Γ’ Γυμνασίου

Σειρά:
Μαθηματικές σημειώσεις για τη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση

Μάρτιος 2020

Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου

119 διδακτικές ενότητες

Θεωρία
Λυμένες ασκήσεις
Ασκήσεις για λύση
Ασκήσεις Α.Π.Σ.
Επεκτάσεις

Θεολόγης Καρκαλέτσης

Περιεχόμενα

Α’ ΜΕΡΟΣ • ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Αλγεβρικές παραστάσεις

2. Εξισώσεις – Ανισώσεις

3.Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

4. Συναρτήσεις

5. Πιθανότητες

Β' ΜΕΡΟΣ • ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Γεωμετρία

2. Τριγωνομετρία

Βιβλιογραφία

1.1.Α / 1 — **Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους (Ι)** — **1**

1. Θεωρία

- Πραγματικοί αριθμοί, Ρητοί αριθμοί. Άρρητοι αριθμοί. Άξονας πραγματικών αριθμών.
- Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού
- Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση πραγματικών αριθμών.
- Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού πραγματικών αριθμών.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε στην κατακόρυφη στήλη να προκύψει το έτος γέννησής σας.

$-5+12-3 \dots \dots = \boxed{}$

$3-9-1 \dots \dots = \boxed{}$

$2(-3)-4 \dots \dots = \boxed{}$

$-3(-4)+7 \dots \dots = \boxed{}$

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αν το άκρο κάθε βέλους δείχνει το άθροισμα της αντίστοιχης στήλης ή γραμμής.

6	–5	–4	8	→	
7		3	6	→	7
	8		–6	→	
–18	7	28	–15	→	
↓	↓	↓	↓		↓
–2				→	0

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=$ β) $\frac{1}{5}-\frac{3}{4}=$

γ) $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}=$ δ) $\frac{1}{5}:\frac{3}{4}=$

ε) $2\cdot\frac{3}{4}=$ στ) $\frac{7}{4}\cdot 3=$

ζ) $\frac{3}{4}:2=$ η) $2:\frac{3}{4}=$

4. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=\left[8-2\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]-2\cdot\left[-1+\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $|3|-|3|+|2|-|-2|=$

β) $|3\cdot 4-5\cdot 2|-|5\cdot 3-3\cdot 3|+|27:(-3)|-\left|\frac{-2}{5}\right|\cdot\left|\frac{5}{2}\right|=$

γ) $|3-5|-|5-3|+|2\cdot 7|-|-2|\cdot|3|=$

δ) $|\alpha|-|-\alpha|+|\alpha-\beta|-|\beta-\alpha|=$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\frac{9}{5}-4+\frac{1}{4}}{\frac{4}{6}+3-\frac{2}{12}}$ β) $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

γ) $\left[-\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\right)-3\right]:\left(2-\frac{16}{3}\right)$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]:(-2)$

β) $\left[-8-\left(+\frac{3}{2}\right)\right]:\left(-\frac{5}{6}\right)$

γ) $\left[8:\left(-\frac{3}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{3}$

8. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\cfrac{2}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{4}}}}$$

3. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Το θερμόμετρο μίας πόλης δείχνει $-12°$.

α) Να βρείτε την θερμοκρασία που θα δείχνει αν αυξηθεί η θερμοκρασία κατά
 i) $15°$ ii) $6°$

β) Να βρείτε την θερμοκρασία που θα δείχνει αν μειωθεί η θερμοκρασία κατά
 i) $15°$ ii) $6°$

γ) Αν μετά από 4 ώρες η θερμοκρασία δείχνει
 i) $15°$ ii) $-16°$ iii) $-6°$ iv) $6°$

τότε η θερμοκρασία έχει αυξηθεί ή έχει μειωθεί και πόσο;

1.1.Α / 2 | Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους (ΙΙ) | 2

1. Θεωρία

- Αντίθετοι αριθμοί, αντίστροφοι αριθμοί.
- Επιμεριστική ιδιότητα
- Βασικές ιδιότητες Αν $\alpha\cdot\beta=0$ τότε $\alpha=0$ **ή** $\beta=0$ Αν $\alpha\cdot\beta\neq0$ τότε $\alpha\neq0$ **και** $\beta\neq0$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές;

2. Αν δύο αριθμοί έχουν άθροισμα θετικό αριθμό τότε τι πρόσημο έχουν;

3. Ισχύει $\alpha:(\beta+\gamma)=\alpha:\beta+\alpha:\gamma$;

4. Ο αριθμός $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός;

5. Υπάρχει αριθμός που είναι ίσος με τον αντίστροφό του;

6. Ο αριθμός $\sqrt{\alpha}$ είναι ρητός για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Οι αριθμοί 5x και –y με $x,y\neq0$ είναι αντίθετοι. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:
α) $3xy$ **β)** $-2x^5y^2$ **γ)** $3x^4y^3$ **δ)** $-x^4y^8$

2. Οι αριθμοί $-5x$, $-2y$ $(x,y\neq0)$ είναι αντίστροφοι. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:
α) $-5xy$ **β)** x^7y^4 **γ)** x^2y^5 **δ)** x^6y^8

3. Έστω ότι α = β + 2005. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K=-3\left[2(\alpha+2\beta)-2(3\beta-2\alpha)-4\beta\right]+19(\alpha-\beta)$$

(Ε.Μ.Ε. Θαλής 2005)

4. Αν $\alpha+\beta=5$ και $\gamma+\delta=-1$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\beta-\left[\alpha-2(\beta-\delta)\right]-2\left[\gamma-(1-2\beta)\right]}{3(\alpha-2\delta)-3(2\gamma-\beta)}$$

5. Να εξετάσετε αν οι τιμές των παραστάσεων

$$\alpha=(-4):\left(\frac{1}{13}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{24}{5}\right) \text{ και}$$

$$\beta=\left(-\frac{1}{10}\right):\left[(-2):\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\right)\right]$$

είναι αριθμοί αντίστροφοι.

4. Επεκτάσεις

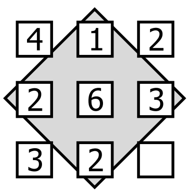
1. Αν ο μέσος όρος των αριθμών α, β και γ είναι 7 τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης;

$$A=4(\alpha-\beta)-2\left[\alpha+2\gamma-3(\beta+\gamma)\right]$$

2. Αν $\frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{3}=\frac{\gamma}{4}$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=\frac{3(\alpha+2\gamma)-2\left[\alpha-2(\alpha-\gamma)\right]}{6-3\left[\gamma-2(\beta-1)\right]}$

5. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Ποιον αριθμό πρέπει να τοποθετήσουμε στο άδειο κουτί;



2. Δίνεται ένα ορθογώνιο με πλευρές α, β και περίμετρο 12 cm και ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές γ, δ και εμβαδόν 4 cm². Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=4\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{4}\right)-6\left[\alpha-\frac{1}{2}(2\gamma-\beta)\right]-\gamma(6-5\delta)$$

1.1.Β / 1 **Δυνάμεις πραγματικών αριθμών (Ι)** **3**

1. Θεωρία

- Δύναμη πραγματικού αριθμού. Ορισμός, ιδιότητες. Βάση, εκθέτης δύναμης. Προτεραιότητα πράξεων.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ποια είναι η βάση στις δυνάμεις -3^2, $(-3)^2$;

2. Πόσο είναι το $5\cdot 2-3^2$ και πόσο το $5-2\cdot 3^2$;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $5^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^7$ β) $(-5)^2\cdot(-5)^{-2}\cdot 5^7$

γ) $(-3)^{-4}:(-3)^2$ δ) $(-3)^{-5}:3^2$

ε) $5^3\cdot 7^3:2^3$ στ) $\left(5^2\right)^3:\left(5^3\right)^{-2}\cdot 5^4$

2. Να γράψετε καθεμία από τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη.

$A=3^{77}+3^{77}+3^{77}$ $B=2^{102}-2^{101}-2^{100}$

$\Gamma=2^{59}-4^{29}$ $\Delta=2^{17}\cdot 3^{18}-2^{18}\cdot 3^{17}$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A=\left(4^{12}:2^9\right)\cdot\left[(2{,}5)^{12}:5^9\right]$

$B=\left(5^{-4}\right)^{-3}\cdot\left(25^{-2}\right)^3$

$\Gamma=(-1)^{2007}+\left[-5-\left(-2^2-3\right)\right]\cdot 5-$

$-\left\{-\left[-2-\left(-1^{2006}+1\right)\right]\right\}^4$

$\Delta=\left[(-1)^{10}+(-1)^{11}\right]\cdot\left(2^4-3^2\right)+5^{12}:5^{10}-20$

$E=\left(3^2\right)^4+3^{11}:27+3^3:3^{-5}-2\cdot 3^9$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A=-2^4-\left[-3-8-(-3)^3\right]+2(-5)^2-48$

$B=4\left[6-(-7)\right]-\left[12:(-8)\right]\cdot(-3)^3$

$$\Gamma=\frac{(-1)^4-(-1)^5-(-1)^7}{-3-(-3)^2-(-3)^3}\cdot\frac{(-2)^4-2^3}{(-3)^4-(-3)^3}$$

5. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=\left[(-2)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2:\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$B=\left[\frac{1}{8}\cdot\left(2^{-3}\right)^2\right]^{-1}:64$$

$$\Gamma=\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+(-4)\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}\right]:\left[\left(-\frac{6}{7}\right)^{-1}\left(-\frac{10}{3}\right)\right]$$

$$\Delta=\frac{(-1)^{3x+2}+3\cdot 2^{2x+4}-(-2)^{-(3x+2)}}{x^{2x+1}-4(-1)^x}\quad \text{για } x=-2$$

$$E=\left[\left(x^{-3}y^5\right)^{-2}:\frac{x^7}{y^{11}}\right]^3\quad \text{για } x=0{,}03 \text{ και } y=\frac{3}{10}$$

4. Επεκτάσεις

1. Αν οι x, y είναι αντίστροφοι τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\left(x^5\cdot y^4\right)^2:\left[\left(\frac{x}{y^3}\right)^2\cdot\left(x^{-1}\cdot y\right)^3\right]$$

2. Αν $\alpha=4-2\frac{1}{5}$ και $\beta=5+\frac{-3}{2}-\frac{-5}{-2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\alpha:\beta^{2009}-\beta-\frac{1}{5\alpha}$$

(Θαλής Β’ Γυμνασίου 2009)

5. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Να συμπληρώσετε το τετράγωνο, ώστε κάθε στήλη, γραμμή και διαγώνιός του, να έχει το ίδιο γινόμενο.

2^0		2^2
	2^{-1}	
		2^{-2}

1.1.Β / 2 **Δυνάμεις πραγματικών αριθμών (ΙΙ)** **4**

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων για $x=1$.

$$A=\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-4}+\left(-\frac{1}{4}\right)^{x-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-2}+(-1)^{x-1}-(-1)^{x}$$

$$B=\left(-\frac{1}{4}\right)^{x-3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{x-2}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{x-1}+(-1)^{x}$$

2. Αν $x=\left|-4-(-3)\right|$ και $y=\left|3-4\right|$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A=\frac{2^{3x-2}\cdot\left(2^{y-1}\right)^{3}}{3^{x+1}\cdot 3^{2y-1}}:\frac{2^{x+1}-2^{y}}{3^{x}+3^{2y-1}}$$

3. Να αποδείξετε ότι είναι αντίστροφοι οι αριθμοί:

$$A=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} \quad \text{και} \quad B=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}\right]}$$

4. Δίνονται οι αριθμοί

$$x=5\cdot 13^{19} \quad \text{και} \quad y=12\cdot 13^{19}$$

Να γράψετε τον αριθμό x^2+y^2 ως μία δύναμη με βάση φυσικό αριθμό.

5. Να αποδείξετε ότι:

$$(1+2+3+4)^2=1^3+2^3+3^3+4^3$$

6. Να λύσετε την εξίσωση $(-2)^{\nu}\cdot x=2^{\nu+1}$

7. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A=\left[\left(x^{-1}y\right)^{2}:\left(x^{3}y^{5}\right)\right]^{2}\cdot\left(x^{2}y^{3}\right)^{4},\ \ x,y\neq 0$$

και να βρείτε την αριθμητική της τιμή για $x=10^3$ και $y=-0{,}001$

8. α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left(x^{-5}\right)\cdot\left(x^{2}\right)^{2}=-\frac{1}{3}$$

β) Για το x που βρήκατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=(x+2)^{2007}+(x+3)^{2008}+(x+4)^{2009}$$

9. α) Αν ν είναι φυσικός αριθμός τότε να αποδείξετε ότι

$$3^{\nu+2}-3^{\nu+1}=6\cdot 3^{\nu}$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{15\cdot 2^{2x}-4^{x+2}}{2^{2x+1}-4^{x}}:\frac{8\cdot 9^{x}-3^{2x+2}}{54\cdot 3^{2x-3}}$$

4. Επεκτάσεις

1. Αν ισχύει $\dfrac{3x+4y}{2x-2y}=5$ τότε να αποδείξετε ότι έχει σταθερή τιμή το κλάσμα

$$A=\frac{x^2+2y^2}{xy}$$

2. Αν ν άρτιος τότε να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A=\frac{2-(-1)^{\nu}}{4-3(-1)^{\nu+2}}-\frac{1+(-1)^{\nu+1}}{2007}+\frac{1+4(-1)^{2\nu}}{3-2(-1)^{\nu+1}}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$2^{2000}:\left[\left(25^{50}:5^{99}-3^{51}:9^{25}\right)^{1999}\right]+\left(2^{111}\right)^{18}-2\cdot 2^{1997}$$

(Εξετάσεις Ρουμανίας 2000)

4. Να βρείτε το αντίθετο και τον αντίστροφο κάθε μίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=\frac{2^{\nu}+2^{\nu-1}}{2^{\nu+1}-2^{\nu}} \quad \text{και} \quad B=\frac{7^{\nu+2}-35\cdot 7^{\nu-1}}{7^{\nu}\cdot 11}$$

5. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$A=\frac{3^{\nu+2}+5\cdot 3^{\nu}-4\cdot 3^{\nu+1}}{4\cdot 3^{\nu+1}+3^{\nu}}$$

είναι ανεξάρτητη του ν.

6. α) Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$2^{\nu+3}+2\cdot 2^{\nu}$$

είναι πολλαπλάσιο του 10

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$4^{6\nu+2}-10\cdot 4^{6\nu}+12$$

είναι πολλαπλάσιο του 6

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$A=\left(\frac{2}{7}+1-\frac{1}{14}\right):\frac{17}{2}-\frac{1}{7}+5\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\cdot 2-1\right)$ **2011**

$B=\left(18-\frac{2}{5}\right):\frac{44}{5}-\frac{39}{5}\cdot\left(\frac{\frac{5}{11}}{3+\frac{6}{11}}\right)$ **2012**

$\Gamma=32-12:4+53+3\cdot 4+\frac{16}{9}:\frac{1}{8}-\frac{74}{9}$ **2013**

$\Delta=(200:8+12\cdot 100)+\left[200:(8+2)+762\right]\cdot$
$\cdot\left[(-1)^{13}+(-1)^{12}+(-1)^{2007}\right]^2$ **2007**

$E=4^2\cdot 25^2+2008:4+\left(3^3-5^2\right)\cdot 249-10^4$ **2008**

$Z=\frac{13}{9}-\frac{74}{9}\cdot\frac{3}{37}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:8$ **2014**

$H=\frac{(-20)^2}{5^2}+\frac{15^3}{(-5)^3}+\frac{(-8)^3}{2^3}-\left(\frac{-3}{9}\right)^{-3}$ **2016**

(Θαλής Β' Γυμνασίου)

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=-\left[(-2)^8:(-4)^2+(-4)^2\right]:(-2)^4,$$

$$B=-(x-3)-3(y-4)-\left[x(y-2)-y(x+3)\right]$$

Για ποιες τιμές του x αληθεύει η ανίσωση: $A>B$.

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2007)

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4\cdot 2^4-3^4+x}{\left[1-(-1)^{2005}\right]^0},\quad B=\frac{\left[(-2)^2+(-1)^2\right]^2}{5}+\frac{x}{2}$$

Αν είναι $A=B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x.

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2008)

4. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=7x+10y-3w-87$$

αν $x+y=3\cdot(-2)^2$, $y-w=\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^4\right]^6\cdot\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^6\right]^{-4}$

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2010)

5. Αν $\alpha=10^{-1}:10^{-3}$, $\beta=10^{-5}:10^{-7}$, $\gamma=10^{-1}\cdot 1000$ τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{6\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\right)^{-2}$$

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2011)

6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\frac{x^2\cdot y^4\cdot z^6\cdot 2^{182}}{3\cdot\left(13\cdot 2^2\cdot 3^3+4^2\cdot 9^3\right)^{-1}},$$

αν είναι $x=2^{-10}$, $y=4^{-8}$, $z=8^{-6}$ και να αποδείξετε ότι είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2012)

7. Για $x=\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{x^4-1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}-\frac{6}{13}$$

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2014)

8. Για $\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{\alpha-1}{\alpha-3}+\frac{1}{33}+\alpha^{-1}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{27}$$

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2015)

9. Αν $\alpha=\frac{12^{\nu}}{3^{\nu}}:2^{2\nu-1}$ και $\beta=10^{2\nu+1}:100^{\nu}$ τότε να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=\frac{\left(\alpha^3-\beta\right)^3+\alpha^2\beta-2\beta+2\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta-10\alpha}$$

(Θαλής Γ' Γυμνασίου 2016)

10. **α)** Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{x^3}{y^2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^3+\frac{81x^2+27y}{y},\quad x=3^{-2},\ y=3^{-3}$$

β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B=16^{23}\cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του

(Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2013)

11. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\quad B=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{και}$$

$\Gamma=x^{-1}+y^{-1}$, όταν $x=3^{-3}$, $y=3^{-4}$

(Ευκλείδης Γ' Γυμνασίου 2014)

1.1.Γ / 1	Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού (Ι)	6

1. Θεωρία

- Ορισμός. Συνέπειες. Ιδιότητες.
- Παρατηρήσεις: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha+\beta}$, $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha-\beta}$

  Η ισότητα $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ ισχύει ενώ η ισότητα $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ **δεν ισχύει πάντα.**

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους;

α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{12}}$

β) $3\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $2\sqrt{18}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

2. Αν $x<0,\ y<0$ τότε $\sqrt{x\cdot y}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}$;

2. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι;

i) $\alpha=\sqrt{8}$, $\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma=2\sqrt{2}$, $\delta=\frac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\tau=\sqrt{\frac{2}{4}}$

ii) $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{3}$, $\beta=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $\gamma=\sqrt{12}$, $\delta=\sqrt{3+3}$, $\varepsilon=\sqrt{27}-\sqrt{3}$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{19^2}-\sqrt{(-23)^2}+\sqrt{3^6}$ β) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}$

γ) $\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}}$ δ) $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{12}{5}}\cdot\sqrt{\frac{45}{4}}$

2. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$$

$$B=\sqrt{57+\sqrt{44+\sqrt{15+\sqrt{99+\sqrt{1}}}}}$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3\sqrt{27}-2\sqrt{12}+\sqrt{32}-2\sqrt{8}$

β) $3\sqrt{20}+\sqrt{72}-3\sqrt{2}-2\sqrt{45}$

γ) $\sqrt{50}-\sqrt{108}-\sqrt{2}+\sqrt{27}$

δ) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{15}$

ε) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{3}\right)$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$

β) $\sqrt{24}+\frac{12}{\sqrt{6}}-4\sqrt{\left(\sqrt{6}-3\right)^2}$

γ) $\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}$

δ) $\sqrt{\sqrt{75}+\sqrt{27}}\cdot\sqrt{\sqrt{48}-\sqrt{12}}\cdot\sqrt{3}$

5. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

$\sqrt{1}=$ $\sqrt{121}=$ $\sqrt{12321}=$

....

$\sqrt{12345678987654321}=$

6. Να εξετάσετε αν η παράσταση

$$\sqrt{\sqrt{16}+2\sqrt{\sqrt{81}}}-\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$

είναι πολλαπλάσιο του 7.

4. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να γίνει «μαγικό», δηλαδή όλες του οι γραμμές, οι στήλες και οι διαγώνιοι να έχουν το ίδιο άθροισμα.

$\sqrt{32}$		$\sqrt{128}$
	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{8}$		

1.1.Γ / 2 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού (ΙΙ) 7

1. Θεωρία

- Ρητοποίηση παρονομαστή. $\alpha\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha^2\beta}$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ισχύει $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta,\ \alpha,\beta>0$

2. Αν οι α, β είναι ετερόσημοι τότε $\sqrt{\alpha^2\beta^2}=-\alpha\beta$;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

α) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ γ) $\dfrac{15}{3\sqrt{5}}$

δ) $\dfrac{21}{2\sqrt{7}}$ ε) $\dfrac{3}{\sqrt{27}}$ στ) $\dfrac{8}{\sqrt{64}}$

ζ) $\sqrt{5}^{-1}$ η) $\dfrac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^3\beta}}$ θ) $\dfrac{\alpha^4\beta}{\sqrt{\alpha^6\beta^5}}$

ι) $\dfrac{6}{\sqrt{72}-\sqrt{18}-\sqrt{2}}$

κ) $\dfrac{15}{2\sqrt{48}+\sqrt{27}-3\sqrt{12}}$

2. α) Να υπολογίσετε το γινόμενο

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$$

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ β) $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{8\sqrt{8}}$

γ) $\dfrac{9\sqrt{200}-12\sqrt{32}}{3\sqrt{2}}$ δ) $\dfrac{\sqrt{x}}{x}\cdot\dfrac{2\sqrt{3y^3}}{y}:\sqrt{\dfrac{12y}{x}}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}\cdot x=\sqrt{27}$ β) $\sqrt{3}+x=\sqrt{12}-x$

γ) $x\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{5}(1-x)$ δ) $\dfrac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{27}$

ε) $2x+\dfrac{2}{\sqrt{2}}=x+\sqrt{2}$ στ) $\dfrac{x-1}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{x+1}{\sqrt{5}+1}$

5. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left(\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+13\right):\sqrt{3}=6$

β) $\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right):\dfrac{32\sqrt{15}}{15}=1$

γ) $5x\sqrt{xy^3}-2y\sqrt{x^3y}-3\sqrt{x^3y^3},\ x,y>0$

6. α) Να αναλύσετε τον αριθμό 5.184 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

β) Να βρείτε τη $\sqrt{5.184}$

7. Να δείξετε ότι είναι αντίστροφοι οι αριθμοί

$$\sqrt{\sqrt{10}-3}\ \text{ και }\ \sqrt{\sqrt{10}+3}$$

8. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A=\frac{\alpha\sqrt{\alpha\beta^2}+\beta\sqrt{\alpha^2\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}},\ \alpha,\beta>0$$

β) Αν οι α και β είναι αντίστροφοι τότε να υπολογίσετε την τιμή του Α

4. Επεκτάσεις

1. Αν ο πραγματικός αριθμός α είναι η μικρότερη δεκαδική προσέγγιση δέκατου του άρρητου αριθμού $\sqrt{5}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A=3\cdot(3\alpha-4{,}6)-2\cdot(\alpha-0{,}2)$$

(Θαλής 2013)

2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$$

3. Να αποδείξετε ότι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού του $11+6\sqrt{2}$ είναι ο αριθμός $3+\sqrt{2}$.

1.1.Γ / 3 | Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού (ΙΙΙ) (Προβλήματα) | 8

1. Θεωρία

- Πυθαγόρειο θεώρημα. Αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος.

2. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές β και γ. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\beta^2$

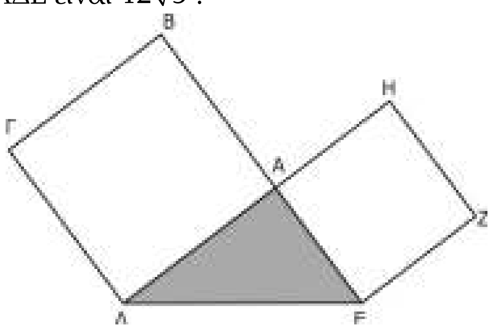
β) $\sqrt{\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\sqrt{\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}}$

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90°$, $AB=\sqrt{8}\,cm$ και $A\Gamma=2\sqrt{10}\,cm$. Να βρείτε:

α) την πλευρά ΑΓ

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

3. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 80 cm² και του ΑΕΖΗ είναι 45 cm² τότε να αποδείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΔΕ είναι $12\sqrt{5}$.



4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma=6cm$ και $AB=A\Gamma=5cm$. Να βρείτε:

α) το ύψος ΑΔ

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

5. Δίνεται ισοσκελές, ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν 24 cm². Εξωτερικά του τριγώνου σχηματίζουμε τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου. Να υπολογίσετε την διαγώνιο του τετραγώνου.

6. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε δύο τετράγωνα ΑΒΘΚ και ΒΓΕΗ με εμβαδά 12 cm² και 27 cm² αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) τις πλευρές ΑΒ και ΒΓ

β) το εμβαδόν και την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ

γ) τη διαγώνιο ΑΓ

7. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε και εξωτερικά του τετραγώνου κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΒΝΜΕ και ΓΕΛΚ με εμβαδά 18 cm² και 8 cm² αντίστοιχα. Να βρείτε:

α) τις πλευρές ΒΝ και ΓΚ

β) το εμβαδόν και την περίμετρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ

γ) το μήκος της διαγωνίου ΒΔ

8. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις $\sqrt{27}\,cm$ και $\sqrt{12}\,cm$ και ύψος $2\sqrt{3}\,cm$. Πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν του από το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\sqrt{5}\,cm$;

3. Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου

Το «πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου» είναι ένα από τα 3 άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας. Το ζητούμενο του προβλήματος είναι να κατασκευάσουμε, χρησιμοποιώντας μόνο γνώμονα και διαβήτη, ένα τετράγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν κύκλου με γνωστή ακτίνα.

Μόλις το 1882 μ.Χ. αποδείχτηκε ότι η κατασκευή αυτή, με γνώμονα και διαβήτη, είναι αδύνατη. Πράγματι αν είναι x η πλευρά του τετραγώνου και r η ακτίνα του κύκλου τότε

$$x^2=\pi r^2 \Rightarrow x=\sqrt{\pi r^2} \Rightarrow x=r\sqrt{\pi}$$

Όμως ο αριθμός π δεν μπορεί να κατασκευαστεί με γνώμονα και διαβήτη.

Επομένως και η πλευρά x δεν μπορεί να κατασκευαστεί.

1. Να βρείτε την πλευρά τετραγώνου που έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν κύκλου ακτίνας r = 10 cm.

1.2.Α / 1 | **Αλγεβρικές πράξεις – Μονώνυμα (Ι)** | **9**

1. Θεωρία

- Αριθμητική παράσταση, αλγεβρική παράσταση, ακέραια αλγεβρική παράσταση, αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης.
- Μονώνυμο, συντελεστής μονωνύμου, κύριο μέρος μονωνύμου, βαθμός μονωνύμου.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ένα μονώνυμο μπορεί να έχει συντελεστή 0;

2. Ο βαθμός ενός μονωνύμου μπορεί να είναι 0;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι ακέραιες.

α) $x^3y-2xy+3xy^2$ β) $\dfrac{x^3y-2xy+3xy^2}{xy}$

γ) $\dfrac{\alpha\beta^2x^3y}{z^2}$ δ) $x^2y^5-\dfrac{2}{5}xy^7-\sqrt{3}x^8y^2$

2. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι μονώνυμα:

α) $5^{-2}\alpha^3\beta^4$ β) $\dfrac{2x^2y}{\alpha^{-3}}$ γ) $\dfrac{x^{-2}y^4}{3\alpha^{-1}}$

δ) $3\sqrt{x}y^2$ ε) $\left(3-\sqrt{5}\right)\alpha^4\beta^0$ στ) $2x^3-5x^3$

ζ) $2x\left(x+1\right)$ η) $\dfrac{\alpha x^3}{2+\sqrt{3}}$ θ) $x-\dfrac{1}{x}$

3. Να βρείτε ποιες από τις επόμενες παραστάσεις είναι μονώνυμα:

α) $2x^2y$ β) $\dfrac{2\alpha\beta}{x^0}$ γ) $-\dfrac{1}{3}\alpha x^4$

δ) $\sqrt{5}x^3y^{-1}$ ε) 7 στ) x

4. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

$A=x^3y+2xy-3xy^2$ για $x=-1,\ y=-2$

$B=x^2y^3-5x^2y-3x^3y^2$ για $x=-2,\ y=1$

5. Τα μονώνυμα $6xy^2$ και $-3x^{\nu}y^3$ έχουν την ίδια αριθμητική τιμή για $x=2,\ y=-1$. Να βρείτε τον αριθμό ν.

6. Αν $x+y=-2$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$x\left(x-2\right)+y\left(y+1\right)-3xy$$

7. Να βρείτε τον συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό στα παρακάτω μονώνυμα

α) $x^2y\omega$ β) $\sqrt{3}x^4y^2$ γ) $\sqrt{3}x$

δ) $\left(\sqrt{3}xy^2\right)^3$ ε) $-\dfrac{2}{5}xy^7$ στ) $\dfrac{x^2y^4\omega}{\omega^{-3}}$

8. Σε κάθε ένα από τα παρακάτω μονώνυμα να βρείτε τον βαθμό του ως προς x ως προς y και ως προς x και y.

α) $3x^4y,\ 11x\omega^2,\ -8x^3y^4,\ 5x^3y^4\kappa$

β) $2x^3y^2,\ 11\alpha x^2\omega,\ -8x^2y^5,\ 5\alpha\beta x^2y^3$

9. Το μονώνυμο $\dfrac{1}{3}x^{2\kappa-3}y^{3\lambda-1}$ είναι 3ου βαθμού ως προς x και 4ου βαθμού ως προς y. Να βρείτε:

α) τα κ και λ

β) την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x=-1,\ y=-2$

10. Το μονώνυμο $-5x^{\nu}y^2$ για $x=-1,\ y=-2$ έχει αριθμητική τιμή -20. Να βρείτε:

α) το ν

β) τον βαθμό του μονώνυμου ως προς x και y

γ) την τιμή του μονωνύμου για $x=2,\ y=-3$

δ) το αντίθετο μονώνυμο

4. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε τις τιμές των φυσικών αριθμών κ, λ, μ ώστε η αλγεβρική παράσταση

$$A=5x^{3\kappa-2}\cdot y^{3\lambda-8}+3x^{10}\cdot y^4\cdot\omega^{\mu-3}$$

να είναι μονώνυμο.

2. Να βρείτε το βαθμό του μονώνυμου για τις διάφορες τιμές του λ.

α) $\left(\lambda-2\right)x^3$ β) $\lambda\left(\lambda-2\right)x^2$

γ) $\left(\lambda-2\right)x^{\lambda-2}$ δ) $\left(\lambda-2\right)x^{\lambda-3}$

1.2.Α / 2 **Αλγεβρικές πράξεις – Μονώνυμα (ΙΙ)** **10**

1. Θεωρία

- Όμοια μονώνυμα. Ίσα μονώνυμα, αντίθετα μονώνυμα, σταθερό μονώνυμο, μηδενικό μονώνυμο.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Κάθε σταθερό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού;

2. Δύο ίσα πολυώνυμε έχουν ίσα κύρια μέρη;

3. Το μονώνυμο x^2y δεν έχει συντελεστή;

4. Ποια είναι η περίμετρος ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά α;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να χωρίσετε τα παρακάτω μονώνυμα σε 4 ζεύγη όμοιων μονωνύμων

α) $3x^4y$, $11x\omega^2$, $-8x^3y^4$, $5x^3y^4\kappa$, $6\omega^2x$, $-5yx^4$, y^4x^3, $-\kappa y^4x^3$

β) $2x^3y^2$, $11\alpha x^2\omega$, $-8x^2y^5$, $5\alpha\beta x^2y^3$, $-5x^3y^2$, $\frac{5}{4}\alpha x^2\omega$, $2x^2y^5$, $-3\alpha\beta x^2y^3$

2. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια:

$$-2x^2,\ \frac{1}{3}xy^2,\ yx^2,\ -x^2y,\ -\frac{3}{4}x^2,\ 4x^2y^2,\ -\frac{x^2}{5}$$

3. Να βρείτε τα λ και μ ώστε τα παρακάτω μονώνυμα να είναι όμοια.

α) $2x^{3-\lambda}y^{2+\mu}$, $11\alpha x^2\omega$ β) $-8x^{2+\lambda^2}y^5$, $5x^2y^{3-\mu}$

4. Να βρείτε τα α, κ, λ αν τα μονώνυμα

$$[3(\alpha+1)-2]x^{\kappa+2}\cdot y^{\lambda-1} \text{ και } (\alpha-1)x^{1-\kappa}\cdot y^{2-3\lambda}$$

α) είναι ίσα

β) είναι αντίθετα

5. Να βρείτε τα κ, λ και μ ώστε το μονώνυμο

$$(\kappa+\lambda+\mu)x^{\kappa-3}\cdot y^{\lambda}$$

να είναι σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο.

4 Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος τριπλάσιο από το πλάτος του x. Το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του είναι:

α) $3x$ β) $3x^2$ γ) x^2 δ) $4x$

2. Η Μαρία έχει x ευρώ, ενώ η Ελένη έχει 2 ευρώ λιγότερα από το τριπλάσιο ποσό της Μαρίας. Η αλγεβρική παράσταση που εκφράζει το χρηματικό ποσό της Ελένης είναι:

α) $x-2$ β) $3x+2$ γ) $3x$ δ) $3x-2$

3. Χρησιμοποιώντας τους τύπους του παραδείγματος 2 (σελ. 27 βιβλίο μαθητή) να υπολογίσετε το ιδανικό βάρος ενός άνδρα ηλικίας 25 ετών και ύψους 174 cm και μιας γυναίκας ηλικίας 24 ετών και ύψους 167 cm.

4. Η ζάχαρη κοστίζει x € το κιλό, ενώ 1 κιλό καφές είναι κατά 1,20 € ακριβότερος από 4 κιλά ζάχαρη.

α) Να γράψετε την αλγεβρική παράσταση η οποία εκφράζει το συνολικό κόστος 5 κιλών ζάχαρης και 1,5 κιλού καφέ

β) Αν το 1 κιλό ζάχαρη κοστίζει 0,70 €, να βρείτε ποιο είναι το συνολικό κόστος 5 κιλών ζάχαρης και 1,5 κιλού καφέ;

5. Ένας κήπος με σχήμα τετράγωνο πλευράς α ποτίζεται από τέσσερις μηχανισμούς που βρίσκονται στις τέσσερις κορυφές του και ποτίζουν ένα τεταρτοκύκλιο με πλευρά $\frac{\alpha}{2}$ ο καθένας. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που μένει απότιστο.

6. Έστω ένα ορθογώνιο με πλευρές α και 2α. Να γράψετε τις αλγεβρικές παραστάσεις που εκφράζει:

α) το εμβαδόν του ορθογωνίου

β) την περίμετρο του ορθογωνίου

γ) τη διαγώνιο του ορθογωνίου

1.2.Β / 1 | **Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα** | **11**

1. Θεωρία

- Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση μονωνύμων
- Παρατήρηση: Η διαίρεση δύο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Τι βαθμό έχει το άθροισμα δύο μονωνύμων σε σχέση με τους βαθμούς των δύο μονωνύμων;

2. Τι βαθμό έχει το γινόμενο δύο μονωνύμων σε σχέση με τους βαθμούς των δύο μονωνύμων;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $13\alpha+27\alpha$ β) $-14\mu^2+15\mu^2$

γ) $4\beta^2-8\beta+2\beta^2$ δ) $7x-5x+14x$

ε) $19R^2+R^2-3R^2+7R^2$ στ) $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}y-y$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2(-x)(-y)7(-\omega)$ β) $-x^2y\cdot\frac{1}{3}x^4y^3$

γ) $x\cdot x^2\cdot x^3\left(-\frac{1}{3}\alpha xy\right)(9yx^2)$

δ) $(\alpha^2\beta\gamma)^{-1}\cdot(\alpha\beta^3)^2\cdot(-4\alpha^2\gamma)^3$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $30xy\omega:(-15x^2)$ β) $-\beta^2:(\alpha\beta)$

γ) $75xy\alpha^2:(-5\alpha y)$ δ) $(-16\alpha\beta^3x):(32\alpha^2\beta)$

ε) $\left[\left(-\frac{1}{3}\kappa^2\lambda^3\mu\right)^2:\left(\frac{5}{3}\kappa\lambda^4\right)^3\right]:\left(-\frac{3}{4}\mu^2\lambda\right)^2$

4. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ ώστε να ισχύουν οι ισότητες:

α) $(-15x^{3\kappa-1}y^{\lambda}):(-3x^{\kappa}y^2)=5x^3y$

β) $(4\alpha^{2\kappa-1}\beta^{3\lambda}):(12\alpha^{\kappa+2}\beta^{\lambda+1})=\frac{2}{3}\alpha\beta^3$

5. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν σωστές ισότητες:

α) $15x^3:(......)=3x$ β) $21x^3y^2\alpha:(......)=3xy^2$

γ) $3x^2yz\cdot(......)=-12x^4y^3z^7$

δ) $\frac{2}{5}xy\cdot(......)=4x^2y^5$

4. Επεκτάσεις

1. Δίνονται τα μονώνυμα $A=5x^{\lambda+1}\cdot y^{4\kappa-2}$ και $B=-2x^{-\lambda+5}\cdot y^{\kappa+7}$. Να βρείτε το μονώνυμο

$$\Gamma=2A+B$$

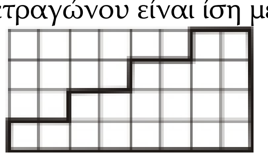
2. Να βρείτε το γινόμενο των μονωνύμων

$$A=\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}\right)xy^3 \text{ και } B=\left(\sqrt{\frac{75}{36}}-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)x^2y$$

5. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες 3x και 4x αντιστοίχως. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου που έχει εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο αρχικών κύκλων.

2. Να βρείτε ένα μονώνυμο που να εκφράζει την περίμετρο του διπλανού σχήματος. Η πλευρά του κάθε μικρού τετραγώνου είναι ίση με α.



3. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB=2x$, $B\Gamma=x$. Εξωτερικά του ορθογωνίου σχεδιάζουμε ημικύκλια με διάμετρο ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του συνολικού σχήματος

β) Ποιο είναι το συνολικό εμβαδόν για $x=3\sqrt{3}$;

4. Δύο ομόκεντροι κύκλοι έχουν ακτίνες x και 2x αντίστοιχα. Ποιο είναι το εμβαδόν του δακτυλίου που περικλείεται ανάμεσα στους δύο κύκλους;

1.3 / 1 | Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων (Ι) | 12

1. Θεωρία

- Ορισμός, όρος πολυωνύμου, διώνυμο, τριώνυμο, βαθμός πολυωνύμου, μηδενικό πολυώνυμο, ίσα πολυώνυμα, διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x, αριθμητική τιμή πολυωνύμου

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ο βαθμός ενός σταθερού πολυωνύμου είναι πάντα μηδέν;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Οι παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x; Για όσες είναι να βρείτε το βαθμό τους.

α) $\frac{1}{2}x^3+\sqrt{2}x-1$ **β)** $4x^{-3}+2x^2-\pi$

γ) $-\frac{3}{x^2}+3\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+5$ **δ)** $5x^3-4\left(x^{-2}\right)^{-1}+3$

ε) $4^{-3}x^5-\frac{1}{2}x+0$ **στ)** $0x^3+0x^2-\pi x+1$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο αν αφαιρεθεί από το $7x^2+3x-2$ θα προκύψει το πολυώνυμο $3x^2+3x+7$.

3. Να βρείτε το βαθμό των παρακάτω πολυωνύμων για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) $P(x)=(\lambda^2-4)x^2+(\lambda-2)x-(\lambda+2)$

β) $P(x)=\lambda\cdot(4\lambda^2-1)x^3+(4\lambda^2-1)x^2-$
$-(2\lambda+1)x-2\lambda+1$

γ) $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3+(\lambda^2-4)x^2+$
$+(\lambda^2-2\lambda)x+\lambda-2$

4. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο

$$P(x)=(9\lambda^3-\lambda)x^2+(3\lambda^2+2\lambda-1)x+3\lambda+1$$

να είναι μηδενικού βαθμού.

5. Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, κ, λ, $\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα P και Q είναι ίσα:

α) $P(x)=(\alpha^2-5\alpha)x^3+9x-\alpha^4$ και
$Q(x)=-6x^3+\mu^2x-81$

β) $P(x)=\lambda x^2-(\lambda-\kappa)x+\mu-2\lambda$ και
$Q(x)=(\mu-\lambda)x^2+4x+\kappa+\lambda$

6. Δίνονται τα παρακάτω πολυώνυμα:

$P(x)=1-2x^2-x+3x^3$

$Q(x)=4x^2-1+3x-x^3+2x^4$

α) Να γράψετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x

β) Να υπολογίσετε τα
$P(-2),\ P(-1),\ P(0), P(1), P(2)$
και $Q(-2),\ Q(-1),\ Q(0), Q(1), Q(2)$

4. Επεκτάσεις

1. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(\lambda-2)x^3+(\mu+2)x^2+3\lambda-\mu+2\gamma$$

Να βρείτε τα λ, μ, $\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε:

α) Ο βαθμός του $P(x)$ να είναι 0

β) Το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο

γ) $P(x)=4x^3+10$

2. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ το πολυώνυμο

$$P(x)=(\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda)x^3+(\lambda^2-2\lambda)x-\lambda^4+16$$

α) είναι μηδενικό πολυώνυμο

β) είναι σταθερό αλλά μη μηδενικό πολυώνυμο

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^2+1$.

α) Να βρείτε το $Q(x)=P(x^2)-P(2x)$

β) Να αποδείξετε ότι $Q(\sqrt{2})+P(2)+P(0)=0$

4. Έστω τα πολυώνυμα $A(x)=\alpha x^2-4x+\beta$, $B(x)=2x^2+\gamma x+4$ με $A(x)+B(x)=-3x^2+x+1$.

α) Να βρείτε τα α, β, γ

β) Να βρείτε το $P(x)=A(-x)-A(2x)$ και να αποδείξετε ότι ο παρακάτω αριθμός είναι ρητός

$$\kappa=\sqrt{P(0)+\sqrt{P(-1)+P(-2)}\cdot\sqrt{P(1)}}$$

1.3 / 2 **Πολυώνυμα – Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων (ΙΙ)** **13**

1. Θεωρία

- Αναγωγή ομοίων όρων. Πράξεις πολυωνύμων: Πρόσθεση, αφαίρεση

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Τι βαθμού μπορεί να είναι το άθροισμα δύο πολυωνύμων P και Q με βαθμούς μ, ν αντίστοιχα;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων στα παρακάτω πολυώνυμα:

α) $P(x)=x^3-3x+1-(2x^4-3x^3+5x)$

β) $Q(x)=-2(-3x^3+2x-5)+3(2x^2+x-3)$

γ) $R(x)=4(2x^3-5x^2-3x)-2(2x^3-5x-3)$

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=3x^3+\alpha x^2-2x+4+\beta x^3-2x^2+7x-1$$

α) Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων

β) Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β το πολυώνυμο $P(x)$ είναι πρώτου βαθμού

3. Να βρείτε το άθροισμα και τη διαφορά των παρακάτω πολυωνύμων:

α) $P(x)=x^3-3x+1$ και $Q(x)=x-1$

β) $P(x)=x^3-4x^2+3x+1$ και $Q(x)=x^2+x-1$

4. Αν είναι $P(x)=x^3-4x^2+2x-1$ και

$$Q(x)=2x^2+4x-3$$

τότε να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $P(x)+2Q(x)$

β) $3P(x)-4Q(x)$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(5\alpha^3-2\beta^2+1)-(2\alpha^2-3\beta^2+3)-(-2\alpha^2+4)$

β) $3x^2-\left[5x^3-x+4x^2-(2x^2+6)\right]+(-2x^2-5x)$

γ) $\alpha^2-2\alpha\beta-\left\{2\alpha^2-\left[3\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)-3\alpha^2\right]-\alpha\beta\right\}$

δ) $x^3-2x^2y-(x^3+4xy^2-y^3)-(-x^3-3x^2y+2y^3)$

6. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$A(x)=x^3-4x^2+3x-1$, $B(x)=2x^3-5x^2-2x+3$

$\Gamma(x)=4x^3+x^2-x-2$

Να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $A(x)+B(x)$ β) $A(x)+B(x)+\Gamma(x)$

γ) $\Gamma(x)-A(x)-B(x)$ δ) $A(x)-B(x)+\Gamma(x)$

7. Αν $P(x)=4x^2-3x$ και $Q(x)=36x^2+9x$ να αποδείξετε ότι: $P(3x)-Q(-x)=0$.

8. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $(5x^3-2x^2+1)-(2x^2+\ldots-\ldots)=(\ldots+\ldots+3x-5)$

β) $(x^2-3x+\ldots)-(\ldots+x+1)=5x^2+\ldots-4$

γ) $(4x^4-3x+1)-(x^2+x+1)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. Επεκτάσεις

1. Έστω τα πολυώνυμα $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ για τα οποία ισχύει $P_1^{2000}(x)+P_2^{2004}(x)=P_3^{2005}(x)$

Να αποδείξετε ότι το $P_3(x)$ είναι άρτιου βαθμού.

2. Έστω $P(x)=\alpha x^{2019}-x^{2018}+\beta x$.

α) Να βρείτε το $Q(x)=P(x)-P(-x)$

β) Αν $Q(x)=14x$ τότε να βρείτε τα α και β

5. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Να δείξετε ότι αν από το εμβαδό $3x^2+5x+21$ ενός ορθογωνίου αφαιρέσουμε τα εμβαδά x^2+x+4, $2x^2+4x+1$ δύο άλλων ορθογωνίων θα βρούμε το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 4.

2. Αν ο μικρότερος από τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς είναι περιττός τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών αριθμών διαιρείται με το 6.

1.4 / 1 | Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων (Ι) | 14

1. Θεωρία

- Πολλαπλασιασμός μονώνυμου με πολυώνυμο. Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων. Ανάπτυγμα γινομένου.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών τους;

2. Αν το $P(x)\cdot Q(x)$ είναι 5ου βαθμού και το $P(x)$ είναι 4ου βαθμού τότε τι βαθμού είναι το $Q(x)$;

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

Τα πολυώνυμα $P(x)=(x-2)(x-3)$ και $Q(x)=\alpha x^2+\beta x+6$ είναι ίσα, όταν

α) $\alpha=1$ και $\beta=5$

β) $\alpha=2$ και $\beta=3$

γ) $\alpha=1$ και $\beta=-5$

δ) $\alpha=-5$ και $\beta=1$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $3x\cdot(x^3-x^2+x-2)$

β) $-3x^3\cdot(x^2+x+1)$

γ) $\frac{1}{3}x^2\cdot(x^7+3x^5-x^4+2x^3-x)$

δ) $2x^5\cdot(x^7-2x^5+3x^3-x)$

ε) $\frac{2}{3}x^4\cdot(x^5+12x^4-5x^3-x+1)$

2. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $(x-3)(x+3)$

β) $(x^2+x-2)\cdot(x^2-2x+1)$

γ) $(x^2+x-2)\cdot(x^2+x+2)$

δ) $(2x^3+2y^3+xy^2)\cdot(2x^2-xy+y^2)$

ε) $\left(\frac{2}{3}xy-x^2+\frac{y^2}{2}\right)\cdot\left(y^2-3xy-\frac{x^2}{2}\right)$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x-2)(3-x)(2x-5)$

β) $x(x+1)(x-2)(3-x)$

γ) $(x+3)(2-x)(x^2+x+1)$

δ) $(3x+2)(1-2x)(2x^2-3x+1)$

4. Αν $P(x)=3x(-2x+4)(x-1)$ και $Q(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

5. Έστω τα πολυώνυμα $P(x)=2x^3-x+1$ και $Q(x)=x-3$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $-P(x)\cdot 2Q(x)$

β) $-3P(x)\cdot[4Q(x)-2x+3]$

γ) $[2-P(x)]\cdot[1-3Q(x)]$

4. Επεκτάσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=\alpha x+3,\ Q(x)=-2\alpha x+1$$

για τα οποία ισχύει $Q(-5)=3P(2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$

β) Να βρείτε το πολυώνυμο

$$A(x)=[P(x+1)\cdot Q(x-2)]\cdot Q(-x)$$

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=\sqrt{\sqrt{A(2)}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{A(0)}}$$

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=(2x^2-4x+1)^{2019}\cdot(2x-1)^{2020}$$

Να βρείτε

α) τα $P(0)$, $P(1)$

β) τον σταθερό όρο του πολυωνύμου

γ) το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου P

1.4 / 2 **Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων (ΙΙ)** **15**

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α) $2x\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)=2x^3-4x^2+6x$

β) $\frac{1}{3}x^2\cdot(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)=\frac{4}{3}x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2$

γ) $(2x+\ldots..)\cdot(\ldots..-3)=6x^2-\ldots.+12x-\ldots..$

δ) $(\ldots..-2)\cdot(6x+\ldots..)=12x^2-\ldots.-2$

ε) $(x+y)\cdot(x+\ldots..)=\ldots..+\ldots.+2y^2$

στ) $\left(\frac{2}{3}x+\ldots.\right)\cdot(\ldots.+14)=14x^2y+\ldots.+9y^3x+\ldots.$

2. Έστω τα πολυώνυμα

$P(x)=x^2+2x+3$ και $Q(x)=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο

$$\varphi(x)=\alpha x^3+5x^2+8x+\alpha+\beta$$

να είναι ίσο με το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$.

3. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^2+x-2$. Να βρείτε με ποιο πολυώνυμο πρέπει να πολλαπλασιαστεί το $x-1$, ώστε να προκύψει το $P(x)$.

4. Να βρείτε πολυώνυμο του οποίου το τετράγωνο να είναι ίσο με $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$.

5. Για τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$ γνωρίζουμε ότι

$$P(x)\cdot Q(x)=f(x)$$

και ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι 2.

α) Αν ο βαθμός του $f(x)$ είναι ίσος με 5, να βρείτε το βαθμό του $Q(x)$

β) Αν ο βαθμός του $f(x)$ είναι ίσος με 2 και $Q(1)=5$, να βρείτε το $Q(-1)$

2. Επεκτάσεις

1. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει

$$(x^2-1)P(x)=3x^3+2x^2-3x-2$$

α) να βρείτε το βαθμό του $P(x)$

β) να βρείτε το $P(x)$

2. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει

$$(3x+2)P(x)=3x^3+5x^2-16x-12$$

α) να βρείτε το $P(x)$

β) να λύσετε την εξίσωση

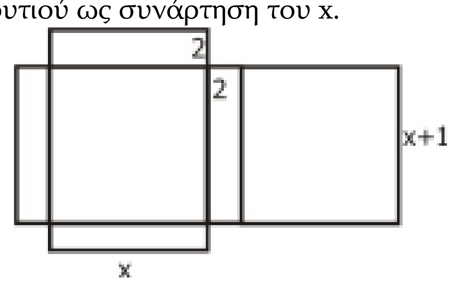
$$3x^3+5x^2-16x-12=0$$

3. Να προσδιορίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=9x^3-3x^2+9x-27$ να γράφεται

$$Q(x)=\alpha(x^3+x)-3x^2+(x-3)(x^2+3x+9)$$

3. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Ένας βιοτέχνης για να κατασκευάσει ορθογώνια κουτιά χρησιμοποιεί το διπλανό σχέδιο. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος του κουτιού ως συνάρτηση του x.



2. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις x, 2x και ύψος $\frac{x}{2}$.

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά x. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών του τραπεζίου προς το τετράγωνο.

3. Να υπολογίσετε το γινόμενο $(x+2)(x+3)$ και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά;

4. Για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος την εβδομάδα, μία εταιρία έχει κόστος

$$K(x)=500x+50.000 \text{ ευρώ}$$

Τις x μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει η εταιρία στην τιμή $T(x)=2.000-2x$ ευρώ ανά μονάδα.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο που δίνει το κέρδος από την πώληση x μονάδων από το προϊόν την εβδομάδα

β) Να βρείτε το κόστος όταν δεν παράγει προϊόν

γ) Να βρείτε το κέρδος αν πουλήσει 100 μονάδες την εβδομάδα

1.5 / 1 Αξιοσημείωτες ταυτότητες Ι (Τετράγωνο αθροίσματος) 16

1. Θεωρία

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$
- Ισχύει $(-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Για οποιουσδήποτε αριθμούς x, y να αντιστοιχίσετε σε κάθε έκφραση της στήλης Α τη συμβολική γραφή της από τη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Το διπλάσιο γινόμενό τους	**1.** $2(x+y)^2$
β. Το τετράγωνο του αθροίσματός τους	**2.** $2xy$
γ. Το άθροισμα των τετραγώνων τους	**3.** $(x+y)^2$
δ. Το τετράγωνο του γινομένου τους	**4.** x^2+y^2
ε. Το διπλάσιο του αθροίσματός τους	**5.** $(xy)^2$
στ. Το διπλάσιο του τετραγώνου του αθροίσματός τους	**6.** $2(x+y)$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

Α. α) $(\alpha+2)^2$ β) $(\beta+1)^2$

γ) $(x+\alpha)^2$ δ) $(3+\beta)^2$

Β. α) $(\alpha+2\beta)^2$ β) $(3\beta+1)^2$

γ) $(x+2\alpha)^2$ δ) $(3\alpha+2\beta)^2$

Γ. α) $(3+2\alpha^2\beta)^2$ β) $(1+2\alpha^3\beta^5)^2$

γ) $(\sqrt{2}x^3+\sqrt{3}y)^2$ δ) $\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)^2$

2. Να υπολογίσετε για $x\neq 0$ τα αναπτύγματα:

α) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ β) $\left(\alpha x+\frac{1}{\alpha x}\right)^2$

3. Α. Να αποδείξετε ότι $(-\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2$

Β. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(-\alpha-2)^2$ β) $(-3\beta-1)^2$

γ) $(-3-2\alpha^2\beta)^2$ δ) $(-\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

4. Επεκτάσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(\alpha+3)^2+2(\alpha+3)(\beta+4)+(\beta+4)^2$

β) $9(\alpha+3)^2+6(\alpha+3)(\beta+4)+(\beta+4)^2$

γ) $16(\alpha+3)^2+24(\alpha+3)(\beta+4)+9(\beta+4)^2$

δ) $\frac{1}{16}(\alpha+3)^2+2(\alpha+3)(\beta+4)+16(\beta+4)^2$

5. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. • Σκεφτείτε ένα διψήφιο αριθμό και βρείτε το τετράγωνό του.

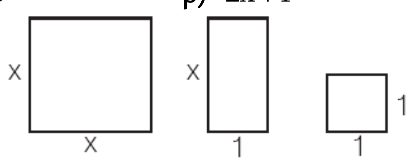
• Βρείτε στη συνέχεια το τετράγωνο του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού που σκεφτήκατε και αφαιρέστε τα δυο αποτελέσματα.

• Ο αριθμός που βρήκατε διαιρείται ακριβώς με το 9.

Μπορείτε να το εξηγήσετε;

2. Πόσα από το κάθε είδος των παρακάτω σχημάτων πρέπει να χρησιμοποιήσετε για να σχηματίσετε ένα τετράγωνο με πλευρά

α) $x+3$ β) $2x+1$



1.5 / 2 | Αξιοσημείωτες ταυτότητες ΙΙ (Τετράγωνο διαφοράς) | 17

1. Θεωρία

- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$
- Ισχύει $(-\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$ και $(\beta-\alpha)^2=(\alpha-\beta)^2$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

Α. α) $(\alpha-2)^2$ β) $(\beta-1)^2$
γ) $(x-\alpha)^2$ δ) $(3-\beta)^2$

Β. α) $(\alpha-2\beta)^2$ β) $(3\beta-1)^2$
γ) $(x-2\alpha)^2$ δ) $(3\alpha-2\beta)^2$

Γ. α) $(3-2\alpha^2\beta)^2$ β) $(1-2\alpha^3\beta^5)^2$
γ) $(\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}y)^2$ δ) $\left(\frac{3}{2}\alpha-\frac{2}{3}\beta\right)^2$

2. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ β) $\left(\alpha x-\frac{1}{\alpha x}\right)^2$

3. Αν $\alpha+\beta+\gamma=2\rho$ τότε να αποδείξετε ότι

$$(\rho-\alpha)^2+(\rho-\beta)^2+(\rho-\gamma)^2+\rho^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

4. Α. Να αποδείξετε ότι $(\beta-\alpha)^2=(\alpha-\beta)^2$

Β. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha-2)^2$ β) $(2-\alpha)^2$
γ) $(-x+2y)^2$ δ) $(-1+2\alpha^2\beta)^2$

5. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2$ β) $(2-\sqrt{2})^2$
γ) $(-3\sqrt{2}+2\sqrt{3})^2$ δ) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)^2$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(x+5)^2+1-(x-3)^2-x^2$
β) $(2\alpha+\beta)^2+\beta^2-(\alpha-3\beta)^2-9\alpha^2$
γ) $(\alpha^3+2\beta^2)^2+\alpha^6-(\beta^2-2\alpha^3)^2-4\beta^4$
δ) $-3x(1-2x)^2-(x-3)^2-x^2+16$

7. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x^2+.......)^2=.......+.......+4$
β) $(x^2-.......)^2=.......-4x^2y^2+.......$
γ) $(.......-x^3)^2=.......-8x^3y+.......$
δ) $(.......-.......)^2=9x^2-.......+4y^2$

8. Αν $x=\alpha^2-\beta^2$, $y=2\alpha\beta$ και $z=\alpha^2+\beta^2$ τότε να αποδείξετε ότι $x^2+y^2=z^2$.

3. Επεκτάσεις

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(\alpha-1)^2-2(\alpha-1)(\beta-2)+(\beta-2)^2$
β) $4(\alpha-1)^2-4(\alpha-1)(\beta-2)+(\beta-2)^2$
γ) $4(\alpha-1)^2-12(\alpha-1)(\beta-2)+9(\beta-2)^2$
δ) $\frac{1}{4}(\alpha-1)^2-2(\alpha-1)(\beta-2)+4(\beta-2)^2$
ε) $9(2x-1)^2+16(1-x)^2-24(2x-1)(1-x)$
στ) $4(2x-4)^2+9(1-x)^2-24(x-2)(x-1)$

2. Αν $\alpha^2-10\alpha+25=0$ τότε πόσο είναι το α;

3. Αν είναι $\alpha=\frac{1+x^2}{2x}$ και $\beta=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ δείξτε ότι

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1$$

4. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα

α) $(x^{-1}-y^{-1})^2$ β) $(3x^{-1}-2y^{-1})^2$

5. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) 19^2 β) 21^2
γ) 29^2 δ) 31^2

1.5 / 3 **Αξιοσημείωτες ταυτότητες ΙΙΙ (Διαφορά τετραγώνων)**

1. Θεωρία

- $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

Α. α) $(\alpha-2)(\alpha+2)$ β) $(\beta+1)(\beta-1)$

γ) $(1-\alpha)(1+\alpha)$ δ) $(3-\alpha)(3+\alpha)$

Β. α) $(3\alpha-2)(3\alpha+2)$ β) $(3-2\beta)(3+2\beta)$

γ) $(3\alpha-2\beta)(3\alpha+2\beta)$ δ) $\left(\frac{1}{3}-2\beta\right)\left(\frac{1}{3}+2\beta\right)$

Γ. α) $(-1-\alpha)(-1+\alpha)$

β) $(-x-1)(-x+1)$

γ) $(-\alpha-2\beta)(-\alpha+2\beta)$

δ) $(-3\alpha+\beta)(-3\alpha-\beta)$

Δ. α) $(\alpha^2+1)(\alpha^2-1)$

β) $(2x^2-3)(2x^2+3)$

γ) $(x^2-3y)(x^2+3y)$

δ) $(3\alpha x^2-4\beta y)(3\alpha x^2+4\beta y)$

Ε. α) $\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\left(\frac{2}{3}\alpha-\frac{1}{2}\beta\right)$

β) $\left(\frac{3}{5}x^2-\frac{4}{3}y^3\right)\left(\frac{3}{5}x^2+\frac{4}{3}y^3\right)$

γ) $(x^2-3y)(x^2+3y)$

δ) $(3\alpha x^2-4\beta y)(3\alpha x^2+4\beta y)$

2. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-1)$

β) $(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta-1)$

γ) $(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta+1)$

δ) $(\alpha+\beta+1)(-\alpha+\beta+1)$

3. Να υπολογίσετε από μνήμης τις παραστάσεις

α) $15^2-5^2=$ .... β) $105^2-95^2=$ ....

γ) $102^2-98^2=$ .... δ) $12^2-8^2=$ ....

ε) $1005^2-995^2=$ ....

3. Επεκτάσεις

1. α) Να αποδείξετε ότι

$5^2-4^2 = 5+4$

$12^2-11^2 = 12+11$

$65^2-64^2 = 65+64$

$134^2-133^2 = 134+133$

β) Με βάση τις προηγούμενες ισότητες να συμπληρώσετε τη φράση:

«Η διαφορά των τετραγώνων δύο .... φυσικών αριθμών ισούται με το .... των αριθμών αυτών.»

γ) Να συμπληρώσετε την ισότητα

4568^2 – ...... = ... + ...

2. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2-\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2=\nu \text{ για } \nu\geq 2$$

β) Να αποδείξετε ότι κάθε περιττός αριθμός γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο αριθμών

3. Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων να υπολογίσετε τις δυνάμεις:

α) $19\cdot 21$ β) $18\cdot 22$

γ) $28\cdot 22$ δ) $56\cdot 44$

4. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Ο τηλεφωνικός κατάλογος μιας πόλης περιέχει 9.991 ονόματα γραμμένα σε λιγότερες από 100 σελίδες και κάθε σελίδα περιέχει τον ίδιο αριθμό ονομάτων. Ο Γιώργος δεν μπόρεσε να προσδιορίσει πόσες ακριβώς σελίδες περιέχει ο κατάλογος. Ο Δημήτρης όμως παρατήρησε ότι ο αριθμός 9.991 = 10.000 – 9 και με απλούς συλλογισμούς προσδιόρισε ακριβώς τον αριθμό των σελίδων του καταλόγου. Μπορείτε να βρείτε τους συλλογισμούς που έκανε ο Δημήτρης;

1.5 / 4 Αξιοσημείωτες ταυτότητες IV (Κύβος αθροίσματος και διαφοράς) 19

1. Θεωρία

- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- $(-\alpha+\beta)^3=(\beta-\alpha)^3$
- $(-\alpha-\beta)^3=-(\alpha+\beta)^3$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

Α. α) $(\alpha+2)^3$ β) $(\beta+1)^3$
γ) $(x+\alpha)^3$ δ) $(3+\beta)^3$

Β. α) $(\alpha+2\beta)^3$ β) $(3\beta+1)^3$
γ) $(x+2\alpha)^3$ δ) $(3\alpha+2\beta)^3$

Γ. α) $(3+2\alpha^2\beta)^3$ β) $(1+2\alpha^3\beta^5)^3$
γ) $(\sqrt{2}x^3+\sqrt{3}y)^3$ δ) $\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)^3$

2. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

Α. α) $(\alpha-2)^3$ β) $(\beta-1)^3$
γ) $(x-\alpha)^3$ δ) $(3-\beta)^3$

Β. α) $(\alpha-2\beta)^3$ β) $(3\beta-1)^3$
γ) $(x-2\alpha)^3$ δ) $(3\alpha-2\beta)^3$

Γ. α) $(3-2\alpha^2\beta)^3$ β) $(1-2\alpha^3\beta^5)^3$
γ) $(\sqrt{2}x^3-\sqrt{3}y)^3$ δ) $\left(\frac{3}{2}\alpha-\frac{2}{3}\beta\right)^3$

3. Α. Να αποδείξετε ότι

$$(-\alpha+\beta)^3=(\beta-\alpha)^3$$

Β. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(-3x+2)^3$ β) $(-x^2+3)^3$
γ) $(-x+4y)^3$ δ) $(-x+1)^3$

4. Α. Να αποδείξετε ότι

$$(-\alpha-\beta)^3=-(\alpha+\beta)^3$$

Β. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(-3-\alpha)^3$ β) $(-x^2-2y)^3$
γ) $(-x^3-2)^3$ δ) $(-3x-2y^2)^3$

5. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+\beta)^3+(\alpha-\beta)^3+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2+$
$+3(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2$

β) $(\alpha^2-1)^3-2(2\alpha^2+1)^2-3(\alpha^2+3)^2$

6. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(3x-5)^3+(x-2)(x+2)(3x+1)-2x(3x-5)^2$

β) $(2x-1)^3-2(x-1)^2(x+1)^2+(1-x)^3$

γ) $(x+1)^3-6x^2-(x-1)^2$

7. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha+2)^3-6(\alpha+1)^2=\alpha^3+2$

β) $(x+2)^3-4(x+1)^3+6x^3=4(x-1)^3-(x-2)^3$

γ) $(\alpha-3)^3+9(\alpha-2)^2+9(\alpha-1)=\alpha^3$

8. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $(\sqrt{2}+1)^3+(\sqrt{8}-1)^2$

β) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3-(7+\sqrt{2})+(\sqrt{8}-2)^2$

3. Επεκτάσεις

1. Να αποδείξετε τις **Ταυτότητες του Euler**:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\cdot(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\gamma)$

β) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma)$
$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2\right]$

2. Να δείξετε την ταυτότητα:

α) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

β) $(x-1)^3+(5-2x)^3+(x-4)^3=$
$=3(x-1)\cdot(5-2x)\cdot(x-4)$

1.5 / 5 | Αξιοσημείωτες ταυτότητες V (Άθροισμα και διαφορά κύβων) | 20

1. Θεωρία

- $(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3$
- $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$

β) $(\alpha+2\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2)$

γ) $(3\alpha^2+2\beta)(9\alpha^4-6\alpha^2\beta+4\beta^2)$

2. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(3-\alpha)(9+3\alpha+\alpha^2)$

β) $(2\alpha-\beta)(4\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

γ) $(5\alpha-2\beta^2)(25\alpha^2+10\alpha\beta^2+4\beta^4)$

3. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(\alpha-3)(\dots\dots\ \dots\ \dots\dots\ \dots\ \dots\dots)=\dots\dots\ \dots\ \dots\dots$

β) $(2-\beta)(\dots\dots\ \dots\ \dots\dots\ \dots\ \dots\dots)=\dots\dots\ \dots\ \dots\dots$

γ) $(\alpha^2+\beta)(\dots\dots\ \dots\ \dots\dots\ \dots\ \dots\dots)=\dots\dots\ \dots\ \dots\dots$

δ) $(3+2\beta)(\dots\dots\ \dots\ \dots\dots\ \dots\ \dots\dots)=\dots\dots\ \dots\ \dots\dots$

ε) $(\dots\dots\ \dots\ \dots\dots)(x^2-4x+\dots\dots)=\dots\dots\ \dots\ \dots\dots$

στ) $(\dots\dots\ \dots\ \dots\dots)(\dots\dots+3\beta^2+\beta^4)=\dots\dots\ \dots\ \dots\dots$

4. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha+1)^3+(\alpha-1)^3-(2\alpha)^3=6\alpha(1-\alpha)(1-\beta)$

β) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4)=$
$=(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)$

γ) $\alpha^2(\alpha-1)-(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=$
$=\beta^2(\beta-1)-(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

δ) $\left(\dfrac{\alpha-3}{3}\right)^3+\left(\dfrac{\alpha+3}{3}\right)^3=\dfrac{2\alpha(\alpha^2+27)}{27}$

ε) $\left(\dfrac{\alpha-3}{2}\right)^3-\left(\dfrac{\alpha+3}{2}\right)^3=-\dfrac{9(\alpha^2+3)}{4}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $(2\alpha-3)^3-(2\alpha+3)^3$

β) $(2x+1)^3+(2x-1)^3-(3x+2)^3+(3x-2)^3$

γ) $\left(\dfrac{\alpha-3}{3}\right)^3-\left(\dfrac{\alpha+3}{3}\right)^3$

δ) $\left(\dfrac{2\alpha-3}{2}\right)^3-\left(\dfrac{3\alpha-2}{2}\right)^3$

3. Επεκτάσεις

Ταυτότητες αθροίσματος και διαφοράς νιοστών δυνάμεων

- Αν ν περιττός ($\nu=2\kappa+1$)
  - $\nearrow$ $\alpha^\nu+\beta^\nu=(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\dots-\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
  - $\searrow$ $\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
- Αν ν άρτιος ($\nu=2\kappa$) τότε $\alpha^\nu-\beta^\nu=$
  - $\nearrow$ $(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1})$
  - $\searrow$ $(\alpha+\beta)(\alpha^{\nu-1}-\alpha^{\nu-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{\nu-2}-\beta^{\nu-1})$

Προτιμότερο: $\alpha^\nu-\beta^\nu=\alpha^{2\kappa}-\beta^{2\kappa}=(\alpha^\kappa-\beta^\kappa)(\alpha^\kappa+\beta^\kappa)=\dots\dots$

Π.χ.: $\alpha^4-\beta^4=(\alpha-\beta)(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)$

αλλά προτιμότερο είναι $\alpha^4-\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες:

α) $\alpha^5+\beta^5=$ β) $\alpha^5-\beta^5=$ γ) $\alpha^6-\beta^6=$ δ) $\alpha^{10}-\beta^{10}=$

1.5 / 6 Αξιοσημείωτες ταυτότητες VI (Επώνυμες ταυτότητες) 21

1. Θεωρία

- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
- $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Πότε ισχύει η ισότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$;

2. Πότε ισχύει η ισότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$;

3. Αν οι α και β είναι ομόσημοι τότε ισχύει;

α) $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$ β) $(\alpha+\beta)^2>(\alpha-\beta)^2$

γ) $(\alpha+\beta)^2<(\alpha-\beta)^2$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

β) $(\alpha+\beta)^4+\alpha^4+\beta^4=2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$

γ) $(\alpha+2)^2+6\alpha^2+(\alpha-2)^2=4(\alpha+1)^2+4(\alpha-1)^2$

δ) $(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\alpha^4+\beta^4=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$

ε) $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2=4$

2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$

β) $(1+\alpha\sqrt{2}+\alpha^2)(1-\alpha\sqrt{2}+\alpha^2)=1+\alpha^4$

γ) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\alpha+\gamma)^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=$
$=(\alpha-\beta+\gamma)^2$

δ) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=$
$=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

4. Επεκτάσεις

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

β) $(\alpha+\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma$

γ) $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

δ) $(-\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\alpha\gamma$

2. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(x+y-2)^2$ β) $(2x-3y+1)^2$

γ) $(3x-4y+z)^2$ δ) $(x^2-4x+3)^2$

3. Αν $A=2x-3y+1$, $B=3x+2y-3$ και $\Gamma=5x-2y-1$ να υπολογίσετε το $A^2-B^2-\Gamma^2$.

4. Να αποδείξετε τις **Ταυτότητες Cauchy**:

α) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

β) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

γ) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

δ) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

ε) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2$

στ) $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2+2\alpha^2\beta^2$

5. Να αποδείξετε τις **Ταυτότητες Lagrange**:

α) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2$

β) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=$
$=(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha\omega-\gamma x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2$

γ) $(x+2y)^2-(y-2x)\cdot(y+2x)+(2x-y)^2=$
$=9x^2+4y^2$

6. Να αποδείξετε την **Ταυτότητα De Moivre**::

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\gamma^2=$
$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$

1.5 / 7 | Αξιοσημείωτες ταυτότητες VII (Υπό συνθήκη) | 22

1. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα δεξιά αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α το ανάπτυγμά της από τη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
	1. $\alpha^3 - 1$
α. $(\alpha + 4)^2$	**2.** $\alpha^3 - 3\alpha + 3\alpha^2 - 1$
β. $(-4 + \alpha)^2$	**3.** $\alpha^2 + 8\alpha + 8$
γ. $(4\alpha - 3)(4\alpha + 3)$	**4.** $4\alpha^2 - 9$
δ. $(\alpha - 1)^3$	**5.** $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1$
ε. $(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$	**6.** $\alpha^2 - 8\alpha + 16$
	7. $16\alpha^2 - 9$
	8. $\alpha^2 + 8\alpha + 16$

α	
β	
γ	
δ	
ε	

2. Ασκήσεις για λύση

1. Αν $\alpha+\beta=5$ τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$(\alpha+2)^2+(\beta-2)^2+(2\alpha+4)(\beta-2)$$

2. Αν $\alpha+\beta=-\frac{1}{3}$ και $\alpha\cdot\beta=-\frac{7}{3}$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$(3\alpha+1)^2+(3\beta+1)^2$$

3. Αν $x+y=5$ και $xy=6$ τότε να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

$$A=x^2+y^2 \text{ και } B=x^3+y^3$$

4. Αν είναι $x^2+y^2=29$ και $x-y=3$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση x^3-y^3.

5. Αν είναι $x-y=2$ και $xy=3$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση $x^2(x+1)-y^2(y-1)$.

6. Αν για τα α, β, γ ισχύει

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \text{ και } \alpha\beta\gamma=6$$

τότε να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$A=(\alpha\gamma+\beta)^2-(\alpha+\gamma)^2+(1-\alpha\gamma)(1+\alpha\gamma)$$

$$B=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

7. Αν $\alpha=\sqrt{7}+\sqrt{5}$ και $\beta=\sqrt{7}-\sqrt{5}$ τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\alpha\cdot\beta$ β) $\alpha^2+\beta^2$

γ) $\alpha^4+\beta^4$ δ) $5\alpha^2-3\alpha\cdot\beta+5\beta^2$

8. Να βρείτε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

α) $(3x+4y)^2-(5y-2x)^2-3(x-y)^2$, για $x=-2$ και $y=1$

β) $(1+3\alpha-2\beta)^2-(2\beta-3\alpha-1)^2$, για $\alpha=\beta=-2$

γ) $\left(1+x^2+x\sqrt{2}\right)^2-\left(1+x^2-x\sqrt{2}\right)^2$, για $x=\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$

3. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$$A\Gamma=4x^2-1,\ AB=4x,\ B\Gamma=4x^2+1$$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

2. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) με $B\Gamma=\alpha+\beta$, $AB=\alpha-\beta$ και $A\Gamma=2\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha>\beta>0$. Στις πλευρές του τριγώνου ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ κατασκευάζουμε ισόπλευρα τρίγωνα που έχουν εμβαδά E_1, E_2 και E_3 αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$E_1=E_2+E_3$$

3. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(10\alpha+5)^2=100\alpha(\alpha+1)+25$$

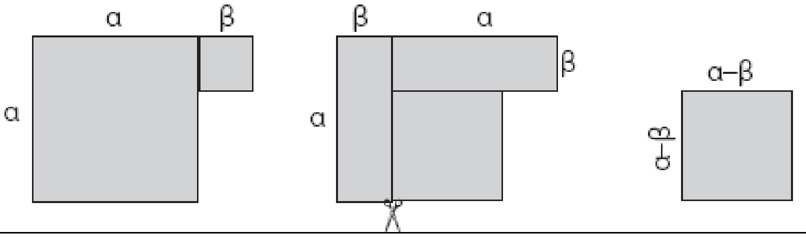
β) Να υπολογίσετε τα: 35^2, 45^2, 95^2, 145^2

1.5 / 8 **Αξιοσημείωτες ταυτότητες VIII (Επαναληπτικές)** **23**

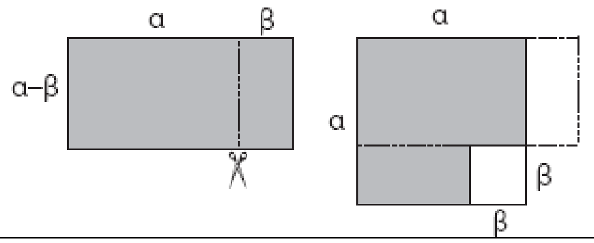
1. Ερωτήσεις κατανόησης

Να εξηγήσετε ποια ταυτότητα ερμηνεύουν τα παρακάτω σχήματα

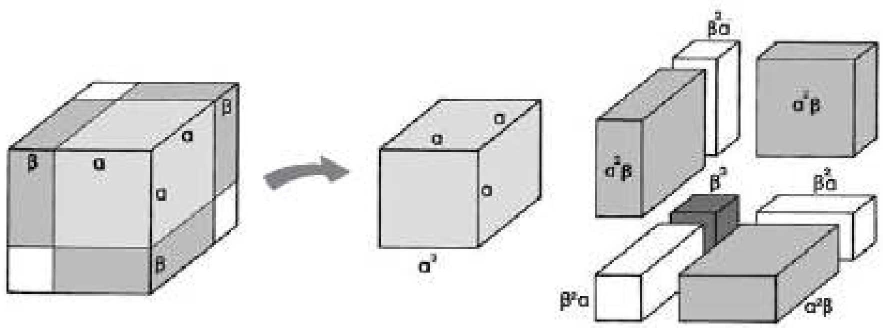
α)



β)



γ)



2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$A=\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$B=\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}$

$\Gamma=\left(\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}\right)^2$

$\Delta=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

2. Αν είναι $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}$, $y=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$x^2-3xy+y^2$$

3. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(\alpha+\ldots\ldots)^3=\ldots\ldots+6\alpha^2\beta+\ldots\ldots+\ldots\ldots$

β) $(\ldots\ldots-\ldots\ldots)^3=8\alpha^3-36\alpha^2\beta+\ldots\ldots-\ldots\ldots$

4. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=3x^2-5x+1$. Να υπολογίσετε τα πολυώνυμα:

α) $P(x-2)$ β) $P(3x+2)$ γ) $P(P(x))$

5. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha-1)(\alpha+1)+1=\alpha^2$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{2017\cdot2019+1}$$

6. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\left(\frac{156}{157}+\frac{157}{156}\right)^2-\left(\frac{156}{157}-\frac{157}{156}\right)^2$$

γ) Να βρείτε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού

$$\left(\frac{5^{2019}+2^{2018}}{2}\right)^2-\left(\frac{5^{2019}-2^{2018}}{2}\right)^2$$

7. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι ταυτότητα η παράσταση

$$(\alpha-2)^2-(\alpha-1)(\alpha-3)=\alpha$$

1.6 / 1 Παραγοντοποίηση Ι (Κοινός παράγοντας από όλους τους όρους) 24

1. Θεωρία

- $\alpha x \pm \alpha y = \alpha(x \pm y)$ και $\alpha x_1 \pm \alpha x_2 \pm \ldots \pm \alpha x_\nu = \alpha(x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_\nu)$

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3x - 6y$ β) $3x - 6x^4$ γ) $6\sqrt{x} - 8x$

δ) $2\alpha^2\beta - 4\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta\gamma$ ε) $\alpha(x^3+2) - \beta(x^3+2) + (x^3+2)$

Λύση

α) $3x - 6y = 3(x - 2y)$

β) $3x - 6x^4 = 3x(1 - 2x^3)$

γ) $6\sqrt{x} - 8x = 2\sqrt{x}(3 - 4\sqrt{x})$

δ) $2\alpha^2\beta - 4\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta\gamma = 2\alpha\beta(\alpha - 2\beta + 3\gamma)$

ε) $\alpha(x^3+2) - \beta(x^3+2) + (x^3+2) = (x^3+2)(\alpha - \beta + 1)$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4\alpha - 6\beta$ β) $4\alpha - 8\alpha\beta$

γ) $9\alpha x - 6\alpha\beta$ δ) $6\alpha\beta x - 15\alpha x$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $18x^4 - 8x$ β) $12x^4 - 4x^3$

γ) $15\alpha\beta^2\gamma^5 - 5\alpha\beta\gamma$ δ) $15\alpha\beta^2\gamma^5 - 9\alpha^4\beta\gamma^4$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $14x^3 + 7x + 12x^5$

β) $12\alpha^2\beta^3 + 8\alpha^5\beta + 16\alpha^3\beta^4$

γ) $12\alpha^2\beta^2 - 9\alpha^4\beta^{12}\gamma + 24\sqrt{\alpha}\beta^3\gamma^4$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4(x-2)^2 - 18(x-2)^3$

β) $6x^2(x-3)^2 - 10x(x-3)^3$

γ) $3\cdot(x-3)^2 - 12\cdot(x-3) + 9\cdot(x-3)^3$

δ) $4(2x-5y)^2 - 18(2x-5y)^3 + 6(2x-5y)$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2(x-1) - 3(1-x)$

β) $6(x-3)^2 - 4(3-x)^3$

γ) $10(3x-4y)^2 - 12(3x-4y)^3 + 8(4y-3x)^4$

δ) $(\alpha-\beta)^3 - (\alpha-\beta)^4 + (\beta-\alpha)^5 + (\beta-\alpha)^6$

ε) $4(x-1)(2x-5)^2 - 20(x-1)(5-2x)^3$

στ) $24(1-x)^2(2x-5)^2 - 40(x-1)(5-2x)^3$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{6} + \sqrt{12} + \sqrt{18}$

β) $2 + \sqrt{8} + \sqrt{32}$

γ) $3\sqrt{3} + \sqrt{96} - \sqrt{48}$

δ) $\sqrt{6} + \sqrt{8} - \sqrt{18}$

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2^x + 2^{2x} + 2^{3x}$ β) $2^x + 4^x + 6^x$

γ) $3^x + 9^x$ δ) $3^x - 2\cdot 6^x$

4. Επεκτάσεις

1. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο αριθμός $\kappa^2 + \kappa$ είναι άρτιος, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

β) Ο αριθμός $\kappa^2 + 7\kappa$ είναι άρτιος, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

γ) Το τετράγωνο ενός περιττού ακεραίου διαιρούμενο δια 8 δίνει υπόλοιπο 1

2. Να βγάλετε κοινό παράγοντα το 2 σε κάθε μία από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\alpha - 4$ β) $2\alpha - 3$ γ) $\alpha - 2$

δ) $\alpha + 4$ ε) $\frac{\alpha}{2} - 4$ ζ) $\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{7}$

1.6 / 2 **Παραγοντοποίηση ΙΙ (Κατά ομάδες ίσου αριθμού μονωνύμων)** 25

1. Θεωρία

- Χωρίζουμε την παράσταση σε ομάδες ίσου αριθμού μονωνύμων με τις προϋποθέσεις
  σε κάθε ομάδα να βγαίνει κοινός παράγοντας
  η παράσταση που μένει από κάθε επιμέρους επιμεριστική ιδιότητα να είναι η ίδια σε κάθε ομάδα
- $x\cdot y=0\Rightarrow x=0$ ή $y=0$

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $6\alpha^2-4\alpha\beta-9\alpha\gamma+6\beta\gamma$ β) $\alpha x-2\alpha y-\beta x+2\beta y+\gamma x-2\gamma y$

Λύση

α) $6\alpha^2-4\alpha\beta-9\alpha\gamma+6\beta\gamma=2\alpha(3\alpha-2\beta)-3\gamma(3\alpha-2\beta)=(3\alpha-2\beta)(2\alpha-3\gamma)$

β) $\alpha x-2\alpha y-\beta x+2\beta y+\gamma x-2\gamma y=\alpha(x-2y)-\beta(x-2y)+\gamma(x-2y)=(x-2y)(\alpha-\beta+\gamma)$

2. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $\alpha^2\beta-\alpha+\beta-\alpha\beta^2$.
β) Αν για τους α, β με $\alpha\neq\beta$ ισχύει $\alpha^2\beta-\alpha=\alpha\beta^2-\beta$, να αποδείξετε ότι οι α, β είναι αντίστροφοι

Λύση

α) $\alpha^2\beta-\alpha+\beta-\alpha\beta^2=\alpha^2\beta-\alpha-\alpha\beta^2+\beta=\alpha(\alpha\beta-1)-\beta(\alpha\beta-1)=(\alpha\beta-1)(\alpha-\beta)$

β) $\alpha^2\beta-\alpha=\alpha\beta^2-\beta\Rightarrow\alpha^2\beta-\alpha-\alpha\beta^2+\beta=0\Rightarrow(\alpha\beta-1)(\alpha-\beta)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha\beta-1=0\Rightarrow\alpha\beta=1\Rightarrow\beta=\dfrac{1}{\alpha}\\ \alpha-\beta=0\Rightarrow\alpha=\beta\ \text{(Αδύνατο)}\end{cases}$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^2+2x+xy+2y$
β) $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+2$
γ) $\alpha x-x+\alpha y-y$
δ) $\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\delta^2+\beta\delta^2$
ε) $10\alpha-\alpha^2+10\beta-\alpha\beta$
στ) $\alpha^3-15+5\alpha^2-3\alpha$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $\alpha+\alpha\beta-\beta-1$
β) $\alpha-\alpha\beta-\beta+1$
γ) $\alpha x-\beta y+\alpha y-\beta x$
δ) $5\alpha x-2\beta x-5\alpha y+2\beta y$
ε) $9x-12y+8y-6x$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^2y-x^2-xy+x+y-1$
β) $\alpha^2\beta x+\alpha\beta x+\alpha\beta^2x+\alpha^2\beta y+\alpha\beta y+\alpha\beta^2 y$
γ) $\alpha x+xy-\beta x+\alpha y+\gamma y-\beta y$
δ) $2\alpha x-6\beta x-4\gamma x-3\alpha y+9\beta y+6\gamma y$
ε) $5\alpha^3\beta+10\alpha\beta^3+5\alpha^2\beta^2-2\alpha^2-4\beta^2-2\alpha\beta$
στ) $\alpha-\alpha x-\beta+\beta x-\alpha y+\beta y$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $3(2\alpha-\beta)+2\alpha x-\beta x$
β) $(x+1)^2+2x+2$
γ) $2(3\alpha-1)-3\alpha+1$
δ) $(3x-4y)+8y-6x$

5. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση
$$3\alpha^2x-2\alpha\beta x-3\alpha^2y+2\alpha\beta y$$
β) Να λύσετε την εξίσωση
$$3\alpha^2x-2\alpha\beta x=3\alpha^2y-2\alpha\beta y$$

6. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση
$$3x^3-12x$$
β) Να λύσετε την εξίσωση
$$4x^3=12x+x^3$$

1.6 / 3 Παραγοντοποίηση ΙΙΙ (Διαφορά τετραγώνων) **26**

1. Θεωρία

- $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$
- $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ και $y = 0$

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4x^2 - y^2$ β) $\frac{1}{x^4} - 16$ γ) $(3x+1)^2 - (2x-1)^2$ δ) $2\alpha^2 - 2$ ε) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

Λύση

α) $4x^2 - y^2 = (2x)^2 - y^2 = (2x+y)\cdot(2x-y)$

β) $\frac{1}{x^4} - 16 = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - 4^2 = \left(\frac{1}{x^2} - 4\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2} + 4\right) = \left(\frac{1}{x} - 2\right)\cdot\left(\frac{1}{x} + 2\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2} + 4\right) =$

γ) $(3x+1)^2 - (2x-1)^2 = \left[(3x+1)+(2x-1)\right]\cdot\left[(3x+1)-(2x-1)\right] = 5x\cdot(x+2)$

δ) $2\alpha^2 - 2 = 2\cdot(\alpha^2 - 1) = 2\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha-1)$

ε) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2\cdot(x-3) - (x-3) = (x-3)\cdot(x^2-1) = (x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - \beta^2$ β) $9 - \alpha^2$

γ) $-\beta^2 + \alpha^2$ δ) $-9 + \alpha^2$

ε) $9x^2 - 36\beta^2$ στ) $4x^6 - \alpha^8\beta^8$

ζ) $\alpha^{22} - 625\beta^8$ η) $25x^8y^{24} - 144\alpha^{18}$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $(3x+7)^2 - 49$ β) $(x+1)^2 - (x-2)^2$

γ) $(5y+2)^2 - (5y+3)^2$ δ) $(3-y)^2 - (-5+y)^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4x^2 - (5x-2)^2$

β) $9x^2 - (x+2y)^2$

γ) $4x^2 - 25(x+2)^2$

δ) $4(y+2)^2 - 9(y+3)^2$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\alpha^3 - 2\alpha$ β) $(3x-2)^3 - 3x + 2$

γ) $16\alpha^5 - \alpha$ δ) $3x^4y^3 - 12x^2y$

ε) $(\alpha^2-4)\cdot(\alpha+3) - (\alpha+2)\cdot(\alpha^2-9)$

στ) $(x^2-4)^2 + (3x-4)\cdot(x+2)^2$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $4x^3 - 8x^2 - 9x + 18$

β) $x^2 - y^2 + 3x - 3y$

γ) $2\alpha^2 + 3\beta - 2\beta^2 - 3\alpha$

δ) $\alpha^4 + 3\alpha^3 + 3\alpha^2 - 1$

ε) $2\alpha^2 + 3\beta - 2\beta^2 - 3\alpha$

στ) $\alpha^6 + \beta^6 - \alpha^2\beta^4 - \alpha^4\beta^2$

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = x^4 - x^2$, $B = x^3 + 2x^2 - x - 2$ και $A - B$

4. Επεκτάσεις

1. Αν δύο ακέραιοι διαιρούμενοι με το 6 δίνουν το ίδιο υπόλοιπο, τότε να αποδείξετε ότι η διαφορά τετραγώνων τους είναι πολλαπλάσιο του 12.

2. Αν για τους x, y, z, w $\in \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zw)$$

να βρείτε την σχέση που συνδέει τους x και w.

Ε.Μ.Ε. Ευκλείδης 2002

1.6 / 4 **Παραγοντοποίηση IV (Άθροισμα – Διαφορά κύβων)** **27**

1. Θεωρία

- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ και $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3+27 β) $(x+1)^3+64$ γ) $(x-2)^3-(x+3)^3$ δ) x^3+y^3+x+y

Λύση

α) $x^3+27=x^3+3^3=(x+3)\cdot(x^2+3x+9)$

β) $(x+1)^3+64=(x+1)^3+4^3=[(x+1)+4]\cdot\left[(x+1)^2+(x+1)\cdot 4+4^2\right]=(x+5)\cdot(x^2+6x+21)$

γ) $(x-2)^3-(x+3)^3=[(x-2)-(x+3)]\cdot\left[(x-2)^2+(x-2)\cdot(x+3)+(x+3)^2\right]$

δ) $x^3+y^3+x+y=(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)+x+y=(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2+1)$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) α^3-125 β) α^3+8

γ) $\alpha^3-125\beta^3$ δ) $-\beta^3+27$

ε) $-64-\alpha^3$ στ) $-125-x^3$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $8x^6-216y^3$ β) x^3-64y^6

γ) $27x^3-64y^3$ δ) $125\beta^3+\alpha^9$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3\beta^3+\alpha^9y^3$ β) $125x^9y^{12}-\beta^3z^{15}$

γ) $\frac{x^3}{27}+\frac{y^6}{64}$ δ) $\frac{x^3\beta^3}{\alpha^3}-\frac{64y^3}{\alpha^3}$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $1-(\alpha-1)^3$ β) $\alpha^3-(2\alpha-1)^3$

γ) $(y+2)^3-(y+3)^3$ δ) $(3x+2)^3-(2-3x)^3$

ε) $(\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta)^3$ στ) $1-(\alpha+1)^3$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $2\alpha^3-16$ β) $3-81x^3$

γ) $\frac{1}{2}x^3-4$ δ) $x^3-(-\alpha)^3$

ε) $5x^3-625\alpha^6$ στ) x^7y-xy^7

6. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3-y^3-x+y

β) $\alpha^7+8\alpha^4-\alpha^3-8$

γ) $5\alpha^4-2\alpha^3+5\alpha-2$

δ) $3\alpha^4-3\alpha\beta^3+\beta\alpha^3-\beta^4$

7. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^3+3x^2+6x+8

β) $\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha-1$

8. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^3-y^3-(x^2-y^2)-(x-y)^2$

β) $xy(x+y)+y^2(x+y)-(x^3+y^3)$

4. Επεκτάσεις

1. α) Να αποδείξετε ότι

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3=7+5\sqrt{2}$$

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$A=\alpha(\alpha^2+5)-5(\alpha-\sqrt{2})+7$$

1.6 / 5 Παραγοντοποίηση V (Τετράγωνο αθροίσματος και διαφοράς) 28

1. Θεωρία

- $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$ και $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2-4\alpha+4$ β) $x^2-2\sqrt{5}x+5$ γ) x^4-6x^2+9 δ) $(\alpha-\beta)^2-2\cdot(\alpha-\beta)+1$

ε) $2\alpha^2-4\alpha+2$ στ) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$

στ) $7-4\sqrt{3}$ ζ) $7-2\sqrt{10}$

Λύση

α) $\alpha^2-4\alpha+4=(\alpha-2)^2$ β) $x^2-2\sqrt{5}x+5=(x-\sqrt{5})^2$

γ) $x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2=\left[(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})\right]^2=(x+\sqrt{3})^2\cdot(x-\sqrt{3})^2$

δ) $(\alpha-\beta)^2-2\cdot(\alpha-\beta)+1=\left[(\alpha-\beta)-1\right]^2=(\alpha-\beta-1)^2$

ε) $2\alpha^2-4\alpha+2=2(\alpha^2-2\alpha+1)=2(\alpha-1)^2$

στ) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2=(\alpha-\beta)^2-(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)=(\alpha-\beta)^2-(\beta-\gamma)^2=$
$\left[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)\right]\cdot\left[(\alpha-\beta)-(\beta-\gamma)\right]=(\alpha-\gamma)\cdot(\alpha-2\beta+\gamma)$

στ) Προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν η παράσταση γράφεται στη μορφή $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$. Το α ή το β ή και τα δύο θα έχουν ριζικό οπότε το διπλάσιο γινόμενο είναι το $-4\sqrt{3}=-2\cdot2\cdot\sqrt{3}$. Άρα θα μας βόλευε να είναι το $\alpha=2$ και το $\beta=\sqrt{3}$, Πράγματι $(2-\sqrt{3})^2=4-4\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=7-4\sqrt{3}$.

ζ) Προσπαθούμε να διαπιστώσουμε αν η παράσταση γράφεται στη μορφή $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$. Το α ή το β ή και τα δύο θα έχουν ριζικό οπότε το διπλάσιο γινόμενο είναι το $-2\sqrt{10}$. Είναι $\alpha\cdot\beta=\sqrt{10}$ οπότε ψάχνω να βρω δύο αριθμούς που το γινόμενό τους να είναι ίσο με $\sqrt{10}$. Τέτοιοι αριθμοί είναι οι 1 και $\sqrt{10}$ καθώς και οι $\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$. Από τους παραπάνω αριθμούς βολεύουν οι $\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$.
Πράγματι $(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2=2-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+5=7-2\sqrt{10}$.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α. α) $\alpha^2-6\alpha+9$ β) $4\alpha^2-4\alpha+1$ γ) $x^2-2\sqrt{3}x+3$ δ) $3\alpha^2-2\sqrt{3}\alpha+1$

Β. α) x^4+2x^2+1 β) x^4-4x^2+4 γ) $x^2+\frac{1}{x^2}+2$ δ) $4^3+2\cdot2^3+1$

Γ. α) $(\alpha+\beta)^2+2\cdot(\alpha+\beta)+1$ β) $(3x-2)^2-2(3x-2)(x+1)+(x+1)^2$

Δ. α) $3\alpha^2-18\alpha+27$ β) $8\alpha^2-8\alpha+2$ γ) $2x^2+6-4\sqrt{3}x$ δ) $5x^4-20x^2+20$

Ε. α) $x^2-y^2-2x-10y-24$ β) $x^2+9y^2-6xy+2x-6y+1$

γ) $\alpha^2+x^2+2\alpha x+6\alpha+6x$

ΣΤ. α) $-4\alpha^2+4\alpha-1$ β) $-x^4-2x^2-1$ γ) $-64\alpha^2+112\alpha-49$ δ) $-9x^4-36x^2\beta-36\beta^2$

Ζ. α) $4+2\sqrt{3}$ β) $5+2\sqrt{6}$

1.6 / 6 | Παραγοντοποίηση VI (Τριώνυμο – Διάσπαση μεσαίου) | **29**

1. Θεωρία

- $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$
- αν $\Delta>0$ τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$
- αν $\Delta=0$ τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)^2$ (το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο)
- αν $\Delta<0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) x^2-4x+3 β) $x^3-13x+12$ γ) x^2-5x+6

δ) x^2-4x+4 ε) $4\alpha^2-20\alpha+25$ στ) x^2+x+1

Λύση

α) Ψάχνουμε δύο αριθμούς με άθροισμα –4 και γινόμενο 3. Από δίπλα συμπεραίνουμε ότι είναι το –1 και το –3. Άρα $x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3)$.

