$

στ) $x^2f''(x)+xf'(x)-f(x)=3x^2$, $x>0$ και $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3x^2}{x^2-4x+3}=2$

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=2$ και
$$f'(x)f(x)-e^{-x}\left(f(x)-f'(x)\right)-e^{-2x}=0,\ x\in\mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=3-e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και
$$\left(f^2(x)+2f(x)e^x+e^{2x}\right)\left(f'(x)+e^x\right)=2e^{6x},\ x\in\mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{2x}-e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=e^{-1}$ και
$$f'(x)=\frac{(\alpha-x)f(x)}{x},\ x>0,\ \alpha>0$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^{\alpha}\cdot e^{-x}$, $x>1$.

7. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=f'(0)=0$ και
$$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x),\ x\in\mathbb{R}$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$f'(x)=\sqrt{4+f^2(x)},\ x\in\mathbb{R},\ f(0)=0$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-e^{-x}$.

9. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει $f(e)=1$ και
$$xf'(x)+f^2(x)=0,\ x>1$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in\mathbb{R}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και
$$f'(x)\left(f(x)+1\right)=e^{-f(x)},\ x\ge 0$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{-f(x)}$, $x\ge 0$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(1)=1$, $f'(1)=0$ και
$$f'(x)(1-2\ln x)+xf''(x)=\frac{2f(x)}{x},\ x>0$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{\ln^2 x}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(2)=2\cdot(1+\ln 2)$ και
$$\lim_{h\to1}\frac{f\left(\frac{x}{h}\right)-f(x)}{h-1}=-x-2,\ x>1$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+2\ln x$, $x>1$.

13. Έστω οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε
$$f'(x)\cdot g'(x)=f(x)\cdot g(x)=2e^{2x}\text{ και } f(0)=1$$
Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{g(x)}{2}=e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5. Συνοπτική μεθοδολογία

Έστω συνάρτηση …

Πεδίο ορισμού: Το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται
ή το σύνολο που μου υποδεικνύει η άσκηση
ή ίσως αντίστοιχο κλειστό διάστημα αν η άσκηση θέλει ανοικτό
(βλέπω τι με συμφέρει, αν κάτι είναι άσκοπο δεν το κάνω)

Τύπος συνάρτησης: Από την δοσμένη σχέση με μετασχηματισμούς και αφού τα μεταφέρω όλα στο πρώτο μέλος θέτω όλο το πρώτο μέλος συνάρτηση. Αυτό μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους
(βλέπω τι με συμφέρει)

Άρτια – Περιττή συνάρτηση

Αν μία συνάρτηση είναι περιττή τότε η παράγωγός της είναι άρτια.	Αν μία συνάρτηση είναι άρτια τότε η παράγωγός της είναι περιττή.	Αν μία συνάρτηση είναι περιττή και αντιστρέφεται τότε και η αντίστροφή της είναι περιττή.
Αν $0 \in A_f$ μίας περιττής συνάρτησης f τότε $f(0)=0$.	Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$.	Αν μία συνάρτηση f είναι περιττή τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

Σύνθεση συναρτήσεων

f σύνθεση g $g \circ f$	Αποσύνθεση Σύνθεση πολλαπλών συναρτήσεων	$f^2(x)=g^2(x) \Rightarrow$ $\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert \Rightarrow$ α) … β) … γ) …	Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2-1)=f(\sqrt{x})$ • f: 1 – 1 • Τα x^2-1, $\sqrt{x}$ ανήκουν στο A_f

1 – 1

Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	Για κάθε $x_1, x_2 \in A_f$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$	Για κάθε $y_0 \in f(\Delta)$ η εξίσωση $f(x)=y_0$ έχει μοναδική λύση
Γνησίως μονότονη	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με κάθε οριζόντια ευθεία	Αν $f'(x) \neq 0$ τότε έστω ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$ → Rolle → Άτοπο.

Όχι 1 – 1

Με αντιπαράδειγμα. Δείχνω ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει περισσότερα από ένα κοινό σημείο με κάποια οριζόντια ευθεία

Αντίστροφη συνάρτηση

$f(f^{-1}(x))=x$, $x \in A_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(f(x))=x$, $x \in A_f$	$f\uparrow \Rightarrow f^{-1}\uparrow f(\Delta)$. $f\downarrow \Rightarrow f^{-1}\downarrow f(\Delta)$
$\begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ y=x \end{cases}$	Αν $f\uparrow$ τότε $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}$

C_f, $C_{f^{-1}}$ συμμετρικές ως προς την $y=x$ άρα

- Αν η C_f βρίσκεται πάνω από την $y=x$ τότε η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$
- Αν $f\uparrow\mathbb{R}$, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν οι C_f, $C_{f^{-1}}$ διχοτομείται από την ευθεία $y=x$ άρα είναι ίσο με το διπλάσιο του εμβαδού του χωρίου μεταξύ των C_f και $y=x$ [ή μεταξύ των $C_{f^{-1}}$ $y=x$].

Όριο στο x_0 $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Άρση απροσδιοριστίας	Κριτήριο παρεμβολής	Τριγωνομετρικά όρια
• Συζυγής παράσταση του όρου που έχει ρίζα • Παραγοντοποίηση • Κανόνας De L' Hospital	Διαιρούμε με $x-x_0$ και • αν $x>x_0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ • αν $x<x_0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^-}$	• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x}=1$ • $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συνx}{x}=0$ • $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)=0$

Για να αντικαταστήσω μέσα στο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ όπου x το x_0 πρέπει η f να είναι συνεχής.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=α\in\mathbb{R}\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

1. Όταν η f είναι μέσα στο όριο τότε θέτω βοηθητική συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-x_0}$
   - $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=α$
   - $f(x)=g(x)(x-x_0)$
2. Την g μπορεί να την χρησιμοποιήσω σε επόμενα όρια αντικαθιστώντας την f
3. Παραμετρικά όρια

Ανισοτικές σχέσεις

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0\ \ (<0)$ τότε $f(x)>0\ \ (<0)$ κοντά στο x_0
- Αν $f(x)>0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$

Τις χρησιμοποιώ για να βγάλω τις απόλυτες τιμές σε όρια.

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε $f(x)\geq g(x)$ κοντά στο x_0

Όριο στο x_0 $\left(\dfrac{κ}{0}\right)$

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ δεν υπάρχει ($\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$)	• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)q(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x-x_0}\dfrac{f(x)}{q(x)}$

Όριο στο $+\infty$

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες των ορίων στο x_0	$f(x)>x>0$. Για $x\to+\infty$: $0<\dfrac{1}{f(x)}<\dfrac{1}{x}$ Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0 \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Μεγιστοβάθμιοι όροι	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert \overset{x\to+\infty\to x>0}{=} x$ Πότε παίρνω συζυγή παράσταση;	$x\to+\infty\Rightarrow\dfrac{1}{x}\to 0$	$\dfrac{1}{x}\to 0\Rightarrow\begin{cases}x\to+\infty\\ x\to-\infty\\ \text{τίποτα}\end{cases}$	$x\to+\infty\Rightarrow$ $\lvert ημx\rvert\leq 1, \lvert συνx\rvert\leq 1$

Συνέχεια συνάρτησης

Ορισμός συνέχειας σε: • σημείο • ανοικτό διάστημα • κλειστό διάστημα	Συνεχής σε τυχαίο $x_0 \in \Delta$ άρα σε όλο το Δ
f συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0) \end{matrix}$	$xf(x)\le g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x)\le \dfrac{g(x)}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \le \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)}{x},\ x>0 \\ f(x)\ge \dfrac{g(x)}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ge \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{x},\ x<0 \end{cases}$
f συνεχής στο $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$. π.χ. $f^3(x)+f(x)=x$.	