3	
1	3
–1	–3

β) $x^3-13x+12=x^3-x-12x+12=x(x^2-1)-12(x-1)=x(x-1)(x+1)-12(x-1)=$

$=(x-1)(x(x+1)-12)=(x-1)(x^2+x-12)=(x-1)(x-3)(x+4)$

γ) Είναι $\Delta=1$ άρα $x=\frac{5\pm1}{2}$ και $x=2$ ή $x=3$. Επομένως $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

δ) Είναι $\Delta=0$ άρα $x=\frac{4}{2}=2$. Επομένως $x^2-4x+4=(x-2)^2$.

ε) Είναι $\Delta=(-20)^2-4\cdot4\cdot5=0$ άρα $\alpha=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$. Άρα $4\alpha^2-20\alpha+25=2\cdot\left(\alpha-\frac{5}{2}\right)\cdot2\cdot\left(\alpha-\frac{5}{2}\right)=(2\alpha-5)^2$

στ) Είναι $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$ άρα το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα βρίσκοντας τις 2 ρίζες τους:

α) x^2-5x+6 β) x^2-9x+8

γ) $3x^3-3x^2-18x$ δ) $x+\sqrt{x}-2$

ε) $\alpha^4+7\alpha^2+12$ στ) $\alpha^2-7\alpha\beta+12\beta^2$

ζ) $\alpha^4-3\alpha^2+2$ η) $4y^4-4y^2+1$

θ) $2x^2-10x+12$ ι) $x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}$

κ) x^4-7x^2+6

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις με διάσπαση του μεσαίου όρου:

α) $3x^2-5x+2$ β) $6x^2+15x+6$

γ) $27x^2-75x+48$ δ) $3x^2+3-10x$

ε) x^3-4x+3 στ) $5x^3-7x+2$

ζ) $5x^3-7x+2$ η) $x^2+3xy+2y^2$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^2+9x-10$ β) x^2-4x+3

γ) x^2-6x+9 δ) $4x^2-4x+1$

ε) $9\alpha^2-6\alpha+1$ στ) $4x^2-12x+9$

ζ) $4\alpha^2-4\alpha+6$ η) x^2-x+1

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

β) $8x^3-24x^2y+24xy^2-8y^3$

5. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση:

$$A=\frac{x^2+2\sqrt{2}x+2}{4x+5}:\frac{x^2-2}{16x^2+40x+25}$$

Ε.Μ.Ε 1988

1.6 / 7 **Παραγοντοποίηση VII (Τέσσερις όροι. Τεχνάσματα)** **30**

1. Θεωρία

- $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2=(\alpha+\beta)^2-\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$
- $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$ και $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3$

Μέθοδος συμμετρίας. Μία παράσταση, έστω ως προς α, β, γ, είναι συμμετρική αν αντικαθιστώντας όπου α το β, β το γ και γ το α προκύπτει η ίδια παράσταση. Σε τέτοιες παραστάσεις αν αντικαθιστώντας ένα μόνο γράμμα, π.χ. το α, με ένα άλλο γράμμα, π.χ. το β, μηδενιστεί η παράσταση τότε συμπεραίνουμε ότι το $\alpha-\beta$ είναι παράγοντας της παράστασης και άρα μπορεί να βγει, μετά από κατάλληλη ομαδοποίηση, κοινός παράγοντας.

Μέθοδος απελπισίας. Αν δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε καμία από τις παραπάνω μεθόδους τότε κάνουμε όσες πράξεις μπορούμε (συνήθως πολλαπλασιασμούς) και φέρνουμε την παράσταση σε μορφή αθροίσματος μονώνυμων και ξεκινάμε τη διαδικασία της παραγοντοποίησης από την αρχή

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $x^2+4x+4-y^2$ β) $x^3-6x^2+12x-8$ γ) x^4+4y^4

δ) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+2\alpha\beta\gamma$ ε) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2$

α) $x^2+4x+4-y^2=(x+2)^2-y^2=(x+2+y)(x+2-y)$

β) $x^3-6x^2+12x-8=x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=(x-2)^3$

γ) $x^4+4y^4=x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy)$

δ) Η παράσταση είναι συμμετρική. Αν αντικαταστήσουμε το α με το –β μηδενίζεται άρα το $\alpha+\beta$ είναι παράγοντας. Άρα $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\beta\gamma^2+\alpha\gamma^2=$
$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma+\gamma^2)=$
$(\alpha+\beta)(\beta(\alpha+\gamma)+\gamma(\alpha+\gamma))=(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$

ε) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=\alpha^2x^2+\beta^2x^2+\alpha^2y^2+\beta^2y^2-\alpha^2x^2-2\alpha\beta xy-\beta^2y^2$
$=\beta^2x^2+\alpha^2y^2-2\alpha\beta xy=(\beta x-\alpha y)^2$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α. α) $x^4-4x^2y^2+4y^4-9x^2y^2$
β) $2xy-x^2+\alpha^2-y^2$
γ) $\alpha^4-4\alpha^2\beta^2+4\beta^4-\alpha^2\beta^2$

Β. α) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
β) $8x^3-24x^2y+24xy^2-8y^3$

Γ. α) $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+1$
β) $\alpha^3-2\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3$

Δ. α) $(x-y)(\alpha-2)-(y-x)(\beta+3)-\gamma x^2+\gamma y^2$
β) $(x+y)^2-xy(x+y+1)-1$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

Α. α) α^4+1
β) $4\alpha^4+4\beta^4$
γ) $4\alpha^4+\beta^4-13\alpha^2\beta^2$
δ) $\alpha^4+9\beta^4-10\alpha^2\beta^2$

Β. α) $x(x+2)+1$
β) $(\alpha^2-3\alpha)(\alpha^2-3\alpha+2)+1$

Γ. α) $\beta\gamma^2-\gamma^2\alpha+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta+\gamma\alpha^2-\beta^2\gamma$

Δ. α) $\alpha\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)$
β) $\alpha\beta(x^2-y^2)+xy(\alpha^2-\beta^2)$

1.8 / 1 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων 31

1. Θεωρία

- Γράφουμε την κάθε παράσταση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων,

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων:

	$2(x+y)$	$3y(x+y)^2$	$12xy(x+y)$
$4x(x+y)$			
$2x^2y(x+y)$			
$3xy^2$			

2. Να βρείτε το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

	$4x$	$2x^2(x+3)$	$4x^2(x+3)^2$
$x(x+y)^2$			
$2x(x+3)$			
$8x^2(x+3)^2$			

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ των:

α) 4, 12, 30 β) 8, 15, 24

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $24x^3y\omega,\ 18xy^2\omega,\ 15y\omega^3$

β) $2x^2y^3\omega^2,\ 4x^3y^2\omega,\ 6xy^2\omega^3$

γ) $8(xy)^2xy,\ (2x)^2xy^3,\ 8xy^3$

δ) $3x^2(x-y)^2,\ 6x^2y(x-y)^2(x+y)$

ε) $4(x^2-y^2),\ 6(x+y)^2,\ 3(x-y)^2$

3. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $4(x^2-9),\ 12(x^2-3x),\ 8(x^3-27)$

β) $x^2+x,\ x^2-1,\ x^3-y^3$

γ) $(x-1)(x-1),\ (x+1)(x-1)^2,\ (x+1)^2(x-1)$

δ) $6(x^2-y^2),\ 3(x-y),\ x^3-y^3$

4. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $x^2-2x,\ x^2-4x+4,\ x^3-4x$

β) $x^3-8,\ x^2-4,\ x^2-5x+6$

γ) $x^2-4x+3,\ x^2-3x+2,\ x^2-5x+6$

δ) $x^2-4x+4,\ x^2-4,\ x^2+x-6$

5. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $x^3-6x^2+12x-8,\ x^2-4,\ x^2-2x$

β) $x^2-3x+2,\ x^2+3x-4,\ x^3-x,\ x^2-2x+1$

4. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $x^4-4x^2+9(4-x^2),\ x^3+4x^2+4x-3(x+2)^2$

β) $x^3-x^2-x+1,\ 2x^5-4x^3+2x,$
$3x^6-6x^5+6x^3-3x^2$

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+\alpha x^3+x^2$$

για το οποίο ισχύει $P(-2)=36$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$

β) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

γ) Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων $P(x)$, $P(x^2)$ και $P(x+1)$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα
$P(x)=x^3-4x^2+5x-2$ και
$Q(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να βρείτε

α) τα α, β και γ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $(x-2)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$ να είναι ίσα

β) το Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. των $P(x)$ και $Q(x)$

1.9 / 1 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις Ι **32**

1. Θεωρία

- Ορισμός. Περιορισμοί στις ρητές αλγεβρικές παραστάσεις. Απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να αντιστοιχίσετε κάθε κλάσμα της 1ης γραμμής στο αντίστοιχο κλάσμα της 2ης γραμμής.

α) $\frac{x^2+x}{x}$ β) $\frac{x^2-x}{x-1}$ γ) $\frac{x^2-x}{x}$ δ) $\frac{x^2-x}{x^2-1}$

1. $\frac{x}{x+1}$ 2. $\frac{1}{x-1}$ 3. $x-1$ 4. $x+1$ 5. $\frac{x^2-x}{x^2-1}$ 6. x

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{4}{x+1}$ β) $\frac{3-x}{3-x}$ γ) $\frac{x}{x^2+1}$

δ) $\frac{-x^3}{x^2}$ ε) $\frac{x-3}{\sqrt{x}+1}$ στ) $\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

2. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{x}{x^2+x}$ β) $\frac{x^2-x}{x^2-1}$ γ) $\frac{2x}{x^3+x}$

δ) $\frac{x^2}{x^2+x^2}$ ε) $\frac{4}{x^2-2x+1}$ στ) $\frac{\alpha-1}{-\alpha-1}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{15\alpha\beta^2}{10\beta}$ β) $\frac{20\alpha^2\beta}{36\alpha\beta^2}$ γ) $\frac{14\beta\alpha^3}{51\alpha\beta^5}$

δ) $\frac{55\alpha^5\beta^3\gamma}{44\alpha^2\beta\gamma^3}$ ε) $\frac{18x^2y^3w^3}{26x^3y^5w^3}$ στ) $\frac{20(\beta\alpha)^2}{48(\alpha\beta^3)^3}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^2-3x}{4x^3-12x^2}$ β) $\frac{x^2y+2y^2}{x^3+2xy}$

γ) $\frac{3x-3y}{4y-4x}$ δ) $\frac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}$

ε) $\frac{x^2-2x+1}{4x-4}$ στ) $\frac{x^2-1}{3x-3}$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{6x}{3x^2-x}$ β) $\frac{x^3+5x^2}{2x+10}$

γ) $\frac{\alpha^2-3\alpha\beta}{-\alpha^3+3\alpha^2\beta}$ δ) $\frac{x^2-4x}{2x-8}$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{\alpha\lambda-\alpha\mu+\lambda x-\mu y}{\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta x-\gamma x}$ β) $\frac{3\alpha x-5\alpha y-3\beta x+5\beta y}{\alpha^2-\beta^2+(\alpha-\beta)^2}$

γ) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3-x^2-9x+9}$ δ) $\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma}$

4. Επεκτάσεις

1. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{(x+y)^3+x^3}{(x+y)^3+y^3}$$

β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{6^3+4^3}{6^3+2^3}=\frac{6+4}{6+2} \quad \text{και} \quad \frac{23^3+13^3}{23^3+10^3}=\frac{23+13}{23+10}$$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{1-\alpha}{1-\sqrt{\alpha}}$, $\alpha>0,\ \alpha\neq1$

β) $\frac{\alpha-\beta}{\alpha\sqrt{\beta}-\beta\sqrt{\alpha}}$, $\alpha,\beta>0,\ \alpha\neq\beta$

γ) $\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, $x\geq0,\ y\geq0$

4. Προβλήματα

1. Ένα ορθογώνιο έχει εμβαδόν x^2+5x+6 και μήκος $x+3$. Ποιο είναι το πλάτος του;

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2-1}{(1-x)^2}$ β) $\dfrac{x^2-25}{2x+10}$

γ) $\dfrac{\alpha^2+3\alpha\beta}{\alpha^2-9\beta^2}$ δ) $\dfrac{x^2-4x}{x^2-8x+16}$

ε) $\dfrac{(2x+y)^2}{xy^2-4x^3}$ στ) $\dfrac{6x^2+3xy}{4x^2-y^2}$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2\alpha^2\beta^2-8}{3\alpha^2\beta+6\alpha}$ β) $\dfrac{2x^2y-3xy^2}{4x^3y-9xy^3}$

γ) $\dfrac{x^2-1}{5-5x}$ δ) $\dfrac{x^3y-xy^3}{x^3-y^3}$

ε) $\dfrac{x^3+1}{x^4+x^2+1}$ στ) $\dfrac{x^3-1}{1-x^2}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{1+x^3}{1+2x+2x^2+x^3}$ β) $\dfrac{2x^3-x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$

γ) $\dfrac{3x^4+9x^3+6x^2}{x^4+x^3-2x^2}$ δ) $\dfrac{(xy-1)^2-(x+1)^2}{xy+x+y+1}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{3+6+9+....+300}{2+4+6+....+200}$

β) $\dfrac{3x+6x+9x+....+300x}{2x+4x+6x+....+200x}$

γ) $\dfrac{(3+6+9+...+300)x^2+(1+2+3+...+100)x^2}{4x+8x+12x+...+400x}$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$ β) $\dfrac{x^2-4\alpha x-21\alpha^2}{(x^2+3\alpha x)^2}$

γ) $\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^4-16}$ δ) $\dfrac{3x^3-24}{2x^2+6x-20}$

6. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\frac{x^2-7x+6}{x^2-36} \text{ και } B=\frac{x^2+7x+6}{x^2-1}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζονται ταυτόχρονα και οι δύο παραστάσεις;

β) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B

γ) Να αποδείξετε ότι $(A+B)^2-(A-B)^2=4$

7. Για ποιες τιμές του $\kappa\in\mathbb{R}$ το παρακάτω κλάσμα είναι ίσο με μηδέν;

$$\frac{\kappa^2-14\kappa+49}{\kappa^2-49}$$

8. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x)=x^3-4x^2-3x+18 \text{ και}$$

$$Q(x)=(x+2)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β και γ τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ είναι ίσα

β) Δίνεται η παράσταση

$$A=\frac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-3x^2-4x+12}$$

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση A

2. Επεκτάσεις

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ β) $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2x^2-x-3}{2x^2-7x+6}$ β) $\dfrac{2x^2+7x+6}{2x^2+3x-2}$

γ) $\dfrac{3x^2-7x+4}{2x^2-x-1}$ δ) $\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+7x+6}$

ε) $\dfrac{2x^2-x-3}{3x^2+x-3}$ στ) $\dfrac{8x^2-10x-7}{6x^2+x-1}$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A=\frac{1.112\cdot 1.110\cdot 1.107+5.551}{1.111\cdot 1.109}$$

είναι ακέραιος και να τον βρείτε.

4. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ, ώστε το κλάσμα

$$\frac{x^3-2x^2+3x+\kappa}{x+2}$$

να μπορεί να απλοποιηθεί.

β) Για $\kappa=22$ να απλοποιήσετε το κλάσμα

1.10.Α / 1 | **Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων** | **34**

1. Θεωρία

- Πολλαπλασιασμός αριθμού με κλάσμα. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση δύο κλασμάτων.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις ισότητες με (Σ) αν είναι σωστή ή με (Λ) αν είναι λανθασμένη.

α) $\frac{x}{3}\cdot\frac{x+2}{y}=\frac{x\cdot x+2}{3y}$ β) $\frac{7}{x}\cdot\frac{x}{x+4}=\frac{7}{x+4}$ γ) $x:\frac{y}{\omega+1}=\frac{x\cdot\omega+1}{y}$

δ) $\frac{1+\frac{2}{y}}{\frac{3}{x}}=\frac{1+2x}{3y}$ ε) $\frac{\frac{5x}{\omega}}{\frac{y}{x}}=\frac{\omega y}{5x^2}$ στ) $\frac{x}{y}:\frac{x^2}{y^2}=\frac{y}{x}$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{3-x}{x+3}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ β) $\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}:\frac{3x+12}{3x-9}$

γ) $\frac{x+y}{x^2-xy}:\frac{4x+4y}{x-y}$ δ) $\frac{x^2-9}{x^3-8}:\frac{x+3}{x^2+2x+4}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{5\alpha\beta}{6}:\frac{2\alpha\beta^2-\beta^2}{3\alpha}$ β) $\frac{x^4+x^2-2}{x^2+3x+2}\cdot\frac{x+1}{x^2-1}$

δ) $\frac{3\alpha^2-6\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2}:\frac{12-3\alpha^2}{2\alpha^2+2\alpha-4}$

γ) $\left[\frac{x}{x-3}:\frac{x-2}{x^2-6x+9}\right]\cdot\frac{3y}{xy-3y}$

δ)

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{x^2y+xy}{xy-y}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$ β) $\frac{x^2y+xy}{x^2-y^2}\cdot\left(\frac{x^2-xy}{x^3+y^3}\right)^{-1}$

γ) $\frac{2\alpha^2-3\alpha-9}{\alpha^2+5\alpha+4}\cdot\left(\frac{2\alpha+3}{\alpha+4}\right)^{-1}$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}:\frac{x^2-1}{x^2-4}$

β) $\frac{x^2y^2-y^4}{x^3-y^3}:\frac{xy^2-y^3}{x^2-xy+y^2}$

γ) $\frac{x^2+xy-12y^2}{x+3y}:\frac{x^2+7xy+12y^2}{x-3y}$

δ) $\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-4\alpha\beta-21\beta^2}\cdot\frac{\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}:\frac{1}{\alpha-7\beta}$

ε) $\frac{81\alpha\beta(\alpha-7\beta)}{2(\alpha+\beta)}:\left[36\left(\alpha^2-14\alpha\beta+49\beta^2\right)\right]$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2}}$ β) $\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x^2}}:\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x+1}{x}}$

γ) $\frac{\frac{\alpha^4-\beta^4}{(\alpha+\beta)^2}}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}}$ δ) $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}:\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}}$

4. Προβλήματα

1. Δίνεται τρίγωνο με πλευρά x^2-25 και εμβαδόν $x^2+10x+25$. Να βρείτε το αντίστοιχο ύψος.

2. Να βρείτε το εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου με βάση $\frac{x^2-25}{x+3}$ και αντίστοιχο ύψος $\frac{x^2-9}{x+5}$.

3. Δίνεται τρίγωνο με πλευρά $\frac{1}{x^2+4x+4}$ και αντίστοιχο ύψος $2(x+2)$ και ορθογώνιο με μήκος x^2+4x+4 και πλάτος $\frac{1}{x^2-4}$. Να βρείτε το λόγο των εμβαδών τους.

1.10.Β / 1 | **Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων Ι** | **35**

1. Θεωρία

- Πρόσθεση, αφαίρεση ομώνυμων και ετερώνυμων κλασμάτων

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2\alpha}{5}-\frac{4}{5}$ β) $\frac{4}{3x}-\frac{7\alpha}{3x}$

γ) $\frac{7\beta}{12y}-\frac{11}{12y}$ δ) $-\frac{7\beta}{4xy}+\frac{13}{4xy}$

ε) $\frac{-5}{2\alpha+3\beta}-\frac{6\alpha}{2\alpha+3\beta}$ στ) $\frac{-2\alpha}{\alpha-2\beta}+\frac{3}{\alpha-2\beta}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\alpha-3\beta}{5}-\frac{\alpha+\beta}{5}$ β) $\frac{4x}{3xy}-\frac{7y-x}{3xy}$

γ) $\frac{2x-y}{12y^2}-\frac{3x-y}{12y^2}$ δ) $-\frac{2x+x^2}{4x^2y}+\frac{x^2-3x}{4x^2y}$

ε) $\frac{\alpha+\beta}{3\alpha-\beta}-\frac{\alpha-\beta}{3\alpha-\beta}$ στ) $\frac{-2\beta}{\alpha-2\beta}+\frac{3+\beta}{\alpha-2\beta}$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2}{5}+\frac{3+2\alpha}{15\alpha}$ β) $\frac{\beta-5}{2\beta}-\frac{3-2\beta}{\beta}$

γ) $\frac{2}{\alpha}-\frac{3}{\beta}$ δ) $\frac{2\alpha-1}{\alpha^3}-\frac{4}{\alpha^2}$

ε) $\frac{2\alpha-1}{\alpha^3}-\frac{4}{\alpha^2}$ στ) $\frac{3\alpha-\beta}{6\alpha^3\beta}-\frac{2\beta+\alpha}{8\alpha^2\beta^2}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha-\beta}$ β) $\frac{3}{\alpha+\beta}+\frac{2}{\alpha}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}+1$ β) $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-4$

γ) $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\beta}+\alpha+\beta$ δ) $\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{\alpha\beta}-2$

ε) $\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\beta\gamma}-2$ στ) $1-\frac{1-(\alpha^2+\beta^2)}{2\alpha\beta}$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{5}{2\alpha-\beta}-\frac{4}{4\alpha-2\beta}$ β) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

γ) $\frac{1-\alpha}{\alpha-2}-\frac{\alpha-3}{\alpha+2}-\frac{4}{4-\alpha^2}$ δ) $\frac{3}{\alpha-1}-\frac{2}{1-\alpha}$

7. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{xy}{2xy-5y}-\frac{y-2}{4x^2-20x+25}+\frac{3}{2x-5}$

β) $\frac{y}{3x+4}-\frac{2x}{9x^2+24x+16}-\frac{6y}{6x+8}$

γ) $\frac{4\alpha+3\beta}{4\alpha^2-9\beta^2}-\frac{1}{2\alpha+3\beta}-\frac{1}{2\alpha-3\beta}$

δ) $\frac{3}{\alpha^2-4}-\frac{2}{\alpha^2-4\alpha+4}$

8. Να αποδείξετε ότι: $\frac{x^2+y^2}{x^2}+\frac{2y}{x}=\left(1+\frac{y}{x}\right)^2$.

3. Επεκτάσεις

1. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma=\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{39\cdot 40}$$

2. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\Sigma=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1.999\cdot 2.000\cdot 2.001}$$

Ευκλείδης 2001

4. Προβλήματα

1. Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\frac{\beta}{\alpha+\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

1.10.Β / 2 | **Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων ΙΙ (Σύνθετα κλάσματα)** | **36**

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{1-\alpha}{1-\dfrac{1}{\alpha}}$ β) $\dfrac{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}{1-\dfrac{1}{\alpha}}$

γ) $\dfrac{\alpha^2+5\alpha-6}{\dfrac{1}{\alpha^2}-1}$ δ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{2}{\alpha^2}-\dfrac{3}{\alpha^3}}{\dfrac{9}{\alpha}-\alpha}$

ε) $\dfrac{\alpha^2+5\alpha-6}{\dfrac{1}{\alpha^2}-1}$ στ) $\dfrac{\alpha+5+\dfrac{6}{\alpha}}{1+\dfrac{8}{\alpha^2}+\dfrac{6}{\alpha}}$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}}$ β) $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+1}$

γ) $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha+h}-\dfrac{1}{\alpha}}{h}$ δ) $\dfrac{\dfrac{1}{(\alpha+h)^2}-\dfrac{1}{\alpha^2}}{h}$

3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση

$$\left(\dfrac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\alpha}{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha}-\dfrac{2\beta+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\right):\dfrac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

είναι σταθερή.

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\alpha-2}}$ β) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$

γ) $\dfrac{1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}}}-\dfrac{1}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha-\dfrac{1}{\alpha}}}$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}{\alpha^{-3}+\beta^{-3}}$ β) $\alpha+\dfrac{\alpha}{1+\alpha^{-1}}$

6. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A=\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}}{\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta^2}},\quad B=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta}{\beta-\alpha}$$

α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β

β) Αν $\alpha=\dfrac{1}{2}$ τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\dfrac{A^{-1}}{B}$

7. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\dfrac{1+(\alpha+\beta)^{-1}}{1-(\alpha+\beta)^{-1}}\cdot\left[1-\dfrac{1-(\alpha^2+\beta^2)}{2\alpha\beta}\right]$$

2. Επεκτάσεις

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\left[\dfrac{\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}+1}{\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}-1}\right]^{2020}$ β) $\dfrac{\dfrac{2\alpha}{\alpha-\alpha^{-1}}-\alpha^{-1}}{2\alpha+\dfrac{2\alpha}{1-\alpha^{-1}}}$

2. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{(xy)^{-2}}$$

β) Αν $y=1$ να κάνετε τη διαίρεση $A:(x-1)$

γ) Να δείξετε ότι $2009^4-1=\pi o\lambda.2008$

3. Έστω η παράσταση

$$A=\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{x^{10}\cdot x^{-3}}{x^6\cdot x^3}}{1-\dfrac{(x^5)^2}{(x^4)^3}}$$

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης Α για

$$x=\dfrac{\sqrt{8}}{2}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}-5}\cdot\sqrt{3\sqrt{3}+5}$$

4. Αν $xyz=1$ να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K=\dfrac{1}{y+1-\dfrac{y}{x+1}}+\dfrac{1}{z+1-\dfrac{z}{y+1}}+\dfrac{1}{x+1-\dfrac{x}{z+1}}$$

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left(1-x+x^2\right)\cdot\dfrac{1}{x}$ β) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\cdot\dfrac{1}{x+y}$

γ) $\left(1-\alpha-\dfrac{2-\alpha^2}{1+\alpha}\right)\cdot\left(1-\alpha^2\right)$

δ) $\left(\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-x^2}+\dfrac{3}{\alpha+x}-\dfrac{1}{\alpha-x}\right):\left(\dfrac{\alpha^2+x^2}{\alpha x^2}+\dfrac{2}{x}\right)$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left[\dfrac{x-1}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}\right]:\dfrac{x^3+1}{x^3-8}$

α) $\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4x+3}\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x}+\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$

β) $\left[\dfrac{x+2}{x^2-1}+\dfrac{x-3}{(x-1)^2}\right]:\dfrac{x^2-2}{(x-1)^2}$

γ) $\left(\dfrac{1}{x^2+x-6}-\dfrac{1}{4-x^2}-\dfrac{2}{x^2+2x}\right):\dfrac{x+4}{x^3-4x}$

δ) $\left(\dfrac{4\mu\nu}{\mu+\nu}-\mu-\nu\right):\left(\dfrac{\nu}{\nu-\mu}+\dfrac{2\mu\nu}{\mu^2-\nu^2}-\dfrac{\mu}{\mu+\nu}\right)$

3. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)\cdot\left[\left(\dfrac{\beta}{\alpha}+1\right)\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+1\right)\right]^{-1}$

β) $\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}\right)\cdot\left(\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}\right)^{-1}$

4. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}-1}{\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\alpha}{\beta}+1}\cdot\dfrac{1+\dfrac{\beta}{\alpha}}{\alpha-\beta}:\dfrac{1+\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}}{\dfrac{\alpha^2}{\beta}-\dfrac{\beta^2}{\alpha}}$

β) $\dfrac{1}{\alpha-\dfrac{2}{\alpha+\dfrac{1}{2}}}\cdot\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\alpha}}:\dfrac{\alpha}{2\alpha-\dfrac{\alpha+4}{\alpha+1}}$

5. Να δείξετε ότι είναι σταθερή η παράσταση

$$\left(\dfrac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\alpha}{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha}-\dfrac{2\beta+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\right):\dfrac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

2. Επεκτάσεις

1. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}=\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)-\left(\frac{1}{\nu+1}-\frac{1}{\nu+2}\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dots\frac{1}{1999\cdot2000\cdot2001}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4000}+\frac{1}{4002}$$

2. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαφορετικοί ανά δύο τότε να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=1$$

3. Αν $\beta=\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $x=\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $y=\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}$ τότε να αποδείξετε ότι $y=\dfrac{2xz}{x+z}$.

3. Προβλήματα

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$x=\frac{\dfrac{2}{\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\alpha}}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}},\quad y=\frac{\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{\gamma}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+\gamma)}{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{2}{\alpha\beta}-\dfrac{\gamma^2}{\alpha^2\beta^2}}$$

Να βρείτε την πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν $E=x^2-y$ ως συνάρτηση των α, β.

2. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνιο αν ισχύει

$$1-\frac{2\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

3. Να λύσετε ως προς β τον τύπο $\kappa=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}}$.

Ποιοι περιορισμοί πρέπει να ισχύουν;

1 / Ε **Επαναληπτικά θέματα 1ου κεφαλαίου** **38**

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\sqrt{\dfrac{81^4+9^5}{27^4+9^3}}$ β) $\sqrt{\dfrac{\alpha^2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^3}}}:\left(\alpha\sqrt{\alpha^2\sqrt{\alpha^4}}\right)$

γ) $\left(\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}\right)^{\alpha+\beta}\cdot\left(\dfrac{x^\beta}{x^\gamma}\right)^{\beta+\gamma}\cdot\left(\dfrac{x^\gamma}{x^\alpha}\right)^{\gamma+\alpha}$, $\alpha\neq 0$

2. Να αποδείξετε ότι

α) $\dfrac{3}{1+\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}}+\dfrac{3}{1+\dfrac{\beta}{\alpha+\gamma}}+\dfrac{3}{1+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}}=6$

β) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}-\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}-\dfrac{4}{4-\alpha^2}+\dfrac{2}{2-\alpha}=0$

3. Αν $\alpha\cdot\beta=3+2\sqrt{2}$ τότε να αποδείξετε ότι

$$(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)^2=-12-8\sqrt{2}$$

4. Να αποδείξετε ότι

$$\left(\alpha+\frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)\left(\alpha-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)-\left(\beta+\frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha}\right)\left(\beta+\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\right)-\frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}=\alpha^2-\beta^2$$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

α) $A=\left(\alpha-\dfrac{12\alpha}{\alpha+3}+3\right):\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+3}+\dfrac{3}{\alpha-3}+\dfrac{6\alpha}{9-\alpha^2}\right)$

β) $B=\dfrac{16\alpha^2-1}{9\alpha^2+6\alpha+1}\cdot\dfrac{9\alpha^2-1+\alpha(3\alpha+1)}{16\alpha^2-8\alpha+1}$

6. Να αποδείξετε ότι αν

$$\kappa=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\text{ και }\lambda=\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

τότε $\dfrac{1}{\kappa^2}+\dfrac{1}{\lambda^2}=1$.

7. Δίνεται η παράσταση

$$A=\frac{\alpha}{\alpha+2}-\frac{\alpha}{\alpha^2-2\alpha}+\frac{5\alpha+2}{\alpha^2-4}$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για

$$\alpha=\sqrt{\frac{9}{\left(\sqrt{10}-1\right)^2}-\frac{1}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}$$

8. Αν $\alpha+\beta=4$ και $\alpha\beta=3$ να υπολογίσετε τα:

α) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ β) $\alpha^2+\beta^2$ γ) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$

δ) $\alpha^3+\beta^3$ ε) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$

9. α) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3+(\alpha-\beta)^3}$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\frac{1992^3+1953^3}{1992^3+39^3}$$

2. Επεκτάσεις

1. Αν είναι $7^\alpha=14$ και $2^\beta=14$ τότε

α) να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=\alpha\beta$

β) να υπολογίσετε την τιμή του κλάσματος

$$\frac{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}{\dfrac{1}{\alpha-\beta}},\ \alpha\neq\beta$$

2. Δίνεται η παράσταση

$$A(x)=\frac{x^2-9}{x^2+x-6}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση;

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση

γ) Να αποδείξετε ότι

$$A(4)\cdot A(5)\cdot\ldots\cdot A(11)\cdot A(12)=\frac{1}{10}$$

3. Προβλήματα

1. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\beta=\sqrt{x^2+7x+16}$ και $\gamma=\sqrt{3x^2+9x}$. Να βρείτε την υποτείνουσα του τριγώνου.

2. Αν η μία πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 1 m και η άλλη μειωθεί κατά 1 m να δείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου που προκύπτει είναι μικρότερο κατά 1 m² από το αρχικό εμβαδό.

1. Θεωρία

- $3x+5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$
- $0x=3$ Αδύνατη
- $0x=0$ Αόριστη
- $3x=0 \Leftrightarrow x=0$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x-3=7-x$

β) $3(x-4)-2(1-x)=6$

γ) $5(x-1)-3x=3-2(1-x)$

δ) $-2(x+3)+3(4-3x)=6(x-1)-3(2-x)$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $10x-2(4+5x)=-8$

β) $8x+2(5-4x)=-10$

γ) $4x+2(3-2x)=6$

δ) $4(x+3)+3(2-x)=x-8$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{3-2x}=7$

β) $\frac{2x-1}{3}=\frac{x+2}{4}$

γ) $3-\frac{x+2}{4}=x+10$

δ) $\frac{4x-3}{3}-\frac{3x-1}{4}=3-\frac{7x-9}{6}$

ε) $\frac{x+1}{2}-\frac{2x-1}{3}=\frac{4x-2}{6}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x}{10}+\frac{x+2}{15}=\frac{x+1}{6}-\frac{1}{30}$

β) $\frac{x+4}{2}-\frac{x+1}{2}=3-\frac{3-x}{4}$

γ) $\frac{x-2}{7}+\frac{x-1}{5}=\frac{2(x-2)}{7}+\frac{2x+3}{35}$

δ) $\frac{x+1}{2}-\frac{2x-5}{3}=1-\frac{x-1}{6}$

ε) $\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{3x-7}{2}-x\right)=6x-27-\frac{3}{2}\left(2-\frac{x-2}{3}\right)$

5. Εάν είναι α η λύση της εξίσωσης

$$7(x-3)-(3x-2)=2(x-1)-13$$

τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\left(2^{\alpha}\cdot\alpha+2\right)\cdot2^{\alpha}-(\alpha-3)\cdot3^{\alpha}+(\alpha-1)\cdot4^{\alpha}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2(x-1)}{5}+\frac{15}{2}\left(1-\frac{x}{3}\right)+\frac{19}{10}=\frac{9}{5}\left(\frac{x}{6}-\frac{1}{3}\right)$

β) $\frac{(x+8)(2-x)}{2}=3-6x-\frac{(2x+3)(x-7)-x+1}{4}$

γ) $\frac{x-1}{4}-\left[\frac{x+2}{3}-\left(\frac{5-x}{12}+1\right)-3\right]=1$

3. Επεκτάσεις

1. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda^2(x-1)=2(2x+\lambda)$$

Να βρείτε για ποια τιμή του λ, η εξίσωση είναι

α) αόριστη β) αδύνατη

2. Να επιλύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) $\lambda x+2=x-1$ β) $\lambda x=\lambda-1$

γ) $\lambda(\lambda-2)x=\lambda^2-3\lambda$ δ) $\lambda(\lambda-1)x=\lambda^2-3\lambda+2$

4. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Να χωρίσετε τον αριθμό 147 σε δύο προσθετέους που να έχουν διαφορά 9.

2. Οι διαστάσεις του δαπέδου μίας ορθογώνιας αίθουσας διαφέρουν κατά 3 m. Αν η μεγαλύτερη διάσταση αυξηθεί κατά 3 m και η μικρότερη μειωθεί κατά 2 m το εμβαδόν του δαπέδου παραμένει το ίδιο. Να βρείτε τις διαστάσεις της αίθουσας

3. Σε μία γιορτή τα αγόρια είναι τριπλάσια από τα κορίτσια. Μετά από λίγο έφυγαν 4 ζευγάρια και τα αγόρια ήταν εφταπλάσια των κοριτσιών. Πόσα ήταν αρχικά τα αγόρια και τα κορίτσια;

2.2.Α / 1 | Εξισώσεις δευτέρου βαθμού Ι (Ειδικές μέθοδοι) | 40

1. Θεωρία

- 1η μορφή: Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ λύνεται συντομότερα $x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}$
- 2η μορφή: Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x=0$ $(\alpha\neq 0)$ λύνεται συντομότερα $x(\alpha x+\beta)=0$
- 3η μορφή: **Τέλειο τετράγωνο**
- 4η μορφή: **Διάσπαση μεσαίου όρου**

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-64=0$ β) $x^2-7=0$
γ) $x^2+9=0$ δ) $4x^2-16=0$
ε) $3x^2-27=0$ στ) $3x^2-48=0$
ζ) $6x^2=12$ η) $5x^2=125$
θ) $36-x^2=0$ ι) $16-25x^2=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2-4x=0$ β) $x^2+2x=0$
γ) $2x-3x^2=0$ δ) $x^2=-5x$
ε) $4x^2+10x=0$ στ) $6x^2=18x$
ζ) $300x^2=3000x$ η) $2^6x^2=2^4x$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2+4x+4=0$ β) $x^2-6x+9=0$
γ) $x^2+10x+25=0$ δ) $-x^2+8x-16=0$
ε) $x^2+36=12x$ στ) $2x^2-20x=-50$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με διάσπαση του μεσαίου όρου:

α) $x^2+3x+2=0$ β) $x^2+5x+6=0$
γ) $x^2-7x+10=0$ δ) $x^2-x+12=0$
ε) $x^2-3x+2=0$ στ) $x^2+2x-35=0$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με διάσπαση του μεσαίου όρου:

α) $x^2+(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$
β) $x^2+(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}=0$
γ) $x^2+(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}=0$
δ) $x^2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})x+\sqrt{15}=0$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με διάσπαση του μεσαίου όρου:

α) $\frac{2x^2+1}{3}+\frac{x+1}{4}=(x+2)^2$
β) $\frac{x(x+2)}{3}+\frac{x(x-1)}{4}=\frac{x^2+2}{6}+\frac{1}{2}$
γ) $\frac{x^2+5}{9}-\frac{x-2}{4}=\frac{2(1-x)}{3}$

3. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-1)^2-16=0$ β) $(x+3)^2-4=0$
γ) $(x-5)^2+7=0$ δ) $6(x+5)^2=12$
ε) $49-(x-7)^2=0$ στ) $3(x+1)^2-27=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-1)^2-4(x-1)=0$
β) $(x+3)^2+2(x+3)=0$
γ) $2(3x-1)-3(3x-1)^2=0$
δ) $6(1-x)^2=18(1-x)$
ε) $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $300x^2-600\cdot 2^5=0$ β) $3^5x^2-3^{11}=0$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με διάσπαση του μεσαίου όρου:

α) $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
β) $\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1=0,\ \alpha\beta\neq 0$
γ) $x^2+3\sqrt{3}x-12=0$

5. Η εξίσωση $x^2+(\lambda-3)x+\lambda=0$ έχει ρίζα το 1. Να βρείτε:

α) τον αριθμό $\lambda\in\mathbb{R}$
β) την άλλη ρίζα της εξίσωσης

2.2.Α / 2 **Εξισώσεις δευτέρου βαθμού ΙΙ (Ειδικές μέθοδοι)** **41**

1. Θεωρία

5η μορφή: **Συμπλήρωση τετραγώνου**

6η μορφή: **Παραγοντοποίηση** ($\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$)

Κάθε εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του δύο λύνεται με μεταφορά όλων των όρων στο πρώτο μέλος και παραγοντοποίηση.

7η μορφή: **Αντικατάσταση** (Διτετράγωνες)

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της συμπλήρωσης τετραγώνου:

α) $x^2-4x+3=0$ β) $x^2-6x+8=0$

γ) $x^2-3x-10=0$ δ) $x^2+3x-4=0$

ε) $2x^2+5x+4=0$ στ) $2x^2+x-10=0$

ζ) $2x^2-5x+2=0$ η) $3x^2-x-2=0$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της παραγοντοποίησης:

α) $x(x^2-9)=0$ β) $3x(x^2+1)=0$

γ) $(x-1)(x+5)=0$ δ) $(2-3x)(2x+6)=0$

ε) $(x-1)(x-3)=(x-1)(2-5x)$

στ) $(x^2-1)(-3+9x)=(x^2-1)(5x+1)$

ζ) $\sqrt{5}x^2+(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{3}=0$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της παραγοντοποίησης:

α) $x^2-2\alpha x+4\alpha\beta=2\beta x$

β) $x^2-2\alpha x+8x=16\alpha$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α) $x-3\sqrt{x}+2=0$ β) $x-6\sqrt{x}+8=0$

γ) $x^4-3x^2-10=0$ δ) $x^6-6x^3+9=0$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α) $x^2-4|x|+3=0$ β) $x^2-6|x|+8=0$

γ) $x^2-2|x|+1=0$ δ) $x^2-6=|x|$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α) $(x-1)^2+3(x-1)+2=0$

β) $(x+1)^2+5(x+1)+6=0$

γ) $(x-7)^2-7(x-7)+10=0$

δ) $(2x-1)^2-(2x-1)+12=0$

ε) $(1-3x)^2+2(1-3x)-35=0$

στ) $2(\sqrt{x}-1)^2+5(\sqrt{x}-1)+4=0$

3. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x-1)^2=(2-3x)^2$ β) $(x-3)^2=x-3$

γ) $x^2(x^2-16)+3x(16-x^2)=0$

δ) $x^2(x-1)-5(x^2-1)-(1-x)(x+9)=0$

ε) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{2}-\dfrac{(x-4)^2-15}{6}$

στ) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{x}}+\dfrac{1}{2-x}=-\dfrac{2}{x^2-4}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $|x^2-1|=3$ β) $|1-2x^2|=3$

γ) $|x^2-25|=0$ δ) $|x^2+2|=-5$

ε) $(x^2-3)-2|x^2-3|+1=0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\alpha x^2+2x=\beta x$ β) $3x^2-2\alpha x-\beta x=0$

γ) $2{,}0002x^2+4{,}0004x-1{,}0001=0$

δ) $4x^2+2(1-\sqrt{3})x-\sqrt{3}=0$

4. Μία από τις ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+(\alpha-3)x-12=0$.

α) Να βρείτε το α

β) Να λύσετε την δεύτερη εξίσωση

2.2.Α / 3 | **Εξισώσεις δευτέρου βαθμού (Γενική μέθοδος)** | **42**

1. Θεωρία

Κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ έχει:

- Αν $\Delta>0$ δύο ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ (Οι αριθμοί $\pm|\Delta|$ και $\pm\Delta$ είναι ίδιοι)
- Αν $\Delta=0$ μία διπλή ρίζα $x_1=x_2=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
- Αν $\Delta<0$ καμία ρίζα

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Έστω η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq0)$.

α) Πότε έχει μοναδική ρίζα το 0;

β) Πότε έχει ρίζα το 0;

γ) Αν $\alpha\cdot\gamma<0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη;

2. Να υπολογίσετε την διακρίνουσα των παρακάτω εξισώσεων:

α) $x^2+2x=0$ β) $x^2-3=0$

γ) $-x^2-3=0$ δ) $3x-x^2-3=0$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $x^2+2x-3=0$ β) $x^2-5x+6=0$

γ) $x^2-9x+14=0$ δ) $3x^2-5x-2=0$

ε) $x^2-6x+10=0$ στ) $x^2-6x+9=0$

ζ) $12x^2-x-6=0$ η) $3x^2-2x+4=0$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $3x^2-1=2(x^2+12)$ β) $x^2+25=10x$

γ) $7x=x^2-18$ δ) $x^2=x-1$

ε) $3x^2-4(x+1)=-3x$ στ) $(2x-3)^2=6-5x$

ζ) $(x+1)^2+(x+2)^2-2(x-3)^2=5x^2$

η) $2(x+3)(x+4)-(x-2)^2=12(x+1)$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{5}=0$

β) $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{6}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$

γ) $5x^2-(\sqrt{2}-10)x-2\sqrt{2}=0$

δ) $\sqrt{3}x^2-6x+3\sqrt{3}=0$

ε) $\sqrt{3}x(2\sqrt{3}+2)=2x(2x+\sqrt{3})$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3x-10}{4}$

β) $\dfrac{2x^2+1}{3}+\dfrac{x+1}{4}=(x+2)^2$

γ) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{3}-\dfrac{2x+1}{6}$

δ) $\dfrac{(x-1)^2}{5}-\dfrac{(6x-1)^2}{10}=7-\dfrac{3-7x}{2}$

ε) $\dfrac{x^2-x+4}{3}=\dfrac{(2x-3)(3x-2)}{18}+\dfrac{5}{12}$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $(x^2-9)(x^2-5x+6)=0$

β) $(x^2-8x+7)(4x^2-8x+3)=0$

γ) $(x^2-4x+3)^2+(x^2-2x+1)=0$

δ) $(x^2-2x+7)\left(x^2-x+\dfrac{1}{4}\right)=0$

ε) $2(x+1)^2-3(x-1)^2+4(x^2+1)=0$

στ) $x^2(x-2)-3(x^2-4)=2(2-x)$

4. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις αφού πρώτα τις απλοποιήσετε.

α) $-x^2+3x-2=0$ δ) $0{,}7x^2-1{,}2x+4=0$ ζ) $1.000x^2+4.000=4.000x$

β) $-2x^2+6x-4=0$ ε) $-0{,}2x^2+1{,}2x-2=0$ η) $3\cdot2^{10}x^2-5\cdot2^{10}x+2^{12}=0$

γ) $11x^2+22x-33=0$ στ) $1.000=300x+400x^2$ θ)

1. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $6x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ β) $|x|^2 - |x| = 6$ γ) $x(x+1)(x^2+x+1) = 42$

Λύση

α) Θέτουμε $x^2 = \alpha$ και προκύπτει $6\alpha^2 - 7\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ ή $\alpha = \frac{2}{3}$.

- Για $\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Για $\alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

β) $|x|^2 - |x| = 6 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| - 6 = 0$.

Θέτουμε $|x| = \alpha$ και προκύπτει $\alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ ή $\alpha = 3$

- Για $\alpha = -2 \Leftrightarrow |x| = -2$ (Αδύνατη).
- Για $\alpha = 3 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 3$.

γ) $x(x+1)(x^2+x+1) = 42 \Leftrightarrow (x^2+x)(x^2+x+1) = 42$.

Θέτουμε $x^2 + x = \omega$ και προκύπτει $\omega(\omega+1) = 42 \Leftrightarrow \omega^2 + \omega - 42 = 0 \Leftrightarrow \omega = -7,\ \omega = 6$.

- Για $\omega = -7 \Leftrightarrow x^2 + x = -7 \Leftrightarrow x^2 + x + 7 = 0$ (Αδύνατη).
- Για $\omega = 6 \Leftrightarrow x^2 + x = 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -3$.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω διτετράγωνες εξισώσεις:

α) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ β) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

γ) $3x^4 + 7x^2 - 6 = 0$ δ) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

2. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ β) $x + 9\sqrt{x} + 14 = 0$

γ) $x - \sqrt{x} - 20 = 0$ δ) $2x + 3\sqrt{x} - 2 = 0$

ε) $10\sqrt{x} - 9 = x$ στ) $x - 13\sqrt{x} + 36 = 0$

3. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x|^2 - 9|x| + 14 = 0$ β) $3|\omega|^2 - 5|\omega| - 2 = 0$

γ) $|x|^2 + |x| = 0$ δ) $|x|^2 + 2|x| + 1 = 0$

4. Να λύσετε κάνοντας της αντικατάσταση $x^2 - 2x = \omega$ την εξίσωση

$$(x^2-2x)^2 + 5(x^2-2x) + 4 = 0$$

5. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x^2+2x)^2 + 5(x^2+2x) + 4 = 0$

β) $(x^2+2x+19)^2 - 3(x^2+2x+19) - 4 = 0$

γ) $(x^2-x-4)^2 + 2(x^2-x-4) - 8 = 0$

δ) $(x^2+5x+7)^2 - 2(x^2+5x+7) - 3 = 0$

ε) $(x^2-x)(x^2-x+1) - 6 = 0$

στ) $(2x^2-x)(10x^2-5x-6) + 1 = 0$

3. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x^2+2x+3)^2 + 8(x^2+2x+2) + 15 = 0$

β) $(x^2-5x+4)^2 + (2x^2-6x+4)^2 = 0$

γ) $\left(3x^2 - \frac{x}{2}\right)\frac{6x^2-x-2}{2} + \frac{1}{4} = 0$

2.2.Β / 2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού (Παραμετρικές) 44

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω εξισώσεις

i) $3x^2 - 2x + 4\lambda = 0$

ii) $x^2 - 6\lambda x + 9\lambda^2 - 3\lambda + 5 = 0$

α) έχουν δύο ρίζες πραγματικές ρίζες, άνισες
β) έχουν δύο ίσες ρίζες
γ) δεν έχουν πραγματικές ρίζες

2. Έστω η εξίσωση

$$\lambda x^2 + 3x + 1 = 0$$

α) Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού;
β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει λύση;

3. Η εξίσωση

$$\alpha x^2 + (\alpha^2 - 4)x - 3(5\alpha - 4) = 0$$

είναι 2ου βαθμού και έχει ρίζα το 3. Να βρείτε:
α) το α
β) την άλλη λύση της εξίσωσης

4. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ οι εξισώσεις έχουν δύο πραγματικές και άνισες ρίζες;
α) $\alpha\beta x^2 - (\alpha + \beta)x + 1 = 0$
β) $x^2 - (x - 2\alpha)^2 = (x - \alpha)^2$

5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν μία διπλή ρίζα.
α) $x^2 - \lambda x + 3\lambda - 2 = 0$
β) $8x^2 - (\alpha - 1)x + \alpha - 7 = 0$

6. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να έχουν πραγματικές ρίζες.
α) $\lambda x^2 + (2\lambda - 3)x + \lambda - 1 = 0,\ \lambda \neq 0$
β) $x^2 - 2\lambda x + (\lambda - 1)^2 = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 + (\alpha + 1)x + \alpha = 0,\ \alpha > 1$
β) $(\alpha - 2)x^2 - (\alpha^2 - 4\alpha + 5)x + \alpha - 2 = 0,\ \alpha > 3$

8. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις έχουν δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
α) $x^2 + 2(\alpha - \beta)x + \beta - \alpha - 1 = 0$
β) $(\alpha + 2)x^2 + (\alpha^2 + 4\alpha + 6)x + \alpha + 2 = 0$

9. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
α) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$
β) $\alpha x^2 + \beta(2x + 2) - \alpha = 0$

10. Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = \left(\frac{5 - 7\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} + 13\right) : \sqrt{3}$$

$$\beta = (\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2}) \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + 2}$$

Να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

2. Επεκτάσεις

1. Να λυθεί η εξίσωση

$$\lambda(\lambda x + 3) = \lambda^3 + 2\lambda x - 2$$

για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

Θαλής Α' Λυκείου 2006 – 2ο θέμα

2. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha^2 - 1)x + \alpha - 1 = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
α) Να βρείτε το α αν έχει ρίζα το $\frac{1}{2}$
β) Να βρείτε το α ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετοι αριθμοί

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x + 1 - 2|x| = \alpha x$ έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Ευκλείδης Α' Λυκείου 2010 – 2ο θέμα

4. Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha(\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{x - 2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

, όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $\alpha \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α.