Βασικά θεωρήματα συνέχειας

Θεώρημα Bolzano	Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών	Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής
• Μία τουλάχιστον ρίζα • Σταθερό πρόσημο • Πρόσημο συνάρτησης σε διαστήματα	• Όλες τις τιμές ενός διαστήματος • Η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος είναι κλειστό διάστημα	• Σύνολο τιμών $[m, M]$ • Σύνολο τιμών

Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός παραγωγισιμότητας σε: • σημείο • ανοικτό διάστημα • κλειστό διάστημα	Όλες είναι παραγωγίσιμες (ίσως όχι στο πεδίο ορισμού τους π.χ. $f(x)=\sqrt{x}$) εκτός ΙΣΩΣ από τις πολλαπλές στο σημείο που αλλάζουν τύπο
Συνέχεια και παράγωγος	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{1}{x_0}\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{f(x_0\cdot h)-f(x_0)}{h-1}$
Αν δεν ξέρω τον τύπο της συνάρτησης τότε υπολογίζω την παράγωγο με τον ορισμό.	
Παραγωγίσιμη σε τυχαίο $x_0 \in \Delta$ άρα σε όλο το Δ.	

$$(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ \varepsilon\varphi^2 x+1=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ \varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}=\left(-\ln|\sigma\upsilon\nu x|\right)',$$

$$f'(x)-\varepsilon\varphi x\cdot f(x)=\alpha \Rightarrow f'(x)-\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot f(x)=\alpha \Rightarrow f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f(x)\cdot\eta\mu x=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=(\alpha\cdot\eta\mu x)'$$

Εφαπτομένη

Παραγωγίσιμη στο x_0 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$	$f'(x_0)=+\infty$ ή $-\infty$ $x=x_0$	$\nexists f'(x_0)$ Δεν υπάρχει εφαπτομένη

Μετατρέπω τα δεδομένα σε δύο ευθείες οι οποίες θα πρέπει να συμπίπτουν.

$$\varepsilon_1 : y=\alpha_1 x+\beta_1,\ \varepsilon_2 : y=\alpha_2 x+\beta_2.\ \text{Ισχύει } \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=\alpha_2\\ \beta_1=\beta_2\end{cases}$$

Κανόνας του De l’ Hospital

Οι συναρτήσεις πρέπει να είναι παραγωγίσιμες κοντά στο x_0	Η f' να είναι συνεχής στο x_0 (για να μπορώ να αντικαταστήσω όπου x το x_0)	$u \to \dfrac{1}{x}$	Προσοχή στην μεταβλητή παραγώγισης	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^3}=+\infty$

Θεώρημα Rolle				
Εύρεση αρχικής μίας δοσμένης σχέσης	Μία το πολύ ρίζα. (Έστω 2 ρίζες, Rolle, άτοπο)	Αριθμός ριζών f και f'	$\ldots \Rightarrow g(\alpha)=g(\beta)\Rightarrow$ Rolle στην g στο $[\alpha,\beta]$	Δύο γνωστές ρίζες συνάρτησης

Θ.Μ.Τ.		
Κατάλληλος χωρισμός διαστήματος σε υποδιαστήματα	Εφαρμογή σε διάστημα $[\alpha,x]$	$\xi\in(\alpha,\beta)\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow}f'(\alpha)<f'(\xi)<f'(\beta)$ $\xi\in(\alpha,\beta)\overset{f'\downarrow}{\Rightarrow}f'(\beta)<f'(\xi)<f'(\alpha)$
Γνωστές δύο τιμές της f	Θ.Μ.Τ. – Μονοτονία f' – Κυρτότητα	

Σταθερή συνάρτηση		
• f συνεχής σε κλειστό • $f'(x)=0$ στο εσωτερικό άρα f σταθερή στο Δ	$f'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=ce^x$ Συντελεστής Euler Παραγώγιση αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, σύνθεσης	Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ldots$ • Όλα στο πρώτο μέλος. • Θέτουμε όλο το πρώτο μέλος συνάρτηση. • Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι σταθερή. • Αποδεικνύουμε ότι είναι ίση με 0.

Μονοτονία συνάρτησης		
Ορισμός Αν $x_1<x_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ τότε $f\uparrow$ Αν $f(x_1)<f(x_2)\Rightarrow\ldots\Rightarrow x_1<x_2$ τότε $f\uparrow$	Αν $x_1<x_2$ και $f(x_1)\ge f(x_2)\Rightarrow$ Άτοπο τότε $f\uparrow$	Αν $\lambda=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ τότε $f\uparrow$
Θεώρημα Αν f συνεχής σε Δ και $f'(x)>0$ στο εσωτερικό του Δ τότε $f\uparrow$	$e^{2f(x)}+e^{f(x)+1}+f(x)-2e^2=x$ Θέτω $g(x)=e^{2x}+e^{x+1}+x:\uparrow$ άρα $g(f(x))=2e^2+x:\uparrow$	Αν f γνησίως μονότονη και $f(1)=3$, $f(2)=5$ τότε $f\uparrow$
Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε έχει μία το πολύ ρίζα.		

Θεώρημα Fermat	
• Καθολική ανισοϊσότητα στα δεδομένα άρα υπάρχει ακρότατο άρα Fermat • Ισότητα στα ζητούμενα • $f'(x_0)$ • Τιμή παραμέτρου	Αν η f παραγωγίσιμη στο (α,β), x_0 εσωτερικό και ακρότατο τότε $f'(x_0)=0$ Πιθανά ακρότατα • άκρα • $f'(x_0)=0$ • $\nexists f'(x_0)$

Ασύμπτωτες			
Συμπεριφορά στα άκρα	Απόσταση C_f, ε και $E\to 0$	Ξέρω για την C_f από πού έρχεται και που πάει	Αν $f(x)=\lambda x+\beta\pm g(x)$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=0$ τότε $y=\lambda x+\beta$ πλάγια ασύμπτωτη στο $\pm\infty$
Ξέρω ασύμπτωτη → Ορισμός		Ψάχνω ασύμπτωτη → Θεώρημα	

f κυρτή	f κοίλη
f' αύξουσα	f' φθίνουσα
$f''(x)>0$	$f''(x)<0$
Η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω	Η C_f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
Η C_f στο $[\alpha,\beta]$ βρίσκεται «κάτω» από τη χορδή που έχει άκρα τα σημεία $(\alpha,f(\alpha))$ και $(\beta,f(\beta))$	Η C_f στο $[\alpha,\beta]$ βρίσκεται «πάνω» από τη χορδή που έχει άκρα τα σημεία $(\alpha,f(\alpha))$ και $(\beta,f(\beta))$
Η C_f στο $[\alpha,\beta]$ βρίσκεται «πάνω»	Η C_f στο $[\alpha,\beta]$ βρίσκεται «κάτω»
από την εφαπτομένη της C_f σε τυχαίο σημείο $(x_0,f(x_0))$, όπου x_0 εσωτερικό σημείο του $[\alpha,\beta]$	
Αν $f'>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	Αν $f'<0$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
Ένα κινητό κινείται με θετική φορά πάνω στη C_f	Ένα κινητό κινείται με αρνητική φορά πάνω στη C_f
Η C_f δεν διέρχεται από τρία συνευθειακά σημεία	
Θ.Μ.Τ. σε $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$ και μονοτονία f' από κυρτότητα	

Ανισότητες	
$\int_\alpha^\beta f(x)dx$	$\alpha\le x\le\beta \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)\Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\alpha)dx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta f(\beta)dx$
	Αν m ελάχιστη και M μέγιστη τιμή τότε $m\le f(x)\le M\Rightarrow \int_\alpha^\beta m dx\le\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta M dx$
$f(x)\ge g(x)\Rightarrow$	Γεωμετρική ερμηνεία: Η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g
	Αν ισχύει κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα δύο όρια τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\ge\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
	Δεν μπορώ να παραγωγίσω
	Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\ge\int_\alpha^\beta g(x)dx$
	Αν f, g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και η ισότητα δεν ισχύει παντού τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Διπλή ανισότητα $\alpha\le f(x)\le\beta$		
• Κριτήριο παρεμβολής	• Θ.Μ.Τ.	• Θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής

Μέθοδοι ολοκλήρωσης συνεχούς συνάρτησης		
Παραγοντική ολοκλήρωση	Με αντικατάσταση (Πρέπει δίπλα στο dx να υπάρχει η παράγωγος αυτού που έθεσα)	Συνάρτηση πολλαπλού τύπου
• Εκθετική συνάρτηση • Τριγωνομετρική συνάρτηση • Ρητή συνάρτηση του x • Λογαριθμική συνάρτηση	Ρητές συναρτήσεις Βαθμός αριθμητή < ή = ή > Βαθμός παρονομαστή	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις (Θέτω $u=\alpha+\beta-x$)
$\int_\alpha^\beta F(x)dx=\int_\alpha^\beta x'F(x)dx$	Άρτια και περιττή συνάρτηση	Αντίστροφη συνάρτηση

Πολλαπλή συνάρτηση	$f(x+y)$ ή $f(x\cdot y)$
Στο επικίνδυνο σημείο (σημείο αλλαγής τύπου) μπορεί: • Να υπάρχει ή όχι το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ • Να είναι ή όχι συνεχής • Να είναι ή όχι παραγωγίσιμη 1–1 ίσως και με τον ορισμό	• Αν $f(x+y)$ τότε θέτουμε $x=x_0+h$ και $h\to0$ • Αν $f(x\cdot y)$ τότε θέτουμε $x=x_0\cdot h$ και $h\to1$