Ευκλείδης Α' Λυκείου 2013 – 4ο θέμα

2.2.Β / 3 — Εξισώσεις δευτέρου βαθμού (Παραγοντοποίηση) — 45

1. Θεωρία

Κάθε τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ γράφεται:

- Αν $\Delta>0$: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$
- Αν $\Delta=0$: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho)^2=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
- Αν $\Delta<0$: ΔΕΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

$x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) x^2+2x-3 β) $3x^2+5x-2$
γ) $3x^2-x-4$ δ) $6x^2+7x-3$
ε) $4x^2-5x-6$ στ) $3x^2-17x+10$
ζ) $x^2-2xy+y^2$ η) $x^2-2\alpha x+\alpha^2$

2. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) x^2-4x+4 β) $x^2+8x+16$
γ) $9x^2-12x+4$ δ) $x^2+2x\sqrt{5}+5$

3. Να αποδείξετε ότι δεν παραγοντοποιούνται τα παρακάτω τριώνυμα:

α) x^2-x+1 β) x^2-3x+4
γ) $2x^2-x+1$ δ) $3x^2-7x+11$

4. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2-3xy+2y^2$ β) $8x^2+6xy-5y^2$
γ) $\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2$ δ) $12x^2-7xy-12y^2$

5. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+4}$ β) $\dfrac{2x^2-15x-8}{2x^2-x-1}$
γ) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}$ δ) $\dfrac{-2x^2+5x+3}{x^2-2x-3}$
ε) $\dfrac{3x^2-2x-8}{3x^2+13x+12}$ στ) $\dfrac{3x^2+19x-14}{6x^2-x-2}$

6. Έστω το κλάσμα

$$\frac{2x^2-9x+7}{2x^2-3x-14}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;
β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+4x-5}:\dfrac{9x^2-12x+4}{2x^2+11x+5}$

β) $\dfrac{3(x-1)}{x+1}+\dfrac{2(x+14)}{x+2}-\dfrac{5x(x-2)-21}{x^2+3x+2}$

3. Επεκτάσεις

1. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

α) $x^2-2\lambda x+\lambda^2-\mu^2$
β) $x^2-(2\alpha-3\beta)x-6\alpha\beta$
γ) $\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta,\ \alpha\beta\neq 0$
δ) $(\alpha-\beta)x^2-(\alpha+\beta)x+2\beta,\ \alpha\neq\beta$

2. Έστω οι παραστάσεις

$$A=\frac{x^2-4x}{x},\ B=\frac{(x-3)(x^2-9)}{x+3},\ \Gamma=\frac{x^3-4x^2+4x}{x}$$

α) Για ποια x ορίζεται κάθε παράσταση
β) Να απλοποιήσετε τις τρεις παραστάσεις
γ) Να λύσετε την εξίσωση

$$A^2-B=\Gamma$$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2x^3-9x^2+7x}{2x^3-3x^2-14x}$ β) $\dfrac{x^2-7\lambda x+12\lambda^2}{x^2-\lambda x-6\lambda^2}$

γ) $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}+\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}+\dfrac{2x}{x+2}$

4. Έστω το κλάσμα $\dfrac{5x^2+46x+\lambda}{3x^2-9x+6}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;
β) Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε το κλάσμα να μπορεί να απλοποιηθεί
γ) Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να λύσετε την εξίσωση

$$(x^2+3x-3)^2-10x^2-30x=\lambda$$

Εξισώσεις δευτέρου βαθμού (Προβλήματα)

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους όταν:
α) Το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 13
β) Το γινόμενό τους είναι 30
γ) Το τετράγωνο του μικρότερου και το διπλάσιο του άλλου έχουν άθροισμα 5

2. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς που διαφέρουν κατά 2 και οι κύβοι τους διαφέρουν κατά 56.

3. Να βρείτε δύο φυσικούς αριθμούς που διαφέρουν κατά 9 και έχουν γινόμενο –18.

4. Δίνεται ότι όταν το τετράγωνο ενός αριθμού μειωθεί κατά 14 τότε προκύπτει το μισό του αριθμού αυτού. Ποιος είναι ο αριθμός;

5. Το τετράγωνο ενός θετικού αριθμού είναι μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του αριθμού κατά 75. Να βρεθεί ο αριθμός.

Θαλής Α’ Λυκείου 2009

6. Να βρείτε δύο αριθμούς ώστε το άθροισμά τους να είναι 12 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ίσο με το 5/2 του γινομένου τους.

7. Η ηλικία ενός πατέρα είναι πενταπλάσια από του γιου του. Το άθροισμα των τετραγώνων των ηλικιών είναι 2106. Να βρείτε τις δύο ηλικίες.

8. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία σε μία πόλη, αν το άθροισμά τους είναι $+4^{\circ}$ C και το γινόμενό τους είναι -12° C.

9. Σε ένα ποδοσφαιρικό πρωτάθλημα κάθε ομάδα δίνει δύο αγώνες με καθεμία από τις υπόλοιπες. Αν στο πρωτάθλημα έγιναν 306 αγώνες, πόσες ομάδες έλαβαν μέρος;

10. Ένα κατάστημα που πουλάει κατοικίδια ζώα διαθέτει μεγάλα και μικρά πουλιά. Κάθε μεγάλο πουλί κοστίζει τα διπλά χρήματα από ένα μικρό. Μια κυρία αγόρασε πέντε μεγάλα και τρία μικρά πουλιά. Αν αντίθετα είχε αγοράσει τρία μεγάλα και πέντε μικρά πουλιά, θα είχε ξοδέψει 20 € λιγότερα. Πόσο κοστίζει κάθε πουλί;

11. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να είναι ανάλογοι των αριθμών 3, 5, 7 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ίσο με 747.

12. Να βρείτε ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσουμε στα 3, 10, 11 ώστε να προκύψει ορθογώνιο.

2. Επεκτάσεις

1. 5 σκύλοι πιάνουν 5 γάτες σε 5 λεπτά. Πόσοι σκύλοι πιάνουν 100 γάτες σε 100 λεπτά;

2. Στον Μαθηματικό διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε. δόθηκαν 25 ερωτήσεις. Η κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μόρια, η κάθε λανθασμένη απάντηση με 0 μόρια και κάθε μη απάντηση με 2 μόρια. Ένας μαθητής πήρε 83 μόρια απαντώντας λανθασμένα στις 6 από τις 25 ερωτήσεις. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

3. Ένας δάσκαλος έδωσε ένα τεστ στους μαθητές του αποτελούμενο από 24 ερωτήσεις στις οποίες οι μαθητές θα απαντούσαν με ένα «Ναι» ή ένα «Όχι». Για κάθε σωστή απάντηση ο μαθητής παίρνει 5 πόντους ενώ για κάθε λάθος απάντηση ο μαθητής χάνει 7 πόντους. Αν κάποιος μαθητής πάρει τελικά 0 πόντους σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

4. Ένας μυλωνάς παίρνει ως αμοιβή το 1/10 από το αλεύρι που αλέθει. Πόσο αλεύρι άλεσε για κάποιον, ο οποίος μετά την αφαίρεση της αμοιβής του μυλωνά είχε έναν τόνο αλεύρι;

5. Έχουμε 10 τόνους καρπούζια. Το κάθε καρπούζι αποτελείται 99% από νερό. Τα καρπούζια μένουν πολλή ώρα στον ήλιο και έτσι εξατμίζεται μια ποσότητα νερού. Έτσι λόγω της εξάτμισης το κάθε καρπούζι αποτελείται κατά 98% από νερό. Πόσο ζυγίζουν τώρα τα καρπούζια;

6. Η χλόη ενός λιβαδιού είχε ομοιόμορφη ταχύτητα ανάπτυξης και ομοιόμορφο πάχος. Ξέρουμε ότι 70 αγελάδες μπορούν να βοσκήσουν ολόκληρη τη χλόη σε 24 ημέρες. Αν όμως οι αγελάδες είναι 30 τότε θα χρειαστούν 60 ημέρες. Πόσες αγελάδες θα έτρωγαν όλη τη χλόη του λιβαδιού σε 96 ημέρες;

2.3 / 2 — Εξισώσεις δευτέρου βαθμού (Προβλήματα Γεωμετρίας) — 47

1. Θεωρία

$E_{\text{τετραγώνου}} = \alpha^2$, $E_{\text{τριγώνου}} = \dfrac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2}$, $E_{\text{ορθογωνίου}} = \text{μήκος} \cdot \text{πλάτος}$

$E_{\text{τραπεζίου}} = \dfrac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon$, $E_{\text{κυκλικού δίσκου}} = \pi\rho^2$.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Σε ένα τρίγωνο η βάση είναι κατά 5 cm μεγαλύτερη από το αντίστοιχο ύψος. Αν το τρίγωνο έχει εμβαδό 12 cm², τότε να υπολογίσετε τη βάση αυτή και το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

2. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 20 cm και εμβαδόν 24 cm². Να βρείτε τις διαστάσεις του.

3. Δίνεται η εξίσωση

$$\alpha x^2 - (\alpha+\beta+\gamma)x + (\beta+\gamma) = 0$$

όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου. Να αποδείξετε ότι, αν η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τότε το τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο.

4. Αν αυξήσουμε τις δύο απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου κατά 5 cm και τις άλλες δύο πλευρές κατά 3 cm τότε προκύπτει ορθογώνιο με εμβαδόν 168 cm². Να βρείτε τις διαστάσεις του τετραγώνου.

5. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαστάσεις του είναι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Αν το εμβαδόν του είναι 110 cm² τότε να βρείτε τις διαστάσεις του.

6. Σε ένα τετράγωνο δωμάτιο στρώνουμε ένα τετράγωνο χαλί. Το μήκος της πλευράς του χαλιού είναι κατά 2 m μικρότερο από το μήκος της πλευράς του δωματίου. Αν το εμβαδόν του χαλιού είναι 9 m² να βρείτε το εμβαδόν του δωματίου.

7. Έχουμε έναν τετράγωνο κήπο με εμβαδόν 64m^2. Αν διπλασιάσουμε το εμβαδόν του κήπου τότε ποιες είναι οι διαστάσεις της προέκτασης;

8. Να υπολογίσετε τις πλευρές ορθογωνίου τριγώνου που έχει πλευρές x, $x+1$, $x+3$

9. Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ ($AB // \Gamma\Delta$) με εμβαδόν $E = 39\text{m}^2$ μεγάλη βάση $\Gamma\Delta = 2x+1$, μικρή βάση $AB = x$ και ύψος $x+2$. Να βρείτε το ύψος του.

10. Έστω δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, OA) και (O, OB). Αν

- τα Ο, Α, Β είναι συνευθειακά
- το ΑΒ είναι κατά 1 cm μεγαλύτερο από το ΟΑ
- το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου είναι 21π cm²

τότε να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΟΑ, ΟΒ.

3. Επεκτάσεις

1. Έστω ένα τετράγωνο. Αν ο εγγεγραμμένος κύκλος σε αυτό το τετράγωνο έχει εμβαδόν 628 cm² τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

2. Έστω ένα τυχαίο ν–γωνο.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων του είναι $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$

β) Πόσες διαγωνίους έχει ένα δεκάγωνο;

γ) Ποιο πολύγωνο έχει 35 διαγωνίους;

δ) Ποιο πολύγωνο έχει 135 διαγωνίους;

3. Δίνονται δύο ισεμβαδικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα. Το πρώτο έχει πλευρές $x+4$ και $x+5$ και το δεύτερο έχει πλευρές x και $2x+7$.

α) Να βρείτε το x

β) Να βρείτε την διαφορά των περιμέτρων τους

4. Από ένα τετράγωνο με πλευρά 8 cm αποκόπτουμε από τις τέσσερις γωνίες του τέσσερα τετράγωνα, τα δύο με πλευρά x και τα άλλα δύο με πλευρά $x+1$. Αν το εμβαδόν του χωρίου που απομένει είναι 38 cm² τότε να βρείτε τα μήκη των πλευρών των δύο τετραγώνων.

1. Θεωρία

- Τους περιορισμούς της εξίσωσης τους παίρνουμε μόλις βρούμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Αν στην αρχική εξίσωση υπάρχει σύνθετο κλάσμα τότε τους περιορισμούς τους παίρνουμε απευθείας, πριν μετατρέψουμε το σύνθετο κλάσμα σε απλό.
- Αν μία κλασματική εξίσωση καταλήξει σε μορφή $0\cdot x=0$ τότε λέμε ότι η εξίσωση αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τους περιορισμούς που έχουμε θέσει.

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{15}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{5}{x^2-4}$.

Λύση

$\dfrac{15}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{5}{x^2-4}\Leftrightarrow\dfrac{15}{x-2}-\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{5}{(x-2)(x+2)}$

- Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές

Ε.Κ.Π. παρονομαστών $=(x-2)(x+2)$

- Βρίσκω το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών

Πρέπει $\text{Ε.Κ.Π.}\neq 0\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$ και $x\neq 2$

- Παίρνω περιορισμό: $\text{Ε.Κ.Π.}\neq 0$

$\Leftrightarrow(x-2)(x+2)\dfrac{15}{x-2}-(x-2)(x+2)\dfrac{4}{x+2}=$

$=(x-2)(x+2)\dfrac{5}{(x-2)(x+2)}$

- Πολλαπλασιάζω όλους τους όρους και στα δύο μέλη με το Ε.Κ.Π.

$\Leftrightarrow 15(x+2)-4(x-2)=5$

- Κάνω απαλοιφή παρονομαστών.

$\Leftrightarrow 15x+30-4x+8=5\Leftrightarrow x=-3$ (Δεκτή)

- Λύνω την εξίσωση. Χαρακτηρίζω κάθε λύση Δεκτή ή Απορρίπτεται, σύμφωνα με τους περιορισμούς.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{5}{x-1}=2$ β) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{7}{5}=4$

γ) $\dfrac{15}{4-x}-7=0$ δ) $\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{4x}=2$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x+4}{x-3}=\dfrac{2x+5}{2x}$ β) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+3}=5$

γ) $\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{7}{2x}$ δ) $\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{3}{x^2+1}=1$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{8}{15}$ β) $1-\dfrac{x}{2}=\dfrac{4}{x-2}$

γ) $1+\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{x}{x-3}$ δ) $\dfrac{x}{x+1}+2+\dfrac{x}{x+3}=0$

ε) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{3x-1}=\dfrac{3}{2x-1}$

στ) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{x-3}=\dfrac{6}{x-6}-\dfrac{2}{x-2}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{2}{3x+3}+\dfrac{5}{x+1}=\dfrac{3}{4}$

β) $\dfrac{x^2+1}{6x-3}-\dfrac{1}{4x-2}=\dfrac{2}{3}$

γ) $\dfrac{x-2}{x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{2x}{x^2+2x}$

δ) $\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{1}{x^2-2x}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{4}{x^2-4}$

β) $\dfrac{x+1}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2-2x+1}=0$

γ) $\dfrac{x-1}{x+3}-\dfrac{x-2}{x-3}=\dfrac{x^2+3}{x^2-9}$

δ) $\dfrac{13}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{5x-3}{x^2-1}$

ε) $\dfrac{x-1}{x-2}-\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2x}{3x-9}+\frac{1}{x}=\frac{3}{3x-x^2}$

β) $\frac{2x}{x-0,5}-\frac{3}{0,5+x}=\frac{-2}{0,25-x^2}$

γ) $\frac{2}{x^3-9x}-\frac{x-3}{x^2-6x+9}=\frac{2x-1}{x^2+3x}$

δ) $\frac{6}{7x-21}-\frac{1}{x^2-6x+9}+\frac{1}{x^2-9}=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2\cdot\frac{x^2+5}{x^2+3}}{\frac{x^2+5}{x^2+3}-1}=0$

β) $\frac{x}{x^2-25}-\frac{4}{x^2-5x}=\frac{16-x^2}{x^2-16}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}+\frac{2}{x-\frac{1}{x}}=3$ β) $\frac{x+1-\frac{2}{x-1}}{4-\frac{x+1}{x-1}}=1$

4. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{\alpha+1}{x^2-x}-\frac{x+2\beta+1}{x^2+x}=\frac{\beta x}{x^2-1}$$

όπου α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3(2x+2)^{-1}=5(x+1)^{-1}-\frac{5}{2}$

β) $6(x-1)^{-2}+(x-1)^{-1}-2=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6\left(\frac{2x}{x-3}\right)^2=5\cdot\frac{2x}{x-3}+6$

β) $4\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=8\cdot\frac{x+1}{x-1}-3$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$1-\frac{2x^2+15x-10}{x^2-16}=\frac{x}{x+4}+\frac{3+\frac{6}{x-2}}{\frac{2}{x-2}-1}$$

2. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-5\left(x-\frac{2}{x}\right)+4=0$

β) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)+2=0$

2. Να λύσετε στο σύνολο $\mathbb{N}$ τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{4x-x^2-4}+\frac{2}{x^2-4}=\frac{1}{x^2-5x+6}$

β) $\frac{4x+2}{3x+2}=\frac{6x^2+4}{9x^2-4}+\frac{x+1}{2-3x}$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x^2-6}{x}+4=\frac{5x}{x^2-6}$

β) $\left(\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=-1$

γ) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x+\alpha}{x-\alpha}+\frac{x-\alpha}{x+\alpha}=2$

β) $\frac{x-\alpha}{\beta}+\frac{x-\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{x-\alpha}+\frac{\alpha}{x-\beta}$, $\alpha\neq\pm\beta,\ \alpha\beta\neq 0$

5. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$x^2-\frac{\lambda^2+1}{\lambda-1}\cdot x+2\lambda+2=0$$

έχει ρίζα τον αριθμό -1;

6. Δίνεται η παράσταση

$$f(x)=\frac{(x-1)^2-5(x-1)+6}{-4x+x^2}$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $f(x)$

β) Να απλοποιήσετε την $f(x)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

δ) Να υπολογίσετε το α ώστε το $x=5$ να είναι λύση της εξίσωσης $f(x)+4=\alpha$

2.4 / 3 | Κλασματικές εξισώσεις (Προβλήματα) | 50

1. Λυμένες ασκήσεις

1. Να λύσετε με την μέθοδο της αντικατάστασης τις παρακάτω εξισώσεις: Στην κατασκευή ενός δρόμου παίρνουν μέρος 28 εργάτες και οδηγοί μηχανημάτων. Κάθε οδηγός μηχανήματος παίρνει την ημέρα 45 € περισσότερα από κάθε εργάτη. Όλοι οι οδηγοί μηχανημάτων κερδίζουν 600 € την ημέρα και όλοι οι εργάτες κερδίζουν επίσης 600 € τη μέρα.
α) Να βρείτε τον αριθμό των εργατών και τον αριθμό των οδηγών που παίρνουν μέρος στο έργο
β) Να βρείτε το ημερομίσθιο των εργατών και το ημερομίσθιο των οδηγών

Λύση

Έστω x ο αριθμός των οδηγών. Άρα οι εργάτες είναι $28-x$. Προφανώς είναι $0<x<28$.

Το ημερομίσθιο κάθε οδηγού είναι $\frac{600}{x}$ και το ημερομίσθιο κάθε εργάτη είναι $\frac{600}{28-x}$.

Το ημερομίσθιο του οδηγού είναι 45 € μεγαλύτερο από το ημερομίσθιο του εργάτη άρα $\frac{600}{x}=\frac{600}{28-x}+45$.

Είναι Ε.Κ.Π.$=x(28-x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0,\ x\neq 28$.

Άρα $600\cdot(28-x)=600x+45x(28-x)\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=8(\text{Δεκτή}),\ x=\frac{140}{3}>28(\text{Απορ.})$

α) Επομένως οι οδηγοί είναι 8 και οι εργάτες είναι $28-8=20$.

β) Το ημερομίσθιο των οδηγών είναι $\frac{600}{8}=75$ € και των εργατών είναι $\frac{600}{28-8}=\frac{600}{20}=30$ €.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Το άθροισμα ενός αριθμού και του αντιστρόφου του είναι 3. Να βρείτε τον αριθμό.

2. Να βρείτε έναν αριθμό του οποίου το τετράγωνο, αν αυξηθεί κατά το διπλάσιό του, προκύπτει ο αριθμός 35.

3. Να βρείτε δύο αριθμούς ώστε το άθροισμα, το γινόμενο και το πηλίκο τους να είναι ίσα.

4. Κάποιος αγόρασε ύφασμα και πλήρωσε 5.000 €. Αν με τα χρήματα αυτά αγόραζε 6 μέτρα επιπλέον, η τιμή του μέτρου θα ήταν κατά 50 € μικρότερη. Πόσα μέτρα υφάσματος αγόρασε;

5. Μία οργάνωση ανέλαβε να μοιράσει σε οικογένειες 9.450 €. Αν οι οικογένειες ήταν 8 λιγότερες τότε κάθε οικογένεια θα έπαιρνε 36 € περισσότερα. Να βρείτε το πλήθος των οικογενειών.

6. Σε μία εκδρομή οι γυναίκες ήταν 5 λιγότερες από τους άντρες. Οι άντρες πλήρωσαν συνολικά 180 € και οι γυναίκες συνολικά 80 €. Αν ο κάθε άντρας πλήρωσε 4 € περισσότερα από κάθε γυναίκα τότε πόσοι ήταν οι άντρες και πόσες οι γυναίκες;

7. Για να τελειώσει ένα έργο ένας εργάτης, χρειάζεται 3 μέρες περισσότερο από έναν εργάτη Β. Αν εργαστούν μαζί και οι δύο τελειώνουν το έργο σε 2 ημέρες. Σε πόσες ημέρες τελειώνει το έργο ο κάθε εργάτης μόνος του;

8. Μία δεξαμενή γεμίζει με νερό από δύο βρύσες σε 15 ώρες. Αν η μία χρειάζεται 16 ώρες περισσότερες από την άλλη για να γεμίσει την δεξαμενή μόνη της τότε να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται κάθε βρύση για να γεμίσει την δεξαμενή μόνη της.

3. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε δύο διαδοχικούς ακέραιους ώστε, αν στο διπλάσιο του αντίστροφου του μικρότερου προσθέσουμε τον αντίστροφο του μεγαλύτερου, προκύπτει αριθμός που είναι 11πλάσιος του γινομένου των αντιστρόφων.

2. Ένα τρένο διανύει 300 Km με σταθερή ταχύτητα. Αν η ταχύτητά τους αυξηθεί κατά 5 Km/h, τότε το τρένο θα διανύσει τα 300 Km σε 2 h λιγότερο. Ποια είναι η ταχύτητα του τρένου;

2.5 / 1 | Απόδειξη ανισοτήτων με συνθήκη | 51

1. Θεωρία

- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$ (Διάταξη αριθμών)
- $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma<\beta+\gamma$ (Πρόσθεση ίδιου αριθμού)
- $(\alpha<\beta \text{ και } \gamma>0) \Rightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$ (Πολλαπλασιασμός ανισότητας με θετικό αριθμό)
- $(\alpha<\beta \text{ και } \gamma<0) \Rightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$ (Πολλαπλασιασμός ανισότητας με αρνητικό αριθμό)
- $\alpha<\beta \text{ και } \beta<\gamma \Rightarrow \alpha<\gamma$ (Μεταβατική ιδιότητα)

2. Λυμένες ασκήσεις

1. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)>0$.

Λύση

Είναι $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$, $\beta<\gamma \Leftrightarrow \beta-\gamma<0$ και $\alpha<\gamma \Leftrightarrow \gamma-\alpha>0$.

Άρα $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)>0$.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Αν $1<x<2$ τότε να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $x(x-1)(x-2)(x-3)$

β) $(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)(2-x)$

γ) $(1-x)\left(\frac{1}{4}-x\right)(2x-3)$

2. Αν $\alpha>\beta>\gamma$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(2\alpha-\beta)>0$

β) $3\alpha-\beta+\gamma>2\beta+\gamma$

3. Αν $\alpha<-3$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $2\alpha-5<-11$ β) $4-\frac{\alpha}{2}>\frac{11}{2}$

4. Αν $\alpha>-3$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $4\alpha-3\geq-15$ β) $2(\alpha+1)\geq-4$

5. Αν $\alpha<-1$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $4(\alpha-2)<2\alpha-(9-\alpha)$

β) $\frac{\alpha+2}{2}-\frac{2\alpha+1}{6}>\frac{\alpha+3}{3}$

6. Αν $\alpha<\beta$ τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς

α) $5\alpha-5x$ και $5\beta-5x$

β) $\frac{3\alpha+4x}{-5}$ και $\frac{3\beta+4x}{-5}$

7. Αν $x<2<y<3$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$(y-x)(x-3)(2-y)(3x-11)<0$$

8. Αν $0<\alpha<\beta$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$ β) $\alpha<\frac{3\alpha+4\beta}{7}<\beta$

γ) $\alpha^2<\alpha\beta<\beta^2$ δ) $\alpha<\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}<\beta$

4. Επεκτάσεις

1. Αν $\alpha>1$ και $\beta>1$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\alpha+\beta<1+\alpha\beta$$

2. Αν $0<x<1$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2>2}$$

3. α) Να αποδείξετε ότι για $0<\alpha<\beta$ ισχύει

$$\alpha<\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}}<\sqrt{\alpha\beta}<\frac{\alpha+\beta}{2}<\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}<\beta$$

β) Αν για $\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ ισχύει $\alpha\delta=2$, $\beta\gamma=5$ τότε

$$(\alpha+3)(\beta+4)(\gamma+5)(\delta+6)\geq 1.440$$

2.5 / 2 Απόδειξη ανισοτήτων χωρίς συνθήκη

1. Θεωρία

Ισχύει: $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Βασική ιδιότητα: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \text{και} \\ \beta = 0 \end{cases}$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(\alpha-1)^2 + (\alpha+2)^2 > 0$$

2. Για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$

β) $\alpha^2 + 1 + \beta^2 - 2\alpha \geq 0$

γ) $\alpha^4 - 7\alpha^2 + 16 > 0$

2. Δίνονται οι παρακάτω ανισοϊσότητες

i) $\alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 6\alpha - 9$

iii) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\beta - 1$

iv) $\alpha^2 + \beta^2 \geq 8(\beta - 2)$

v) $4\alpha^2 + \beta^2 \geq 12\alpha - 9$

α) Να αποδείξετε ότι ισχύουν

β) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι αντίστοιχες ισότητες

3. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ αν ισχύει:

α) $2\alpha^2 + \beta^2 + 1 = 2\alpha(1-\beta)$

β) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

γ) $\alpha^2 + \beta^2 + 25 = 2(4\beta - 3\alpha)$

δ) $2x^2 + 4y(x+y) = 3(2x-3)$

4. Αν ισχύει

$$(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$$

τότε να αποδείξετε ότι $x = \alpha$ και $y = \beta$.

5. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ αν ισχύει:

α) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 4\alpha - 6\beta - 8\gamma + 29 = 0$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha - 4\beta + 6\gamma + 14 = 0$

6. Αν ισχύει

$$x^2 + y^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha\beta - xy)$$

τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ίσοι και οι αριθμοί x και y ότι είναι αντίθετοι.

7. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + 1 + \beta^2 - 2\alpha \geq 0$ **β)** $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

γ) $\alpha(\alpha + 4\beta) \geq \beta(2\alpha - \beta)$ **δ)** $\alpha(\alpha+6) \geq 2(\alpha-2)$

ε) $4\beta(\alpha - 2\beta) \leq (\alpha-\beta)^2$ **στ)** $\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2} \geq \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

ζ) $5(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$ **η)** $\alpha\beta \leq \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$

8. Να αποδείξετε ότι

α) $2\alpha^2 + 6\alpha + 9 > 0$

β) $\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2 > 0$

γ) $\alpha^2 - 4\alpha + \beta^2 + 2\beta + 6 > 0$

δ) $(x^2+y^2)(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha x + \beta y)^2$

ε) $3\alpha^2 + 6\beta + \beta^2 + 2\alpha + 10 > 0$

4. Επεκτάσεις

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει:

α) $\alpha^2 + \beta^2 \geq \alpha\beta$

β) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$

Πότε ισχύει η κάθε ισότητα;

2. Αν α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου και ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$$

τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

2.5 / 3 | **Ανισότητες (Ελάχιστη και μέγιστη τιμή παραστάσεων)** | **53**

1. Θεωρία

- $\begin{cases} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta$ (Πρόσθεση κατά μέλη)
- $\begin{cases} 0 < \alpha < \beta \\ 0 < \gamma < \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$ (Πολλαπλασιασμός κατά μέλη)

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να αναφέρετε ένα παράδειγμα όπου να φαίνεται ότι δεν ισχύει:
α) η αφαίρεση κατά μέλη
β) ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη αν όλοι οι αριθμοί δεν είναι θετικοί
γ) η διαίρεση κατά μέλη

3. Ασκήσεις για λύση

1. Αν $-4 \le x \le 2$ και $-3 \le y \le 7$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $2x-5$ β) $3y-4$
γ) $x+y$ δ) $2x+3y$
ε) $3x-2y$ στ) $2x^2-3y^2$

2. Αν $0 < x < 1$ και $-2 < y < -1$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $-x$ β) $-3y$
γ) $x+y$ δ) $x-y$
ε) $2x-3y$ στ) $-x-3y$

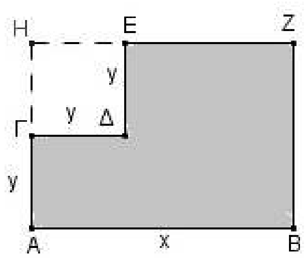
3. Αν $-3 \le x \le 4$ και $0 \le y \le 3$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $x-y$ β) $3x+2y$
γ) $-4x+5y$ δ) $5x-6y$
ε) $-3x-7y$ στ) $2x-6y$

5. Αν $-3 \le x \le -1$ και $5 \le y \le 7$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:
α) $x+y$ β) $3x+2y$
γ) $5-3x+4y$ δ) xy
ε) x^2+y^2 στ) $2x^2+3y^2$

4. Προβλήματα

1. Ένας κρεοπώλης έχει 200 μπιφτέκια και 300 σουτζουκάκια στο ψυγείο του. Κάθε μπιφτέκι ζυγίζει από 200 έως 300 γραμμάρια και κάθε σουτζουκάκι ζυγίζει από 60 έως 80 γραμμάρια.
α) Αν το ψυγείο ζυγίζει 80 κιλά τότε να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο βάρος του ψυγείου μαζί με τα προϊόντα
β) Αν το ένα κιλό μπιφτέκια ή σουτζουκάκια κοστίζει 7 € τότε να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο της συνολικής αξίας των κρεάτων

2. Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ με πλευρά y.



α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση
$$\Pi = 2x + 4y$$
β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος **Τ.Θ.**

3. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει:
$$4 \le x \le 7 \text{ και } 2 \le y \le 3$$
α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου
β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου **Τ.Θ.**

1. Λυμένες ασκήσεις

1. Αν α, β ομόσημοι τότε να αποδείξετε ότι $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$..

Λύση

$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta} \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha\beta\cdot\frac{1}{\alpha}>\alpha\beta\cdot\frac{1}{\beta} \Leftrightarrow \beta>\alpha \Leftrightarrow \alpha<\beta$

2. α) Αν $\alpha>0$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

β) Αν $\alpha<0$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

α) $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq 2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1\geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2\geq 0$ που ισχύει.

Το ‘=’ ισχύει για $\alpha=1$.

β) $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha\cdot\alpha+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+1\geq -2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq 0$ που ισχύει.

Το ‘=’ ισχύει για $\alpha=-1$.

3. Αν $0<x<y$ τότε να αποδείξετε ότι $x^2<y^2$.

Λύση

1ος τρόπος: Είναι $x<y \Leftrightarrow x-y<0$ και $0<x<y \Leftrightarrow x+y>0$.

Άρα $(x-y)(x+y)<0 \Leftrightarrow x^2-y^2<0 \Leftrightarrow x^2<y^2$.

2ος τρόπος: Είναι $x<y \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x^2<xy$ και $x<y \overset{y>0}{\Leftrightarrow} xy<y^2$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $x^2<xy<y^2 \Rightarrow x^2<y^2$.

3ος τρόπος: Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την ανίσωση $x<y$ με τον εαυτό της και προκύπτει $x^2<y^2$.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Αν $-3\leq x\leq -1$ και $5\leq y\leq 7$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ β) $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$

γ) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$ δ) $\frac{2}{y}-\frac{1}{3x}$

2. α) Αν $0<x<y$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{x-10}{x}<\frac{y-10}{y}$$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα κλάσματα

$$\frac{1997}{2007},\ \frac{1998}{2008},\ \frac{1999}{2009}$$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{\alpha^4+1}{\alpha^2}\geq 2$$

4. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι ομόσημοι τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geq 2$

β) $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha+\gamma}{\beta}\geq 6$

γ) $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 4$

δ) $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9$

ε) $\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\omega\geq 2$

Πότε ισχύει κάθε μία από τις παραπάνω ισότητες;

5. Να αποδείξετε ότι

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε

$$\ldots<\alpha^4<\alpha^3<\alpha^2<\alpha<1$$

β) Αν $\alpha>1$ τότε

$$1<\alpha<\alpha^2<\alpha^3<\alpha^4<\ldots$$

2.5 / 5 | **Ανισώσεις (Κοινές λύσεις ανισώσεων – Διπλές ανισώσεις)** | **55**

1. Θεωρία

Τις ανισώσεις τις λύνουμε όπως και τις εξισώσεις. Η μόνη διαφορά είναι πως όταν διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου τότε αν αυτός είναι αρνητικός τότε αλλάζουμε την φορά της ανίσωσης.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Τι διαφορά έχει μία ανίσωση από μία ανισότητα;

2. Η ανίσωση $3x \geq 3$ έχει άπειρες λύσεις ή είναι αόριστη (δηλαδή ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3(x-2)-5(x+1) \geq 3-2(x-3)$

β) $3(x+1)-2(x-1) > 6$

γ) $-3(x-4) \geq 6-4(x+1)$

δ) $5(3x-2)-6(x-1) > 20$

ε) $3(x+5)-2(x-3) \geq 4x$

2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\dfrac{3x+1}{2}-x<\dfrac{4-3x}{4}$

β) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{x-4}{6}<2-\dfrac{3-2x}{4}$

γ) $2-\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{x+3}{2}$

δ) $\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x+5}{2}<-1-\dfrac{10+x}{4}$

ε) $\dfrac{3(x-4)}{5}-2\dfrac{(x+5)}{6}<\dfrac{5x-1}{10}$

3. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 2x+4<5+3x \\ 3-x \leq 7x+1 \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{2(x-3)}{3}-x<0 \\ \dfrac{1}{2}x+2-\dfrac{3x+1}{3}>x \end{cases}$

β) $\begin{cases} 1-\dfrac{1-x}{2}<x \\ 1-\dfrac{4-x}{4} \geq \dfrac{x+4}{8} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 2-x>2x-8 \\ \dfrac{x-3}{4}-x<\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3} \end{cases}$

4. Να λύσετε τις διπλές ανισώσεις:

α) $x-1 \leq 2(1-2x)<4-x$

β) $-8 \leq 12-4(x+2) \leq 4$

γ) $\dfrac{3x+2}{4} \leq x-1 \leq \dfrac{2-x}{3}$

δ) $1-\dfrac{2(x-1)}{3} \leq 2(x+1)-3<\dfrac{x}{2}+x+2$

5. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 3x-11>10(x+1) \\ 7x-5>2(2x-10) \end{cases}$

β) $\begin{cases} \dfrac{x-6}{2}+\dfrac{x}{6} \leq \dfrac{3x-4}{3} \\ \dfrac{2x-1}{5}>\dfrac{x}{10}-\dfrac{2-x}{2} \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 3-\dfrac{1-2x}{2} \geq \dfrac{1}{2} \\ 6-\dfrac{x+20}{7} \geq \dfrac{3x+30}{7} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{5}-x>\dfrac{6}{15} \\ \dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{5}{4} \end{cases}$

6. Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο που επαληθεύει κάθε ανίσωση

α) $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{4x+2}{3}>\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}$

β) $1-\dfrac{2(x-1)}{3} \geq 2(x+1)-3$

7. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\begin{cases} 3+x>x \\ x-4<5 \end{cases}$

β) $\begin{cases} -3(2+x)>-3x \\ x+2>7 \end{cases}$

4. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x για τον οποίο ισχύει

$$\frac{x}{x+1}<\frac{5}{7} \quad \text{και} \quad \frac{x+1}{x+2}>\frac{5}{7}$$

2. Ποιες είναι οι λύσεις των παρακάτω ανισώσεων;

α) $0x>3$ β) $0x>-3$ γ) $0x<3$ δ) $0x<-3$

ε) $0x>0$ στ) $0x \leq 0$ η) $x \geq x$ ζ) $x \geq x+1$

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε τον φυσικό αριθμό που βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 75 και 85 και ο οποίος όταν διαιρεθεί με το 7 αφήνει υπόλοιπο 4.

2. Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που το τριπλάσιό του αυξημένο κατά 10 είναι μικρότερο από το μισό του.

3. Ένας πλασιέ βιβλίων πληρώνεται με 30 € για κάθε εγκυκλοπαίδεια που πουλάει. Αν τα ημερήσια έξοδά του είναι 20 € να υπολογίσετε πόσες εγκυκλοπαίδειες πρέπει να πουλήσει ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον 1.400 € σε ένα μήνα (22 εργάσιμες ημέρες).

4. Ένα γραφείο ενοικιάσεως αυτοκινήτων έχει δύο εναλλακτικά πακέτα προσφορών.
Α: Χρέωση 8 € ανά ημέρα ενοικίασης του αυτοκινήτου και χρέωση 0,05 € για κάθε χιλιόμετρο
Β: Χρέωση 0,10 € για κάθε χιλιόμετρο
Αν κάποιος θέλει να ενοικιάσει ένα αυτοκίνητο για 15 ημέρες τότε πόσα το πολύ χιλιόμετρα πρέπει να διανύσει ώστε να τον συμφέρει το Α πακέτο προσφοράς;

5. Ένας εκδοτικός οίκος ανέλαβε την παραγωγή και διάθεση ενός τίτλου. Το κόστος παραγωγής των βιβλίων είναι 8.000 € και το κόστος διάθεσης ανά βιβλίο είναι 0,50 €. Το κέρδος του βιβλιοπωλείου είναι 4 € ανά βιβλίο και η τιμή πώλησης του βιβλίου είναι 14 €. Πόσα βιβλία πρέπει να πουλήσει ο εκδοτικός οίκος ώστε να έχει κέρδος;

6. Το εισιτήριο εισόδου (με την ενοικίαση του εξοπλισμού) σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει 7 €. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι 4 €. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι 75 €, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφτεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να τον συμφέρει η αγορά του εξοπλισμού;

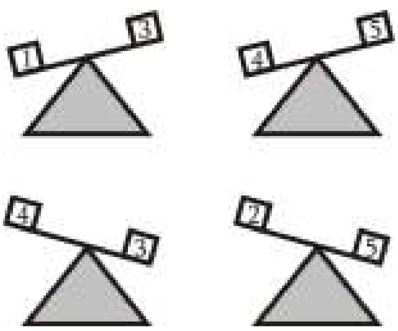
7. Ένας χορευτικός σύλλογος οργανώνει εκδρομές κάθε χρόνο. Το κόστος συμμετοχής σε κάθε εκδρομή είναι 120 € ενώ το κόστος συμμετοχής των μελών είναι 80 €. Σε πόσες εκδρομές πρέπει να συμμετέχει κάποιος σε έναν χρόνο ώστε να τον συμφέρει να γραφτεί μέλος στο σύλλογο αν το κόστος εγγραφής είναι 200 € το χρόνο;

2. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Ο Βάσος, η Τάνια, η Μαρία, ο Τίμος και η Ράνια έχουν διαφορετικές ηλικίες. Η Μαρία είναι μεγαλύτερη από το Βάσο, αλλά μικρότερη από την Τάνια. Ο Τίμος είναι μεγαλύτερος από την Τάνια. Η Ράνια είναι μεγαλύτερη από το Βάσο αλλά μικρότερη από τη Μαρία. Βάλε στη σειρά τα ονόματα των παιδιών ανάλογα με την ηλικία τους.

Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα

2. Ποιο είναι το πιο ελαφρύ από τα παρακάτω κουτιά;



3. Σε μια συντροφιά ο Γιάννης είναι μεγαλύτερος από τον Δήμο, ο Ανδρέας είναι μεγαλύτερος από όλους, ο Θάνος είναι μικρότερος από τον Γιάννη και ο Βασίλης μικρότερος από τον Δήμο. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

α) Ο Βασίλης είναι μεγαλύτερος από το Γιάννη
β) Ο Θάνος είναι μεγαλύτερος από τον Ανδρέα
γ) Ο Δήμος είναι μικρότερος από τον Βασίλη
δ) Ο Ανδρέας είναι μεγαλύτερος από το Θάνο

Διαγωνισμός Τράπεζας της Ελλάδας 2007

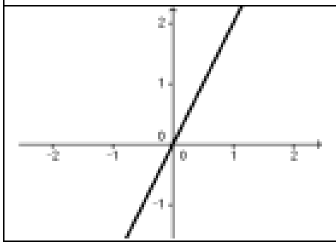
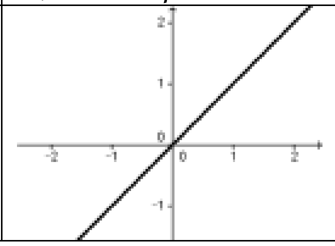
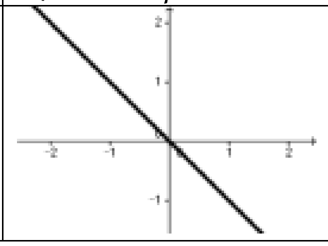
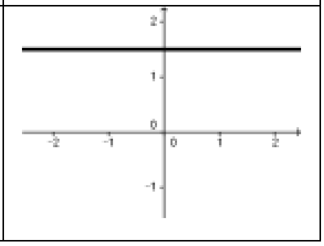
4. Εταιρεία έδωσε στους εργαζομένους της το δικαίωμα επιλογής, να πάρουν αύξηση 26€ τον μήνα ή αύξηση του μισθού τους κατά 3,2%. Τι συμφέρει να κάνουν οι εργαζόμενοι;

3.1 / 1 Γραμμική εξίσωση Ι (Γραφική παράσταση)

1. Θεωρία

Γραμμική εξίσωση. Γραφική παράσταση γραμμικής εξίσωσης.

Ειδικές περιπτώσεις γραμμικής εξίσωσης.

$f(x)=\alpha x$	$f(x)=x$	$f(x)=-x$	$f(x)=\beta$
Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.	Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, διχοτόμος του 1ου και του 3ου τεταρτημορίου. Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45°$.	Ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, διχοτόμος του 2ου και του 4ου τεταρτημορίου. Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $135°$.	Ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
			

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Τι είναι η γραμμική εξίσωση ως προς $x,\ y$;

2. Μπορείτε να γράψετε τις εξισώσεις δύο ευθειών που διέρχονται από το σημείο $A(1,2)$;

3. Τι γνωρίζετε για την ευθεία με εξίσωση $y=x$;

4. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που

α) διέρχεται από το $A(2,1)$ και είναι $//x'x$

β) διέρχεται από το $B(1,-3)$ και είναι $//y'y$

5. Πόσα σημεία είναι ικανά για να προσδιορίσουν ακριβώς τη θέση μίας ευθείας;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται η εξίσωση $x-2y=4$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα λύσεων της εξίσωσης:

x	-2	-1	0			
y				1	2	3

2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των:

$\varepsilon_1: y=x-3$ $\quad\varepsilon_2: y=x+1$ $\quad\varepsilon_3: y=x$

$\varepsilon_4: y=-x-3$ $\quad\varepsilon_5: y=-x+1$ $\quad\varepsilon_6: y=-x$

3. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις:

α) $\varepsilon_1: x-2y=4$ β) $\varepsilon_2: 2x+y=8$

γ) $\varepsilon_3: -3x+2y=12$ δ) $\varepsilon_4: -2x-3y=6$

4. Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon_\lambda): x-y=\lambda$$

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία για $\lambda=1$

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων και την ευθεία για $\lambda=2$

γ) Τι παρατηρείτε;

5. Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon_\lambda): y=\lambda x$$

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία για $\lambda=1$

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων και την ευθεία για $\lambda=-1$

γ) Τι παρατηρείτε;

6. Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών της άσκησης 3.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχονται από το σημείο $A(2,-3)$ και είναι

α) παράλληλη στον $x'x$

β) παράλληλη στον $y'y$

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχονται από το σημείο $A(-1,2)$ και είναι

α) κάθετη στον $x'x$

β) κάθετη στον $y'y$

3.1 / 2 | Γραμμική εξίσωση ΙΙ (Σημείο που ανήκει – Κοινά σημεία με άξονες) | 58

1. Θεωρία

- Αν ένα σημείο ανήκει σε ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας. Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μίας ευθείας τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία.
- Για να βρούμε τα κοινά σημεία μίας γραμμικής εξίσωσης με τον άξονα $x'x$ αντικαθιστούμε στην γραμμική εξίσωση όπου y το 0.
  Για να βρούμε τα κοινά σημεία μίας γραμμικής εξίσωσης με τον άξονα $y'y$ αντικαθιστούμε στην γραμμική εξίσωση όπου x το 0.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Πώς εξετάζουμε αν ένα σημείο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας καμπύλης με δοσμένη εξίσωση;

2. Να βρείτε ποια από τα σημεία $A(2,1)$ $B(2,3)$, $\Gamma(1,1)$, $\Delta(-1,3)$ ανήκουν στην ευθεία

$$(\varepsilon_1): x+2y=3$$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να εξετάσετε σε ποιες από τις ευθείες

$\varepsilon_1: y=x-3$ $\quad\varepsilon_2: y=x+1$ $\quad\varepsilon_3: y=x$

$\varepsilon_4: y=-x-3$ $\quad\varepsilon_5: y=-x+1$ $\quad\varepsilon_6: y=-x$

ανήκουν τα σημεία:

α) $A(3,0)$ **β)** $B(1,0)$ **γ)** $\Gamma(-1,1)$

2. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το σημείο $A(3\lambda-1, 2\lambda+5)$ να ανήκει στην ευθεία

$$(\varepsilon_1): y=2x-5$$

3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η ευθεία

$$(\varepsilon): (\alpha^2+\beta^2)x-(\alpha+2\beta)y+5=0$$

να διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$.

4. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y=(\lambda^2-\lambda+3)x-\lambda-2$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η (ε) διέρχεται από το $A(1,4)$.

5. Δίνονται οι ευθείες

i) $\varepsilon_1: x=3,\ \varepsilon_2: y=2$ **ii)** $\varepsilon_1: x=-2,\ \varepsilon_2: y=0$

iii) $\varepsilon_1: x=0,\ \varepsilon_2: y=-3$ **iv)** $\varepsilon_1: x=1,\ \varepsilon_2: y=1$

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις

α) να τις σχεδιάσετε

β) να προσδιορίσετε το κοινό τους σημείο

γ) να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου που σχηματίζεται από τις δύο ευθεί-ες και τους δύο άξονες

6. Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon): (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x-2(\alpha+\beta+\gamma)y+3=0$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε η ευθεία (ε) να διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

7. Δίνεται η ευθεία $4x+3y=12$. Να βρείτε:

α) τα σημεία τομής Α και Β της ευθείας με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα

β) το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων

γ) την περίμετρο του ΟΑΒ

8. Δίνονται οι ευθείες

i) $2x-3y=4$ **ii)** $x+2y=3$

iii) $-x+2y=1$ **iv)** $x+y=1$

Για κάθε μία από τις παραπάνω ευθείες:

α) Να βρείτε ένα τυχαίο σημείο της ευθείας

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες

γ) Να βρείτε το σημείο της ευθείας με τετμημένη ίση με 2

δ) Να βρείτε το σημείο της ευθείας με τεταγμένη ίση με 1

ε) Να την σχεδιάσετε

9. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο

α) $A(2,1)$ **β)** $B(2,3)$ **γ)** $\Gamma(1,1)$

δ) $\Delta(-1,3)$ **ε)** $E(2,2)$ **στ)** $Z(2,-2)$

3.1 / 3 | Γραμμική εξίσωση ΙΙΙ (Ορισμός) | 59

1. Θεωρία

- Η γραμμική εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία αν $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ δηλαδή αν τα Α και Β δεν είναι ταυτόχρονα μηδέν.
- Μία ευθεία είναι παράλληλη στον $x'x$ όταν είναι της μορφής $0x+By+\Gamma=0$.
- Μία ευθεία είναι παράλληλη στον $y'y$ όταν είναι της μορφής $Ax+0y+\Gamma=0$.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες:

α) $(\lambda^2-4)x+(\lambda-2)y+3=0$

β) $(\lambda-1)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+3=0$

γ) $(\lambda^2-4)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+5-\lambda=0$

δ) $(\lambda^2-1)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+3\lambda+5=0$

2. **α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(\alpha+2)x+(\alpha^2-9)y+3\alpha^2-8\alpha+5=0$$

παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

β) Πότε είναι παράλληλη στον $y'y$.

3. **α)** Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$(2\alpha^2+3\alpha-5)x+(\alpha^2-\alpha-2)y+(1-2\alpha)=0$$

παριστάνει ευθεία

β) Για ποια τιμή του α η παραπάνω ευθεία διέρχεται από το $O(0,0)$

4. Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon_1):\alpha x+5y=10$$

α) Να βρείτε το α αν η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ στο 2

β) Για την τιμή του α που βρήκατε παραπάνω

i) να σχεδιάσετε την ευθεία

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες

5. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1):y=(3\lambda-4)x+2\lambda-6$.

Για ποια τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ η ευθεία:

α) διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$

β) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

γ) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$

δ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

ε) τέμνει τον $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 3

στ) τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2

6. Δίνεται η εξίσωση

$$(\alpha^2-2\alpha)x+(\alpha-2)y+\alpha^2-4=0$$

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε

α) η εξίσωση να παριστάνει ευθεία

β) η εξίσωση να παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

7. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda+1)x+(\lambda+2)y=\lambda+3$$

α) Να εξηγήσετε γιατί η εξίσωση παριστάνει ευθεία για οποιονδήποτε αριθμό $\lambda\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε για ποιο λ η παραπάνω ευθεία

i) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

ii) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$

iii) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Σε κάθε μία από τις προηγούμενες περιπτώσεις να σχεδιάσετε την αντίστοιχη ευθεία.

3. Επεκτάσεις

1. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^2-4)x+(2\lambda^2+3\lambda-2)y=\lambda^3-\lambda^2-6\lambda$$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να παριστάνει ευθεία

β) Όταν δεν παριστάνει ευθεία τι παριστάνει;

γ) Πότε διέρχεται από την αρχή των αξόνων;

2. Δίνεται η εξίσωση

$$(2\lambda^2-3\lambda)x+(6-3\lambda^2)y=3\lambda+13-2\lambda^2 \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση παριστάνει ευθεία

β) Αν η ευθεία που εκφράζεται από την (1) διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ τότε να βρείτε το λ

γ) Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας

i) με τους άξονες

ii) με την ευθεία $y=x$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω ευθεία με τους άξονες

3.1 / 4 **Γραμμική εξίσωση IV (Συντελεστής διεύθυνσης)** **60**

1. Θεωρία

Η γραμμική εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία

- αν $B\neq 0$ παίρνει την μορφή $y=-\frac{A}{B}x-\frac{\Gamma}{B}$ με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{A}{B}$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,\beta)$.
- αν $B=0$ τότε $A\neq 0$ παίρνει την μορφή $x=-\frac{\Gamma}{A}$ όπου δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $K\left(-\frac{\Gamma}{A},0\right)$.

Έστω ευθείες $(\varepsilon_1): y=\alpha_1x+\beta_1$, $(\varepsilon_2): y=\alpha_2x+\beta_2$. Ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=\alpha_2\\ \beta_1\neq\beta_2\end{cases}$ και $\varepsilon_1\equiv\varepsilon_2 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=\alpha_2\\ \beta_1=\beta_2\end{cases}$.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνονται οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις:

$(\varepsilon_1): 2x-3y=4$ $\quad$ $(\varepsilon_2): x+2y=3$

$(\varepsilon_3): -x+2y=1$ $\quad$ $(\varepsilon_4): x+y=1$

$(\varepsilon_5): 3x-2y=2$ $\quad$ $(\varepsilon_6): -4x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{5}=0$

$(\varepsilon_7): 2x-3y=7$ $\quad$ $(\varepsilon_8): x-2y=1$

$(\varepsilon_9): 4x+\frac{1}{3}y=3$ $\quad$ $(\varepsilon_{10}): x=-y$

α) Να γράψετε τις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις στη μορφή $y=\alpha x+\beta$

β) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης σε κάθε μία από τις παραπάνω γραμμικές εξισώσεις

γ) Να εξετάσετε αν κάποιες από τις παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους

2. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης των παρακάτω ευθειών:

$(\varepsilon_1): (\lambda^2-4)x+(\lambda+5)y+3=0$

$(\varepsilon_2): (\lambda+1)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+3=0$

$(\varepsilon_3): (\lambda^2-9)x+(\lambda^2-3\lambda+2)y+5-\lambda=0$

$(\varepsilon_4): (\lambda^2-1)x+(\lambda^2-4\lambda+3)y+3\lambda+5=0$

$(\varepsilon_5): (3\lambda-1)x-(4\lambda^2-9)y+\frac{1}{\lambda}=0$

3. Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$;

α) $(\varepsilon_1): y=(\lambda^2+4)x+5$ και $(\varepsilon_2): y=4\lambda x-4\lambda$

β) $(\varepsilon_1): y=\lambda^2x+5$ και $(\varepsilon_2): y=x-5\lambda$

4. Έστω οι ευθείες

$(\varepsilon): (\mu+1)x-2\mu y=\lambda$, $(\eta): (\mu-1)x-3y=2\lambda-1$:

Να βρείτε για ποιες τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ είναι

α) $\varepsilon \nparallel \eta$ $\quad$ **β)** $\varepsilon // \eta$ ή $\varepsilon\equiv\eta$

5. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\varepsilon // \eta$ αν

$(\varepsilon): (\lambda+1)x+(\lambda-4)y+\lambda^2-3\lambda+2=0$ και

$(\eta): (\lambda+2)x+3\lambda y+\lambda-4=0$

6. Έστω οι ευθείες

$\varepsilon_1: (\mu-1)x-(\mu-2)y=0$,

$\varepsilon_2: (\mu-2)x-(\mu+1)y-3=0$

Βρείτε τα $\mu\in\mathbb{R}$ αν:

α) $\varepsilon_1 \nparallel \varepsilon_2$ $\quad$ **β)** $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

7. Να βρείτε τα $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ αν

$(\varepsilon_1): (\lambda-1)x+(\lambda+1)y-3=0$ και

$(\varepsilon_2): (2\lambda-3)x+3y+7=0$

3. Επεκτάσεις

1. Στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Οxy δίνεται η ευθεία με (ε) εξίσωση

$$y=(3\lambda-1)x+2\mu,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

είναι παράλληλη με την ευθεία (δ) με εξίσωση $y=2\lambda x$ και διέρχεται από το σημείο $K(2,8)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Να επαληθεύσετε ότι τα σημεία $\Lambda(-4,-4)$ και $M(-1,2)$ ανήκουν στην ευθεία (ε)

Θαλής Γ’ Γυμνασίου 2011

1. Προβλήματα

1. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 20. Αν ο ένας αριθμός είναι ο x και ο άλλος ο y τότε
α) ποια σχέση συνδέει τους δύο αριθμούς;
β) να σχεδιάσετε την ευθεία που αντιστοιχεί στην παραπάνω σχέση

2. Ένας δρομέας σε ένα γήπεδο έτρεξε συνολικά 2 ώρες. Αν από την εκκίνηση μέχρι ένα ενδιάμεσο σημείο Α (απόσταση x) έτρεχε με ταχύτητα 3 Km/h και από το ενδιάμεσο σημείο μέχρι το τέλος (απόσταση y) έκανε βάδην με ταχύτητα 2 Km/h τότε
α) Να βρείτε τη γραμμική εξίσωση που συνδέει τις αποστάσεις x και y
β) Αν διένυσε συνολικά 4 Km τότε πόσα χιλιόμετρα έκανε βάδην;

3. Ένα κοπάδι έχει x πρόβατα και y κατσίκια. Αν το πλήθος των κεφαλιών των προβάτων και των ποδιών των κατσικιών είναι 200
α) να βρείτε την γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x και y
β) να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες
γ) Τι εκφράζουν τα παραπάνω σημεία;

2. Επεκτάσεις

1. Ένα ξενοδοχείο έχει δωμάτια από τα οποία x είναι δίκλινα και y είναι τρίκλινα. Αν τα συνολικά κρεβάτια του ξενοδοχείου είναι 60 τότε
α) να βρείτε την γραμμική εξίσωση που συνδέει τα x και y
β) να σχεδιάσετε την αντίστοιχη γραμμική εξίσωση
γ) να βρείτε πόσα το πολύ δίκλινα και πόσα το πολύ τρίκλινα δωμάτια μπορεί να έχει το ξενοδοχείο
δ) να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα

Δίκλινα	3		6	
Τρίκλινα		4		8

ε) Γιατί τα δίκλινα δεν μπορεί να είναι μονός αριθμός;
στ) Τι αντίστοιχος περιορισμός αντιστοιχεί για τα τρίκλινα;

2. Διαθέτουμε χαρτονομίσματα των 5 € και των 10 € συνολικής αξίας 300 €.
α) Αν x είναι τα χαρτονομίσματα των 5 € και y τα χαρτονομίσματα των 10 € τότε να βρείτε την εξίσωση που τα συνδέει
β) Βρείτε μία λύση της εξίσωσης
γ) Να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα είχαμε αν είχαμε μόνο χαρτονομίσματα των 5 € ή μόνο των 10 €. Τι εκφράζει αυτό γραφικά;
δ) Όλα τα σημεία της ευθείας είναι λύσεις του προβλήματος;
ε) Ποιοι είναι οι περιορισμοί για το x και y;

3. Σπαζοκεφαλιές

1. Ο Κώστας μπορεί να αγοράσει συνολικά 32 μήλα και πορτοκάλια δίνοντας 52 €. Ένα μήλο κοστίζει 2 € και ένα πορτοκάλι κοστίζει 1 €. Πόσα είναι τα μήλα που μπορεί να αγοράσει;
Ιαπωνικός Μαθηματικός Διαγωνισμός

2. Ο Κώστας πήγε διακοπές αλλά ήταν άτυχος, ο καιρός ήταν πολύ περίεργος. Για 15 διαφορετικές ημέρες έβρεχε, όχι όμως ολόκληρη την ημέρα. Μετά από κάθε βροχερό πρωινό ακολουθούσε ένα ηλιόλουστο απόγευμα και μετά από κάθε βροχερό απόγευμα ακολουθούσε ένα ηλιόλουστο πρωινό. Συνολικά υπήρχαν 12 ηλιόλουστα πρωινά και 13 ηλιόλουστα απογεύματα. Πόσες ημέρες διήρκεσαν οι διακοπές του Κώστα;

3. Είναι γνωστό ότι 5 μήλα και 3 πορτοκάλια ζυγίζουν όλα μαζί 440 γρ., ενώ 5 πορτοκάλια και 3 μήλα ζυγίζουν μαζί 424 γρ. Τα πορτοκάλια είναι όλα του ίδιου βάρους, όπως επίσης και τα μήλα είναι μεταξύ τους του ίδιου βάρους. Το ένα μήλο και το ένα πορτοκάλι ζυγίζουν μαζί:
α) 102 γρ. β) 104 γρ. γ) 108 γρ. δ) 110 γρ.
Διαγωνισμός Ε.Τ.Ε. 2004

4. Έχουμε 27 πιρούνια. Κάποια από αυτά είναι με 3 και κάποια με 4 δόντια. Αν μετρήσουμε όλα τα δόντια τα βρίσκουμε 98. Πόσα πιρούνια με 3 και πόσα πιρούνια με 4 δόντια έχουμε;
Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.

3.2 / 1 **Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του** **62**

1. Θεωρία

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους. Γραφική λύση γραμμικού συστήματος.

Αριθμός λύσεων	Κοινά σημεία	Σύστημα	Γεωμετρική ερμηνεία	Συμβολισμός
Καμία λύση	Κανένα	Αδύνατο	Παράλληλες	$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
Μία λύση	Ένα	Μοναδική λύση	Τεμνόμενες	$\varepsilon_1 \nparallel \varepsilon_2$
Άπειρες λύσεις	Άπειρα	Αόριστο	Ταυτίζονται (συμπίπτουν)	$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να προσδιορίσετε γραφικά το σύνολο λύσεων στα παρακάτω συστήματα εξισώσεων.

α) $\begin{cases} y = x+2 \\ y = 4-x \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+y=0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$

2. Να προσδιορίσετε γραφικά το σύνολο λύσεων στα παρακάτω συστήματα εξισώσεων.

α) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=3 \\ y=-x+3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 2x+3y=4 \\ y=-\dfrac{2}{3}x+1 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ 3x+2y-6=0 \end{cases}$

3. Δίνεται η γραμμική εξίσωση

$$(\varepsilon_1): x+2y=4$$

α) Να γράψετε μία άλλη γραμμική εξίσωση που να έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με τη δοσμένη

β) Να γράψετε μία άλλη γραμμική εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με τη δοσμένη

4. Δίνεται η γραμμική εξίσωση

$$(\varepsilon_1): 3x+y=1$$

α) Να γράψετε μία άλλη γραμμική εξίσωση που να ταυτίζεται με τη δοσμένη

β) Να γράψετε μία άλλη γραμμική εξίσωση που να είναι παράλληλη με τη δοσμένη

5. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1): x=2$ και $(\varepsilon_2): y=3x$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου Β

β) Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και Α σημείο του $x'x$ με τετμημένη 2

6. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τις ευθείες

$(\varepsilon_1): x=3$, $(\varepsilon_2): y=2$, $(\varepsilon_3): x=1$, $(\varepsilon_4): y=7$

και να βρείτε

α) τα κοινά τους σημεία

β) το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζουν

γ) την περίμετρο και το εμβαδόν του

3. Επεκτάσεις

1. Δίνονται δύο ευθείες ε_1, ε_2 οι οποίες τέμνονται στο σημείο Α. Η ευθεία ε_1 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση 4, ενώ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$(\eta): y=2x$$

και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(0,6)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των παραπάνω ευθειών καθώς και το κοινό τους σημείο Α

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy, A το κοινό σημείο των ευθειών και B το σημείο όπου η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$

Θαλής Γ' Γυμνασίου 2009

2. Οι παρακάτω ευθείες έχουν το ίδιο κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$

$$(\varepsilon_1): x+2y=2 \text{ και } (\varepsilon_2): \mu x+(\mu-5)y=6$$

α) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$

β) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες

3. Δίνονται οι παρακάτω ευθείες:

$(\varepsilon_1): x-y=-6$, $(\varepsilon_2): x+y=4$, $(\varepsilon_3): x+3y=6$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής των παραπάνω ευθειών ανά δύο

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του

3.3 / 1 **Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος**

1. Θεωρία

- Μέθοδος της αντικατάστασης
- Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο της αντικατάστασης:

α) $\begin{cases} x+4y=5 \\ 2x-4y=2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ x-2y=14 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 5x-7y=5 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

α) $\begin{cases} x-3y=7 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x-y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x+4y=2 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 5x-7y=11 \\ 6x-4y=0 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=5 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-2y=4 \\ -2x+4y=7 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \alpha+\beta=4 \\ 3\beta=15-3\alpha \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 3\omega=2-\varphi \\ 3\varphi=6-9\omega \end{cases}$

4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 0{,}3x-1{,}5y+0{,}3=0 \\ y-0{,}3x=-0{,}2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 0{,}5x+y=-1 \\ 4{,}5x-y=21 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y=\frac{19}{2} \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \frac{1}{2}x+4y=1 \\ \frac{1}{2}x-y+\frac{3}{2}=0 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 2(x+2y)-3(x-3y)=-83 \\ 2(y-2x)-(x-2y)=-49 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} 7(2x-y)+5(3y-4x)=-30 \\ 5(y-x+3)=6(y-2x) \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 5(x+2y)-(3x+11y)=14 \\ 7x-9y-3[5(x-4)-4(x+y-5)]=38 \end{cases}$

6. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{x}{2}=\frac{y}{5} \\ 3x-7y=15 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x=\frac{y}{4} \\ x+2y=10 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=-4 \\ y-\frac{x}{6}=5 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \sqrt{2}x+\sqrt{3}y=5 \\ \frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{3}}=2 \end{cases}$

7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{2x+2}{3}+y=3 \\ \frac{x+2}{2}-1=\frac{y+2}{3} \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x+y+4=0 \\ \frac{3x+y}{3}+\frac{2y-2}{5}=\frac{6x}{5} \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}+\frac{y-1}{4}=\frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{2}-\frac{y-1}{2}=\frac{3}{4} \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \frac{4x-3}{5}+\frac{y-1}{2}=2 \\ \frac{3x+2}{4}-\frac{2y-1}{3}=1 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} \frac{x+5}{2}-\frac{6-y}{4}=2 \\ \frac{x+1}{4}-\frac{5y-2}{6}=3 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3}-\frac{x+y}{6}=-\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2}+y=7 \end{cases}$

8. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{3x-y}{2}+\frac{x+y}{5}=x+\frac{y+2}{3}+1 \\ x-\frac{x+y}{2}-1=y-\frac{x+6}{3} \end{cases}$

β) $\begin{cases} \frac{3x-2y+1}{2}=\frac{x-3y-2}{3} \\ \frac{x+2y}{5}=\frac{2x+y+1}{3} \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{x-2}{4}+\frac{y-3}{8}=\frac{x}{2}-1 \\ \frac{4x+1}{4}-\frac{5y-9}{6}=\frac{x}{2}+1 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \frac{3x-2y}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{4}{3} \\ \frac{10x-15y}{5}+\frac{2x+2y}{10}=-4 \end{cases}$

9. Βρείτε τα α, β αν $(\alpha-\beta-2)^2+(3\alpha+\beta-2)^2=0$

3.3 / 2 | **Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος (Γεωμετρική ερμηνεία)** | **64**

1. Θεωρία

Η γεωμετρική ερμηνεία ενός συστήματος εξισώσεων είναι η εύρεση των κοινών σημείων (σημείων τομής) των γραμμών που αντιστοιχούν στις δύο εξισώσεις

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο ευθειών κάθε ενός από τα παρακάτω συστήματα;

α) $\begin{cases} 2x+4y=8 \\ -x-2y=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+3y=10 \\ \frac{2}{5}x+\frac{6}{5}y=4 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=2 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών.

α) $(\varepsilon): y=2x$ και $(\zeta): y=-x+1$

β) $(\varepsilon): y=-x+3$ και $(\zeta): y=x+4$

γ) $(\varepsilon): x-\frac{2}{3}y=0$ και $(\zeta): 4x-3y=1$

δ) $(\varepsilon): 7x-11y=4$ και $(\zeta): 3x+13y=15$

2. Να βρείτε τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών:

α) $(\varepsilon_1): x-3y=-4$ και $(\varepsilon_2): -2x+y=8$

β) $(\varepsilon_1): 7x-y=19$ και $(\varepsilon_2): -2x+3y=-19$

γ) $(\varepsilon_1): 5x+4y=7$ και $(\varepsilon_2): 10x+8y=3$

δ) $(\varepsilon_1): 2x-3y=4$ και $(\varepsilon_2): 4x-6y=8$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

α) $A(2,3)$, $B(4,5)$ β) $A(-1,4)$, $B(2,-3)$

γ) $A(-3,5)$, $B(4,5)$ δ) $A(3,7)$, $B(3,-1)$

4. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(2,-1)$

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Gamma(4,3)$ είναι σημείο της ευθείας που ορίζουν τα Α και Β

5. Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon): 3x-2y=1 \text{ και } (\zeta): x-4y=-3$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής Κ των δύο ευθειών

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Κ και από το σημείο που τέμνει η (ζ) τον $x'x$

6. Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon): 2x+y=3 \text{ και } (\zeta): 3x-2y=1$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής Κ των δύο ευθειών

β) Να ελέγξετε αν το Κ ανήκει στην ευθεία

$$(\eta): 7x-y=4$$

7. Οι παρακάτω ευθείες συντρέχουν;

$$(\varepsilon): x+y=2,\ (\zeta): x-y=6,\ (\eta): 2x-y=10$$

4. Επεκτάσεις

1. Δίνεται το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x+\kappa \end{cases}$$

α) Να επιλύσετε αλγεβρικά το σύστημα

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την παραπάνω λύση

2. Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$(\varepsilon): 3x-2y=1$$

Να βρείτε μία άλλη ευθεία που να έχει με την (ε)

α) ένα κοινό σημείο

β) κανένα κοινό σημείο

γ) άπειρα κοινά σημεία

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία τέμνει τον Oy στο σημείο $A(0,4)$ και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο με εμβαδό 10 τετραγωνικές μονάδες.

4. Οι ευθείες με εξισώσεις

$$(\varepsilon): 2x+y=3 \text{ και } (\zeta): 3x-2y=1$$

τέμνονται στο σημείο $A(2,0)$;

3.3 / 3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος (Από μη γραμμικά) 65

1. Θεωρία

- Για να λύσουμε οποιοδήποτε σύστημα γραμμικό ή μη γραμμικό η γενική μέθοδος λύσης είναι η μέθοδος της αντικατάστασης.
- Αν σε κάποια εξίσωση ο άγνωστος εμφανίζεται στον παρονομαστή τότε πρέπει αρχικά να πάρουμε **περιορισμό** ότι ο παρονομαστής αυτός πρέπει να είναι διάφορος του μηδέν.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

Α. α) $\begin{cases} x+y=11 \\ xy=24 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-y=2 \\ xy=35 \end{cases}$

Β. α) $\begin{cases} x^2-9y^2=5 \\ x+3y=2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+3y=5 \\ 5x-y^2=9 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} x^2+y^2=73 \\ x+y=11 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} x^2-2y+x=0 \\ x+2y=2 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

Α. α) $\begin{cases} \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-5 \\ \frac{2}{x}+\frac{6}{y}=1 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{15}{x}+\frac{6}{y}=8 \\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=-1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=1 \\ -\frac{2}{x}+\frac{9}{y}=-1 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \frac{2}{x}-\frac{1}{y}=1 \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-12 \end{cases}$

Β. α) $\begin{cases} \frac{1}{2x+1}-\frac{1}{y-2}=3 \\ \frac{3}{2x+1}+\frac{2}{y-2}=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{4}{x-y}+\frac{12}{x+y}=-1 \\ \frac{1}{x-y}+\frac{1}{2x+2y}=0 \end{cases}$

3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{2}{y}=0 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=0 \\ 2x+y=6 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}=\frac{3}{16} \end{cases}$ δ) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{12}{35} \\ xy=35 \end{cases}$

5. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

Α. α) $\begin{cases} 3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=5 \\ 2\sqrt{x}-5\sqrt{y}=-3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3\sqrt{x}-2\sqrt{y}=-5 \\ 4\sqrt{x}+2\sqrt{y}=-2 \end{cases}$

Β. α) $\begin{cases} (x+1)^2-y^2=x^2-(y+2)^2+1 \\ x+6y=2 \end{cases}$

β) $\begin{cases} y-x=1 \\ x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} y-x=1 \\ x^2+xy-y^2=1 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y=6 \\ (\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y=2 \end{cases}$

3. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y=12 \\ (x-3y)(2x-y)=0 \end{cases}$

β) $\begin{cases} 5x+y=12 \\ (2x+y)(4x-y+3)=0 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} (y-2x)(x+y)=0 \\ (x-y+6)(2x-y)=0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} (2x+y+6)(x+2y-3)=0 \\ x-2y=2 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} 3(x+3)-2(y+5)=1 \\ (x+3)(y-5)=x(y-7)+8 \end{cases}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 4x-2y+\frac{1}{x+3y}=-\frac{11}{2} \\ 6x-3y+\frac{2}{x+3y}=-8 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=12 \\ \frac{4y+3x}{xy}=17 \end{cases}$

γ) $\begin{cases} \frac{1}{2x-3y}-\frac{2}{x-4y}=\frac{2}{(2x-3y)(x-4y)} \\ \frac{2}{2x-3y}-\frac{6}{x-4y}=\frac{10}{(2x-3y)(x-4y)} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x+1}+\frac{9y^2-1}{3y-1}=31 \\ \frac{4xy+2x+2y+1}{2x+1}+\frac{9xy-3x-3y+1}{3y-1}=29 \end{cases}$

Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος (Παράμετροι)

1. Ασκήσεις για λύση

1. **α)** Να βρείτε το β αν η ευθεία με εξίσωση

$$y = 2x + \frac{\beta}{3}$$

διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

β) Για $\beta = 3$ να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} y = 2x + \dfrac{\beta}{3} \\ y^2 + xy = 12 \end{cases}$$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας

$$(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$$

αν αυτή διέρχεται από τα σημεία

$$A(\alpha, -1) \text{ και } B(1, 3\alpha)$$

3. Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon): 4\lambda x - 3(\lambda+1)y = 5 \text{ και } (\zeta): 2x - 6y = 3$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι δύο ευθείες να τέμνονται σε σημείο

α) του $x'x$

β) του $y'y$

4. Αν η εξίσωση

$$(\alpha - \beta + 1)x = \beta - 2\alpha + 3$$

είναι αόριστη τότε να βρείτε τα α και β.

5. Να βρείτε τα α και β ώστε η εξίσωση

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0$$

να αληθεύει για $x = 3$ και $x = -7$.

6. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες

$$\varepsilon_1 : y = \alpha x + \beta \text{ και } \varepsilon_2 : y = \beta x + \alpha$$

να τέμνονται στο σημείο $A(3,1)$.

7. Δίνονται οι ευθείες

$$(\varepsilon): y = x - 2 \text{ και } (\zeta): 3x - 4y = 5$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής Α των ευθειών

β) Αν η ευθεία

$$(\eta): (\lambda - 1)x + (3\lambda - 2)y = 0$$

διέρχεται από το σημείο Α τότε να βρείτε το λ

8. Να βρείτε τις τιμές των λ και μ αν η ευθεία

$$(\eta): 3 + \lambda x + (\mu - 2)y = 0$$

διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών

$$(\varepsilon): x + 2y = 5 \text{ και } (\zeta): x - y = -4$$

και από το σημείο $B(1,-1)$.

9. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία

$$(\varepsilon): 2x + 3y = 5$$

να διέρχεται από τα σημεία

$$A(\beta - \alpha, \alpha - 2) \text{ και } B(\beta, \alpha - \beta)$$

10. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η εξίσωση

$$x^2 + (\alpha - 2)x + \alpha + 4\beta = 0$$

να έχει ρίζες τους αριθμούς –1 και –2.

2. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε τα x, y ώστε η παράσταση

$$A = (x - 2y + 1)^2 + (3x + y - 1)^2 + 2007$$

να γίνεται ελάχιστη. Ποια είναι αυτή;

2. Έστω το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2\alpha y = 9 \\ \alpha x - 2\beta y = -10 \end{cases}$$

το οποίο έχει λύση την $(x,y) = (1,3)$.

α) Να βρείτε τα α και β

β) Να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας

$$(\varepsilon): y = 3\alpha x + 2\beta$$

όπου α, β είναι οι τιμές του α) ερωτήματος

3. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): 3x - 2y = 1$

α) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση

$$2y - 3x + 4\alpha = 0$$

να έχει λύση ένα σημείο της (ε)

β) Για την τιμή του α που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα να βρείτε το σημείο που τέμνει τον άξονα $x'x$ η ευθεία $(\zeta): 4x - 2y = \alpha$

4. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} (2\alpha - 1)x + (4\beta + 1)y = 3 \\ (\alpha + 1)x + (\beta - 2)y = 2 \end{cases}$$

με αγνώστους τα x και y. Να βρείτε τις τιμές των ώστε το σύστημα να έχει λύση το ζεύγος $(-1,1)$.

1. Ασκήσεις για λύση

1. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι:

$$AB = x+4,\ \ A\Gamma = 4-y,\ \ B\Gamma = y+2$$

Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο με περίμετρο 10 cm και με βάση κατά 1 cm μεγαλύτερη από κάθε μία από τις δύο ίσες πλευρές. Να βρείτε τα μήκη των τριών πλευρών.

3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή το Α έχει $AB = x^2$, $A\Gamma = 5-y^2$ και τα ύψη του $B\Delta = x+y$ και $\Gamma E = 1$ από το Β και Γ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η εξίσωση της πλευράς ΑΒ είναι $y = 2x$ της ΒΓ είναι $3y-5x=2$ και της ΑΓ είναι $y+2x=3$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ του τριγώνου.

5. Να υπολογίσετε τις διαστάσεις ενός ορθογωνίου με περίμετρο 22 cm και εμβαδόν 30 cm².

6. Βρείτε το εμβαδόν ορθογωνίου με διαδοχικές πλευρές $x+y+1,\ x+2,\ 3x-4,\ 2y-x$.

7. Ένα ξενοδοχείο έχει 40 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια. Αν το ξενοδοχείο έχει 95 κρεβάτια τότε να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα είναι τα τρίκλινα.

8. Μία παρέα 26 ατόμων θα πάνε εκδρομή και θα μετακινηθούν με 8 οχήματα (αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες). Με κάθε αυτοκίνητο μεταφέρονται 4 άτομα και με κάθε μοτοσυκλέτα 2 άτομα. Να βρείτε πόσα είναι τα αυτοκίνητα και πόσες οι μοτοσυκλέτες.

9. Μαρία: Αν μου δώσεις δύο, θα έχω όσα και εσύ.
Ελένη: Αν εσύ μου δώσεις δύο, θα έχω τα διπλάσια από σένα.
Πόσα έχει η καθεμιά;

10. Έστω το παρακάτω σύστημα όπου οι συντελεστές του x και του y σβήστηκαν κατά λάθος.

$$\begin{cases} ....x+y=4 \\ 6x-....y=3 \end{cases}$$

Μπορείτε να τους υπολογίσετε αν γνωρίζετε ότι το σύστημα έχει λύση $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$;

2. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε δύο αριθμούς οι οποίοι διαφέρουν κατά 33 και η μεταξύ τους διαίρεση δίνει πηλίκο 3 και υπόλοιπο 12.

2. Ένας φυσικός αριθμός όταν διαιρείται με το 5 ή με το 3 αφήνει υπόλοιπο 2 και πηλίκα που δίνουν άθροισμα 8. Ποιος είναι ο αριθμός;

3. Να διαιρέσετε το 375 σε δύο μέρη με λόγο $\frac{3}{15}$.

4. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 9. Αν ο αριθμός αυξηθεί κατά 27 προκύπτει διψήφιος αριθμός με εναλλαγή των ψηφίων του αρχικού αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

3. Σπαζοκεφαλιές

1. Κατασκεύασε ένα στέμμα από χρυσάφι, χαλκό, κασσίτερο και σίδηρο που να ζυγίζει 60 μνες: ο χρυσός και ο χαλκός να είναι τα δύο τρίτα αυτού, ο χρυσός και ο κασσίτερος τα τρία τέταρτα και ο χρυσός και ο σίδηρος τα τρία πέμπτα. Βρες τα βάρη του χρυσού, χαλκού, κασσίτερου και σιδήρου που χρειάζονται. **Παλατινή ανθολογία**

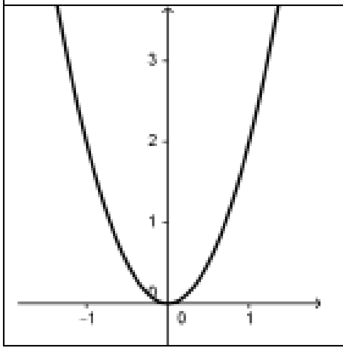
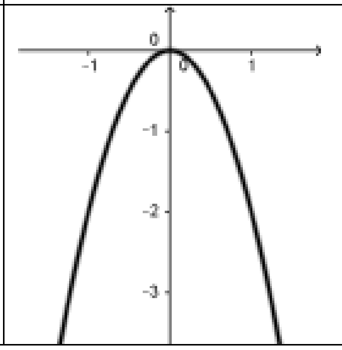
2. Βρείτε το πενταψήφιο password ώστε:

- Το άθροισμα του τρίτου και του πέμπτου ψηφίου του είναι ίσο με 14
- Το τέταρτο ψηφίο είναι μεγαλύτερο κατά ένα από το δεύτερο ψηφίο
- Το πρώτο ψηφίο είναι κατά ένα μικρότερο από το διπλάσιο του δεύτερου
- Το άθροισμα του δεύτερου και του τρίτου ψηφίου είναι ίσο με 10

4.1 / 1 Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$ (Γραφική παράσταση) 68

1. Θεωρία

Συνάρτηση, γραφική παράσταση συνάρτησης.

<table>
<tr><th colspan="4">$f(x)=\alpha x^2$ (Παραβολή)</th></tr>
<tr><td colspan="2">$\alpha>0$</td><td colspan="2">$\alpha>0$</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td>• Κορυφή το $O(0,0)$
• Βρίσκεται στον ά-ξονα $x'x$ και πάνω
• Ελάχιστη τιμή το $y=0$ όταν $x=0$
• Άξονας συμμετρίας ο $y'y$</td>
<td></td>
<td>• Κορυφή το $O(0,0)$
• Βρίσκεται στον ά-ξονα $x'x$ και κάτω
• Μέγιστη τιμή το $y=0$ όταν $x=0$
• Άξονας συμμετρίας ο $y'y$</td>
</tr>
</table>

Γεωμετρική ερμηνεία το συντελεστή α

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Δίνεται η παραβολή $y=2x^2$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1	0	1	2
y					

β) Να τοποθετήσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα σημεία που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα και να σχεδιάσετε την παραβολή

2. Δίνεται η παραβολή $y=-3x^2$.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	–2	–1	0	1	2
y					

β) Να τοποθετήσετε σε ένα σύστημα συντεταγμένων τα σημεία που προκύπτουν από τον παραπάνω πίνακα και να σχεδιάσετε την παραβολή

3. Ασκήσεις για λύση

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις παραβολές:

α) $y=x^2$ και $y=-x^2$

β) $y=\frac{1}{2}x^2$ και $y=-\frac{1}{2}x^2$

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις παραβολές και να βρείτε αν παρουσιάζουν μέγιστο ή ελάχιστο.

α) $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=x^2$ και $y=3x^2$

β) $y=-\frac{1}{3}x^2$, $y=-2x^2$ και $y=-4x^2$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις παραβολές και να βρείτε αν παρουσιάζουν μέγιστο ή ελάχιστο.

α) $y=2x^2$ για $-3\leq x\leq 4$

β) $y=-\frac{1}{3}x^2$ για $-4\leq x<3$

4. Δίνονται οι παραβολές

$$y=\left(\alpha^2+4\alpha+4\right)x^2,\ y=\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)x^2$$

με $\alpha\neq-2$, $\alpha\neq1$. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της πρώτης παραβολής να είναι πιο μακριά από τον άξονα $y'y$

4. Προβλήματα

1. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά x. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του x και να σχεδιάσετε τη γραφική του παράσταση.

2. Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x και 2x. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ως συνάρτηση του x και να σχεδιάσετε τη γραφική του παράσταση.

4.1 / 2 | Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$ με $\alpha \neq 0$ | 69

1. Θεωρία

Συνάρτηση, γραφική παράσταση συνάρτησης.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y=\alpha x^2$ αν γνωρίζετε ότι διέρχεται από το σημείο

α) $A(1,4)$ **β)** $B(-2,4)$

Στη συνέχεια να εξετάσετε αν τα σημεία $\Gamma(3,6)$ και $\Delta(2,16)$ ανήκουν σε κάθε μία από τις παραπάνω παραβολές.

2. Δίνεται η παραβολή

$$y=(\lambda^2-3\lambda+2)x^2$$

α) Να βρείτε το λ ώστε η παραβολή να διέρχεται από το $A(1,6)$

β) Για τη μεγαλύτερη τιμή του λ από το (α) ερώτημα να κάνετε την γραφική παράσταση

3. Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y=3x^2$ τα οποία έχουν τεταγμένη ίση με 27.

4. **α)** Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $y=x^2$ και της ευθείας $y=x+6$

β) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες

$$x^2 \leq x+6$$

5. **α)** Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η παραβολή

$$y=\frac{3-5\alpha}{7}x^2$$

βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

β) ομοίως η παραβολή

$$y=\left(\frac{3}{2}\alpha-5\right)x^2$$

6. Για ποιες τιμές του $\alpha,\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ οι παραβολές

i) $y=(2\alpha-6)x^2$ **ii)** $y=(2\lambda+3)x^2$

iii) $y=(1-2\lambda)x^2$ **iv)** $y=\left(\frac{1}{3}-\mu\right)x^2$

α) έχουν ελάχιστο

β) έχουν μέγιστο

7. **Α.** Δίνονται οι παραβολές

$$y=\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)x^2,\ y=(2\alpha-1)x^2$$

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών:

α) να ταυτίζονται

β) να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $x'x$

Β. Ομοίως για τις παραβολές

$$y=(\alpha^2-3\alpha)x^2,\ y=(4-2\alpha)x^2$$

8. Δίνεται η παραβολή

$$y=(2\alpha-1)x^2$$

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

α) το συμμετρικό του σημείο $A(-1,-4)$ ως προς την αρχή των αξόνων να ανήκει στην παραβολή

β) το συμμετρικό του σημείο $B(2,3)$ ως προς τον $x'x$ να ανήκει στην παραβολή

3. Επεκτάσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=20x^2$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{\alpha^2+\beta^2}=20$

β) $\dfrac{f(\alpha+\beta)+f(\alpha-\beta)}{f(\alpha)+f(\beta)}=2$

2. Αν Α και Β είναι τα σημεία της παραβολής $y=8x^2$ με την ίδια τεταγμένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$y=2x^2 \text{ και } y=8$$

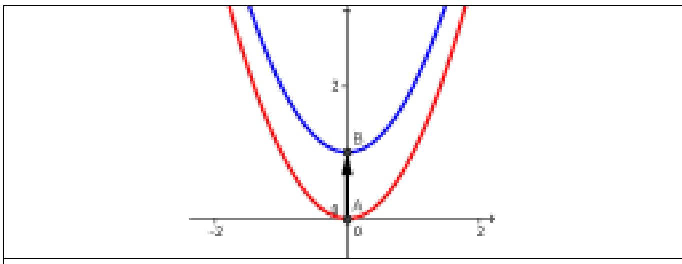
α) Να βρείτε τα κοινά τους σημεία

β) Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε τις τιμές του x ώστε $x^2>4$

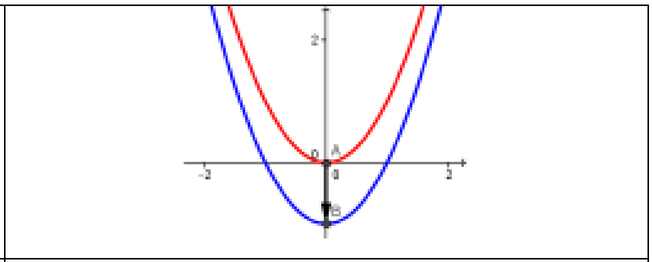
γ) Όμοια να λύσετε την ανίσωση $x^2<4$

4.2 / 1 **Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ (Μετατοπίσεις)** **70**

1. Θεωρία



Κατακόρυφη μετατόπιση πάνω $c>0$ $\varphi(x)+c$



Κατακόρυφη μετατόπιση κάτω $c>0$ $\varphi(x)-c$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Μπορείτε να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως συνάρτηση της f;

α) $g(x)=|x|-1$ **β)** $h(x)=|x|+2$ **γ)** $p(x)=|x|-\frac{1}{2}$ **δ)** $q(x)=|x|+3$

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Μπορείτε να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως συνάρτηση της f;

α) $g(x)=|x+2|$ **β)** $h(x)=|x-1|$ **γ)** $p(x)=\left|x+\frac{2}{3}\right|$ **δ)** $q(x)=|x-5|$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Να γράψετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως συνάρτηση της f.

α) $g(x)=x^2+1$ **β)** $h(x)=x^2-2$ **γ)** $p(x)=x^2+3$ **δ)** $q(x)=x^2-1$

2. **α)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

β) Να βάλετε τα διπλανά σημεία σε πίνακα συντεταγμένων

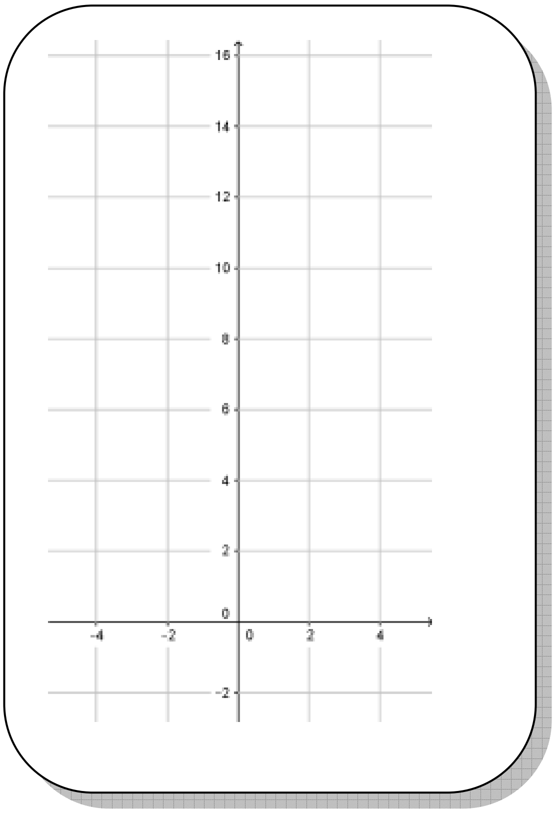
γ) Μπορείτε να συμπεράνετε πως προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x)=x^2+1 \text{ και } h(x)=x^2-2$$

από τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$;

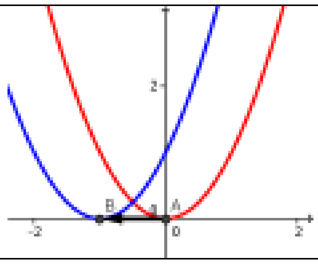
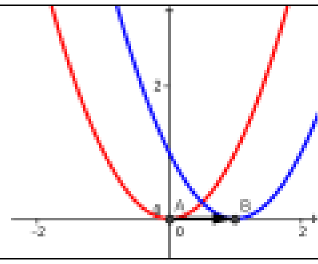
δ) Τι συμπεραίνετε για τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x)+c$ σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f;

x	x^2	x^2+1	x^2-2
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			



4.2 / 2 | **Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ (Μετατοπίσεις)** | **71**

1. Θεωρία

	
Οριζόντια μετατόπιση αριστερά $c>0 \quad \varphi(x+c)$	Οριζόντια μετατόπιση δεξιά $c>0 \quad \varphi(x-c)$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Να βρείτε τις παρακάτω τιμές:

α) $f(x-1)$ **β)** $f(x+2)$ **γ)** $f(3x-1)$ **δ)** $f(2x+1)$

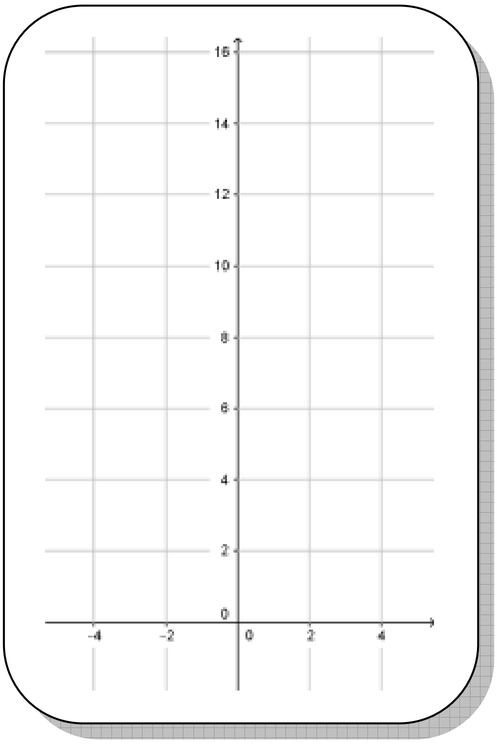
2. **α)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

β) Να βάλετε τα παραπάνω σημεία σε πίνακα συντεταγμένων

γ) Μπορείτε να συμπεράνετε πως προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=(x+1)^2$ και $h(x)=(x-2)^2$ από τη γραφική παράσταση της $f(x)=x^2$;

δ) Τι συμπεραίνετε για τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x+c)$ σε σχέση με τη γραφική παράσταση της f;

x	x^2	$(x+1)^2$	$(x-2)^2$
-4			
-3			
-2			
-1			
0			
1			
2			
3			
4			



3. Επεκτάσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-1$.

α) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες καθώς και τη σχετική θέση της C_f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να γίνει η γραφική παράσταση των

$-f,\ |f|,\ f(x-1),\ f(x)+2,\ f(x-1)+2$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2|x|$ **β)** $f(x)=\frac{1}{2}|x|$

γ) $f(x)=|2x|$ **δ)** $f(x)=\left|\frac{1}{2}x\right|$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

α) $f(x)=2x^2$ **β)** $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

γ) $f(x)=(2x)^2$ **δ)** $f(x)=\left(\frac{1}{2}x\right)^2$

4.2 / 3 | Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ (Σχεδίαση) | 72

1. Θεωρία

Η γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ είναι παραβολή.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω παραβολών:

α) $y=x^2-4x+3$ β) $y=-x^2+2x-1$

γ) $y=x^2+x+1$ δ) $y=-3x^2+2x-1$

2. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω παραβολών:

α) $y=x^2-4x+3,\ -2\leq x\leq 3$

β) $y=-x^2+4x-4,\ -3\leq x\leq 1$

3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2-3x$$

και να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες είναι $y<0$.

4. α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2-3x+2$$

β) Με τη βοήθεια της να εξετάσετε πότε ισχύει

$$x^2-3x+2>0$$

5. α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=x^2-5x+6$$

β) Με τη βοήθεια της να εξετάσετε πότε ισχύει

$$x^2-5x+6<0$$

6. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες -1 και 4 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -4.

7. Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η παραβολή

$$y=\alpha x^2+6x+2-\alpha$$

να τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 5.

8. Δίνεται η παραβολή

$$y=3x^2+6x+\alpha$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η παραβολή

α) τέμνει τον άξονα $x'x$

β) εφάπτεται στον άξονα $x'x$

γ) δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$

9. Δίνεται η παραβολή

$$y=x^2-9x+12$$

Για ποιες τιμές του x είναι:

α) $f(x)=-6$ β) $f(x)=-x$

γ) $f(x)=f(-x)$ δ) $f(x)=f(x+1)$

10. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\alpha x^2+x+\beta$ αν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(1,3)$.