<table>
<tr><th colspan="5">Μία τουλάχιστον ρίζα</th></tr>
<tr><td>Προφανής</td><td>Αν η f έχει ακρότατο στο (α,β) και είναι παραγωγίσιμη τότε υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0)=0$</td><td>Απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτω ότι δεν έχει καμία ρίζα</td><td>f δύο ρίζες άρα f' μία τουλάχιστον (Rolle)</td><td>Πολυωνυμική περιττού βαθμού</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν η συνάρτηση ορίζεται σε κλειστό διάστημα</td><td colspan="3">• Θεώρημα Bolzano (ίσως σε άλλο διάστημα)
• Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών
• Σύνολο τιμών
• Θεώρημα Rolle στην παράγουσα</td></tr>
<tr><td colspan="2">Αν η συνάρτηση ορίζεται σε ανοικτό διάστημα</td><td colspan="3">• Αν ξέρω μονοτονία τότε με σύνολο τιμών
• Αν δεν ξέρω μονοτονία τότε με όρια στα άκρα
Αν $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)>0$ τότε υπάρχει $\kappa>\alpha$ ώστε $f(\kappa)>0$ …</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Μία το πολύ ρίζα</th></tr>
<tr><td>Μονοτονία συνάρτησης</td><td>Υποθέτω ότι η f έχει δύο ρίζες και καταλήγω σε άτοπο (συνήθως με Rolle)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Μία ακριβώς</th></tr>
<tr><td>Μία τουλάχιστον και μία το πολύ</td><td>Αν $f(x_0)=0$ και στο x_0 η f έχει ολικό ακρότατο</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σε μία εξίσωση $f(x)=g(x)$ με ρίζα το x_0 απορρίπτουμε ως ρίζα κάθε $x<x_0$ και $x>x_0$ (συνήθως με μονοτονία)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="5">Σύνολο τιμών</th></tr>
<tr><td>Από την γραφική παράσταση</td><td rowspan="2">• Λύνουμε την $y=f(x)$ ως προς x
• Εφαρμόζουμε στο x που βρήκαμε το πεδίο ορισμού της f</td><td rowspan="2">Από συνέχεια και μονοτονία της συνάρτησης</td><td rowspan="2">Από το θεώρημα Μέγιστης και ελάχιστης τιμής.
Σε κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης είναι το $[m,M]$, όπου m το ελάχιστο και M το μέγιστο.</td><td rowspan="2">Αν η f είναι συνεχής και παίρνει τις τιμές α και β τότε από το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών προκύπτει ότι ότι $(\alpha,\beta)\subseteq f(\Delta)$</td></tr>
<tr><td>Αν f συνεχής σε Δ, $\alpha,\beta\in\Delta$ και $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\beta} f(x)=+\infty$ τότε $f(\Delta)=\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td colspan="5">Αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης τότε η συνάρτηση έχει μία τουλάχιστον ρίζα.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Αν μία συνάρτηση είναι σταθερή ($f(x)=c$) τότε το σύνολο τιμών της είναι το c (άρα όχι διάστημα).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Απλή και διπλή συνεπαγωγή</th></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-\alpha}{x-2}=5$. Θέτω $g(x)=\frac{x^2-\alpha}{x-2}\Leftrightarrow$
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to2} g(x)=5\\ x^2-\alpha=g(x)(x-2)\end{cases}$
Άρα $x^2-\alpha=g(x)(x-2)$
$\Rightarrow\lim\limits_{x\to2}(x^2-\alpha)=\lim\limits_{x\to2} g(x)(x-2)=0$</td><td>$e^x\le x+1\Leftrightarrow e^x-x-1\le0$ (1)
Έστω $f(x)=e^x-x-1$.
(1) $\Leftrightarrow f(x)\le f(0)$.
Από Θεώρημα Fermat $\Rightarrow f'(0)=0$</td><td>$\sqrt{x-1}=3-x\Rightarrow$
$\sqrt{x-1}^2=(3-x)^2\Leftrightarrow$
…</td></tr>
<tr><td colspan="3">Στο τέλος επαλήθευση γιατί υπάρχει απλή συνεπαγωγή.</td></tr>
</table>

Βασικοί συμβολισμοί και συλλογισμοί

Η f έχει ακρότατο στο x_0 (παραγ., εσωτερικό)	$f'(x_0)=0$ (από θεώρημα Fermat)
$\geq$ για κάθε $x\in\Delta$ (Καθολική ανισοϊσότητα)	Ακρότατο άρα θεώρημα Fermat
$f(x)<g(x)$	$f(x)-g(x)<0$. Θέτω $\varphi(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow \Phi'(x)<0\Leftrightarrow \Phi\downarrow$
F αρχική της f	$F'(x)=f(x)$, F παραγωγίσιμη άρα συνεχής
$f(x)\neq 0$	Αν f συνεχής τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο (Bolzano)
$f'(x)\neq 0$	Η $f(x)=0$ έχει μία το πολύ ρίζα Η f είναι 1–1
$f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$	Η f δεν έχει ακρότατο
$f'(x)\neq 0$ και συνεχής για κάθε $x\in\mathbb{R}$	Η f είναι γνησίως μονότονη
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x-x_0}=\alpha\in\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$
$y=\lambda x+\beta$ εφαπτομένη της C_f στο $(x_0,f(x_0))$	$\lambda=f'(x_0)$, $\beta=f(x_0)-f'(x_0)x_0$
$y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της C_f στο $\pm\infty$	$\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)$ (αντίστοιχα στο $-\infty$)
$(-\alpha,\alpha)$ ή $\lim\limits_{x\to\alpha}$ και $\lim\limits_{x\to-\alpha}$ ή $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx$	Άρτια ή περιττή συνάρτηση
Αν ξέρω $f(\alpha)$ και $f(\beta)$	$f(\alpha)=f(\beta)\Rightarrow$ Rolle, $f(\alpha)\neq f(\beta)\Rightarrow$ Θ.Μ.Τ.

Πρόσημο συνάρτησης

Ξέρω τις ρίζες	Δεν ξέρω τις ρίζες
Έστω η f συνεχής και ρ_1, ρ_2 δύο διαδοχικές ρίζες της f. • f συνεχής στο (ρ_1,ρ_2) • $f(x)\neq 0$ στο (ρ_1,ρ_2) Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (ρ_1,ρ_2) το οποίο μπορώ να το βρω βρίσκοντας την τιμή της f σε ένα σημείο του (ρ_1,ρ_2).	• Βρίσκω την μονοτονία της f • Βρίσκω προφανή ρίζα της f, έστω x_0 • Για $f\uparrow$ είναι $x<x_0\Rightarrow f(x)<f(x_0)=0$ κ.λπ.

Εύρεση τύπου συνάρτησης

Έστω f συνεχής με $(x-\alpha)f(x)=g(x)$ • Για $x\neq\alpha$: $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-\alpha}$ • Για $x=\alpha$: f συνεχής άρα $f(\alpha)=\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$	Έστω f συνεχής με $f^2(x)=x^2+1\Leftrightarrow$ $\lvert f(x)\rvert=\sqrt{x^2+1}$ • f συνεχής στο $\mathbb{R}$ • $f(x)\neq 0$ στο $\mathbb{R}$ Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$	Να βρείτε τον τύπο της f ώστε $xf'(x)+f(x)=0\Leftrightarrow$ $\left(xf(x)\right)'=0\Leftrightarrow$ $xf(x)=c$ …	Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\kappa(x)f'(x)+\lambda(x)f(x)+\ldots=0$ Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ldots$

6. Ασκήσεις για λύση

6.1 Βασικές ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν και να την μελετήσετε ως προς τα κοίλα – κυρτά και τα σημεία καμπής

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{e^2-2e}{2}$ για το οποίο ισχύει: $\dfrac{2(x_0-1)\cdot f(x_0)}{x_0}=e^2-2e$

ε) Να αποδείξετε ότι: $\ln\dfrac{\kappa+1}{\kappa}<1$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, $\kappa\geq 1$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες, αν υπάρχουν και να την μελετήσετε ως προς τα κοίλα – κυρτά και τα σημεία καμπής

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)=f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e^2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{2}{e^2(e^2-1)}$ για το οποίο ισχύει $x_0\cdot f(x_0)=1-\dfrac{2{x_0}^2}{e^2(e^2-1)}$

ε) Να αποδείξετε ότι: $\kappa^{\kappa+1}>(\kappa+1)^{\kappa}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, $\kappa\geq 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(x+1)\cdot\ln\frac{x+1}{x},\ x>0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα – κυρτά και τα σημεία καμπής

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν)

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0>1$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=9\ln\dfrac{27}{32}$ και ότι γι' αυτό το x_0 ισχύει $\dfrac{f(x_0)}{x_0+1}=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{27}{32}$

ε) Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο κ ισχύει:

$$\left(\frac{\kappa+2}{\kappa+1}\right)^{\kappa+2}<\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^{\kappa+1}$$

4. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x)+3f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή

γ) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

δ) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

ε) Να βρείτε το πρόσημο της f και να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα

στ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ζ) Να βρείτε, αν ορίζεται, την αντίστροφη της f

η) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

θ) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(1,\alpha)$, τότε να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$, $x=1$ **(Lisari)**

5. Έστω η συνάρτηση G, αρχική της $g(x)=e^{(x-1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$ με $G(1)=0$ και η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

α) Να δείξετε ότι οι f, G ορίζονται στο $\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τις f, G ως προς την μονοτονία, να βρείτε τις ρίζες τους και το πρόσημό τους