3. Επεκτάσεις

1. Δίνεται η παραβολή

$$y=-x^2+4x-5$$

α) Να βρείτε τα σημεία (αν υπάρχουν) στα οποία τέμνει η καμπύλη τον άξονα $x'x$

β) Να βρείτε το σημείο (αν υπάρχουν) στο οποίο τέμνει η καμπύλη τον άξονα $y'y$

γ) Να κάνετε την γραφική παράσταση της παραβολής και με τη βοήθειά της να αποδείξετε ότι

$$x^2+5>4x,\ x\in\mathbb{R}$$

δ) Αν Μ είναι το σημείο της παραβολής με τετμημένη ίση με 3 τότε να βρείτε το (ΟΜΑ)

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες -1 και 4 ενώ τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -4.

3. Έστω η παραβολή

$$y=\alpha x^2+\beta$$

η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,4)$. Σε ποια σημείο τέμνει η παραβολή τις ευθείες $x=2$ και $y=4$.

4.2 / 4	Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ (Κορυφή, άξονας συμμετρίας)	73

1. Θεωρία

Για τη γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ ισχύει:

- έχει κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)\to K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$

  αν $\alpha>0$ τότε στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$

  αν $\alpha<0$ τότε στο $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ παρουσιάζει μέγιστο το $f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-\frac{\Delta}{4\alpha}$

- έχει άξονα συμμετρίας την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το Κ, την $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης και να την σχεδιάσετε

α) $y=x^2+2$ β) $y=x^2+3$

γ) $y=(x+1)^2$ δ) $y=(x-3)^2$

ε) $y=-x^2-4x+3$ στ) $y=(x-2)^2+1$

2. Δίνεται η παραβολή

$$y=2x^2-(\lambda-1)x+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Αν η κορυφή της παραβολής βρίσκεται στον $y'y$ τότε να βρείτε το λ

3. Να υπολογίσετε τα α και β ώστε η παραβολή

$$y=-x^2+\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

να παρουσιάζει μέγιστο στο $x=4$ το 6

4. Δίνεται η παραβολή

$$y=2x^2+(\lambda-1)x+6,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Για ποια τιμή του λ η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την $x=-1$

β) Για την τιμή του λ του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης

5. Δίνεται η παραβολή

$$y=(4\lambda-1)x^2-4\lambda x+\lambda,\ \lambda\neq\frac{1}{4}$$

Να βρείτε τις τιμές του λ, ώστε η παραβολή

α) να μην έχει κανένα κοινό σημείο με τον $x'x$

β) να τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία

γ) να εφάπτεται στον $x'x$

δ) να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$

4. Επεκτάσεις

1. Δίνονται οι παραβολές

$$y=-x^2+\alpha x+1 \text{ και } y=x^2-3x+2,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε οι κορυφές των δύο παραβολών τα ταυτίζονται.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$y=x^2-(\lambda^2-3\lambda)x+2,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο

β) Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστο για $x=-1$ τότε να βρείτε το λ

γ) Για την μεγαλύτερη τιμή του λ να βρείτε το ελάχιστο

3. Δίνεται η παραβολή

$$y=x^2-(\lambda+2)x-\lambda+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Να εξετάσετε αν η παραβολή έχει ελάχιστο ή μέγιστο τα οποίο και να βρείτε

β) Αν η παραβολή έχει ελάχιστο τότε να βρείτε το λ ώστε το ελάχιστο της παραβολής να γίνεται μέγιστο

4. α) Ποια είναι τα κοινά σημεία της παραβολής $y=x^2-2x+4$ και της ευθείας $y=2x-4$

β) Για ποιες τιμές του λ η παραβολή βρίσκεται κάτω από την ευθεία;

5. Δίνονται οι παραβολές

$$y=x^2-\lambda x+\lambda+1 \text{ και } y=x^2-3\lambda x+5\lambda+1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

α) Βρείτε για ποια τιμή του λ ταυτίζονται

β) Βρείτε για ποια τιμή του λ έχουν το ίδιο ελάχιστο αλλά δεν ταυτίζονται

γ) Για το λ που βρήκατε στο (β) ερώτημα, να βρείτε το σημείο τομής τους

4.2 / 5 — Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ (Προβλήματα) — 74

1. Ασκήσεις για λύση

1. Ένας παραγωγός καλλιεργεί x (σε δεκάδες) στρέμματα με νεκταρίνια. Τα έξοδά του, για την καλλιέργεια των x στρεμμάτων είναι $2x+7$ (σε δεκάδες) ευρώ το στρέμμα. Τα έσοδα του παραγωγού είναι x (σε δεκάδες) ευρώ το στρέμμα. Να βρείτε πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργήσει ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.

2. Το άθροισμα των μηκών των δύο κάθετων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με 8 cm.
α) Να βρείτε το εμβαδόν y του τριγώνου ως συνάρτηση της πλευράς $AB=x$
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης
γ) Να βρείτε τα μήκη που πρέπει να έχουν οι πλευρές του τριγώνου ώστε το εμβαδόν του να είναι μέγιστο
δ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού;

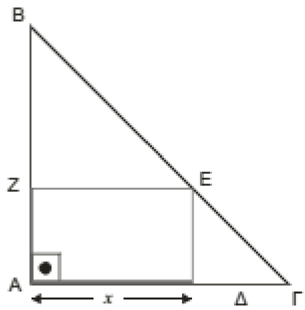
3. Να βρείτε δύο θετικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει $2x+y=5$ και το γινόμενό τους $x\cdot y$ να είναι ελάχιστο.

4. Να βρείτε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 20 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

5. Από όλα τα ορθογώνια που έχουν περίμετρο 40 cm ποιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

6. Σε ευθύγραμμο τμήμα $AB=12$ παίρνουμε σημείο Μ και κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΜΚΛ, ΒΜΓΔ. Να βρείτε τη θέση του σημείου Μ ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων να είναι ελάχιστο.

7. Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ και $AB=A\Gamma=10\,cm$.



Να βρείτε την τιμή που μπορεί να πάρει το x ώστε το ορθογώνιο ΑΔΕΖ να έχει μέγιστο εμβαδόν.

8. Το άθροισμα μίας βάσης και του αντίστοιχου ύψους ενός τριγώνου είναι 12 cm.
α) Αν η βάση είναι 2x cm τότε να εκφράσετε το ύψος ως συνάρτηση του x
β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού για $0\leq x\leq 6$
δ) Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του εμβαδού να βρείτε το μήκος που πρέπει να έχουν η βάση και το ύψος ώστε το εμβαδόν να είναι μέγιστο

2. Επεκτάσεις

1. Οι ακτίνες δύο κύκλων έχουν άθροισμα 4 cm. Να βρείτε πόσα cm πρέπει να είναι η ακτίνα κάθε κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο κύκλων να είναι ελάχιστο.

2. Δίνεται το τριώνυμο

$$A=x^2+(\lambda-3)x+\lambda^2-6$$

α) Να εκφράσετε τη διακρίνουσα του τριωνύμου ως συνάρτηση του λ
β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ η διακρίνουσα παίρνει τη μέγιστη τιμή της
γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο Α

3. Ρίχνουμε κατακόρυφα προς τα πάνω μία μπάλα και γνωρίζουμε ότι το ύψος h στο οποίο φτάνει καθώς ο χρόνος t σε sec μεταβάλλεται, δίνεται από τον τύπο

$$h(t)=40t-5t^2$$

όπου το ύψος h υπολογίζεται σε μέτρα.
α) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει η μπάλα καθώς και ο χρόνος που θα χρειαστεί
β) Μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα πέσει στο έδαφος
γ) Σε ποιο ύψος βρίσκεται η μπάλα το 6ο δευτερόλεπτ

5.1 / 1 — Έννοια του συνόλου – Παράσταση συνόλου με αναγραφή / περιγραφή — 75

1. Θεωρία

- Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα, και διακρίνονται το ένα από το άλλο. **(Cantor)**
- Στοιχείο συνόλου ονομάζεται κάθε αντικείμενο που περιέχεται σε ένα σύνολο.
- Βασικά σύνολα: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
- Παράσταση συνόλου με αναγραφή: Η παράσταση του συνόλου γράφοντας ανάμεσα σε δύο αγκύλες όλα του τα στοιχεία **(δεν μας ενδιαφέρει η σειρά)**. Π.χ. $A=\{1,2,3\}$
- Παράσταση συνόλου με περιγραφή: Η παράσταση του συνόλου γράφοντας μέσα σε μία αγκύλη την κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα όλων των στοιχείων του συνόλου.
- Όταν ένα αντικείμενο α ανήκει σε ένα σύνολο Α τότε γράφουμε $\alpha \in A$

2. Ασκήσεις για λύση

1. α) Να γράψετε το σύνολο των γραμμάτων της λέξης
  i) «Αναδιάρθρωση»
  ii) «Παρακαταθήκη»

β) Να γράψετε το σύνολο των ψηφίων του αριθμού
  i) 1.234.543.234.567
  ii) 7.385,345

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με τα σύμβολα $\in$ και $\notin$, αν ο κάθε αριθμός ανήκει ή δεν ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-5,5$				
π				
$\frac{\sqrt{2}}{2}$				
$\sqrt{144}$				
$-\frac{13}{3}$				
$\frac{40}{5}$				
$\sqrt{2}$				
-4				
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$				

Α.Π.Σ.

3. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A=\{x\in\mathbb{R},\ \text{όπου}\ x^2=16\}$

β) $B=\{x\in\mathbb{N}\ /\ x^2=16\}$

γ) $\Gamma=\{x\in\mathbb{Z},\text{όπου}\ -2\le x<4\}$

δ) $\Delta=\{x\in\mathbb{N}/,\ \text{όπου x διαιρέτης του } 24\}$

4. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) Α = {Οι πέντε ήπειροι}

β) Β = {Τα εφτά θαύματα του κόσμου}

5. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A=\{x\in\mathbb{Z}\ /\ |x-2|<4\}$

β) $B=\{x\in\mathbb{N}\ /\ x^2+3x+2=0\}$

6. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο:

$A=\{(x,\ y),\ \text{όπου}\ x,\ y\in \mathbb{N}\ \text{και}\ x+y=5\}$

7. Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A=\{1,\ 11,\ 21,\ \ldots\}$ και $B=\{10,\ 20,\ 30,\ \ldots\}$

β) $A=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,\ \omega\}$ και $B=\{\alpha, \varepsilon,\ \eta,\ \iota,\ o,\ \upsilon,\ \omega\}$

8. Να παραστήσετε με περιγραφή των στοιχείων τους τα παρακάτω σύνολα:

α) $A=\{3,\ 6,\ 9,\ \ldots\}$ και $B=\{9,\ 12,\ 15,\ \ldots\}$

β) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$ και $B=\{-4,\ -2,\ 0,\ \ldots\}$

γ) $A=\{1,\ 3,\ 5,\ \ldots\}$ και $B=\{\ldots,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ \ldots\}$

5.1 / 2 | Ίσα σύνολα – Υποσύνολο συνόλου – Διάγραμμα Venn | 76

1. Θεωρία

- Δύο σύνολο είναι ίσα ($A = B$) όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.
- Ένα σύνολο Α ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Β ($A \subseteq B$) όταν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.
- Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Συμβολίζεται $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Πόσα τουλάχιστον υποσύνολα έχει ένα σύνολο;

2. Οι φυσικοί αριθμοί έχουν περισσότερα στοιχεία από τους άρτιους θετικούς αριθμούς;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται το σύνολο

$$\Omega = \{1,2,3,\ldots,10\}$$

και τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, \lambda\}$

και $B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρέτης του } 6\}$

Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύνολο Α είναι ίσο με το σύνολο Β

2. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $A \subseteq B$.

α) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ και

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 < x < 3\}$$

β) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ διαιρεί το } 20\}$$

3. Γράψτε όλα τα υποσύνολα του συνόλου

α) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ β) $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

4. Να βρείτε ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι κενά:

α) $A = \{x \in \mathbb{Z} / 4x^2 = 1\}$ β) $B = \{x \in \mathbb{Q} / x^2 = 3\}$

5. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι ίσα τα σύνολα

$$A = \{0, \alpha^3\} \text{ και } B = \{0, \alpha^2\}$$

6. Να παραστήσετε με ένα διάγραμμα Venn το σύνολο $\Omega = \{\text{τα γράμματα της αλφαβήτου}\}$ και τα σύνολα $A = \{\text{τα φωνήεντα της αλφαβήτου}\}$ και $B = \{\text{τα σύμφωνα της αλφαβήτου}\}$.

7. Έστω $\Omega = \{1,2,3,\ldots,10\}$ ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού

$A = \{1,2,4,7,8\}$, $B = \{3,4,8,10\}$, $\Gamma = \{2,4,5,10\}$

Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn

8. Να παραστήσετε με ένα διάγραμμα Venn το σύνολο $\Omega = \{x \in \mathbb{N} / 0 \le x \le 18\}$ και τα σύνολα

$A = \{x \in \Omega / x \text{ πρώτος}\}$ και

$B = \{x \in \Omega / x \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$.

9. Δίνεται το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\}$$

α) Να γράψετε το Α με αναγραφή

β) Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του Α

10. Αν $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 13, x \text{ πολ.}3\}$ και $B = \{x \in \mathbb{N} / x < 15, x \text{ πολ.}4\}$ τότε να σχεδιάσετε το διάγραμμα Venn με τα Α και Β

4. Επεκτάσεις

1. Δίνονται τα σύνολα

$$A = \{0, 1, 2, 2\alpha, 2\alpha + 1, 2\alpha + 2\} \text{ και}$$

$$B = \{0,1,2,4,5,6\}$$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του α το Α είναι υποσύνολο του Β

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α το Α είναι ίσο με το Β

2. α) Γράψτε όλα τα υποσύνολα του

$$A = \{1, 2, 3\}$$

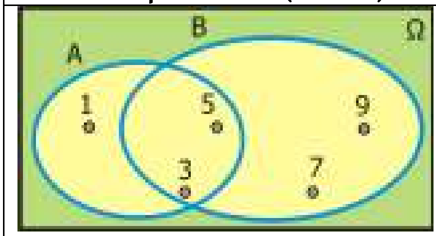
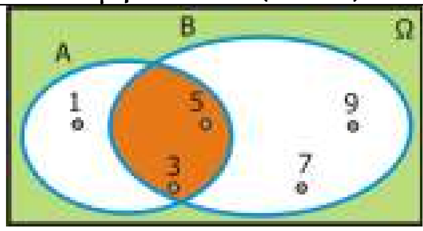
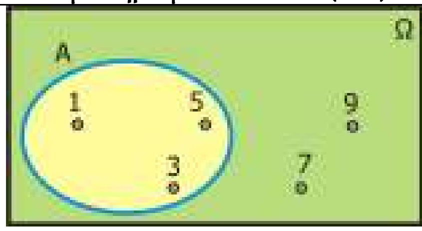
β) Γράψτε όλα τα υποσύνολα του

$$B = \{1,2,3,4\}$$

γ) Μπορείτε να υπολογίσετε πόσα είναι όλα τα υποσύνολα του $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5.1 / 3 | Πράξεις με σύνολα Ι |

1. Θεωρία

Ένωση συνόλων ($A \cup B$)	Τομή συνόλων ($A \cap B$)	Συμπλήρωμα συνόλου (A')
		
Περιέχει τα στοιχεία του Α **ή** του Β (δηλαδή **όλα τα στοιχεία** και των δύο συνόλων).	Περιέχει τα **κοινά στοιχεία** του Α **και** του Β.	Περιέχει όλα τα στοιχεία του Ω εκτός από τα στοιχεία του Α.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολα αυτού, το Α και το Β. Συμπληρώστε τις παρακάτω ισότητες:

α) $A \cup A = ...$ **β)** $A \cap A = ...$ **γ)** $A \cup \varnothing = ...$ **δ)** $A \cap \varnothing = ...$

ε) $(A')' = ...$ **στ)** $(\Omega)' = ...$ **ζ)** **η)** $A \cup A' = ...$ **θ)** $A \cap A' = ...$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω $\Omega = \{1,2,3,\ldots,10\}$ ένα βασικό σύνολο και τρία υποσύνολα αυτού

$A = \{1,2,4,7,8\}$, $B = \{3,4,8,10\}$, $\Gamma = \{2,4,5,10\}$

α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β και Γ με διάγραμμα Venn

β) Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων τους καθώς και με διαγράμματα Venn τα σύνολα:

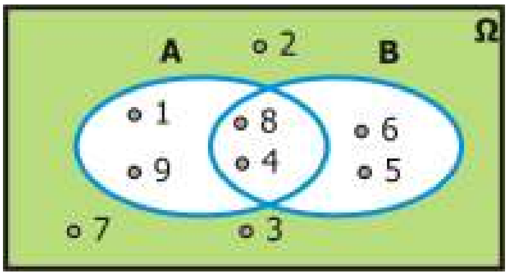
i) $A \cup B$ **ii)** $B \cap \Gamma$

iii) $A \cup (B \cap \Gamma)$ **iv)** $(A \cap B) \cup \Gamma$

v) $A \cap B \cap \Gamma$ **Α.Π.Σ.**

2. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολα αυτού, το Α και το Β.

α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α και Β με αναγραφή των συνόλων τους



β) Να προσδιορίσετε τα παρακάτω σύνολα:

i) $A \cup B$ **ii)** $A \cap B$ **iii)** A' **iv)** B'

v) $A \cap B'$ **vi)** $A' \cap B$ **vii)** $A' \cap B'$

3. Με βασικό σύνολο Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, θεωρούμε τα σύνολα Α = {1, 2} και Β = {2, 4}. Να τα παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn και να προσδιορίσετε τα σύνολα:

α) $A \cup B$ **β)** $A \cap B$

γ) A' **δ)** B'

4. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Τέσσερις μαθητές αγοράζουν βιβλία ώστε:

α) Ο καθένας να αγοράσει 3 βιβλία διαφορετικά μεταξύ τους

β) Κάθε δύο από τους τέσσερις μαθητές θα αγοράσουν ένα μόνο ίδιο βιβλίο

Βρείτε το μέγιστο και τον ελάχιστο αριθμό διαφορετικών βιβλίων που μπορούν να αγοράσουν συνολικά οι τέσσερις μαθητές.

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. Β' Γυμνασίου

2. Δίνονται 120 καθίσματα στη σειρά. Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός καθισμάτων τέτοιος ώστε αν στα καθίσματα αυτά κάθονται άνθρωποι και ένας καινούργιος που έρχεται να καθίσει, σ' οποιαδήποτε κενή θέση καθίσει, θα έχει δίπλα του κάποιον ήδη καθισμένο;

α) 30 **β)** 40 **γ)** 41 **δ)** 60 **ε)** 119

Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε. Γ' Γυμνασίου

1. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω τα σύνολα $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ και $\Gamma=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$.

α) Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα:

i) $A\cup B$ ii) $A\cap B$ iii) $(A\cup B)'$

iv) $(A\cap B)'$ v) $A\cap B'$ iv) $A'\cap B$

β) Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα:

i) $(A\cap B)\cap\Gamma$ ii) $(A\cap B)\cup\Gamma$

iii) $A\cup(B\cap\Gamma)$ iv) $(A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$

2. Έστω $\Omega=\{x\in\mathbb{N}/1\le x\le 24\}$ ένα βασικό σύνολο και τα υποσύνολά του $A=\{x\in\Omega/x=\text{πολ}.3\}$ και $B=\{x\in\Omega/x=\text{πολ}.4\}$

Να βρείτε τα παρακάτω σύνολα:

α) $A\cup B$ β) $A\cap B$ γ) A' δ) B'

ε) $(A\cup B)'$ στ) $(A\cap B)'$ ζ) $A\cap B'$

3. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και για τα υποσύνολα Α και Β ισχύει $A\subseteq B$. Να σχεδιάσετε με διάγραμμα Venn τα παρακάτω σύνολα:

α) $A\cup B$ β) $A\cap B$ γ) $(A\cup B)'$

δ) $(A\cap B)'$ ε) $A\cap B'$ στ) $A'\cap B$

4. Θεωρούμε τα σύνολα:

Α = {μαθητής που παίρνει μέρος στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.)}

Β = {μαθητής που παίρνει μέρος στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών (Ε.Ε.Φ.)}

Σε ποιο σύνολο ανήκει εκείνος που:

α) Πήρε μέρος και στους δύο διαγωνισμούς

β) Πήρε μέρος σε έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς

γ) Δεν πήρε μέρος σε κανέναν διαγωνισμό

δ) Πήρε μέρος στον διαγωνισμό της Ε.Μ.Ε και όχι στον διαγωνισμό της Ε.Ε.Φ

5. Δίνονται τα σύνολα Α = {μαθαίνει Αγγλικά} και Β = {μαθαίνει μουσική}. Τι συμπεραίνετε για εκείνον που ανήκει στο σύνολο:

α) $A\cup B$ β) $A\cap B$ γ) A' δ) B'

ε) $A\cap B'$ στ) $A'\cap B$ ζ) $A'\cap B'$

6. Να βρείτε τα σύνολα Α και Β αν ισχύει ταυτόχρονα:

i) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

ii) $A\cap\{5,\ 6,\ 7\}=\varnothing$

iii) $A\cap B=\{3,\ 4\}$ iv) $\{1,\ 2\}\cup B=\varnothing$

7. Έστω τα σύνολα

$A=\{2,\ 4,\ 5\}$, $B=\{2,\ 3,\ x,\ 6\}$, $\Gamma=\{x,\ y,\ 3,\ 4\}$

α) Να βρείτε τα $x,y\in\mathbb{N}$ ώστε

$$A\cap B=\{2,\ 5\}\quad\text{και}\quad A\subseteq\Gamma$$

β) Για $x=5$ και $y=2$ να βρείτε το σύνολο

$$A\cap\Gamma-B$$

2. Προβλήματα / Σπαζοκεφαλιές

1. Οι θεατές μιας παράστασης ήταν άνδρες, γυναίκες και παιδιά. Τα παιδιά ήταν τα μισό των θεατών. Οι γυναίκες ήταν τα 5/9 των παιδιών, ενώ υπήρχαν 80 άνδρες. Οι θεατές ήταν:

α) 180 β) 202 γ) 360 δ) 1.251

Α.Σ.Ε.Π. για αποφοίτους Λυκείου

2. Δύο σύνολα από 4 διαδοχικούς ακέραιους αριθμούς έχουν ακριβώς έναν κοινό αριθμό. Πόσο μεγαλύτερο είναι το άθροισμα των αριθμών στο σύνολο με τους μεγαλύτερους αριθμούς από το άθροισμα των αριθμών του άλλου συνόλου;

3. Ένα δημοτικό σχολείο έχει 125 μαθητές. Οι 67 πηγαίνουν σε τάξη μικρότερη από την Ε' Δημοτικού και οι 81 σε τάξη μεγαλύτερη από την Γ' Δημοτικού. Πόσοι μαθητές πηγαίνουν στην Δ' Δημοτικού;

4. Σε μία φάρμα ανήκουν 94 σκύλοι. Οι 32 είναι μεγάλοι, οι 36 έχουν καφέ χρώμα και 40 δεν είναι ούτε μεγάλοι, ούτε έχουν καφέ χρώμα. Πόσοι σκύλοι είναι μεγάλοι και έχουν καφέ χρώμα;

5. Σε σύνολο 200 ατόμων: 100 είναι Έλληνες, 60 είναι ξανθοί, 95 είναι γυναίκες και 40 έχουν μυωπία. Ο μέγιστος δυνατός αριθμός ξανθών Ελληνίδων γυναικών με μυωπία είναι:

α) 40 β) 60 γ) 95 δ) 100

Α.Σ.Ε.Π. για απόφοιτους Λυκείου

5.2 / 1 Πείραμα τύχης –Δειγματικός χώρος

1. Θεωρία

- **Πείραμα τύχης**: Ονομάζεται ένα πείραμα που, όσες φορές κι αν το επαναλάβουμε, δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμά του
- **Δειγματικός χώρος πειράματος**: Ονομάζεται το σύνολο που περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης (Συνήθως συμβολίζεται με Ω).
- **Δεντροδιάγραμμα, πίνακας διπλής εισόδου.**

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω πειράματα είναι πειράματα τύχης:
α) Ρίχνω ένα νόμισμα και βλέπω αν φαίνεται η κεφαλή ή τα γράμματα
β) Ρίχνω ένα νόμισμα και βλέπω αν πέσει ή όχι κάτω
γ) Βράζω νερό στην κουζίνα και εξετάζω αν θα εξατμιστεί
δ) Ανάβω ένα κερί και εξετάζω αν θα καεί σε λιγότερο ή σε περισσότερο από μία ώρα

2. Σε ένα εστιατόριο προσφέρεται για φαγητό κρέας (κ) ή ψάρι (ψ), για γλυκό σοκολάτα (σ) ή χαλβάς (χ) και για ποτό μπύρα (μ) ή ούζο (ο). Επιλέγουμε στην τύχη έναν πελάτη που διάλεξε ένα φαγητό, ένα γλυκό και ένα ποτό και καταγράφουμε την προτίμησή του. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος;

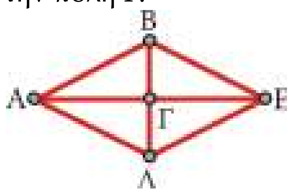
3. Σε ένα κουτί υπάρχουν μία άσπρη (Α), μία μαύρη (Μ), μία κόκκινη (Κ) και μία πράσινη (Π) μπάλα. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
α) αν επανατοποθετούμε την μπάλα που τραβήξαμε μέσα στο κουτί
β) αν δεν επανατοποθετούμε την μπάλα που τραβήξαμε μέσα στο κουτί

4. Επιλέγουμε μία οικογένεια με τρία παιδιά. Εξετάζουμε τα παιδιά ως προς του φύλο (αγόρι ή κορίτσι) και ως προς τη σειρά γέννησης. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος;

5. Ένας σκοπευτής ρίχνει προς ένα στόχο και σταματάει αν πετύχει τον στόχο ή αν ρίξει τέσσερις βολές. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

6. Ξέρουμε ότι ο συνδυασμός μίας κλειδαριάς είναι ένας τετραψήφιος αριθμός. Ακόμη ξέρουμε ότι το πρώτο ψηφίο είναι το 7 και το τρίτο το 5. Τα άλλα δύο ψηφία είναι κάποια από τα 2, 3, 8. Φτιάχνουμε έναν πιθανό συνδυασμό. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος;

7. Στο παρακάτω σχήματα φαίνονται όλοι οι διαφορετικοί τρόποι για να μεταβεί κάποιος από την πόλη Α στην πόλη Γ.



Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

3. Επεκτάσεις

1. Ρίχνουμε ένα κόκκινο ζάρι και στη συνέχεια ένα άσπρο ζάρι.
α) Να κάνετε πίνακα διπλής εισόδου
β) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι και στη συνέχεια ένα νόμισμα.
α) Να κάνετε δεντροδιάγραμμα
β) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος

3. Να βρείτε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος όταν:
α) ρίχνουμε τρία νομίσματα
β) ρίχνουμε τέσσερα νομίσματα
Ποια σχέση συνδέει το πλήθος των στοιχείων του Ω με το πλήθος των νομισμάτων;

4. Δύο παίχτες παίζουν τάβλι. Νικητής είναι όποιος κερδίσει τρεις παρτίδες. Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.
(α: κερδίζει ο πρώτος, β: κερδίζει ο δεύτερος)

5.2 / 2 | **Ενδεχόμενα πειράματος (Βέβαιο – Αδύνατο – Ασυμβίβαστα)** | **80**

1. Θεωρία

Ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης: Ονομάζεται κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.
Βέβαιο ενδεχόμενο: Πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος.
Αδύνατο ενδεχόμενο: Δεν πραγματοποιείται σε καμία εκτέλεση του πειράματος.

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: Δύο ενδεχόμενα που δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο ($A \cap B = \varnothing$).

2. Ασκήσεις για λύση

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος ((Κ): κεφαλή, (Γ): γράμματα)
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: τα αποτελέσματα στις δύο ρίψεις είναι ίδια
Β: το ένα τουλάχιστον αποτέλεσμα ήταν «Κ»
Γ: το ένα ακριβώς αποτέλεσμα ήταν «Κ»
γ) Κάποια από τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα;

2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: το άθροισμα των αποτελεσμάτων των ρίψεων είναι μεγαλύτερο από 13
Β: το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης είναι μεγαλύτερο από της δεύτερης
Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι ζυγός
γ) Υπάρχει κάποιο αδύνατο ενδεχόμενο;

3. Έχουμε ένα ειδικό ζάρι που σε δύο έδρες του έχει το ψηφίο «1» σε δύο το ψηφίο «2» και σε δύο το ψηφίο «3».
α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: το άθροισμα των αποτελεσμάτων των ρίψεων είναι μεγαλύτερο από 4
Β: τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων είναι ίσα μεταξύ τους
Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι ζυγός

4. Σε ένα κουτί υπάρχουν μία άσπρη (Α), μία μαύρη (Μ), μία κόκκινη (Κ) και μία πράσινη (Π) μπάλα. Παίρνουμε μία μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε μέσα στο κουτί.
α) Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: οι δύο μπάλες έχουν ίδιο χρώμα
Β: η δεύτερη μπάλα είναι πράσινη
Γ: μία τουλάχιστον μπάλα είναι άσπρη

5. Ένας ηλεκτρολόγος ελέγχει 3 λάμπες την μία μετά την άλλη.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. ((Κ): καλή, (Ε): ελαττωματική)
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: ακριβώς δύο λάμπες είναι καλές
Β: τουλάχιστον μία λάμπα είναι καλή
Γ: το πολύ μία λάμπα είναι ελαττωματική
γ) Κάποια από τα παραπάνω ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα;

6. Ρωτάμε τους συμμαθητές μας που έχουν δύο αδέλφια να μας πουν με ποια σειρά είναι γεννημένα τα παιδιά της οικογένειάς τους
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος. ((Α): αγόρι, (Κ): κορίτσι)
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: ακριβώς δύο παιδιά είναι αγόρια
Β: τουλάχιστον ένα παιδί είναι κορίτσι
γ) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα

3. Επεκτάσεις

1. Δύο ομάδες (α και β) παίζουν βόλεϊ. Νικήτρια αναδεικνύεται αυτή που κερδίζει πρώτη τρία σετ.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: η ομάδα α κερδίζει τον αγώνα
Β: η ομάδα α κερδίζει ένα το πολύ σετ

2. Έστω ένα σύνολο $A = \{1, 2\}$. Επιλέγουμε τυχαία ψηφία και φτιάχνουμε έναν διψήφιο αριθμό.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος
β) Να γράψετε τα ενδεχόμενα
Α: ακριβώς ένα ψηφίο είναι «2»
Β: ένα τουλάχιστον ψηφίο είναι «2»

5.2 / 3 **Πράξεις με ενδεχόμενα πειράματος** **81**

1. Θεωρία

- **Ένωση δύο ενδεχομένων Α και Β** είναι το ενδεχόμενο $A \cup B$ που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β (**Α ή Β**).
- **Τομή δύο ενδεχομένων Α και Β** είναι το ενδεχόμενο $A \cap B$ που πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα το Α και το Β (**Α και Β**).
- **Συμπλήρωμα ενός ενδεχομένου Α** είναι το ενδεχόμενο A' που πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Δίνεται ένα δειγματικός χώρος Ω και τα ενδεχόμενα Α και Β τα οποία δεν είναι ασυμβίβαστε. Να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

α) Πραγματοποιείται το Α ή το Β
β) Πραγματοποιείται το Α και το Β
γ) Δεν πραγματοποιείται το Α
δ) Πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β

3. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω ένα πείραμα με δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

και τα ενδεχόμενα $A = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ διαιρέτης του} 12\}$

και $B = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ περιττός}\}$

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn το Ω και τα Α, Β

β) Να προσδιορίσετε το ενδεχόμενο που πραγματοποιείται όταν

i) δεν πραγματοποιείται το Α
ii) όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β
iii) όταν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα Α και Β
iv) όταν δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β
v) όταν πραγματοποιείται μόνο το Α ή μόνο το Β

2. Έστω ένα πείραμα με δειγματικό χώρο Ω και τα ενδεχόμενα Α και Β τα οποία δεν είναι ασυμβίβαστα. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn τα παρακάτω ενδεχόμενα

α) A' β) B' γ) $A \cup B$
δ) $A \cap B$ ε) $A' \cap B'$ στ) $A' \cup B'$
ζ) $A \cup A'$ η) $A \cup B'$ θ) $A' \cap B$

3. Έστω ένα πείραμα με δειγματικό χώρο

$$\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$$

και τα ενδεχόμενα $A = \{\alpha, \delta\}$ και $B = \{\delta, \varepsilon, \zeta\}$.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn το Ω και τα Α, Β

β) Να προσδιορίσετε τα ενδεχόμενα

i) A' ii) B' iii) $A \cup B$
iv) $A \cap B$ v) $A' \cap B'$ vi) $A' \cup B'$
vii) $A \cup A'$ viii) $A \cup B'$ ix) $A' \cap B$

4. Ένας μαθητής μαθαίνει Αγγλικά και Γαλλικά. Έστω τα ενδεχόμενα:
Α: Ο μαθητής μαθαίνει Αγγλικά
Β: Ο μαθητής μαθαίνει Γερμανικά
Να διατυπώσετε φραστικά τα ενδεχόμενα:

α) A' β) B' γ) $A \cup B$
δ) $A \cap B$ ε) $A' \cap B'$ στ) $A' \cup B'$

5. Η Χρυσούλα παίζει μπάσκετ και τένις. Να γράψετε συμβολικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

α) Η Χρυσούλα δεν παίζει μπάσκετ
β) Η Χρυσούλα παίζει τένις
γ) Η Χρυσούλα παίζει μπάσκετ αλλά δεν παίζει τένις
δ) Η Χρυσούλα παίζει μπάσκετ και τένις
ε) Η Χρυσούλα παίζει μπάσκετ ή τένις

6. Έστω το σύνολο $\Omega = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \le x \le 6\}$

και τα σύνολα $A = \left\{x \in \Omega \,/\, \frac{8}{x} \in \mathbb{Z}\right\}$ και

$B = \{x \in \Omega \,/\, x \text{ πολ.} 2\}$

α) Να παραστήσετε τα σύνολα Ω, Α, Β με αναγραφή των στοιχείων τους

β) Να βρείτε τα σύνολα

i) A' ii) B' iii) $A \cup B$
iv) $A \cap B$ v) $A' \cap B'$ vi) $A' \cup B'$

5.3 / 1 Έννοια της πιθανότητας Ι

1. Θεωρία

- **Πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α:** $P(A)=\dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$
- $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$, $0\le P(A)\le 1$
- **Ισοπίθανα:** Δύο ή περισσότερα ενδεχόμενα που έχουν την ίδια πιθανότητα να συμβούν.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Το άθροισμα των πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικών ενδεχομένων με πόσο είναι ίσο;

2. Είναι δυνατόν δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα να είναι ισοπίθανα;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές κεφαλή;

2. Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινες, 12 άσπρες, 10 πράσινες και 8 μπλε μπίλιες. Βγάζουμε στην τύχη μία μπίλια. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Η μπίλια να είναι πράσινη.
Β. Η μπίλια να μην είναι άσπρη

3. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Η πρώτη ένδειξη είναι άρτια και η δεύτερη περιττή
Β: Το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι 9
Γ: Το γινόμενο των δύο ενδείξεων είναι 12
Δ: Το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι μεγαλύτερο από 8

4. Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά.
α) Βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
Α: Φέρνουμε «4»
Β: Φέρνουμε «4» ή «5»
Γ: Φέρνουμε μονό αριθμό
γ) Βρείτε τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α, Β και Γ
δ) τις πιθανότητες των συμπληρωματικών των ενδεχομένων Α, Β και Γ

5. Με τα ψηφία 1, 2 και 3 φτιάχνουμε τριψήφιους αριθμούς.
α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω
β) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν αριθμό τότε να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός
- **i)** να είναι άρτιος
- **ii)** να είναι μεγαλύτερος του 300
- **iii)** να είναι ανάμεσα στο 100 και στο 200

6. Κάθε τράπουλα έχει 52 φύλλα, 26 κόκκινα και 26 μαύρα. 13 κόκκινα είναι κούπες και τα υπόλοιπα 13 είναι καρό. 13 μαύρα είναι σπαθιά και τα άλλα 13 είναι μπαστούνια. Κάθε δεκατρία χαρτιά έχουν τους αριθμούς από το 2 έως το 10 και τα σύμβολα J, Q, K (φιγούρες) και Α. Τραβάμε ένα χαρτί στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα
α) να είναι κόκκινο
β) να είναι μπαστούνι
γ) να είναι αριθμός μικρότερος από 6
δ) να είναι φιγούρα
ε) να είναι όχι κούπα
στ) να είναι σπαθί ή καρό

7. Δίνεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος
$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$$
Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
$A=\{\lambda\in\Omega/\text{το } 2x^2-4x+\lambda=0 \text{ δεν έχει ρίζες}\}$

4. Επεκτάσεις

1. Ρίχνουμε ένα συμμετρικό ζάρι δύο φορές. Η πρώτη φορά είναι το α και η δεύτερη το β στην εξίσωση $\alpha x^2+4x+\beta=0$. Να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένου
Α: Η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές λύσεις

2. Από το σύνολο $\Omega=\{30°,\ 40°,\ 60°,\ 80°\}$ επιλέγουμε τυχαία τρεις διαφορετικούς αριθμούς.
α) Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος
β) Ποια η πιθανότητα οι τρεις αυτοί αριθμοί να εκφράζουν τα μέτρα των γωνιών ενός τριγώνου;

1. Ασκήσεις για λύση

1. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) το άθροισμα των δύο ενδείξεων είναι τουλάχιστον 8
β) οι ενδείξεις είναι και οι δύο άρτιοι αριθμοί
γ) οι ενδείξεις είναι διαδοχικοί αριθμοί
δ) οι ενδείξεις είναι ίσες

2. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$.
Αν Α είναι ένα ενδεχόμενο του Ω που έχει στοιχεία τις λύσεις της εξίσωσης
$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$
τότε να βρείτε την πιθανότητα του Α.

3. Σ' ένα εστιατόριο υπάρχουν 15 φαγητά, από τα οποία 4 είναι ψητά, 5 μαγειρευτά, 4 φούρνου και 2 τηγανητά. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Νίκος τυχαία ένα φαγητό μαγειρευτό που μόνο αυτό δεν του αρέσει; Μία ώρα αργότερα 2 ψητά, 3 μαγειρευτά και 1 τηγανητό έχουν καταναλωθεί. Ποια είναι τώρα η πιθανότητα να πάρει ο Νίκος τυχαία ένα φαγητό που να του αρέσει;

4. Από το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, \ 4, 6\}$ επιλέγουμε τυχαία δύο αριθμούς τον ένα μετά τον άλλο και με αυτούς σχηματίζουμε ένα κλάσμα. Ο πρώτος είναι ο αριθμητής και ο δεύτερος είναι ο παρονομαστής του κλάσματος. Να βρείτε την πιθανότητα ώστε το κλάσμα
α) να εκφράζει ακέραιο αριθμό
β) να είναι μικρότερο της μονάδας.

5. Σε ένα ράφι της βιβλιοθήκης μου υπάρχουν 42 βιβλία μαθηματικών, 30 βιβλία μουσικής και 20 λογοτεχνικά βιβλία. Επιλέγουμε στην τύχη ένα βιβλίο από το ράφι. Να βρείτε την πιθανότητα:
α) να επιλέξουμε βιβλίο μαθηματικών
β) να επιλέξουμε βιβλίο μουσικής ή λογοτεχνικό

6. Με τα ψηφία 1, 2, 4, 3 φτιάχνουμε πενταψήφιους αριθμούς με το κάθε ψηφίο να χρησιμοποιείται μόνο μία φορά.
α) Να βρείτε τον δειγματικό χώρο Ω
β) Αν επιλέξουμε τυχαία έναν αριθμό τότε να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός
i) να είναι άρτιος
ii) να είναι περιττός
iii) να διαιρείται με το 3
iv) να διαιρείται με το 5
v) να είναι μεγαλύτερος από 10.000
vi) να βρίσκεται μεταξύ του 20.000 και του 30.000

7. Εξετάσαμε ένα δείγμα 100 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους και σχηματίσαμε τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών	0	1	2	3	4
Οικογένειες	10	30	45	13	2

Να επιλέξουμε τυχαία μία οικογένεια να βρείτε την πιθανότητα:
α) να μην έχει παιδιά
β) να έχει παιδιά αλλά όχι λιγότερα από δύο
γ) να έχει παιδιά αλλά όχι περισσότερα από ένα
δ) να μην έχει δύο ή τρία παιδιά

8. Έστω μία οικογένεια η οποία έχει 3 παιδιά. Να βρείτε ποια είναι η πιθανότητα:
α) να είναι και τα τρία παιδιά αγόρια
β) να είναι το ένα τουλάχιστον παιδί αγόρι
γ) να είναι δύο διαδοχικά παιδιά αγόρια
δ) να μην είναι δύο διαδοχικά παιδιά ίδιου φύλου

2. Επεκτάσεις

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι, μία φορά το καθένα.
α) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος Ω
β) Να βρείτε την πιθανότητα το νόμισμα να είναι κορώνα και το ζάρι να είναι 6
γ) Να βρείτε την πιθανότητα το νόμισμα να είναι κορώνα και το ζάρι μονός αριθμός ή το νόμισμα να είναι γράμματα και το ζάρι μικρότερο του 3

2. Μία κάλπη έχει αριθμημένους λαχνούς από το 1 έως το 150. Παίρνουμε στην τύχη έναν λαχνό από την κάλπη. Να βρείτε την πιθανότητα:
α) ο αριθμός να διαιρείται με το 2 κα με το 5
β) ο αριθμός να διαιρείται με έναν τουλάχιστον από τους αριθμούς 2 και 5
γ) ο αριθμός να μην διαιρείται με το 3
δ) τα ψηφία του αριθμού να είναι διαδοχικοί αριθμοί

5.3 / 3 | Βασικοί κανόνες λογισμού πιθανοτήτων Ι (Ασκήσεις) | 84

1. Θεωρία

- Αν δύο ενδεχόμενο είναι συμπληρωματικά, δηλαδή Α και Α’ τότε ισχύει $P(A)+P(A')=1$.
- Αν Α και Β είναι δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα τότε ισχύει $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε μπορεί να ισχύει

$$P(A)+P(B)>1$$

2. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$\text{Αν } A\subseteq B \text{ τότε } P(A)\leq P(B)$$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A\cap B)=\frac{1}{4},\ P(A)=\frac{2}{5} \text{ και } P(B)=\frac{6}{10}$$

να υπολογίσετε την $P(A\cup B)$.

2. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A\cup B)=\frac{1}{2},\ P(A)=\frac{2}{5} \text{ και } P(B')=\frac{7}{10}$$

να υπολογίσετε τις $P(B)$, $P(A\cap B)$.

3. Αν για δύο ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A\cup B)=\frac{6}{10} \text{ και } P(A')+P(B')=\frac{12}{10}$$

να υπολογίσετε την $P(A\cap B)$.

4. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A)=2P(A'),\ P(B)=\frac{1}{2} \text{ και } P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

να υπολογίσετε τις $P(A)$, $P(B')$, $P(A\cup B)$.

5. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4},\ P(A')=\frac{2}{3} \text{ και } P(A\cap B)=\frac{1}{4}$$

να υπολογίσετε τις $P(A)$, $P(B)$ και $P(A\cap B')$.

6. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$P(A)+2P(B)=1,\ P(A')=3P(A) \text{ και}$$
$$2P(A\cup B)=1$$

να υπολογίσετε τις $P(A\cap B)$ και $P(A\cup B')$.

7. Αν για το ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$\frac{3}{P(A')}-\frac{2}{P(A)}=\frac{25}{6}$$

τότε να υπολογίσετε τις $P(A)$ και $P(A')$.

8. Αν για το ενδεχόμενο Α ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

$$P(A)\cdot P(A')=\frac{2}{9}$$

τότε να υπολογίσετε τις $P(A)$ και $P(A')$.

4. Επεκτάσεις

1. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν

$$\frac{P(A)}{P(A')}=4,\ P(B')=\frac{1}{3} \text{ και } P(A\cap B)=\frac{1}{15}$$

τότε να υπολογίσετε τις πιθανότητες

α) να πραγματοποιείται το Α

β) να πραγματοποιείται το Β

γ) να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β

2. Αν είναι $P(A)=\frac{9}{10}$ και $P(B')=\frac{2}{10}$ τότε είναι δυνατόν να είναι $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$;

3. Υψώνουμε στο τετράγωνο έναν τυχαίο μονοψήφιο φυσικό αριθμό. Ποια είναι η πιθανότητα ο αριθμός που προκύπτει να έχει τελευταίο ψηφίο

α) το 1 β) το 2 γ) το 5

δ) το 9 ε) το 1 ή το 4 στ) το 1 ή το 5

1. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνουμε ένα πρόβλημα σε δύο μαθητές Α και Β. Η πιθανότητα να το λύσει ο Α είναι 15%, ενώ η πιθανότητα να το λύσει ο Β είναι 20%. Η πιθανότητα να το λύσουν και οι δύο είναι 10%. Να βρείτε την πιθανότητα:

α) να το λύσει ένας τουλάχιστον από τους δύο
β) να το λύσει μόνο ένας από τους δύο

2. Η Γ' τάξη ενός Γυμνασίου έχει 50 μαθητές. Από αυτούς οι 30 παίζουν ποδόσφαιρο, οι 16 παίζουν μπάσκετ και οι 10 και τα δύο. Να βρείτε την πιθανότητα ένας μαθητής

α) να μην παίζει ούτε ποδόσφαιρο ούτε μπάσκετ
β) να παίζει ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα
γ) να μην παίζει κανένα από τα δύο αθλήματα
δ) να παίζει ακριβώς ένα άθλημα

3. Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος Αγγλικά είναι 45%, να γνωρίζει Γαλλικά είναι 25% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 10%. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) να ξέρει τουλάχιστον μία από τις δύο ξένες γλώσσες
β) να μην ξέρει καμία από τις δύο γλώσσες

4. Σε ένα χωριό με 320 οικογένειες οι 120 έχουν αυτοκίνητο, οι 280 έχουν τηλεόραση και 100 έχουν και αυτοκίνητο και τηλεόραση. Επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια του χωριού. Να βρείτε την πιθανότητα:

α) να έχει αυτοκίνητο ή τηλεόραση
β) να έχει τηλεόραση αλλά όχι αυτοκίνητο
γ) να μην έχει ούτε τηλεόραση ούτε αυτοκίνητο
δ) να έχει μόνο αυτοκίνητο ή μόνο τηλεόραση

5. Τα 90 παιδιά της Γ' τάξης ενός Γυμνασίου επέλεξαν να διδαχτούν μια δεύτερη ξένη γλώσσα ανάμεσα στα Γαλλικά και τα Γερμανικά. Τα 28 από τα 40 αγόρια επέλεξαν τα Γερμανικά, ενώ 42 κορίτσια επέλεξαν τα Γαλλικά.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	Αγόρια	Κορίτσια
Γαλλικά		
Γερμανικά		

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί. Να βρείτε την πιθανότητα:

i) να είναι αγόρι
ii) να έχει επιλέξει τα Γερμανικά
iii) να είναι αγόρι και να έχει επιλέξει τα Γαλλικά
iv) να είναι κορίτσι ή να έχει επιλέξει τα Γερμανικά

6. Σε ένα γυμνάσιο το 20% των παιδιών είναι στη χορωδία του γυμνασίου, το 5% παίζουν κάποιο μουσικό όργανο και 2% των παιδιών μουσικό όργανο και τραγουδάνε ταυτόχρονα. Διαλέγουμε τυχαία ένα παιδί του γυμνασίου. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι μόνο στην χορωδία και μόνο να παίζει μουσικό όργανο;

7. Σε ένα χωριό το 10% των οικογενειών δεν έχουν σταθερό τηλέφωνο, το 30% των οικογενειών δεν έχουν κινητό τηλέφωνο και το 8% δεν έχουν σταθερό ούτε κινητό τηλέφωνο. Επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια. Να βρείτε την πιθανότητα:

α) να έχει κινητό τηλέφωνο
β) να έχει σταθερό και κινητό τηλέφωνο

2. Επεκτάσεις

1. Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες μπάλες. Αν πάρουμε τυχαία μία μπάλα τότε η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $\frac{1}{6}$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $\frac{2}{3}$. Αν το κουτί έχει 4 μαύρες μπάλες τότε να βρείτε:

α) πόσες μπάλες έχει το κουτί
β) πόσες είναι οι άσπρες και πόσες είναι οι μαύρες μπάλες

2. Σε ένα σχολείο το 50% των μαθητών έχει κινητό τηλέφωνο ή δεν έχει Η/Υ και το 25% των μαθητών έχει κινητό κα Η/Υ. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν η πιθανότητα να έχει κινητό και να μην έχει Η/Υ είναι $\frac{1}{5}$ τότε να βρείτε την πιθανότητα

α) να έχει Η/Υ
β) να μην έχει Η/Υ ούτε κινητό

1. Θεωρία

- Κύρια στοιχεία τριγώνου. Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου.
- Το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 180°.
- Επανάληψη: Κατακορυφήν γωνίες, συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες. Οι γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ποια είναι τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου;

2. Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου;

3. Ποια είναι τα είδη ενός τριγώνου ως προς τις πλευρές του;

4. Ποια είναι τα είδη ενός τριγώνου ως προς τις γωνίες του;

5. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται σκαληνό;

6. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται ισοσκελές;

7. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται ισόπλευρο;

8. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται αμβλυγώνιο;

9. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται ορθογώνιο;

10. Ποιο τρίγωνο ονομάζεται οξυγώνιο;

11. Τι ονομάζουμε διάμεσο ενός τριγώνου;

12. Τι ονομάζουμε διχοτόμο μίας γωνίας;

13. Τι ονομάζουμε διχοτόμο μίας γωνίας τριγώνου;

14. Τι ονομάζουμε ύψος ενός τριγώνου;

15. Τι ονομάζουμε περιεχόμενη γωνία δύο πλευρών τριγώνου;

16. Τι ονομάζουμε προσκείμενες γωνίες πλευράς τριγώνου;

3. Δραστηριότητες

1. Σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και φέρετε τις τρεις διαμέσους του; Το σημείο που τέμνονται οι τρεις διάμεσοι βρίσκεται μέσα ή έξω από το τρίγωνο;

2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο και να φέρετε τα τρία ύψη του; Το σημείο που τέμνονται τα τρία ύψη βρίσκεται μέσα ή έξω από το τρίγωνο;

4. Ασκήσεις για λύση

1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\hat{A} = 64°$ και $\hat{B} = 78°$.Να βρείτε την γωνία Γ.