γ) Να μελετήσετε τις f, G ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι:

i) Οι C_f και C_G έχουν μοναδικό σημείο καμπής σε σημείο με κοινή τετμημένη

ii) Στο σημείο αυτό, ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται μέγιστος, ενώ της G ελάχιστος

iii) Στο σημείο αυτό, οι C_f και C_G έχουν κοινή εφαπτομένη, την οποία να βρείτε

δ) Να υπολογίσετε το $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2016}{|f(x)|-|G(x)|}\right)$

(Lisari)

6.2 Ασκήσεις στο πνεύμα των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου

1. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x)=\frac{1}{\eta\mu x},\ x\in(0,\pi)$$

α) Να τη μελετήσετε f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα

β) Να βρείτε της ασύμπτωτες της C_f

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}$ **(γεν.2/σελ. 234)**

2. Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις ώστε να ισχύουν

- $f(g(x))\cdot g(x)=x$. $x\in\mathbb{R}$ (1) και
- $f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ (2) με $g(0)=1$

α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $A(1,g(1))$ είναι η

$$y=g(1)x$$

β) Να αποδείξετε ότι

$$f(x)=\frac{\ln x}{x},\ x\in(0,+\infty)$$

, ότι είναι κοίλη στο $(0,e\sqrt{e})$ και η g κυρτή στο $\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=1$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των f και g και των ευθειών $x=1$, $x=\ln 3$

ε) Να δείξετε ότι $e^{\sqrt{6-2e}}>\ln 3$ **(8 σελ. 174)**

3. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $x>0$ για την οποία ισχύει $x-x\ln x\geq 0$ **(9 σελ. 174)**

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=1$ και

$$f'(x)=\lambda f(x)+\lambda x-1,\ x\in\mathbb{R},\ \lambda>0$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^{\lambda x}-x,\ x\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η ελάχιστη τιμή της f παίρνει την μέγιστη τιμή της

γ) i) Να λύσετε την ανίσωση $e^{4x^2+6}+1>e^{2x^2+8}+x^2$

ii) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(2x+1)-(x-1)\cdot f'(x)=f(x+2),\ x\in[1,+\infty)$$

δ) Έστω $\lambda=1$. Να δείξετε ότι από το σημείο $(0,-1)$ και σε σημείο της C_f με θετική τετμημένη, διέρχεται ακριβώς μία εφαπτομένη της C_f **(9 σελ. 174)**

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=-x^3+3x-\alpha,\ \text{με}\ \alpha\in\mathbb{R}$$

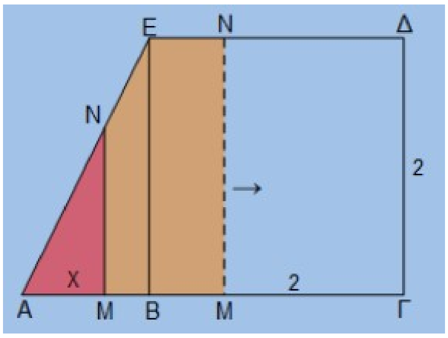
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ **(2 σελ. 139)**

6. Το ΒΓΔΕ είναι τετράγωνο, έχει πλευρά 2 και ισχύει $AB=1$, $A\Gamma=3$, $AM=x$, και $MN\perp AB$.



Αν το σημείο Μ διαγράφει το τμήμα ΑΓ, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που διαγράφεται, δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x\leq 1\\ 2x-1, & 1<x\leq 3\end{cases}$$

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+\sigma\upsilon\nu x+3x-1}{f(x)+\eta\mu x}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε την αντίστροφή της και να κάνετε την γραφική της παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων με αυτή της f

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $x=3$ και τις C_f, $C_{f^{-1}}$ **(4, σελ. 29)**

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και το σύνολο τιμών της

δ) Να αποδείξετε ότι

$$1-\frac{1}{x}\leq\ln x\leq x-1,\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

(8 σελ. 174)

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x^3-3x(2\ln x-1)-4,\ x>0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών και το πρόσημό της γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

δ) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ, αν ι-σχύει η σχέση $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\ln(\alpha\beta\gamma)+3$

ε) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)+f(x^3)=f(x^2)+f(x^4)$$ (7, σελ. 174)

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\kappa x$, $\kappa>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό μέγιστο, το ο-ποίο και να βρείτε

β) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή κ_0 του κ, για την οποία είναι $\ln x\le\kappa_0 x$, για κάθε $x>0$

γ) Για την τιμή κ_0 του παραπάνω ερωτήματος να αποδείξετε ότι η ευθεία $(1): y=\kappa_0 x$ εφάπτεται με τη C_g, όπου $g(x)=\ln x$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που πε-ρικλείεται από τη C_f, τον $x'x$ και την εφαπτομένη της C_g που περνάει από το $O(0,0)$ (Γ.9, σελ. 174)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι $|f'(x)|\le1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι ισχύει:

$$\left|\ln\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}\right|\le|\alpha-\beta| \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει δύο σημεία καμπής των οποίων να βρείτε τις συντεταγμένες

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία καμπής και να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\ln\left(\frac{x^2+1}{2}\right)\le x-1 \text{ για κάθε } x\ge1$$ (4, σελ. 132)

11. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=(e^\alpha-\alpha)\cdot2^x \text{ και}$$

$$g(x)=-x^2+2x+\ln\beta+1,\ x\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Αν τα σημεία $A(0,y_1)$ και $B(1,y_2)$ είναι κοινά των παραστάσεων C_f και C_g τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$ και $\beta=1$

β) Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός των Α και Β

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$

δ) Να κάνετε την γραφική παράσταση των f, g στο ίδιο σύστημα αξόνων και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f και C_g

(7, σελ. 132)

12. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=e^x,\ g(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R},\ h(x)=\frac{e}{x},\ x>0$$

α) Με τη βοήθεια της ανισότητας

$$e^x>x+1 \text{ για κάθε } x>0$$

να αποδείξετε ότι

$$2f(x)-2g(x)>x^2$$

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_h και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_h, τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $\varepsilon: x=\mu$, $\mu>0$

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{\mu\to0^+}\dfrac{E(\mu)+\ln\mu}{e^\mu-\mu-1}$ ii) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\dfrac{E(\mu)+\mu^2}{e^\mu+\mu+1}$ (3, σελ. 151)

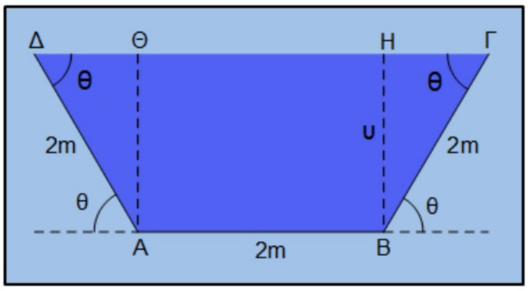
13. α) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2,\ x\in\mathbb{R},$$
$$\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \text{ με } \alpha<\beta<\gamma$$

Να αποδείξετε ότι έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα

β) Αν $g(x)=(x-\alpha)^\nu(x-\beta)^\nu(x-\gamma)^\nu$ με $\alpha<\beta<\gamma$ και ν θετικός ακέραιος τότε να βρείτε το πλήθος και το είδος των τοπικών ακροτάτων της g (6, σελ. 152)

14. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι για να μεταφέρουμε ποσότητα νερού. Η κάθετη διατομή του έχει το σχήμα του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής είναι:

$$E(\theta)=4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

β) Να βρείτε τη γωνία θ, ώστε το κανάλι να μεταφέ-ρει την μέγιστη ποσότητα νερού

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$E(\theta),\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$E(\theta)=5,\ \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$ (12, σελ. 153)

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(1,1)$

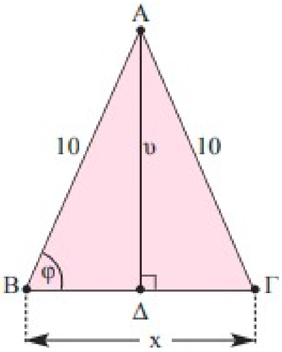
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f, τον άξονα των τετμημένων και την εφαπτομένη (ε)

γ) Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η ευθεία $(\zeta): x=\alpha$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο μέρη που έχουν το ίδιο εμβαδόν

δ) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f^2(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{f(x)}\cdot\left(f(x)-\ln f(x)\right)\right\}$$ **(9, σελ. 233)**

16. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές($AB=A\Gamma=10$) και $\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\varphi}$ αυξάνεται με ρυθμό $2\sqrt{3}$ cm/s.