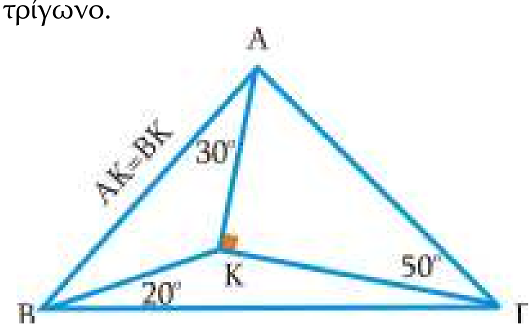
2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ ισχύει ότι $\hat{A} = 72°$.Να βρείτε τις άλλες δύο γωνίες.

3. Η μία γωνία ισοσκελούς τριγώνου είναι 50°. Να βρείτε τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου. (Δύο περιπτώσεις)

4. Να βρείτε τις γωνίες ενός τριγώνου αν γνωρίζετε ότι η πρώτη είναι τριπλάσια της δεύτερης και ότι η τρίτη είναι το μισό της δεύτερης.

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) η γωνία που σχηματίζει η πλευρά ΑΒ με το ύψος ΑΔ στη ΒΓ είναι 48°. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου

6. Να υπολογίσετε όλες τις γωνίες στο παρακάτω τρίγωνο.



1. Θεωρία

- Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα.
- Κριτήρια ισότητας τριγώνων: (Π–Γ–Π), (Γ–Π–Γ), (Π–Π–Π).

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Είναι δυνατόν δύο τρίγωνα να έχουν τρία τους στοιχεία ίσα και να μην είναι ίσα; Δώστε παράδειγμα.

2. Είναι δυνατόν δύο τρίγωνα να έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες και να μην είναι ίσα; Δώστε παράδειγμα.

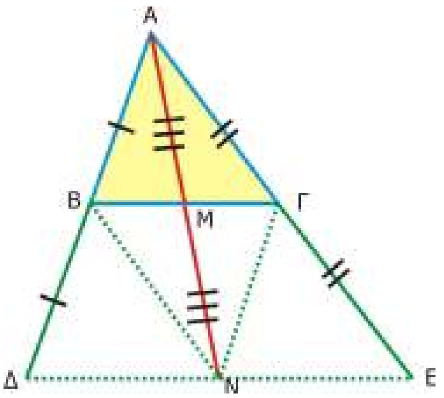
3. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ είναι $ΑΓ = ΚΛ$, $ΒΓ = ΛΜ$ και $\hat{Γ} = \hat{Λ}$. Να συγκρίνετε, μία προς μία, τις πλευρές και τις γωνίες τους.

4. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές;

5. Ένα ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι ορθογώνιο;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την ΑΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΑΓ, την ΑΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΒ και τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΝ = ΑΜ.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΝΓ, τα ΜΑΓ, ΜΝΒ και τα ΝΑΒ, ΝΑΓ είναι ίσα

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΒΔΝ και ΓΝΕ, καθώς και τα τμήματα ΝΔ και ΝΕ

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $Δ\hat{Ν}Ε$

δ) Τι συμπεραίνετε για τα τρία σημεία Ν, Δ και Ε;

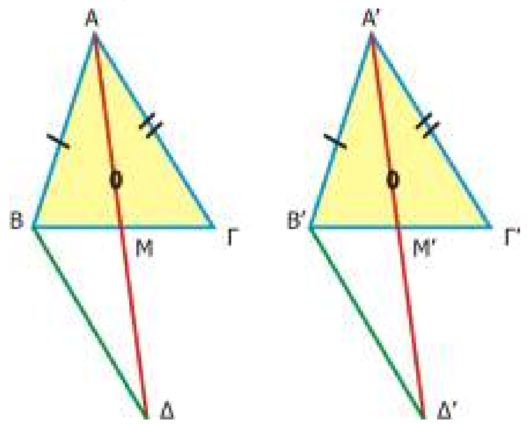
2. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Ε, Ρ στις ΑΒ και ΑΓ ώστε $ΑΕ = ΑΓ$ και $ΑΡ = ΑΒ$. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΕΡ να δείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΡ είναι ίσα

β) τα τρίγωνα ΚΒΕ αι ΚΡΓ είναι ίσα

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α

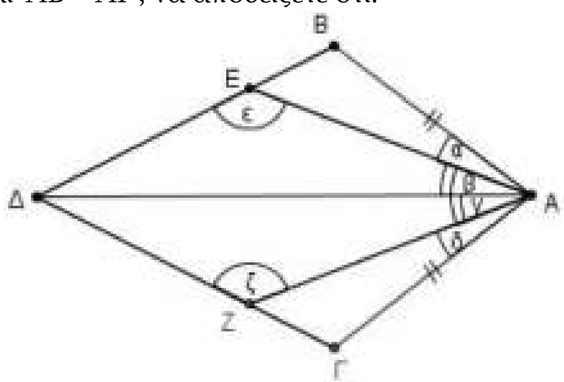
3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουν $ΑΒ = Α'Β'$, $ΑΓ = Α'Γ'$ και διαμέσους $ΑΜ = Α'Μ'$. Προεκτείνουμε τις ΑΜ και Α’Μ’ κατά τμήματα $ΜΔ = ΑΜ$ και $Μ'Δ' = Α'Μ'$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Δ′ είναι ίσα

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα

4. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{α} = \hat{δ}$, $\hat{β} = \hat{γ}$ και $ΑΒ = ΑΓ$, να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα

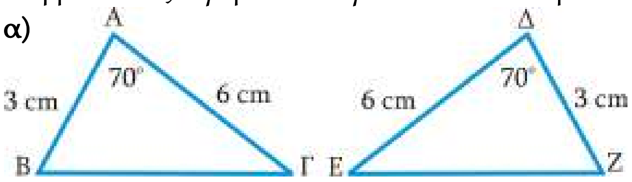
β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες

Τ.Θ.

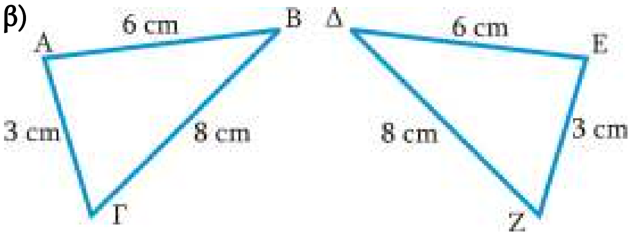
1. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα και να βρείτε τα ζευγάρια ίσων γωνιών και πλευρών.

α)



β)

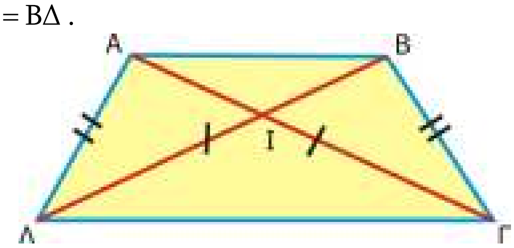


2. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε τμήματα ΟΑ, ΟΓ και ΟΒ, ΟΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$, $ΟΓ = ΟΔ$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΓ = ΑΔ$ β) $ΜΓ = ΜΔ$

γ) Το τμήμα ΟΜ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}y$

3. Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει $ΑΔ = ΒΓ$ και $ΑΓ = ΒΔ$.



α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΑΔ καθώς και τα ΒΓΔ και ΑΔΓ. Να αποδείξετε ότι οι πλευρές ΑΒ και ΓΔ σχηματίζουν ίσες γωνίες με τις διαγωνίους του τετραπλεύρου

β) Αν οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου τέμνονται στο Ι, τι τρίγωνα, ως προς τις πλευρές τους, είναι τα ΙΑΒ και ΙΓΔ;

γ) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΙΑΔ και ΙΒΓ

4. Να αποδείξετε ότι στις αντίστοιχες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

5. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $Α'Β'Γ'$ έχουν $β = β'$, $\hat{Α} = \hat{Α}'$ και $δ_α = δ_{α'}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$ β) $α = α'$ και $γ = γ'$

6. Να αποδείξετε ότι στις αντίστοιχες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διχοτόμοι.

7. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α, παίρνουμε αντίστοιχα τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των ΒΓ, ΔΕ διέρχεται από το σημείο Α και διχοτομείται απ' αυτό.

8. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α και στις προεκτάσεις παίρνουμε αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα

ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ

α) Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΒΓ

β) Αν η προέκταση του ύψους ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τη ΔΕ στο σημείο Ρ, να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΡ είναι ύψος του τριγώνου ΑΔΕ

γ) Ελέγξτε αν αληθεύει ανάλογη πρόταση για τη διχοτόμο ΑΝ του τριγώνου ΑΒΓ

9. Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο πλευρές και την περιεχόμενη διάμεσο ίσες μία προς μία.

10. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι $α = α'$, $β = β'$, και $μ_α = μ_{α'}$ τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

4. Επεκτάσεις

1. α) Στα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ ισχύει $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\hat{Γ}$ και $\hat{Ζ}$ είναι ίσες ή παραπληρωματικές.

β) Δύο αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ στις κορυφές Γ και Ζ έχουν ΑΒ = ΔΕ, ΑΓ = ΔΖ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα.

2. Να σχεδιάσετε δύο τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ τέτοια, ώστε η κορυφή Ο να είναι κοινό μέσο των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΟΜ του τριγώνου ΟΑΒ, όταν προεκταθεί, διέρχεται από το μέσο της ΓΔ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ θεωρήσουμε τμήματα $ΚΔ = ΑΚ$, $ΚΕ = ΒΚ$ και $ΚΖ = ΓΚ$ τότε να αποδείξετε ότι $Ε\hat{Δ}Ζ = Β\hat{Α}Γ$.

1. Θεωρία

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
- Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες
- Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση συμπίπτουν

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι

$$ΓΔ = ΒΕ$$

2. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ πάνω στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος του. Αν Κ είναι το μέσο της ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ είναι ίσα
β) το τρίγωνο ΒΓΚ είναι ισοσκελές

4. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΜ και ΓΝ. Να αποδείξετε ότι

$$ΒΜ = ΓΝ$$

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Δ και Ε, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Αν τα τμήματα ΔΚ και ΕΛ είναι κάθετα στη ΒΓ, να δείξετε ότι

$$ΔΚ = ΕΛ$$

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της βάσης ΒΓ. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.

7. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Πάνω στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ φέρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$ αντίστοιχα. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $ΛΚ = ΛΜ$.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

11. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, έτσι ώστε $ΑΒ < ΑΓ$ και ΑΕ διχοτόμος του. Στην πλευρά ΑΓ παίρνουμε σημείο Δ, ώστε $ΑΔ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ είναι ίσα
β) το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές

12. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 24 cm. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ τέτοια ώστε:

$$ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = 3 \text{ cm}$$

α) Να βρείτε τα μήκη των τμημάτων ΑΜ, ΒΚ και ΓΛ
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΚΛ είναι ίσα
γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο

13. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ έτσι ώστε

$$ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ$$

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΚΛ
β) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΚΜ και ΚΛ
γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο

14. Με βάσεις τις πλευρές ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε, εξωτερικά του ΑΒΓ, ισόπλευρα τρίγωνα. Να αποδείξετε ότι οι εξωτερικές κορυφές των τριγώνων σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

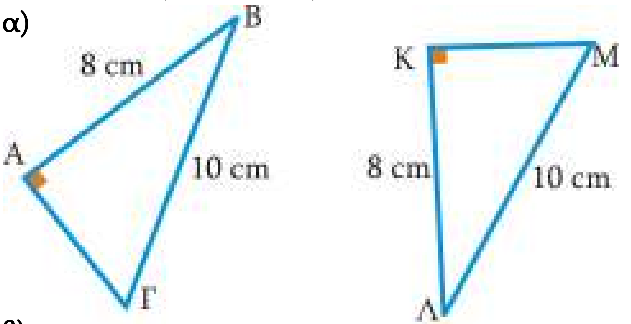
1. Θεωρία

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν μία πλευρά και ένα άλλο στοιχείο τους (πλευρά ή γωνία) ίσο

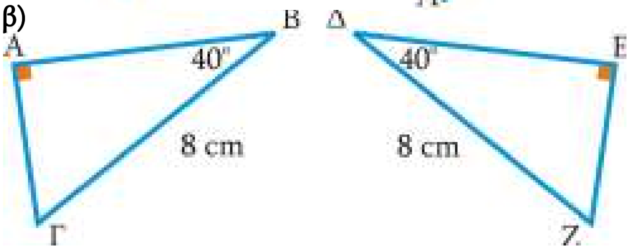
2. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα και να βρείτε τα ζευγάρια ίσων γωνιών και πλευρών.

α)



β)



2. Να αποδείξετε ότι στις αντίστοιχες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσα ύψη.

3. Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα όταν έχουν

$$\hat{A} = \hat{A}' < 90^\circ, \quad \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}, \quad \upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα

β) $AB = BE$

γ) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΕ είναι ίσα

5. Αν προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ κατά ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε απέχουν εξίσου από την ευθεία ΒΓ.

6. Να αποδείξετε ότι οι δύο κορυφές τριγώνου απέχουν εξίσου από τη διάμεσο που άγεται από την τρίτη κορυφή του.

7. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κορυφών του Α και Γ από τη διαγώνιο ΒΔ είναι ίσες.

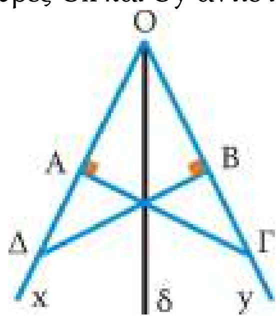
8. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ότι η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει το ύψος ΒΔ στο Ζ και την κάθετη στην ΑΒ στο Β σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι

$$BZ = BE$$

9. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ότι η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει το ύψος ΒΔ στο Ζ και την κάθετη στην ΑΒ στο Β σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι

$$BZ = BE$$

10. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και Κ ένα σημεία της διχοτόμου Οδ. Τα τμήματα Κα και ΚΒ είναι κάθετα στις πλευρές Οx και Οy αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $OA = OB$

β) Αν η ΑΚ τέμνει την Οy στο σημείο Γ και η ΒΚ τέμνει την Οx στο σημείο Δ τότε να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ είναι ίσα.

11. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και Μ το μέσο της ΑΒ. Παίρνουμε σημείο Δ στη ΒΓ τέτοιο ώστε ΜΒ = ΜΔ. Η κάθετη στη ΔΜ στο Δ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι

$$AE = A\Gamma$$

12. Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και παίρνουμε το μέσο του Μ. Φέρνουμε μια ευθεία ε που να διέρχεται από το Μ και να μην είναι κάθετη στο ΑΒ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των Α, Β από την ευθεία ε είναι ίσες.

13. Θεωρούμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε καθέτους ΒΔ , ΓΕ στη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = \Gamma E$.

1.1 / 6 | Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος – Διχοτόμος γωνίας | 91

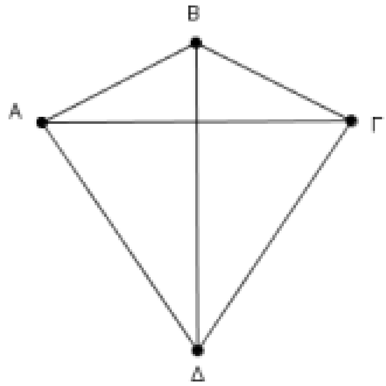
1. Θεωρία

- Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το **μέσο** του ευθύγραμμου τμήματος και είναι **κάθετη** σε αυτό
  Χαρακτηριστική ιδιότητα μεσοκαθέτου: Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος **ισαπέχει** από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος
- Διχοτόμος γωνίας ονομάζεται η ημιευθεία που **χωρίζει** τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες
  Χαρακτηριστική ιδιότητα διχοτόμου γωνίας: Κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας **ισαπέχει** από τις πλευρές τις γωνίας

2. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της Οδ. Παίρνουμε ένα σημείο Μ πάνω στην Οδ και φέρνουμε τις καθέτους ΜΑ και ΜΒ πάνω στις πλευρές Οx και Οy της γωνίας. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές
β) Το ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ

2. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$, $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να δείξετε ότι:



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ **Τ.Θ.**

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$, και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΒ = ΒΕ$
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα **Τ.Θ.**

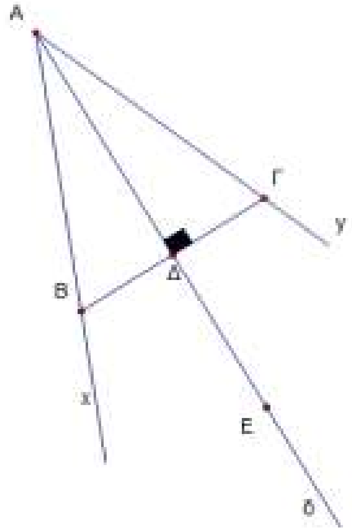
4. Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ. Φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΗ και το ύψος ΒΘ του ΑΒΓ, που τέμνονται στο σημείο Κ. Επίσης, στο ΔΕΖ φέρνουμε τη διχοτόμο ΔΜ και το ύψος ΕΝ που τέμνονται στο σημείο Ρ. Να συγκρίνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΘ και ΡΝ.

5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Γ} = 3\hat{B}$ και η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΒΓ είναι ισοσκελή.

6. Κατασκευάζουμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας Α και πάνω σ’ αυτήν παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε, έτσι ώστε $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι

$$ΒΕ = ΓΔ$$

7. Δίνεται γωνία $x\hat{A}y$ και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.



Να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΑΒ και ΑΓ είναι ίσα
β) τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β, Γ **Τ.Θ.**

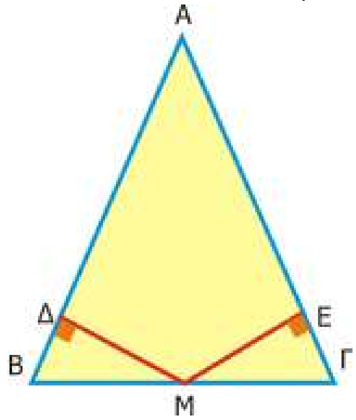
8. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις μεσοκαθέτους στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνονται στο Ο και τέμνουν την ευθεία της βάσης στα Μ και Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΜΝ είναι ισοσκελές.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Από το μέσο Μ της βάσης ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε τα τμήματα ΜΔ και ΜΕ κάθετα στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

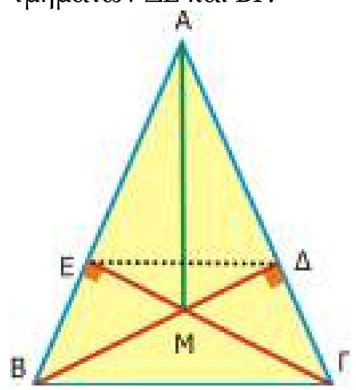
α) $ΜΔ = ΜΕ$

β) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

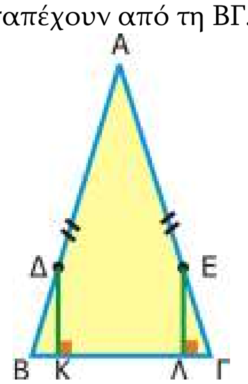


2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα.

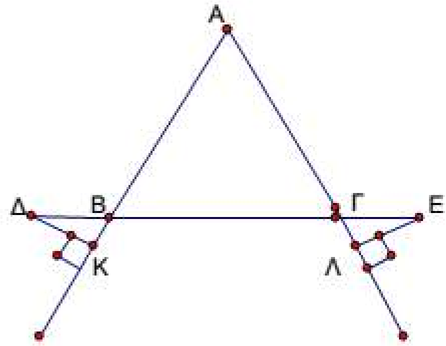
3. Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη των ευθύγραμμων τμημάτων ΔΕ και ΒΓ.



4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε δύο σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τέτοια ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι τα Δ και Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ.



5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την βάση ΒΓ κατά τμήματα $ΒΔ = ΓΕ$, όπως φαίνεται στο σχήμα.



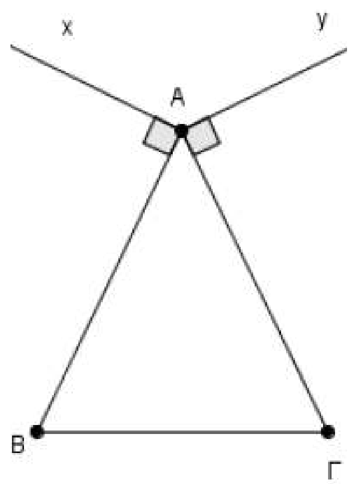
Αν ΔΚ είναι η απόσταση του Δ από την ευθεία ΑΒ και ΕΛ η απόσταση του Ε από την ευθεία ΑΓ, να αποδείξετε ότι $ΔΚ = ΕΛ$.

6. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) $ΜΔ = ΜΕ$

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες Αx και Αy τέτοιες ώστε $Αx \perp ΑΒ$ και $Αy \perp ΑΓ$. Στις Αx και Αy θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.



α) Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$

β) Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των τμημάτων ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΜΝ είναι ισοσκελές **Τ.Θ.**

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) και η διάμεσός του ΑΜ. Φέρουμε από το Γ ημιευθεία κάθετη στη ΒΓ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα $ΓΔ = ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Δ\hat{Α}Γ$ είναι ίση με τη γωνία $Γ\hat{Δ}Α$

β) Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $Μ\hat{Α}Γ$ **Τ.Θ.**

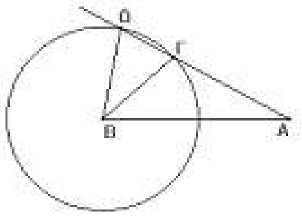
1.1 / 8 | Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (Κύκλος) | 93

1. Θεωρία

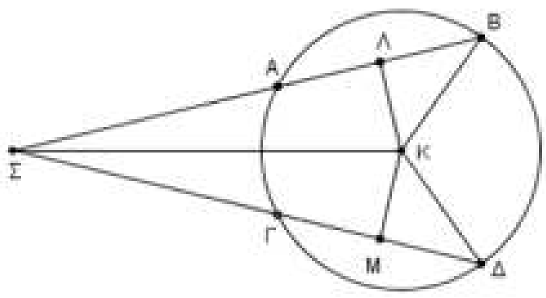
- Σε κάθε κύκλο όλες οι ακτίνες είναι ίσες.
- Ίσα τόξα ↔ ίσες χορδές ↔ ίσα αποστήματα ↔ ίσες επίκεντρες γωνίες.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Στο παρακάτω σχήμα στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΒΓ είναι η ΑΒ κοινή πλευρά, $ΒΔ = ΒΓ$ και η γωνία Α κοινή και προφανώς τα τρίγωνα δεν είναι ίσα. Έτσι παρά το ότι τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μία γωνία ίση αυτά δεν είναι ίσα. Γιατί συμβαίνει αυτό;



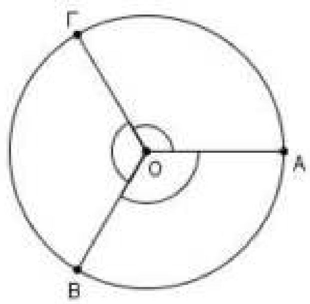
2. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου $(Κ,ρ)$ θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου για τις οποίες ισχύει $ΣΒ = ΣΔ$. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι:
  i) τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα
  ii) $ΚΛ = ΚΜ$

β) Να αιτιολογήσετε ότι $ΑΒ = ΓΔ$ **Τ.Θ.**

3. Σε κύκλο κέντρου Ο θεωρούμε τρεις διαδοχικές ίσες γωνίες ΑΟΒ, ΒΟΓ και ΓΟΑ.



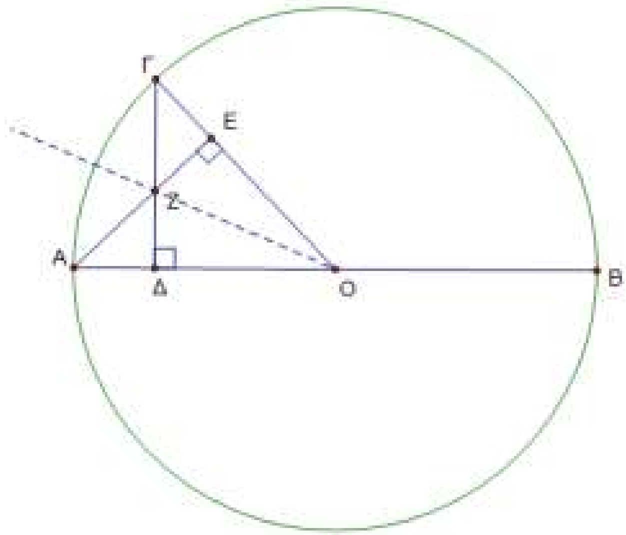
α) Να αποδείξετε ότι η προέκταση της ακτίνας ΑΟ διχοτομεί τη γωνία ΒΟΓ.

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις πλευρές του

γ) Αν με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΚ όπου Κ το μέσο της ακτίνας ΟΑ, γράψουμε έναν άλλο κύκλο που θα τέμνει τις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα, τότε τα τόξα ΚΜ και ΑΒ είναι ίσα; **Τ.Θ.**

4. Πάνω στην εφαπτομένη (ε) ενός κύκλου $(Κ,R)$ φέρουμε δύο σημεία Β, Γ συμμετρικά ως προς το σημείο επαφής Α. Αν οι ΒΚ και ΓΚ τέμνουν τον κύκλο στα Δ, Ε να αποδείξετε ότι $ΒΔ = ΓΕ$.

5. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.



Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $Α\hat{Ο}Γ$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ **Τ.Θ.**

6. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς τα δύο άκρα της, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

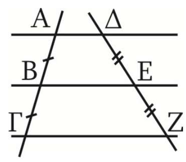
α) $Ο\hat{Γ}Α = Ο\hat{Δ}Β$

β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές

1.2 / 1 | Ίσα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ παραλλήλων ευθειών | 94

1. Θεωρία

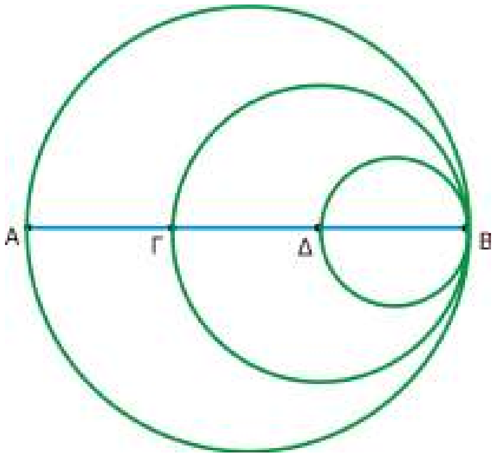
- Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει
Δηλαδή, αν $ΑΔ//ΒΕ//ΓΖ$ και $ΑΒ = ΒΓ$ τότε $ΔΕ = ΕΖ$.
- Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα



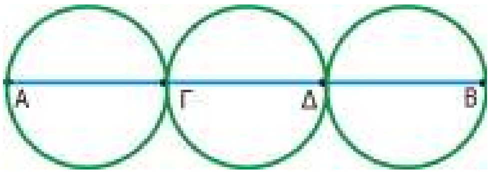
2. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ = 10\text{cm}$.
Να σχεδιάσετε με κανόνα και διαβήτη τα παρακάτω σχήματα, αν:

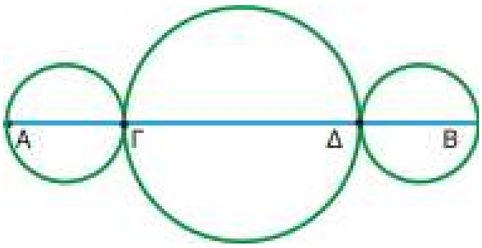
α) ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ



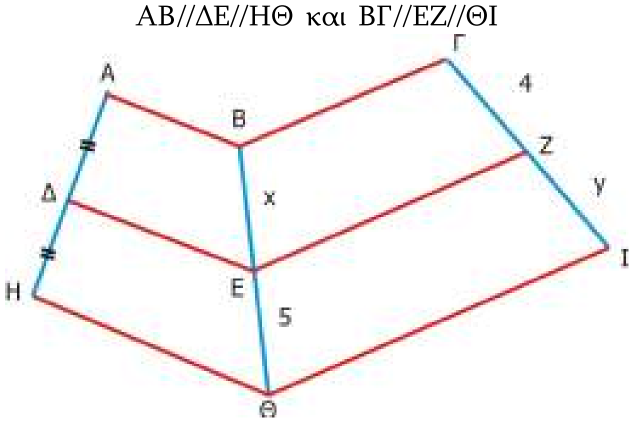
β) ΑΓ = ΔΒ και ΓΔ = 2ΑΓ



γ) ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ



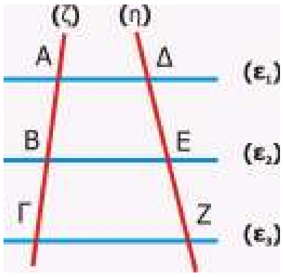
2. Στο παρακάτω σχήμα είναι
$ΑΒ//ΔΕ//ΗΘ$ και $ΒΓ//ΕΖ//ΘΙ$



Αν $ΑΔ = ΔΗ$ τότε να υπολογίσετε τα x και y.

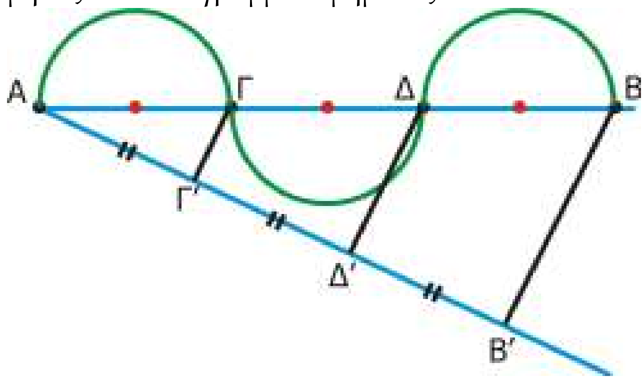
3. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα $ΑΒ = 10\text{cm}$.
Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε το ΑΒ σε 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

4. Στο παρακάτω σχήμα είναι $ε_1//ε_2//ε_3$.

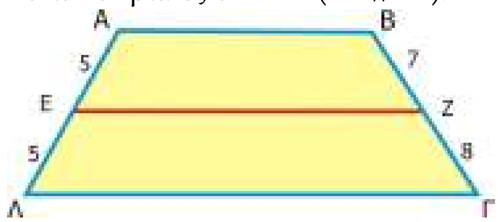


Αν είναι $ΑΒ = ΒΓ = 3\text{cm}$ και $ΔΕ = x + 1$, $ΕΖ = 4$ τότε να υπολογίσετε το x.

5. Αν $Β'Β//ΓΓ'//ΔΔ'$ και η διάμετρος ΓΔ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 6 cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



6. Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ).



α) Να εξηγήσετε γιατί η ΕΖ δεν είναι παράλληλη στις δύο βάσεις του τραπεζίου.
β) Τι έπρεπε να ισχύει για να είναι η ΕΖ παράλληλη στις δύο βάσεις του τραπεζίου;

1.2 / 2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων – Αναλογίες

1. Θεωρία

- Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων
- Ιδιότητες αναλογιών

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Σε μία αναλογία $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$ είναι $AB = 1$ και $\Gamma\Delta = 3$;

2. Σε μία αναλογία $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$ είναι δυνατόν να είναι $AB = 3$ και $\Gamma\Delta = 9$;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = 10\,\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 20\,\text{cm}$ και $EZ = 30\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε τους παρακάτω λόγους:

α) $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ β) $\frac{AB}{EZ}$ γ) $\frac{EZ}{\Gamma\Delta}$

2. Έστω τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB = 10\,\text{cm}$, $B\Gamma = 20\,\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 30\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε τους παρακάτω λόγους:

α) $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$

δ) $\frac{B\Delta}{A\Gamma}$ ε) $\frac{B\Gamma}{AB}$ στ) $\frac{A\Delta}{AB}$

3. Να σχεδιάσετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $AB = 10$ και να φέρετε το ύψος του ΑΔ. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$.

4. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = 10\,\text{cm}$. Με κανόνα και διαβήτη να διαιρέσετε το ΑΒ σε 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα. Σε μία ευθεία ε να σχεδιάσετε τα ευθύγραμμα τμήματα

i) $K\Lambda = \frac{1}{4}AB$ ii) $\Lambda M = \frac{1}{6}AB$

iii) $MN = \frac{2}{3}AB$ iv) $N\Xi = 2AB$

Να υπολογίσετε τους παρακάτω λόγους:

α) $\frac{K\Lambda}{\Lambda M}$ β) $\frac{MN}{K\Lambda}$

γ) $\frac{N\Xi}{MN}$ δ) $\frac{MN}{\Lambda M}$

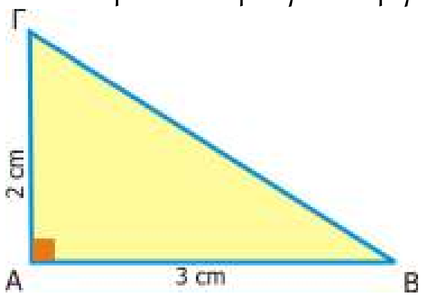
6. Έστω τα ευθύγραμμα τμήματα $AB = x - 6$ και $\Gamma\Delta = x$ τα οποία είναι ανάλογα των $\Delta E = x$ και $EZ = 2x + 5$. Να υπολογίσετε το x.

5. Χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ σε 5 ίσα ευθύγραμμα τμήματα ($AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E = EZ$). Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{BE}$ β) $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$ γ) $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$

δ) $\frac{\Gamma\Delta}{BE}$ ε) $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ ζ) $\frac{BZ}{B\Gamma}$

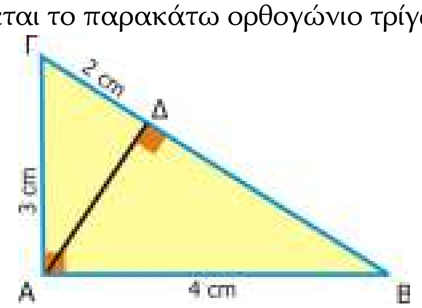
6. Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο.



Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{B\Gamma}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{A\Gamma}{AB}$

7. Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο.



Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{B\Gamma}$ β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{A\Gamma}{AB}$

δ) $\frac{\Gamma\Delta}{B\Gamma}$ ε) $\frac{A\Delta}{\Gamma\Delta}$ ζ) $\frac{\Delta B}{B\Gamma}$

8. Να υπολογίσετε το λόγο

α) πλευράς τετραγώνου προς τη διαγώνιό του

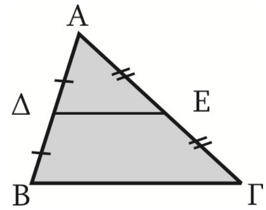
β) ακτίνας κύκλου προς την περίμετρό του

1.2 / 3 **Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου** **96**

1. Θεωρία

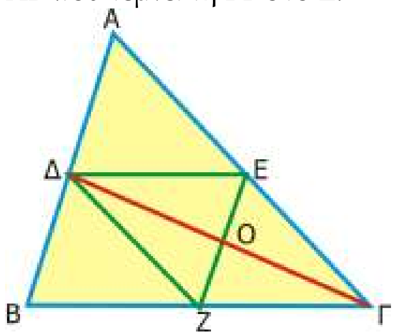
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς και παράλληλο στην τρίτη πλευρά.

Δηλαδή: Αν $\begin{cases} \Delta \text{ μέσο } AB \\ E \text{ μέσο } A\Gamma \end{cases}$ τότε $\Delta E = // \dfrac{B\Gamma}{2}$



2. Ασκήσεις για λύση

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσο Δ της ΑΒ φέρνουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ.



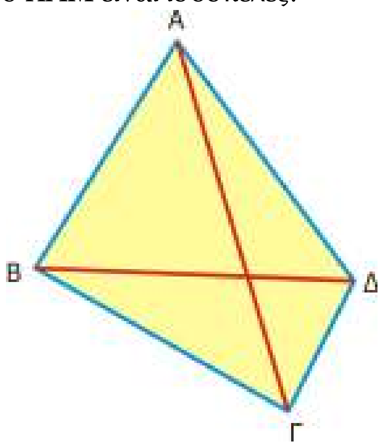
α) Να δείξετε ότι η ΔΖ είναι παράλληλη στην ΑΓ

β) Αν είναι Ο το σημείο τομής των ΓΔ και ΕΖ, να δείξετε ότι το Ο είναι το μέσο της ΕΖ

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Μ, Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ σημειώνουμε τα σημεία Κ, Λ ώστε $AK = \frac{1}{2}AM$ και $A\Lambda = \frac{1}{2}AN$. Να αποδείξετε ότι

$$K\Lambda = \frac{1}{4}B\Gamma$$

3. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ ίσες. Τα Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΑΔ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.



4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών του. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΚΛΜ είναι η μισή της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ.

5. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τυχαίο σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ. Σημειώνουμε τα μέσα Κ, Λ των τμημάτων ΑΒ και ΑΔ. Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΚΛ προεκτεινόμενο διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΑΓ.

6. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και παίρνουμε τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ. Το τμήμα ΕΖ τέμνει την ΑΔ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΕΖ.

7. Κατασκευάζουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και παίρνουμε τα μέσα Κ, Λ, Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Σχηματίζουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

8. Κατασκευάζουμε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ($AB < \Gamma\Delta$) και φέρνουμε τις διαγώνιές του ΑΓ και ΒΔ. Παίρνουμε τα μέσα των Κ, Λ των ΑΔ και ΒΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) το τμήμα ΚΛ προεκτεινόμενο διέρχεται από τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ

β) $K\Lambda = MN = \dfrac{AB}{2}$ **γ)** $KM = \Lambda N = \dfrac{\Delta\Gamma}{2}$

δ) $KN = \dfrac{AB + \Delta\Gamma}{2}$ **ε)** $\Lambda M = \dfrac{\Delta\Gamma - AB}{2}$

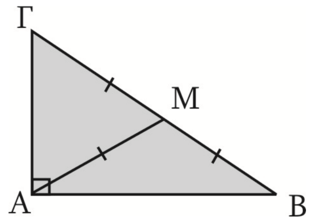
9. Κατασκευάζουμε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε το ύψος του ΑΔ. Παίρνουμε τα μέσα Μ, Ν των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΜΝ είναι η μισή της περιμέτρου του τριγώνου ΑΒΓ.

1.2 / 4 **Διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου** 97

1. Θεωρία

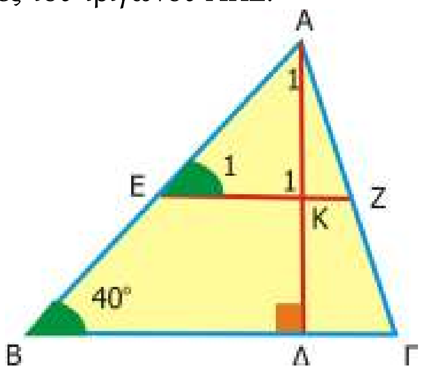
Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας

Δηλαδή: Αν $\hat{A}=90^\circ$ και Μ μέσο του ΒΓ τότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}$

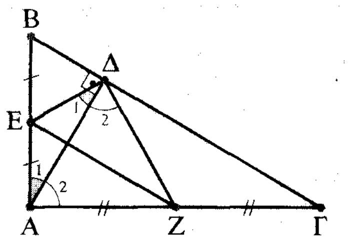


2. Ασκήσεις για λύση

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=40^\circ$ να φέρετε το ύψος ΑΔ. Το σημείο Ε είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Το τμήμα ΕΖ τέμνει το ύψος ΑΔ στο σημείο Κ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΚΕ.



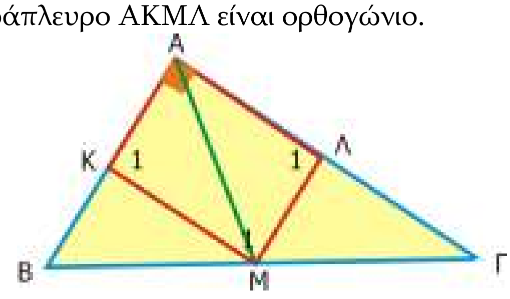
2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) φέρουμε το ύψος ΑΔ προς την υποτείνουσα. Έστω Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα



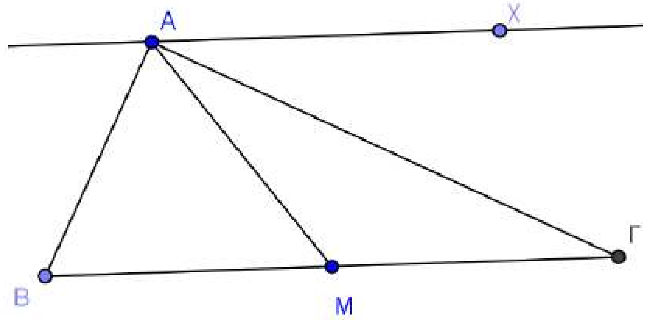
α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ορθογώνιο

β) Πότε το τρίγωνο αυτό είναι και ισοσκελές;

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΛ είναι ορθογώνιο.



4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρουμε ημιευθεία Αx παράλληλη στη ΒΓ (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΜ με το σημείο Γ). Να αποδείξετε ότι:



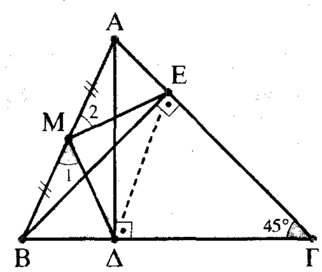
α) $M\hat{A}\Gamma=M\hat{\Gamma}A$

β) η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}x$ **Τ.Θ.**

5. Σε ένα οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και παίρνουμε τα μέσα Μ, Ν, Ρ των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΝΡΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

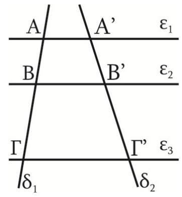
6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$, η $B\Gamma=12$ cm και η $AB=2x+2$ cm. Αν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα είναι 2x–1 cm, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\hat{\Gamma}$.

7. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma}=45^\circ$ φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΒΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

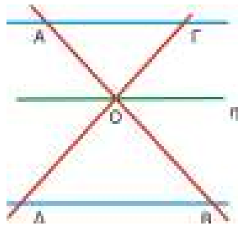


1.3 / 1 **Θεώρημα του Θαλή (Ι)** **98**

1. Θεωρία



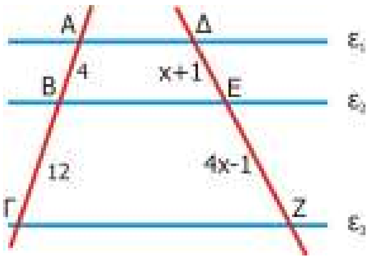
- Αν τρεις παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.
  Δηλαδή: $ε_1//ε_2//ε_3 \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{BΓ}{B'Γ'}=\frac{AΓ}{A'Γ'}$



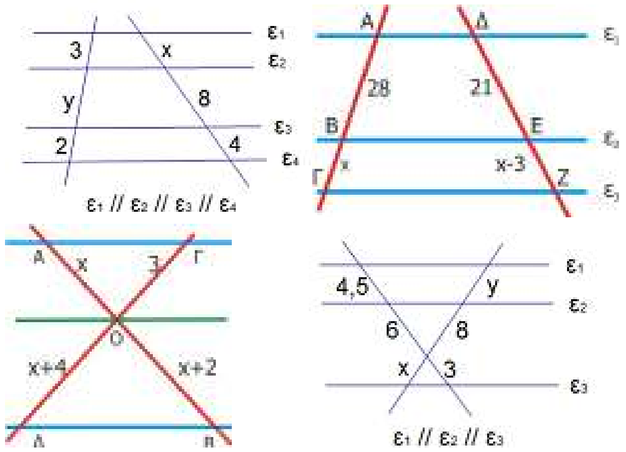
- Αν δύο παράλληλες ευθείες ΑΓ και ΒΔ τέμνουν δύο τεμνόμενες ευθείες τότε φέρουμε παράλληλη προς τις δύο παράλληλες από το σημείο τομής των δύο παράλληλων
  Δηλαδή: Αν ΑΓ//ΔΒ τότε φέρω από το σημείο τομής Ο την ευθεία η//ΑΓ//ΔΒ

2. Ασκήσεις για λύση

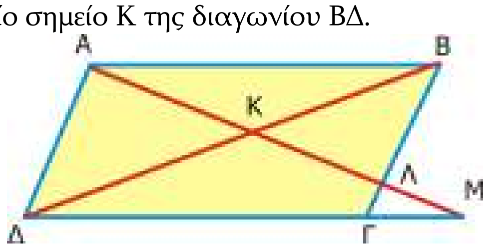
1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $ε_1//ε_2//ε_3$. Να υπολογίσετε το x.



2. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων x, y.



3. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα τυχαίο σημείο Κ της διαγωνίου ΒΔ.



Αν η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Λ και την προέκταση της ΔΓ στο Μ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{KM}{AK}=\frac{AK}{KΛ}$ β) $\frac{ΓM}{ΓΔ}=\frac{ΛΓ}{BΛ}$

4. Από την κορυφή Β ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε τυχαία ευθεία ε που τέμνει τις ΑΔ και ΔΓ τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{ΔA}{ΔE}+\frac{ΔΓ}{ΔZ}=1$$

5. Από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε μία ευθεία ε που τέμνει τις προεκτάσεις των ΑΒ, ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$EA \cdot ΓZ = AB \cdot BΓ$$

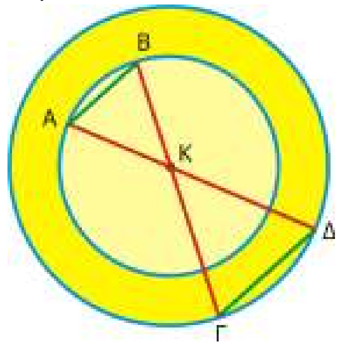
6. Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε ΟΕ//ΑΔ και ΟΖ//ΒΓ . Να αποδείξετε ότι

$$AE = BZ$$

7. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε από το σημείο τομής Μ των διαγωνίων παράλληλη στις δύο βάσεις η οποία τέμνει τις μη κάθετες πλευρές στα Ε και Ζ. Αν $\frac{AE}{EΔ}=\frac{2}{3}$ τότε ποια είναι η τιμή του λόγου

α) $\frac{AM}{AΓ}=$ β) $\frac{ΔM}{MB}=$ γ) $\frac{BΓ}{ZΓ}=$

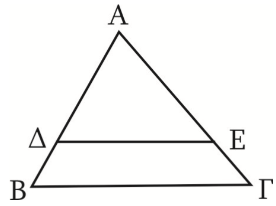
8. Αν οι κύκλοι του σχήματος έχουν το ίδιο κέντρο Κ, να δείξετε ότι ΑΒ // ΓΔ.