α) Να υπολογίσετε τα όρια

$$K=\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}\frac{AB}{\upsilon},\ \Lambda=\lim_{\varphi\to 0}\frac{AB}{B\Gamma},\ M=\lim_{\varphi\to 0}\frac{A\Delta}{B\Gamma}$$

β) Να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma)=\frac{1}{4}x^2\varepsilon\varphi\varphi$

γ) Τη χρονική στιγμή $t=t_0$ που το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

i) της γωνίας φ

ii) του εμβαδού $E=(AB\Gamma)$ **(3, σελ. 58)**

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}$ και το σημείο $M(x,f(x))$ της C_f με $x\geq 0$. Το Μ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ρυθμό $2\sqrt{2}$ cm/min. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης d του Μ από την αρχή Ο των αξόνων, τη στιγμή που η απόσταση αυτή είναι ίση με $\sqrt{2}$. **(8, σελ. 152)**

18. **Α.** Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών αριθμών που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x)+e^{f(x)}=x+\frac{1}{x},\ \text{για κάθε } x>0 \text{ με } f(1)=0$$

α) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g(x)=x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-f(x)},\ \text{όπου } x\in(0,+\infty)\quad (1)$$

να αποδείξετε ότι: $g'(x)=\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'$, $x>0$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

Β. Έστω $M(\alpha,f(\alpha))$ ένα σημείο της C_f που απομακρύνεται από τον άξονα των τεταγμένων με ρυθμό $2\text{m}/\text{s}$

α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=\alpha$ τη στιγμή που η τετμημένη του Μ είναι e

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ με τον άξονα $x'x$ τη στιγμή που η τετμημένη του Μ είναι e **(6, σελ. 127)**

19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\eta\mu x+\alpha, & -\pi\leq x\leq 0\\ \gamma e^{\beta x}, & 0<x\leq 1\end{cases}\quad \text{με } \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

της οποίας η γραφική παράσταση δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(0,f(0))$ την ευθεία με εξίσωση $y=x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=1$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να βρείτε, αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}-1}$

(3, σελ. 168)

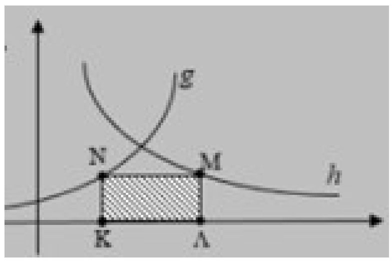
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\frac{1}{x}$, $x>0$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$, να δείξετε ότι έχει μία ρίζα x_0 και να λύσετε την ανίσωση

$$e\cdot e^{f(x)}>\frac{1}{f(x)+1}+e-1$$

β) Να δείξετε ότι η f έχει μένα μόνο σημείο καμπής $K(\xi,f(\xi))$ με $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

γ) Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x)=e^x$ και $h(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο δεν έχουν κοινή εφαπτομένη. Στη συνέχεια να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου ΚΛΜΝ με δύο κορυφές στις C_g, C_h και δύο στον άξονα $x'x$ $K(\alpha,0)$, $\Lambda(\beta,0)$, $M(\beta,h(\beta))$, $N(\alpha,g(\alpha))$, $\alpha\in[0,x_0)$



δ) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΝΔ στη θέση μεγιστοποίησης **(6, σελ. 82)**

6.3 Γενικές επαναληπτικές ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x^2-\alpha^2}{2\alpha x}-\ln x+\ln\alpha,\ \alpha>0,\ x>0$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2-\alpha^2=2\alpha x(\ln x-\ln\alpha)$$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ε) Να μελετήσετε της f ως προς της κυρτότητα και τα σημεία καμπής

στ) Αν α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\ln\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha\beta}$

ζ) Για $\alpha=1$

i) Να κάνετε μία πρόχειρη γραφική παράσταση της f

ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2-1-2\lambda x=2x\ln x$, $\lambda\in\mathbb{R}$

2. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=e$, $f'(1)=2e$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\geq 1$. Αν ισχύει

$$f''(x)\cdot f(x)>(f'(x))^2+2f^2(x),\ \text{για κάθε } x\geq 1$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

β) Να δείξετε ότι $f(x)>e^{x^2}$, για κάθε $x>1$

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

3. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ι

$$e^{f(x)}+f(x)-x-1=0,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f^{-1}(x)=0$, $f^{-1}(x)=e$

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ υπάρχει και

$$f(x)+e^{f(x)}=x\ \ (1),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Α. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Β. i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε την f^{-1}

ii) Να βρείτε το πρόσημο της f.

Αν επιπλέον γνωρίζουμε, ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

Γ. i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, έστω ε, στο σημείο $A(1,f(1))$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x=e+1$.

Δ. i) Να δείξετε ότι

$$\int_1^{1+e}\frac{1}{1+x-f(x)}dx=1$$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e+1)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\ln(e-1)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ξ

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=2x+\ln x-1-\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ καθώς και το σύνολο τιμών της f

β) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$g(x)=x^2-2-(1-x)(\ln x-2),\ x>0$$

γ) Δίνονται οι συναρτήσεις

$$h(x)=x^2-2 \text{ και } \varphi(x)=(1-x)(\ln x-2)$$

Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους, έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία

δ) Να δείξετε ότι

$$(1-x)(\ln x-2)\leq x^2-1,\ \text{για } x>0$$

ε) Να βρεθεί ο αριθμός των λύσεων της εξίσωσης:

$$x^{x-1}=e^{2x-x^2}\ \text{ όταν } x>0$$

6. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$x^3\cdot f''(x)=e^{\frac{1}{x}},\ \text{για } x>0,\ f(1)=e \text{ και } f'(1)=0$$

α) Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

β) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ) Να δείξετε ότι $\left(\frac{e}{x}\right)^x\leq e$ για κάθε $x>0$

δ) Να δείξετε ότι $f(10)+f(12)>2f(11)$

7. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύουν

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sigma\upsilon\nu x}{x}=2$
- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) να βρεθούν οι αριθμοί $f(0)$, $f'(0)$

β) αν για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για τυχαίο αλλά σταθερό $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $\int_{\alpha}^{g(x)}f(t)dt=\int_{\alpha}^{2^x-2x}f(t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i) να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$

ii) να δείξετε ότι $2^x>2x$ για κάθε $x>2$

γ) Αν για τη συνάρτηση f επιπλέον γνωρίζουμε ότι ισχύουν, $f(x)-f(x-2)=e^{x-2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\int_2^3 f(x)dx=e$ τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=2$

ii) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f, τους άξονες συντεταγμένων και την ευθεία $x=1$

8. Έστω η συνάρτηση g, $g(x)=e^x-\ln x$, $x>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g είναι κυρτή

β) η g' έχει μοναδική ρίζα ξ με $0<\xi<1$

γ) $g(\xi)>0$

δ) $e^x>\ln x$, για κάθε $x>0$

9. Έστω μία συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,+\infty)$ για την οποία υποθέτουμε ότι ισχύουν:

$$f(0)=0 \text{ και } xf''(x)>f'(x) \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f'(x)}{x}$, $x>0$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

ii) η συνάρτηση $h(t)=f(x)\cdot t^2-x^2f(t)$, $t\geq 0$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,x]$ με $x>0$.

iii) για κάθε $x>0$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε $2f(x)=\dfrac{x^2}{\xi}f'(\xi)$

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $(0,+\infty)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2f(x)>f(x^2)$ στο $(0,+\infty)$.

εκτός ύλης το (ε-i)

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x+1-\ln(x+1),\ x>-1$$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

$$e^{\alpha}-\alpha>\ln\frac{e^{\alpha}+1}{\alpha+1}$$

δ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(e^{\xi})=f(\xi)$

ε) i) Να αποδείξετε ότι η παράγουσα της συνάρτησης f, έστω F, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ είναι η $F(x)=1+\dfrac{x^2}{2}+2x-(x+1)\ln(x+1)$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x)=F(x)-f(x)$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,0]$

11. Έστω οι δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το διάστημα $[1,\alpha]$, με $\alpha\in(1,+\infty)$, για τις οποίες ισχύουν: $f(1)=g(1)=1$ και

$$f(x)+g(x)=\int_1^{\alpha}f(t)g(t)dt \text{ για κάθε } x\in[1,\alpha]$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $g(x)=2-f(x)$

β) υπάρχει $x_0\in(1,\alpha)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f(x_0)\cdot g(x_0)=\frac{2}{\alpha-1}$$

γ) η εξίσωση $f(x)-g'(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{\alpha-x}$ έχει λύση στο $(1,\alpha)$

δ) η εξίσωση $[f(x)-1]^2=\dfrac{\alpha-3}{\alpha-1}$ έχει λύση στο $(1,\alpha)$

ε) $\alpha\geq 3$

στ) $\int_1^{\alpha}(f(x)+g(x))dx\geq 4$

12. Δίνεται συνάρτηση $f:\left[0,\frac{1}{\pi}\right]\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\begin{cases}x\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται στην f στο $\left[0,\frac{1}{\pi}\right]$ το θεώρημα Rolle β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $εφ\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{1}{π}\right)$

13. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και άρτια συνάρτηση με $f(1)=3$. Αν F είναι αρχική της f με την ιδιότητα $f(x)\cdot F\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$, για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση $h(x)=F(x)\cdot F\left(\frac{1}{x}\right)$, είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$

β) $F(x)\cdot F\left(\frac{1}{x}\right)=1$, για κάθε $x>0$

γ) Η συνάρτηση $φ(x)=\frac{F(x)}{x^3}$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$

δ) Ο τύπος της f είναι $f(x)=3x^2$, $x\in\mathbb{R}$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x-1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει η αντίστροφη της f και αν ναι, να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ και να βρείτε τα κοινά σημεία της ευθείας $y=x$ και την $C_{f^{-1}}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=1$

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$

στ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$

ζ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^e f^{-1}(x)dx$

η) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f, η οποία διέρχεται από το σημείο $Σ(1,e)$

θ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την παραπάνω εφαπτομένη (ε) και τον άξονα $y'y$

15. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ με $f(0)=g(0)=1$ και

$$2f'(x)+f^2(x)g(x)=2g'(x)+g^2(x)f(x)=0,\ x>-1$$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι θετικές και $f=g$

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις f, g

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(α)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=α$, $x=α+1$ όπου $α>0$, καθώς και το όριο:

$$A=\lim_{α\to+\infty}E(α)$$

16. Μία συνάρτηση f έχει αρχική F στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(x)\cdot F(y)\geq f(y)\cdot F(x)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αν $f(0)=2$, $F(0)=1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2F(x)$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2e^{2x}$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων καθώς και το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση, την παραπάνω εφαπτομένη και τον άξονα $y'y$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(1)=2$ και έστω F μία αρχική της f με την ιδιότητα:

$$F(f(x))+F(x)=0 \text{ για κάθε } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση F

δ) Να υπολογίσετε το $A=\lim_{x\to+\infty}(f(x)συν3x)$

18. Έστω $f'(x)=\frac{2}{1+e^{f(x)}}$ $x\in\mathbb{R}$, $f'(0)=1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

γ) Να αποδείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω και ότι στην γραφική παράσταση της f δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία

δ) Να αποδείξετε ότι η $y=x$ είναι εφαπτομένη της f στο σημείο 0

ε) Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq x$, $x\in\mathbb{R}$

στ) Να αποδείξετε ότι $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, $x\in\mathbb{R}$

ζ) Να αποδείξετε ότι $f(x)<2x+1$, $x\in\mathbb{R}$

η) Να βρείτε το $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

θ) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\ln(x+1)$, $x>-1$

ι) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

κ) Βρείτε το σύνολο τιμών της f

λ) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτους

μ) Βρείτε την ασύμπτωτο της f στο $-\infty$
ν) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτο στο $+\infty$
ξ) Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{e}{2}\right)=1$
ο) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}
π) Να υπολογίστε το $\int_0^{\frac{e}{2}} f(t)dt$ χρησιμοποιώντας την συμμετρία των f, f^{-1}

19. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο R με $g(0)=1$ και

$$f'(x)=g^2(x)\neq 0,\ f^2(x)+g^2(x)=1,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι :
i) $g'(x)=-g(x)\cdot f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
ii) Η g είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$,$[0,+\infty)$ και έχει ακρότατο το 1
β) i) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της
ii) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$
γ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου, οπυ ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, να δείξετε ότι $E=\frac{1}{2}+\ln\left[g(1)\right]$

Επαναληπτικά θέματα Ο.Ε.Φ.Ε. 2004 (4ο θέμα)

20. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0,1) με $f((0,1))=[0,1]$. Αποδείξετε ότι:
α) Η εξίσωση $f(x)=\frac{\pi}{4}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$
β) Η C_f τέμνει τη διχοτόμο του 1ου και 3ου τεταρτημόριου
γ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,1) τότε υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f''(\xi)=0$.

21. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f'=g$ και $g'=f$. Ακόμη ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(-x)g(x)<0$ για κάθε $x\neq 0$.
α) Αποδείξετε ότι $g(0)=0$
β) Μελετήστε τις f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
γ) Αποδείξετε ότι $g(x)>xf(0)$ για κάθε $x>0$.
δ) Μελετήστε τις f, g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
ε) Αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις
$h(x)=e^{-x}(f+g)(x)$ και $\phi(x)=e^{-x}(f-g)(x)$
είναι σταθερές
στ) Αν είναι $f(0)=1$ τότε να βρείτε τους τύπους των f, g

22. α) Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(0)=f(1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{2}\right)$$

β) Πιο γενικά να αποδείξετε ότι αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχουν $x,y\in[\alpha,\beta]$ με $|y-x|=\frac{\beta-\alpha}{2}$ και $f(x)=f(y)$.

23. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f(x)\geq 1$ και

$$f(x)-\ln f(x)=x \text{ για κάθε } x\geq 1$$

α) Υπολογίστε την τιμή $f(1)$
β) Λύστε τις εξισώσεις $f(x)=1$ και $f(x)=e$
γ) Αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
δ) Βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της f
ε) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f^{-1}, της διχοτόμου της γωνίας του 1ου και 3ου τεταρτημορίου και της ευθείας $x=e$

24. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$ και

$$f'(f(x))=f(f'(x)) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 :
α) Να αποδείξετε ότι $x_0=0$
β) Να βρείτε το είδος του ακρότατου και Αποδείξετε ότι είναι μοναδικό
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$
δ) Να αποδείξετε ότι:
i) αν ξ είναι μία λύση της εξίσωσης $f'(x)=x$ τότε και το $f(\xi)$ είναι επίσης λύση της ίδιας εξίσωσης
ii) $f(0)=0$

25. Για την συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει

$$f'(x)=\frac{e^x}{x^2+2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα
β) Συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A=f(2)+f(3) \text{ και } B=f(1)+f(4)$$

γ) Αν ισχύει $f(0)=1$ τότε Αποδείξετε ότι:

$$f(x)\geq \frac{1}{2}x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

26. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $f'(0)=1+f(0)=1$.

α) Εξετάστε την f ως προς την μονοτονία

β) Λύστε την εξίσωση $f(x)=0$

γ) Αποδείξετε ότι:

i) Η C_f έχει ένα σημείο καμπής

ii) $\int_0^1 f^2(t)dt=f(1)-1$

27. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=\frac{1}{2}$ και $f(x)>0$, $f'(x)+f(x)=f^2(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να Αποδείξετε ότι : $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'-\frac{1}{f(x)}=-1$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε τον τύπο της f

28. Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, κυρτή στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει

$$f(0)-e^{-f(0)}=-1$$

Να βρείτε την μονοτονία της $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x>0$,

29. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

- $\frac{f'(x)}{e^x-1}=\frac{1}{e^x-x}-\frac{1}{e^x-1}$, $x\neq 0$
- $\ln(f(0)+1)=-f(0)$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(e^x-x)-x$.

30. Έστω συνάρτηση $f:[0,4]\to\mathbb{R}$. Για την f ισχύει ότι είναι:

- συνεχής στο $[0,4]$
- παραγωγίσιμη στο $(0,4)$
- κυρτή στο $[0,2]$
- κοίλη στο $[2,4]$

Να αποδείξετε ότι $f(4)-f(0)<2[f(3)-f(1)]$.

31. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών που έχει την ιδιότητα:

$$f(x\cdot y)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y>0$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ και $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$, $x,y>0$

β) Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε η f αντιστρέφεται

Β. Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $\alpha>0$, να αποδειχθεί ότι είναι συνεχής και να βρεθεί το όριο

$$A=\lim_{x\to 1}f(x)$$

Γ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$, να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης αυτής

32. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και έχει την ιδιότητα:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι συνεχής

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$

γ) Αν η f είναι και παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=0$ να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x-1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f

γ) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α, β, γ, αν ισχύει ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)=0$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x=e$

34. α) Αν $f(\alpha+\beta-x)=f(x)$ (1) τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta xf(x)dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_0^\pi \frac{x}{1+\eta\mu x}dx$$

γ) Αν η f είναι αύξουσα, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_\alpha^\beta xf(x)dx\geq\frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta f(x)dx \quad (2)$$

35. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι $1-1$ και έχει την ιδιότητα:

$$f(x)\cdot f(1-x)=f(\alpha x+\beta),\ x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=0$

β) $f(\beta)\neq 0$

γ) $f(1-\beta)=1$

δ) η συνάρτηση f δεν έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

36. Δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχουν την ιδιότητα: $g(f(x))=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι αντιστρέψιμη

β) Η g έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

γ) Δεν μπορεί να ισχύει η σχέση

$$f(g(x))=x^2,\ x\in\mathbb{R}$$

37. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x},\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση αυτή ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και να την βρείτε

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_{-1}^{1}x^2 f(\eta\mu x)dx$$

38. Έστω η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$xf'(x)=\frac{x+1}{e^{f(x)}+1}\ \text{για κάθε}\ x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$ για κάθε $x>0$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}\frac{\ln x}{x^2+1}dx,\ \alpha>0$$

γ) Αν $0<\alpha<\beta$, $\alpha\neq\beta$ και $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\ln x}{x^2+1}dx=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha<1<\beta$ και $\alpha\beta=1$

39. Μια συνάρτηση f με $f(1)=0$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της $A=(0,+\infty)$, είναι παραγωγίσιμη στο 1 και έχει την ιδιότητα:

$$f(x)\geq x\ln x,\ x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$

β) Να βρείτε το όριο $A=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$

γ) Αν $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=1$, να βρείτε τον τύπο της f στο διάστημα $[1,e]$

40. Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(f\circ f)(x)=x^2\ \text{για κάθε}\ x\geq 0$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x^2)=f^2(x),\ x\geq 0$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$.

41. Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε:

- $f(1)=f(2)$
- $f''(x)=\frac{e^x-x}{x-\ln x},\ x>0$

Να αποδείξετε ότι:

α) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

β) $f'(2)>0$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

42. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+e^{f(x)}+2-x^4=0$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει ελάχιστη τιμή για $x_0=0$

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ και μετά, τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και να δείξετε ότι $f(0)\in(-2,-1)$

δ) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f, να βρείτε ποιες είναι οι εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία τομής της με τον $x'x$ και να δείξετε ότι οι ευθείες αυτές, τέμνονται πάνω στον $y'y$

43. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB=x$, $A\Gamma=x+2$ και $\hat{A}=60$.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος y της πλευράς ΒΓ δίνεται από τη σχέση

$$y=f(x)=\sqrt{x^2+2x+4},\ x>0$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να χαράξετε τη γραφική της παράσταση

δ) Η πλευρά ΑΒ αυξάνεται με ρυθμό $\sqrt{3}\,cm/min$. Να βρείτε το ρυθμό, με τον οποίο αυξάνει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ τη χρονική στιγμή, κατά την οποία αυτό είναι ίσο με $\frac{3\sqrt{3}}{4}cm^2$

ε) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία στη C_f που οι συντεταγμένες τους να είναι ακέραιοι αριθμοί

6.4 Επαναληπτικά θέματα ΕΜΕ 2016

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x)=\ln(x+1) \text{ και } g(x)=\frac{x}{x+1}$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+g(x)=0$ και να βρείτε το πρόσημο της $\Phi(x)=f(x)+g(x)$

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο $O(0,0)$, η οποία διχοτομεί τη γωνία του πρώτου και τρίτου τεταρτημόριου

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τη C_f την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x=3$

δ) Ένα υλικό σημείο Μ με θετική τετμημένη, κινείται στη C_f και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν Ν είναι η προβολή του Μ στον άξονα $x'x$ και $A(0,\alpha)$ σημείο του άξονα $y'y$, με $\alpha>0$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής $E'(t)$ του εμβαδού Ε του τριγώνου ΑΜΝ κάθε χρονική στιγμή t ισούται με $\Phi(x(t))$

ii) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ είναι ίσος με

$$\left(2\ln 3+\frac{8}{9}\right)cm^2/\sec$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{-x}, x\le 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Ένα υλικό σημείο Α $(\alpha, \sqrt{-\alpha})$, $\alpha<0$ κινείται στην C_f με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $\alpha'(t)=-\alpha(t)$. Επίσης υλικό σημείο $M(x,y)$ με $x>0$ κινείται στην ευθεία με εξίσωση $y=x$

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $A\hat{O}M=\theta$, όπου Ο η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή t_o που είναι $(OA)=\sqrt{2}$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις: $y=\sqrt{-x}$ με $x\le 0$, $y=x$ με $x\ge 0$ και την $y=\alpha'(t_o)$

iii) Να βρείτε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, που να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, ώστε:

$$f(e^x+1)=x+e^x+1 \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln(x-1)+x$, $x\in(1,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν ένα κοινό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε

δ) Να υπολογίσετε το $f(e^2+1)$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x+1)-1=f^{-1}(e^2+3)$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{2f(x)}+e^{f(x)+1}+f(x)-2e^2=x \text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $e^{\xi}+e=(2e^2-\xi)e^{-\xi}$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_o=1$

ε) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le x$ και να αποδείξετε ότι $f(x)-1\ge 0$ για κάθε $x\ge 1$

5. Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{x\ln x-x}$, $x>0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να δείξετε ότι η f είναι κυρτή

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x}=\kappa$, $x>0$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x\cdot f(x)dx=\frac{e-1}{e}$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(e^{-1},e)$ ώστε:

$$f(\xi_1)\cdot\ln\xi_1+ef(\xi_2)\cdot\ln\xi_2=\frac{e-e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}.$$

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f''(x)\cdot e^{-x}-(f'(x))^2=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $2f'(0)+1=0$ και
- $f(0)=\ln 2$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)+1=\frac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(1+e^x)-x$, $x\in\mathbb{R}$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $2f(x)+x\geq \ln 4$, $x\in\mathbb{R}$

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

στ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{-1}(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} f^{-1}(x)$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο σ' αυτό το διάστημα και $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$. Να δείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις στο (α,β)

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$$

γ) Υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(\alpha,\beta)$ με $\kappa\neq\lambda$ τέτοια, ώστε

$$f'(\kappa)f'(\lambda)<0$$

δ) Υπάρχει $x_o\in(\kappa,\lambda)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_o)=0$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|\ln x|$, $x>0$.

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.

β) Να βρείτε:

i) Τα κοινά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ της C_f με την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha>0$.

ii) Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ε_A και ε_B της C_f στα σημεία της $A(e^{\alpha},\alpha)$ και $B(e^{-\alpha},\alpha)$ αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $\alpha>0$.

γ) Έστω M και N τα σημεία τομής της ευθείας ε_B με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου OMN γίνεται μέγιστο, η ευθεία ε_A διέρχεται από το $O(0,0)$

9. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)-e^{-f(x)}=x-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να εκφράσετε την $f'(x)$ ως συνάρτηση της $f(x)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό της για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$, $x>0$

ε) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

8. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$, τότε:

i) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\eta\mu^2 x)-1}{\eta\mu x}$

ii) Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(2016x)-1}{x}=4032f'(0)$

β) Αν επιπλέον για την f ισχύει

$$f^2(x)-8f(x)=x^2-7 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να βρείτε τον τύπο της

γ) Αν $f(x)=4-\sqrt{x^2+9}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $-\infty$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, η οποία διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx<\dfrac{22}{5}$

10. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x\ln x-1=0, \text{ με } x>1$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Β. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)=x\ln x\big(f(x)-f'(x)\big)$, $x>1$
- $f(e)=e^e$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β) Αν $f(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$, $x>1$

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \text{ και } \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

ii) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x)=f(x)+x\ln x\cdot f'(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=\alpha$ με $\alpha>2$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{\alpha\to +\infty}\left(E(\alpha)\cdot\eta\mu\dfrac{1}{E(\alpha)}\right)$

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,2e)$. Αν η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της $\left(x_o, f(x_o)\right)$ διέρχεται από το $A\left(x_o+1, 2e^{x_o}\right)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x+e^{2-x}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha-2x)}{x-\alpha}+\frac{f(2x)}{x-\beta}=2016,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (α,β)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και την ευθεία $y=e^2+1$

ε) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=(1-x)\ln x+\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{x^2\ln x}{e^{2x}}$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο μόνο ρίζες $\rho_1\in(0,1)$ και $\rho_2\in(1,+\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-\ln(\rho_1\rho_2)$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x)=4f(x)+32x^2-16x,\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{4x}-8x^2,\ x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να αποδείξετε ότι

$$4f(2x)<3f(x)+f(5x) \text{ , για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

δ) Να αποδείξετε ότι

$$\left(e^2-2\right)\ln 2<\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt<\left(e^4-8\right)\ln 2$$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2x\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt-(x-1)\left(3f(x)+f(5x)-4f(2x)\right)=\left(e^{4x}-2\right)\ln 4x$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$

14. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{x-1}=0$
- $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)-x^2-y^2+1,\ x,y\in\mathbb{R}^*$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$

β) Να αποδείξετε ότι

$$xf'(x)-2f(x)=x^2-2, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x|+1, & x\neq 0 \\ 1, & x=0\end{cases}$

δ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f

ε) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2ex^2\ln|x|=\alpha$ έχει 4 διαφορετικές ρίζες

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\dfrac{1}{4}$
- $4f^2(x)-4xf(x)=\alpha x+\beta\ \ x\in\mathbb{R}$, όπου $\beta>\dfrac{1}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(1)<0$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+x+\beta}}{2}$

ii) Η εξίσωση

$$10xf(x)=3\eta\mu(\pi x)-3x+4$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,+\infty)$

16. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^{x^2}\left(x^3-x\right),\ x\in\mathbb{R}$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A\left(x_1,f(x_1)\right)$, $B\left(x_2,f(x_2)\right)$ και το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f είναι συνευθειακά

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=-x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα

ε) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$

17. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $0\le f(x)+16\le(x+1)f'(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(1)=0$
- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x-x)=f(x^2-x+2)$

γ) Να αποδείξετε ότι

$$(x+1)f(x)<f(x^2) \text{ για κάθε } x\in(\rho,1)$$

όπου ρ ρίζα της εξίσωσης του (β) ερωτήματος

δ) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι

$$16<E<32$$

18. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=-\ln 2$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^{f(x)}=1+f'(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-\ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της $(0,f(0))$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx<-\dfrac{1+\ln 16}{4}$

δ) Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x^2)+f(\ln x)=f(x)+f(0) \text{ στο } (0,+\infty)$$

ε) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει $x_o\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_o)=(\ln(e+1)-\ln 2)x_o-\ln(e+1)$$

ii) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=\ln^2\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$

19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(-1)=-\dfrac{1}{e^2}$
- $xf'(x)=f(x)+x^2(2e^{2x}-1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{2x}-x^2-x$, $x\in\mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής

δ) Ένα σημείο $M(x,y)$ κινείται στο επίπεδο χωρίο Ω και για τις συντεταγμένες του ισχύουν οι σχέσεις:

$$0\le x\le 1 \text{ και } -x^2-3x\le y\le f(x)$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει το σημείο Μ.

20. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+e}{x}=1$
- $f(x+y)=e^{2xy}\left(e^{y^2}f(x)+e^{x^2}f(y)+e^{x^2+1}+e^{y^2+1}\right)-e$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

α) $f'(0)=1$

β) $f'(x)=2xf(x)+e^{x^2}+2ex$, $x\in\mathbb{R}$

γ) $f(x)=xe^{x^2}-e$, $x\in\mathbb{R}$

δ) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} την ευθεία $x=-2e$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

21. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1)=-1$
- $2f'(x)(f(x)-2x)=1+4f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

α) $f(x)=2x-\sqrt{4x^2+x+4}$, $x\in\mathbb{R}$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\eta\mu(\pi x),\ x\in\mathbb{R}^*$$

έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $M(x_o,y_o)$ με $x_o\in(1,+\infty)$.

γ) $3f(x+1)>f(x+3)+2f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ) Αν $\alpha>\dfrac{7}{4}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x+3)f(x-\alpha+1)=f(x-\alpha+3)+2f(x-\alpha)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,\alpha)$

22. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0)=0$
- $|f'(x)|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $-2\le f(2)\le 2$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

γ) Αν $f(x)=\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y=x^2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{f(x)}-1\right)\left(f(x)-2\ln x\right)$$

iii) Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1,0)$ και $g''(x)=\frac{8x}{e^{f(x^2)}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 g(x)dx=f(1)$$

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x^4+4x+8 \text{ και } g(x)=\text{συν}\,x+x$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{2}{x}\right)=5$

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε

$$4\left(2\alpha^4+2\alpha^3+4\right)\left(\beta^4+4\beta+8\right)=25\alpha^4$$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3g(x)}{f(x)}$

ε) Θεωρούμε ότι υπάρχει δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $h(1)=8$
- $h'(3)=6$
- $h(g(x))\le f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1,h(1))$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε

$$h''(\xi)=1$$

24. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x)+f(x)=x+1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και $f(1)$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

δ) Αν α > 1 , να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\alpha}f(\alpha)+f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<1+\frac{1}{\alpha}$$

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu x+2)}{e^x+1}=\frac{f(x)}{x+2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,0)$

στ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ είναι $E(\Omega)=\frac{5}{4}$

25. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\frac{\ln x}{x+1} \text{ και } g(x)=1+x(1-\ln x)$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g που να είναι παράλληλες. Στη συνέχεια να βρείτε σημεία της C_g με τετμημένες αντίστροφες στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho>1$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x=\rho$ και επιπλέον ισχύει $f(\rho)=\frac{1}{\rho}$

δ) Έστω η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2\rho}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0<\alpha<\beta$

ii) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)+f'(\xi)=\frac{1}{2\rho}$

26. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ με $f'(1)=1$ και $f'(-1)=-1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $x^2\left(xf'(x)-4\right)=1-2x^2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln|x|}{x^2}+2$, $x\in\mathbb{R}^*$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και την ευθεία $x=\alpha$ με $\alpha>1$, τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to1}\frac{x^3(f(x)-2)-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-(f(x)-2)^2}$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=x-1+\ln x$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)\geq x$

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1}, την ευθεία με εξίσωση $y=x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=e$

28. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=2e^{-\frac{x^2}{8}},\ x\in[0,+\infty) \text{ και}$$

$$g(x)=\frac{x^2}{8}-\ln x,\ x\in(0,+\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x)=2\sqrt{2\ln\frac{2}{x}},\ x\in(0,2]$

β) Να υπολογίσετε το $I=\int_0^{\sqrt{2}}x^2f'(x)dx$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right)=0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0,2)$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f_\alpha(x)=\frac{3\alpha}{e^x+\alpha},\ \alpha>0$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f_α ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση C_α της συνάρτησης f_α έχει ένα μόνο σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της C_α έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E_\alpha(\lambda)$, $\lambda>0$, του χωρίου που περικλείεται από την C_α, την ευθεία $y=3$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ είναι

$$E_\alpha(\lambda)=3\ln\left(\frac{e^\lambda+\alpha}{e^{-\lambda}+\alpha}\right)$$

δ) i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_4 βρίσκεται πάνω από την καμπύλη C_1

ii) Αν $\zeta(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_1, C_4 και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$, να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\zeta(\lambda)$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f_\alpha(x)=\ln\left(\frac{e^x+e^\alpha}{e^x+1}\right),\ \alpha\in\mathbb{R}$$

α) Θέτουμε $I(\alpha)=\int_0^1 e^{x+f_\alpha(x)}dx$. Να βρείτε το α αν ισχύει $I(\alpha)=e-1$

β) Να αποδείξετε ότι $f_\alpha(\alpha-x)=\alpha-f_\alpha(x),\ x\in\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$, με $\alpha>0$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_α της συνάρτησης f_α, τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x=\alpha$ είναι $E(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}$

31. Έστω γνησίως μονότονη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(f(x))=f(x)-\frac{x}{4}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ να δείξετε:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{x}=\lambda^2$ ii) $\lambda=\frac{1}{2}$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)>\frac{1}{4}$ $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(2)(x+1)(x-1)+f(3)x(x-1)+f(4)x(x+1)=0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες $\rho_1,\rho_2\in(-1,1)$ με

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{f(4)-f(3)}{f(2)}$$

32. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{\ln 2}$ και $f(e)=\frac{1}{e}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$
- $f'(x)=-(\ln x+1)f^2(x),\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x\ln x},\ x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(e,f(e))$ και την ευθεία $x=4$

33. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=e$ και $f'(1)=0$, η οποία για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $x^3f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^{\frac{1}{x}},\ x\in(0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

γ) Να δείξετε ότι

$$(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}}\le\alpha e^{\frac{1}{\alpha}}+\beta e^{\frac{1}{\beta}},\ \alpha,\beta\in(0,+\infty)$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g με $g(x)=\dfrac{f(x)}{2x},\ x\in(0,+\infty)$ και τις ευθείες $x=1$, $x=3$

ε) i) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{f(x)}, & x\in(0,+\infty)\\ 0, & x=0\end{cases}$$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$H(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{x}}, & x\in(0,+\infty)\\ 0, & x=0\end{cases}$$

είναι μία αρχική της h στο $(0,+\infty)$ και να υπολογίσετε το $I=\int_0^e h(x)dx$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ώστε:

$$f^3(x)+2f(x)=3e^x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να αποδείξετε ότι:

i) $e^{\frac{x}{3}}\le f(x)\le\dfrac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2}e^{\frac{x}{2}}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}}=\sqrt[3]{3}$

δ) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της

στ) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\ln 4}f(x)dx+\int_1^2\dfrac{4}{x^2+2}dx=3$

35. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με $f(e)=1$, ώστε:

- $f(x)>0,\ x\in(1,+\infty)$
- $xf'(x)+f^2(x)=0,\ x\in(1,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\ln x},\ x\in(1,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=\varepsilon\varphi x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$

γ) Ένα υλικό σημείο $M(\alpha,f(\alpha)),\ \alpha>1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα 4α cm/sec. Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο A, τότε:

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A, τη χρονική στιγμή t_o, που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(e,f(e))$

ii) Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ, τη χρονική στιγμή t_o είναι $\theta'(t_o)=\dfrac{12e}{e^2+1}$ rad / sec

36. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x)+f(x)=x^4-2x^2-8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Για τη C_f:

i) Να δείξετε ότι έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$

ii) Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τον $x'x$. Σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(-2,2)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)f'(x_2)+f(x_1)f(x_2)=0$

37. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=x+\ln x,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση $(2x^2+1)e^{2x^2-x-1}=x+2$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοια, ώστε $\dfrac{e-1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{e}{f'(\xi_2)}=e-1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ και την ευθεία $x=e$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e\dfrac{f(x)+1}{e^x}dx<\dfrac{4}{3}$