1. Θεωρία

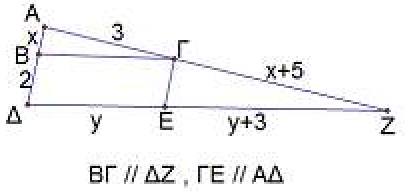
Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη σε μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.

Δηλαδή: $ΔΕ//ΒΓ \Rightarrow \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$.

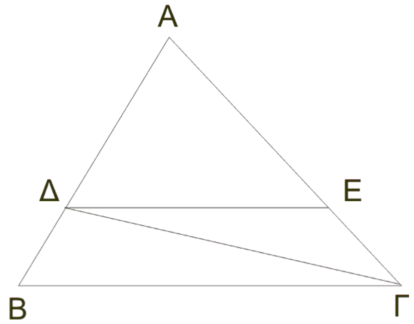


2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων x, y.

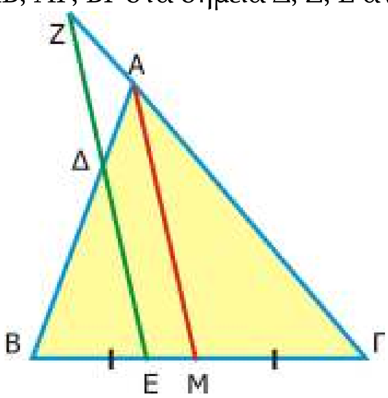


2. Αν ισχύει ΔΕ//ΒΓ τότε να συμπληρώσετε τις αναλογίες.



$\frac{.....}{ΑΕ} = \frac{ΔΒ}{.....}$, $\frac{ΑΒ}{.....} = \frac{ΑΓ}{.....}$, $\frac{ΕΓ}{.....} = \frac{.....}{ΑΒ}$

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΜ η μία διάμεσός του. Φέρουμε παράλληλη προς την ΑΜ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ στα σημεία Δ, Ζ, Ε αντίστοιχα.



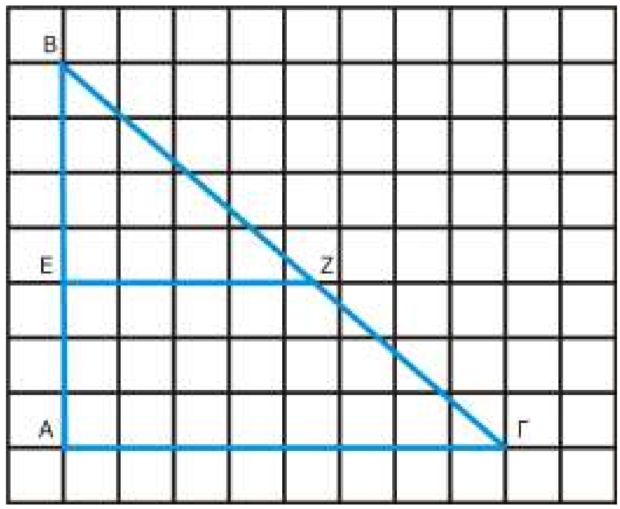
α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες:

i) $\frac{ΔΕ}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{ΑΒ}$ ii) $\frac{ΕΖ}{\dots} = \frac{\dots}{ΓΜ} = \frac{\dots}{\dots}$

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΔ}{ΑΖ} = \frac{ΒΑ}{ΓΑ}$

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα ΔΕ+ΕΖ είναι σταθερό, για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ

4.

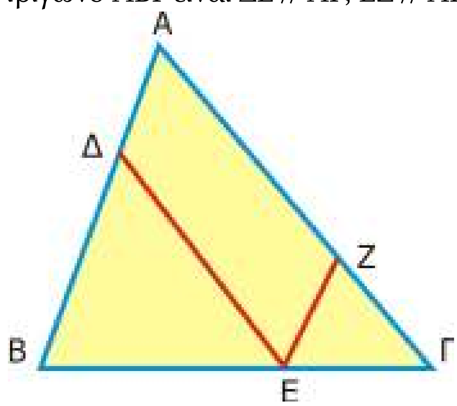


α) Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΒΖ}{ΒΓ}$

β) Να τοποθετήσετε στη ΒΑ ένα σημείο Μ και στη ΒΓ ένα σημείο Ν ώστε $\frac{ΒΜ}{ΒΑ} = \frac{ΒΝ}{ΒΓ} = \frac{2}{7}$

5. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε, Ζ στις ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα ώστε να ισχύουν ΔΕ // ΒΓ και ΕΖ // ΑΒ. Ισχύει και ΔΖ // ΑΓ.

6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΑΓ, ΕΖ // ΑΒ.



Αν είναι ΑΒ = 6 cm, ΒΓ = 9 cm, ΑΓ = 12 cm και $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$ τότε:

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΔ, ΔΒ, ΒΕ, ΕΓ

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΕ

1.3 / 3 | Θεώρημα του Θαλή (ΙΙΙ) (Εφαρμογή σε τρίγωνα) | 100

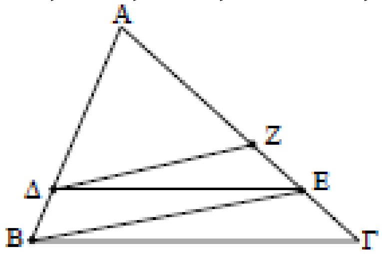
1. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε από το Δ παράλληλες στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ που τέμνουν αντίστοιχα τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}=\frac{ΒΔ}{ΒΓ}$ β) $\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=\frac{ΔΓ}{ΒΓ}$

γ) $\frac{ΔΕ}{ΑΓ}+\frac{ΖΔ}{ΑΒ}=1$ **Τ.Θ.**

2. Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ, το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην πλευρά ΒΓ του τριγώνου.



Από το σημείο Δ φέρουμε την παράλληλη στη ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$ β) $\frac{ΑΖ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ}$ γ) $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}=\frac{ΑΖ}{ΑΕ}$ **Τ.Θ.**

3. Από δύο σημεία Δ και Ε της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ, που τέμνουν την ΑΓ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Από τα Δ και Ε φέρουμε, επίσης, τις παράλληλες προς την ΑΓ, που τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Θ και Κ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΚΘ}{ΖΗ}$$

4. Από τυχαίο σημείο Ν τη διαμέσου ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν την ΒΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

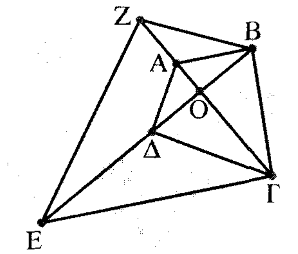
$$ΔΜ = ΕΜ$$

5. Στην πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο, ώστε $ΒΕ=\frac{1}{3}ΑΒ$ και στην πλευρά ΔΓ θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο, ώστε $ΔΖ=\frac{1}{3}ΔΓ$. Αν η διαγώνιος ΑΓ τέμνει τις ΔΕ και ΒΖ στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΜ=ΓΝ=2ΜΝ$

β) $ΜΝ=\frac{1}{5}ΑΓ$ **Τ.Θ.**

6. Από την κορυφή Γ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρουμε την παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την ευθεία ΒΔ στο σημείο Ε. Οι παράλληλες από τα Β και Ε προς τις ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ, Ζ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.



4. Επεκτάσεις

1. Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Γ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και τέμνει τις ευθείες ΑΒ και ΑΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

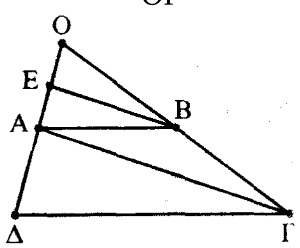
α) Αν η ε δεν τέμνει το παραλληλόγραμμο, τότε

$$\frac{ΑΒ}{ΑΕ}+\frac{ΑΔ}{ΑΖ}=1$$

β) Αν η ε τέμνει το παραλληλόγραμμο, τότε

$$\left|\frac{ΑΒ}{ΑΕ}-\frac{ΑΔ}{ΑΖ}\right|=1$$

2. Έστω Ο το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ τραπεζίου ΑΒΓΔ. Από το Β φέρουμε την παράλληλη προς τη διαγώνιο ΑΓ, που τέμνει την ΑΔ στο Ε. Αν ΟΑ = α και ΑΔ = β, να υπολογίσετε το λόγο $\frac{ΟΒ}{ΟΓ}$ και το μήκος του ΟΕ.



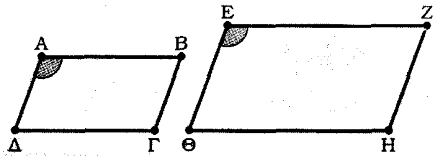
1. Θεωρία

- Δύο πολύγωνα είναι όμοια αν έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.
- Ομόλογες πλευρές δύο όμοιων πολυγώνων ονομάζονται οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες.
- Λόγος ομοιότητας δύο όμοιων πολυγώνων ονομάζεται ο λόγος δύο ομόλογων πλευρών τους.
- Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

2. Ασκήσεις για λύση

1. Δύο εξάγωνα ΑΒΓΔΕΖ και ΚΛΜΝΞΟ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{AB}{K\Lambda} = \frac{3}{5}$. Αν η περίμετρος του ΑΒΓΔΕΖ είναι 52 cm να βρείτε την περίμετρο του ΚΛΜΝΞΟ.

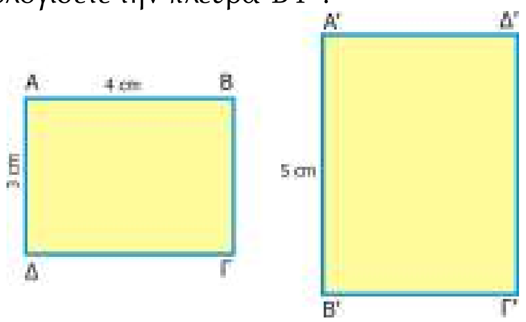
2. Είναι όμοια τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ, στα οποία ισχύει $\hat{A} = \hat{E}$ και $\frac{AB}{EZ} = \frac{A\Delta}{E\Theta}$.



3. Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' με $\hat{A} = \hat{A}' = 65°$, $AB = 7{,}2\,dm$, $B\Gamma = 40\,cm$, $A'B' = 72\,cm$, $B'\Gamma' = 4\,dm$ είναι όμοια;

4. Δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' με $\hat{A} = \hat{A}' = 70°$, $AB = 8\,cm$, $B\Gamma = 2\,cm$, $A'B' = 10\,cm$, $B'\Gamma' = 4\,cm$ είναι όμοια;

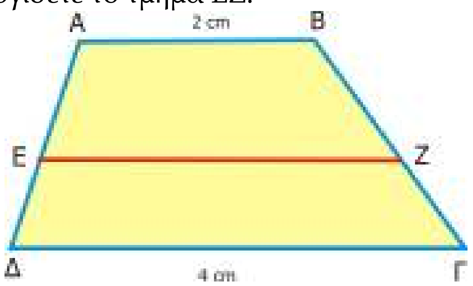
5. Δύο όμοια ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' έχουν AB = 4 cm, ΑΔ = 3 cm και $A'B' = 5\,cm$. Να υπολογίσετε την πλευρά $B'\Gamma'$.



6. Δύο ορθογώνια ΑΒΓΔ και Α'Β'Γ'Δ' είναι όμοια με λόγο ομοιότητας 14. Αν $AB = 4\,cm$, $A\Gamma = 5\,cm$ να υπολογίσετε τις πλευρές των δύο ορθογωνίων.

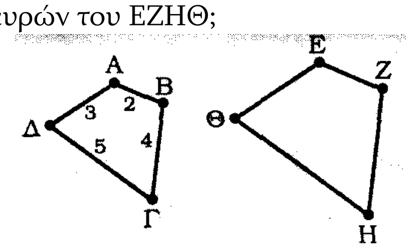
7. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις 5cm, 3cm ενώ ένα άλλο έχει διαστάσεις 15cm, 9cm. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

8. Τα τραπέζια ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ είναι όμοια. Να υπολογίσετε το τμήμα ΕΖ.



9. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι 12 cm, 18 cm, 20 cm και 16 cm. Η μεγαλύτερη πλευρά ενός τετραπλεύρου, όμοιου προς αυτό, είναι 5 cm. Να βρείτε τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του τετραπλεύρου αυτού.

10. Αν τα δύο τετράπλευρα είναι όμοια και το ΕΖΗΘ έχει περίμετρο 28 cm, ποια είναι τα μήκη των πλευρών του ΕΖΗΘ;



11. Έστω δύο όμοια τετράπλευρα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ με $AB = 6\,cm$, $B\Gamma = \Gamma\Delta = 8\,cm$, $\Delta A = 10\,cm$ και λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$.

α) Να υπολογίσετε τις πλευρές του ΕΖΗΘ

β) Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων τους

γ) Να βρείτε, φέροντας τις κατάλληλες διαγώνιες ποια από τα σχήματα που σχηματίζονται είναι ορθογώνια και ποια ισόπλευρα

δ) Ποιος είναι ο λόγος των διαγωνίων των τετραπλεύρων αυτών;

1.5.Α / 2 | Όμοια πολύγωνα ΙΙ (Κανονικά πολύγωνα – Κλίμακα) | 102

1. Θεωρία

- Ένα πολύγωνο είναι κανονικό όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες του τις γωνίες ίσες.
- Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.
- Κλίμακα είναι ο λόγος ομοιότητας ενός σχήματος στο χαρτί με το ίδιο σχήμα στην πραγματικότητα. (Οι δύο αποστάσεις πρέπει να είναι μετρημένες με την ίδια μονάδα μέτρησης)

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. α) Να εξηγήσετε γιατί δύο οποιαδήποτε τετράγωνα είναι όμοια
β) Συμβαίνει το ίδιο για δύο ορθογώνια ή δύο ρόμβους; Αν όχι, τι θα ήταν αρκετό, ώστε να είναι όμοια;

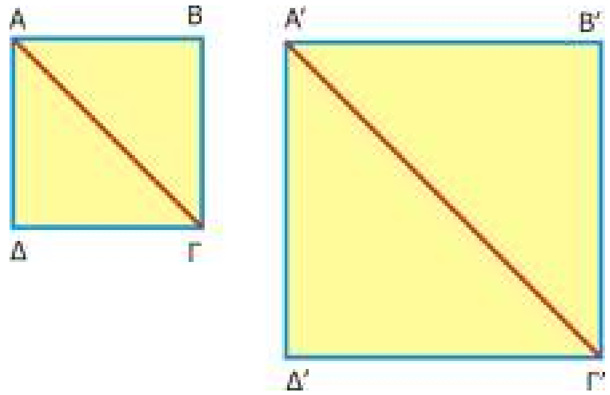
2. Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν μία ίση γωνία είναι πάντοτε όμοια;

3. Δύο κανονικά τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δύο κανονικά εξάγωνα έχουν λόγο ομοιότητας 3 και η περίμετρος του δεύτερου είναι ίση με 12 cm. Πόση είναι η πλευρά του πρώτου εξαγώνου;

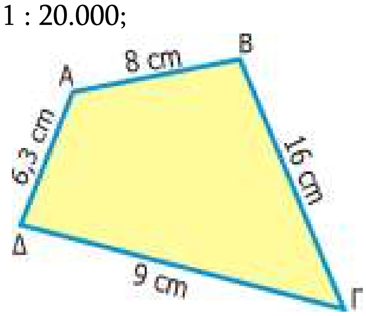
2. Δίνονται δύο όμοια τετράγωνα ΑΒΓΔ (με πλευρά α) και $A'B'\Gamma'\Delta'$ (με πλευρά α') για τα οποία ισχύει: $\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \dfrac{2}{5}$.



Αν είναι $A\Gamma = \delta$ και $A'\Gamma' = \delta'$
α) Να υπολογίσετε τα α και α' συναρτήσει των δ και δ'
β) Να βρείτε το λόγο ομοιότητας των δύο τετραγώνων

3. Δίνονται δύο κανονικά τρίγωνα (ισόπλευρα) ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$ με πλευρές 3 cm και 8 cm αντίστοιχα.
α) Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους
β) Να υπολογίσετε τα ύψη των δύο τριγώνων και στη συνέχεια να ελέγξετε αν ο λόγος των υψών είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων

4. Ποιες είναι οι πραγματικές διαστάσεις του παρακάτω τετραπλεύρου αν η κλίμακα του σχεδίου είναι 1 : 20.000;



5. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογώνιου και έχει σχεδιαστεί με κλίμακα 1 : 400.
α) Αν το μήκος στο σχέδιο είναι 20 cm τότε ποιο είναι το πραγματικό μήκος (σε m) του οικοπέδου;
β) Αν το πραγματικό πλάτος του οικοπέδου είναι 14 m τότε ποιο είναι το πλάτος του οικοπέδου στο σχέδιο

6. Η απόσταση Αθήνα – Θεσσαλονίκη είναι 500 Km ενώ στον χάρτη είναι 25 cm.
α) Να βρείτε την κλίμακα του χάρτη
β) Αν η απόσταση Θεσσαλονίκης Λάρισας είναι 200 Km τότε μπορείτε να βρείτε πόση είναι η απόσταση στον χάρτη;
γ) Αν η απόσταση Γιάννενα – Πάτρα είναι στον χάρτη 15 cm τότε ποια είναι η πραγματική απόσταση;

7. Μία κολώνα είναι σχεδιασμένη σε δύο σχέδια με διαφορετικές κλίμακες. Στο πρώτο σχέδιο με κλίμακα 1 : 200 η κολώνα έχει ύψος 25 m. Να υπολογίσετε το ύψος της κολώνας στο δεύτερο σχέδιο στο οποίο η κλίμακα είναι 1 : 625.

1. Θεωρία

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

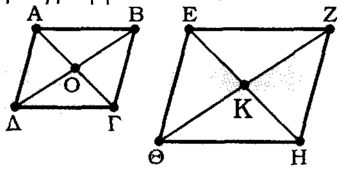
1. Είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις;

α) Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{Z}$, τότε ισχύει $\frac{AB}{\Delta E} = \frac{B\Gamma}{EZ} = \frac{A\Gamma}{\Delta Z}$

γ) Δύο παραλληλόγραμμα με μια γωνία ίση είναι όμοια

δ) Δύο ισοσκελή τρίγωνα με τη γωνία της κορυφής ίση είναι όμοια.

ε) Αν τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΚΕΖ είναι όμοια, τότε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ είναι όμοια.

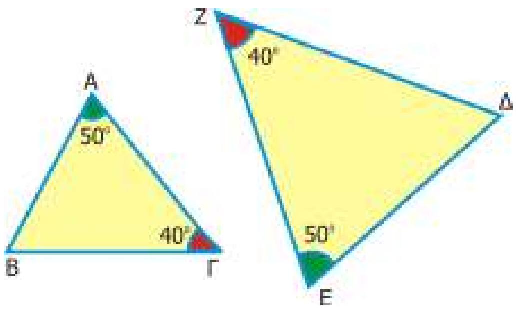


2. Δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ ($AB = A\Gamma$ και $\Delta E = \Delta Z$) έχουν $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Να εξετάσετε αν τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

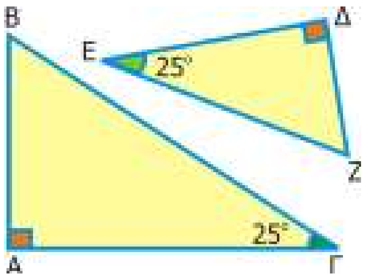
3. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι σε κάθε περίπτωση τα δύο τρίγωνα είναι όμοια και να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα

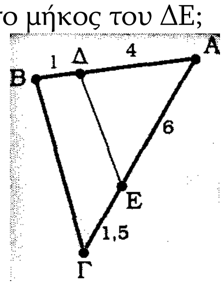
α)



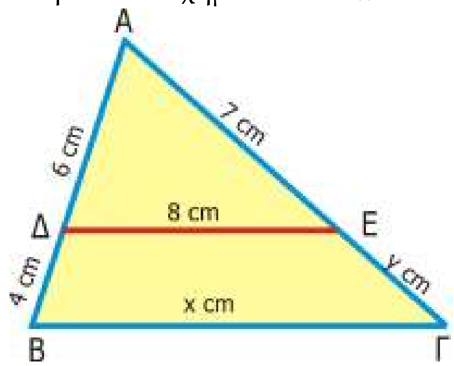
β)



2. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\Delta E}{B\Gamma}$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος του ΔΕ;



3. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\Delta E // B\Gamma$.

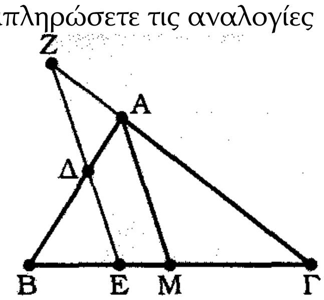


α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια

β) Να βρείτε τα x και y

4. Η διάμεσος ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλη προς μια ευθεία, η οποία τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ του τριγώνου στα σημεία Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να συμπληρώσετε τις αναλογίες



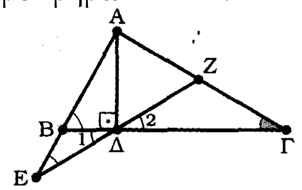
$\frac{\Delta E}{AM} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{.....}{.....} = \frac{.....}{.....}$

β) Το άθροισμα ΔΕ + ΕΖ ισούται με

i) ΑΜ ii) 2ΑΜ

1. Ασκήσεις για λύση

1. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος ΑΔ. Στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ = ΒΔ.



Αν η ΔΕ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ζ, τότε:

α) Να δικαιολογήσετε τις ισότητες

$\hat{B} = 2\hat{E}$, $\hat{\Gamma} = \hat{E} = \hat{\Delta}_2$ και ΓΖ = ΔΖ = ΑΖ

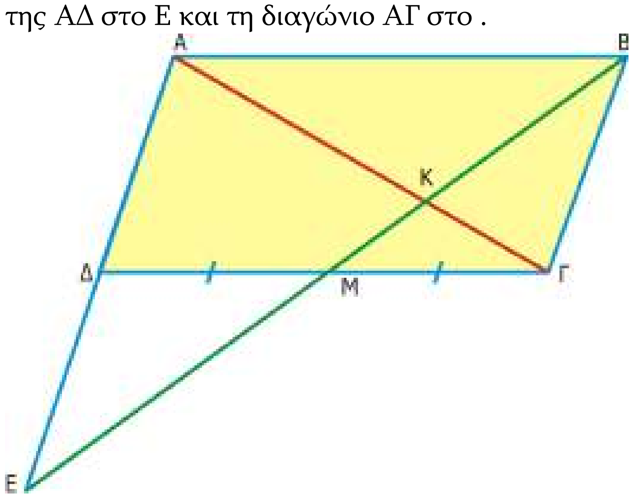
β) Αφού διαπιστώσετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΕ είναι όμοια, να συμπληρώσετε τις αναλογίες

$$\frac{AB}{.....} = \frac{.....}{AE} = \frac{.....}{.....}$$

γ) Το γινόμενο $AB \cdot AE$ είναι ίσο με

i) AB^2 **ii)** AZ^2

2. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Η ΒΜ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ε και τη διαγώνιο ΑΓ στο .



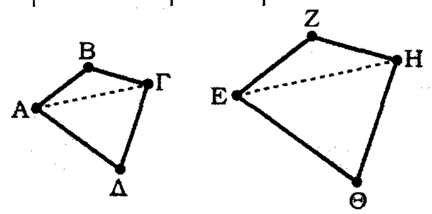
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΚΓΜ είναι όμοια

β) τα τρίγωνα ΒΚΓ και ΚΑΕ είναι όμοια

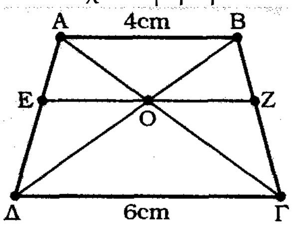
γ) $EK = 2BK$

3. Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι όμοια με τα τρίγωνα ΕΖΗ και ΕΗΘ αντίστοιχα, να εξετάσετε αν είναι όμοια τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ.



4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $AB = 3\alpha$ και $\Gamma\Delta = \alpha$. Αν είναι $A\Delta = \beta$, $B\Gamma = 2\beta$ και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ τότε να υπολογίσετε τις πλευρές του ΟΔΓ.

5. Από το σημείο τομής Ο των διαγωνίων τραπεζίου ΑΒΓΔ φέρουμε την παράλληλη ΕΖ προς τις βάσεις του που έχουν μήκη 4 cm και 6 cm.



Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες.

α) $\frac{AO}{O\Gamma} = \frac{AB}{.....} = \frac{.....}{.....}$

β) $\frac{AO}{A\Gamma} = \frac{AO}{AO + ...} = \frac{.....}{.....}$

γ) $\frac{EO}{.....} = \frac{.....}{A\Gamma}$ και $EO = ...$ cm

δ) $\frac{OZ}{6} = \frac{BO}{.....} = \frac{.....}{A\Gamma}$ και $OZ = ...$ cm

ε) $EZ = EO + ... = ...$ cm

6. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.

2. Επεκτάσεις

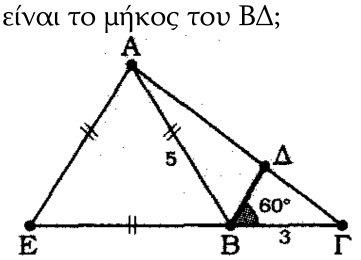
1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 6 - x$, $A\Gamma = x(x+3)$ και $B\Gamma = x^2 + 5x$.

α) Είναι δυνατόν το x να είναι ίσο με 2;

β) Να βρείτε το x αν η περίμετρος τους τριγώνου είναι 15 cm

γ) Για το x που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τις πλευρές τριγώνου το οποίο είναι όμοιο με το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας $\lambda = 2$

2. Πόσο είναι το μήκος του ΒΔ;



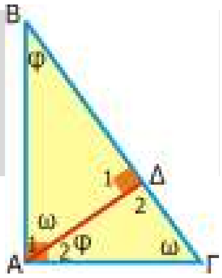
1. Λυμένες ασκήσεις

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος ΑΔ.

α) Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ είναι όμοια

β) Να αποδείξετε ότι:

i) $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$ ii) $A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$ iii) $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$



Λύση

α) Και τα τρία τρίγωνα είναι ορθογώνια.

Ονομάζω στο τρίγωνο ΑΒΓ τη γωνία $\hat{B} = \varphi$ και $\hat{\Gamma} = \omega$. Προφανώς $\varphi + \omega = 90°$.

Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι: $\hat{\Delta}_2 = 90°$ και $\hat{\Gamma} = \omega$. Άρα $\hat{A}_2 = \varphi$.

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι: $\hat{\Delta}_1 = 90°$ και $\hat{B} = \varphi$. Άρα $\hat{A}_1 = \omega$.

Επομένως και τα τρία τρίγωνα έχουν όλες τις γωνίες τους ίσες.

Άρα είναι όμοια. Άρα $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \simeq \Delta\overset{\Delta}{B}A \simeq \Delta\overset{\Delta}{A}\Gamma$.

β) i) $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \simeq \Delta\overset{\Delta}{B}A \Leftrightarrow \dfrac{AB}{\Delta B} = \dfrac{B\Gamma}{BA} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta A} \overset{1-2}{\Leftrightarrow} AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

ii) $A\overset{\Delta}{B}\Gamma \simeq \Delta\overset{\Delta}{A}\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{AB}{\Delta A} = \dfrac{B\Gamma}{A\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} \overset{2-3}{\Leftrightarrow} A\Gamma^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Gamma$

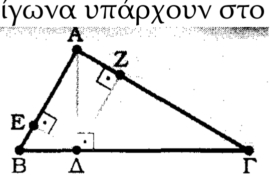
iii) $\Delta\overset{\Delta}{B}A \simeq \Delta\overset{\Delta}{A}\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{\Delta B}{\Delta A} = \dfrac{BA}{A\Gamma} = \dfrac{\Delta A}{\Delta\Gamma} \overset{1-3}{\Leftrightarrow} A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta\Gamma$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος ΑΔ και $\Delta\Lambda \perp AB$. Να αποδείξετε ότι

$$A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta\Lambda$$

2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε τις $A\Delta \perp B\Gamma$, $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$. Ποια όμοια τρίγωνα υπάρχουν στο σχήμα;



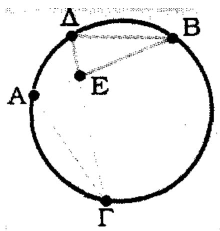
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Μία ευθεία κάθετη στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι όμοιο:

α) με το ΑΒΓ

β) με το ΓΕΖ

4. Σκεφτείτε έναν τρόπο για να υπολογίσετε το ύψος ενός προβολέα.

5. Να εξηγήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΕΓ και ΔΕΒ είναι όμοια. Αν ΑΕ=1, ΒΕ=2 και ΓΕ=2,5 τότε να βρείτε το ΔΕ.



4. Προβλήματα

1. Το μήκος της σκιάς ενός δένδρου, μια ορισμένη στιγμή της μέρας, είναι 7,5 m. Την ίδια χρονική στιγμή μια κατακόρυφη ράβδος ύψους 2 m ρίχνει σκιά 1 m. Ποιο είναι το ύψος του δένδρου;

2. Μια φωτεινή ακτίνα διέρχεται από το σημείο Α, ανακλάται στο σημείο Κ της ευθείας ε και διέρχεται από το σημείο Β. Αν $A\Gamma = K\Delta = 6\,cm$ και $K\Gamma = 9\,cm$, ποια είναι η απόσταση ΒΔ;

1.6 / 1 — Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων Ι (τρίγωνα) — 106

1. Θεωρία

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

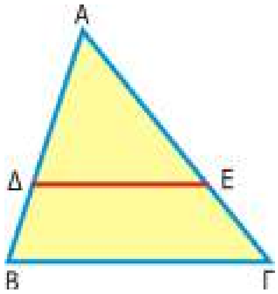
2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν μία γωνία ίση;

2. Δύο τυχαία τετράγωνα είναι πάντοτε όμοια μεταξύ τους;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο της ΑΒ. Φέρουμε $ΔΕ//ΒΓ$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια

β) Αν είναι $ΑΔ = 2cm$ και $ΔΒ = x + 2cm$ τότε να υπολογίσετε το x αν

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{9}$$

γ) Αν είναι $(ΑΔΕ) = 36cm^2$, $(ΔΕΓΒ) = 64cm^2$ και $ΒΓ = 30cm$ τότε να υπολογίσετε το ΔΕ

δ) Αν είναι $ΑΔ = x$, $ΔΒ = y - 1$, $ΑΕ = 2x - 4$, $ΕΓ = y$ και $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{4}{9}$ τότε να υπολογίσετε

i) το λόγο ομοιότητας των δύο τριγώνων

ii) το x και το y

ε) Αν είναι $ΑΔ = x + 4$, $ΔΒ = x$, $ΔΕ = 4x + 1$ και $ΒΓ = 5x + 2$ τότε να υπολογίσετε

i) το x

ii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ αν

$$(ΔΕΓΒ) = \frac{35}{2}cm^2$$

στ) Αν είναι $ΑΔ = x^2$, $ΔΒ = 6$, $ΑΕ = \frac{5}{3}x + 2$ και $ΕΓ = 2$ τότε να υπολογίσετε το x

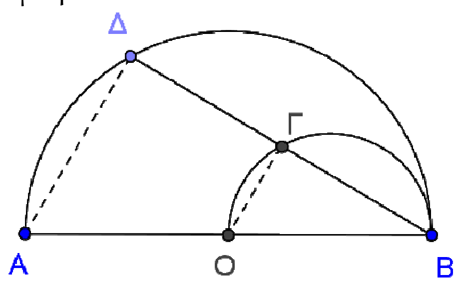
2. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10 cm. Να βρείτε την πλευρά του ισόπλευρου τριγώνου που έχει τετραπλάσιο εμβαδόν.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) με $ΒΓ = 12cm$. Στη βάση ΒΓ φέρουμε σημείο Κ τέτοιο ώστε $ΒΚ = 5ΚΓ$. Από το Κ φέρουμε $ΚΛ \perp ΑΓ$ και $ΚΕ \perp ΑΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΚΛΓ και ΚΕΒ είναι όμοια και να γράψετε το λόγο ομοιότητας

β) Αν το τρίγωνο ΚΕΒ έχει εμβαδόν $100cm^2$ τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΓ

4. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ κέντρου Ο θεωρούμε σημείο του Δ. Η χορδή ΔΒ τέμνει το ημικύκλιο διαμέτρου ΟΒ στο Γ.



Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΟΓΒ είναι όμοια

β) $(ΑΔΒ) = 4(ΟΓΒ)$

5. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $490cm^2$. Στην πλευρά του ΑΒ παίρνουμε ένα σημείο Δ τέτοιο ώστε $\frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{2}{5}$. Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε. Από το Ε φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ που τέμνει την ΒΓ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΓΕΖ και ΑΒΓ είναι όμοια

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΔΕ και ΓΕΖ

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΔΕΖΒ

1.6 / 2 | Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων ΙΙ (Όχι τρίγωνα) | 107

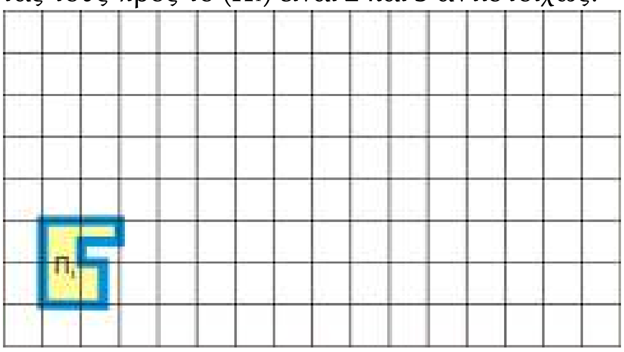
1. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι 8. Ο λόγος των πλευρών τους είναι ίσος με 4;

2. Ένα ορθογώνιο με πλευρές 6 και 3 είναι όμοιο με ένα άλλο με πλευρές 10 και 5;

2. Ασκήσεις για λύση

1. **α)** Να σχεδιάσετε δύο πολύγωνα ($Π_2$), ($Π_3$) όμοια προς το ($Π_1$) των οποίων ο λόγος ομοιότητάς τους προς το ($Π_1$) είναι 2 και 3 αντιστοίχως.



β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

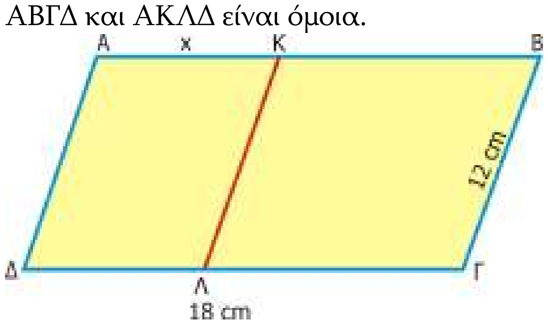
Πολύγωνο $Π_1$	Πολύγωνο $Π_2$	Πολύγωνο $Π_3$
Περίμετ.	Περίμετ.	Περίμετ. ......
Εμβαδόν	Εμβαδόν	Εμβαδόν ......

γ) Αν ενός πολυγώνου διατηρήσουμε σταθερές τις γωνίες και

i) διπλασιάσουμε το μήκος των πλευρών, τότε η περίμετρος .... και το εμβαδόν ....

ii) τριπλασιάσουμε το μήκος των πλευρών, τότε η περίμετρος .... και το εμβαδόν ....

2. Στο παρακάτω σχήμα τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΚΛΔ είναι όμοια.



α) Να υπολογίσετε το x

β) Να υπολογίσετε τον λόγο $\dfrac{(ΑΚΛΔ)}{(ΑΒΓΔ)}$

3. Ένα ορθογώνιο έχει μήκος ίσο με 5 cm και πλάτος ίσο με 4 cm. Ποιες θα είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου, όμοιου με το αρχικό και με εμβαδόν τετραπλάσιο του αρχικού;

4. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές 2 cm και 6 cm. Ένα δεύτερο ορθογώνιο είναι όμοιο με το πρώτο και έχει διαγώνιο 15 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του δεύτερου ορθογώνιο. **(Ε.Μ.Ε.)**

5. Δίνεται ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν αυξήσουμε τις διαστάσεις του ΑΒΓΔ κατά 110% τότε προκύπτει ένα ορθογώνιο ΕΖΗΘ. Να βρείτε πόσο % αυξήθηκε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

6. Σχεδιάστε ένα τετράγωνο με πλευρά 1, διπλασιάστε, τριπλασιάστε, ... την πλευρά τους και σχεδιάστε τα τετράγωνα που προκύπτουν. Υπολογίστε το εμβαδόν των τετραγώνων που σχεδιάσατε και βάλτε το σ' έναν πίνακα.

α) Να συγκρίνετε το λόγο των εμβαδών δύο τυχαίων τετραγώνων με το λόγο ομοιότητάς τους. Τι διαπιστώνετε;

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος που περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων. Τι διαπιστώνετε; Μπορείτε να διατυπώσετε μία εικασία;

7. Να βρείτε το εμβαδόν τετραγώνου του οποίου η πλευρά είναι ίση με τα $\dfrac{3}{5}$ της πλευράς τετραγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι $45\,cm^2$.

8. Αν μειώσουμε κατά 40% την κάθε πλευρά ενός τετραγώνου τότε πόσο τοις % θα μειωθεί το εμβαδόν του;

9. Σε ένα σχέδιο ένα σπίτι έχει εμβαδόν 90 cm^2. Ποιο είναι το πραγματικό εμβαδόν αν η κλίμακα του σχεδίου είναι 1:300.

10. Ένα κανονικό δεκάγωνο έχει πλευρά 8 cm και εμβαδόν $100\,cm^2$. Ένα άλλο κανονικό δεκάγωνο έχει περίμετρο 40 cm. Να αποδείξετε ότι:

α) τα δύο πολύγωνα είναι όμοια

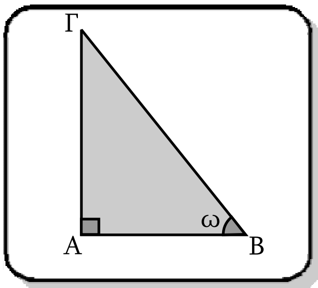
2.1 / 1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας Ι

1. Θεωρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} \qquad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} \qquad \sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}$$



2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να κατασκευάσετε μία οξεία γωνία ω, τέτοια ώστε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{5}$.

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 6 cm. Αν η μία οξεία γωνία είναι 30° να βρείτε τις κάθετες πλευρές.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 24$ και $B\Gamma = 26$. Να υπολογίσετε

α) ημΒ, ημΓ, συνΒ, συνΓ

β) $\eta\mu(90-B), \eta\mu(90-\Gamma), \sigma\upsilon\nu(90-B), \sigma\upsilon\nu(90-\Gamma)$

γ) εφΒ, εφΓ, σφΒ, σφΓ

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει $AB = 9\,\text{cm}$ και $\sigma\upsilon\nu B = \frac{3}{5}$. Να βρείτε:

α) τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Γ

3. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $A\hat{\Delta}\Gamma = \omega$, $A\hat{B}\Gamma = \theta$ και το Δ να είναι εσωτερικό σημείο του τμήματος ΑΒ. Αν ισχύει $\varepsilon\varphi\omega = 0{,}8$, $\varepsilon\varphi\theta = 0{,}6$ και $A\Gamma = 24$ cm τότε να βρείτε το μήκος του τμήματος ΒΔ.

4. Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $\Gamma\Delta = 13$ cm και ένα τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΓΔ. Έστω $A\hat{E}\Delta = \omega$ και $B\hat{E}\Gamma = \theta$ με $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$ και $\varepsilon\varphi\theta = \frac{6}{5}$. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΓΕ και ΑΔ.

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει

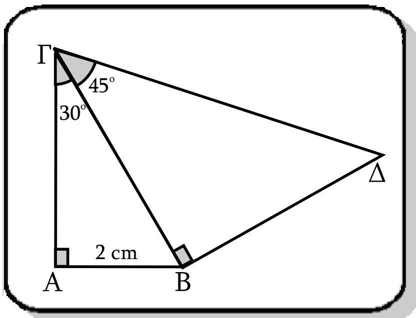
α) $\eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$ **β)** $\eta\mu B \cdot \varepsilon\varphi B = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}$

γ) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu B} + \varepsilon\varphi B = \frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ **δ)** $\frac{\eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B} = \varepsilon\varphi\Gamma$

ε) $\sigma\upsilon\nu^2 B - \eta\mu^2 B = \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2}$

στ) $\eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\beta = \eta\mu\Gamma + \sigma\upsilon\nu\Gamma$

6. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και ΒΓΔ με $\hat{B} = 90^\circ$. Αν $A\hat{\Gamma}B = 30^\circ$, $B\hat{\Gamma}\Delta = 45^\circ$ και $AB = 2\text{cm}$ τότε να υπολογίσετε τα ΒΓ, ΑΓ, ΒΔ, ΓΔ.



7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με γωνία της κορυφής $\hat{A} = 120^\circ$ και το ύψος στη βάση του 8 cm. Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών του.

8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ που έχει βάση ΒΓ = 48 cm και περίμετρο 100 cm. Να βρείτε:

α) τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ

β) το ύψος ΑΔ

γ) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Β

9. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $\alpha = 4\,\text{cm}$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30°, 60°.

10. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 10\,\text{cm}$, $A\Gamma = 17\,\text{cm}$ και το ύψος του ΑΔ. Αν $\eta\mu B = \frac{4}{5}$

α) να βρείτε το ύψος ΑΔ

β) να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $B\hat{A}\Delta$ και $\hat{\Gamma}$

1. Θεωρία

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει:

$$\eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

Άρα για τις γωνίες Β και Γ που είναι **συμπληρωματικές** ισχύει

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} \eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma \\ \text{και} \\ \eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu B \end{cases}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	0°	30°	45°	60°	90°
ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
σφx	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $2\sigma\upsilon\nu30^\circ - \eta\mu30^\circ - 3\varepsilon\varphi30^\circ$

β) $2\sigma\upsilon\nu45^\circ - 4\eta\mu45^\circ - 2\varepsilon\varphi45^\circ$

γ) $2\sigma\upsilon\nu60^\circ + \sqrt{3}\eta\mu60^\circ - 3\varepsilon\varphi60^\circ$

δ) $2\sigma\upsilon\nu90^\circ + 3\eta\mu90^\circ - 2\varepsilon\varphi0^\circ$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $A = 2\sigma\upsilon\nu30^\circ\varepsilon\varphi60^\circ$

β) $B = \eta\mu60^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu30^\circ + \eta\mu30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu60^\circ$

γ) $\Gamma = \varepsilon\varphi30^\circ\varepsilon\varphi60^\circ - \eta\mu45^\circ\sigma\upsilon\nu45^\circ - \sigma\upsilon\nu60^\circ$

3. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\eta\mu30^\circ - \sigma\upsilon\nu60^\circ \cdot \sigma\varphi45^\circ - \varepsilon\varphi(\sigma\upsilon\nu90^\circ)$

β) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \varepsilon\varphi\omega + \sigma\varphi\omega \cdot \eta\mu\omega$

i) $\omega = 60^\circ$ ii) $\omega = 30^\circ$ iii) $\omega = 45^\circ$

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $A = \frac{\sigma\upsilon\nu30^\circ + \eta\mu60^\circ}{\sigma\upsilon\nu45^\circ} + \frac{\eta\mu30^\circ + \sigma\upsilon\nu60^\circ}{\eta\mu45^\circ}$

β) $B = \frac{\sigma\upsilon\nu30^\circ \cdot \varepsilon\varphi60^\circ - \eta\mu30^\circ \cdot \varepsilon\varphi45^\circ}{\sigma\upsilon\nu60^\circ}$

5. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu40^\circ + \sigma\upsilon\nu20^\circ - \eta\mu70^\circ - \sigma\upsilon\nu50^\circ = 0$

β) $\eta\mu33 + \sigma\varphi25 - \varepsilon\varphi65 - \sigma\upsilon\nu57 = 0$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$A = \eta\mu25^\circ - \sigma\upsilon\nu35^\circ + \eta\mu55^\circ - \sigma\upsilon\nu65^\circ$

$B = 2\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu(90^\circ - x) - 5\sigma\upsilon\nu x$

$\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi^2 45^\circ + 4\eta\mu^2 30^\circ - 2007}{2006 \cdot \varepsilon\varphi^{200} 45^\circ - 2\sigma\upsilon\nu60^\circ}$

7. Αν για τη γωνία ω ισχύει $0^\circ < \omega < 45^\circ$ τότε να αποδείξετε ότι:

Α. α) $\eta\mu(45^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu(45^\circ - \omega)$

β) $\sigma\upsilon\nu(45 + \omega) = \eta\mu(45 - \omega)$

Β. Αν είναι $\eta\mu33^\circ = \alpha$, $\eta\mu27^\circ = \beta$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση

$$\eta\mu33^\circ \cdot \eta\mu23^\circ - \sigma\upsilon\nu57^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu67^\circ$$

8. Αν Α, Β, Γ είναι οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Α. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu\frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} = \eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

Β. Αν $\frac{A}{3} = \frac{B}{2} = \Gamma$ να υπολογίσετε το

$$K = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu B \cdot \varepsilon\varphi\Gamma}$$

4. Επεκτάσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x \cdot \eta\mu30^\circ = \sigma\upsilon\nu45^\circ$

β) $x \cdot \sigma\upsilon\nu30^\circ = \varepsilon\varphi45^\circ x - \sigma\upsilon\nu30^\circ$

γ) $3 - x \cdot \varepsilon\varphi30^\circ = \sigma\upsilon\nu60^\circ x + 1$

2. Να υπολογίσετε τη γωνία ω ($0^\circ < \omega < 90^\circ$):

α) $4\eta\mu^2\omega - 4\eta\mu\omega + 1 = 0$

β) $2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 3\sigma\upsilon\nu\omega + 1 = 0$

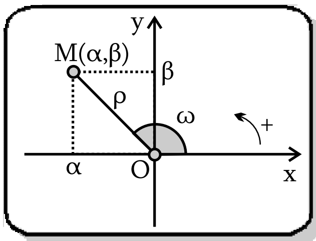
γ) $3\varepsilon\varphi^2\omega = 1$

2.1 / 3 | Ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ω $(0^\circ \le \omega \le 180^\circ)$ | **110**

1. Θεωρία

Έστω $M(\alpha,\beta)$ τυχαίο σημείο σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και $\rho=(OM)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$ που σχηματίζεται καθώς ο ημιάξονας Ox κινείται κατά τη θετική φορά (δηλαδή αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού) και καταλήγει στην ΟΜ είναι:

$$\eta\mu\omega=\frac{\beta}{\rho},\ \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{\alpha}{\rho},\ \varepsilon\varphi\omega=\frac{\beta}{\alpha}\ (\alpha\neq 0),\ \sigma\varphi\omega=\frac{\alpha}{\beta}\ (\beta\neq 0)$$



Οι τύποι ισχύουν και για γωνίες μεγαλύτερες από 360° ή αρνητικές

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Υπάρχει γωνία ω για την οποία να ισχύει

$$\eta\mu\omega=\alpha^2+3$$

2. Τι συμπέρασμα προκύπτει αν ισχύει

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2$$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$, όταν:

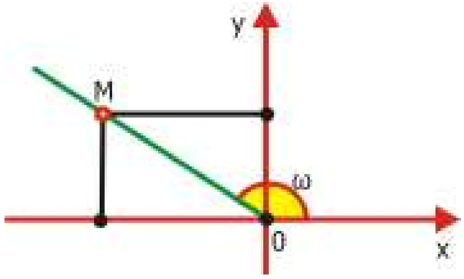
α) $M(6,8)$ β) $M(-12,5)$

γ) $M(4,3)$ δ) $M(-6,8)$

ε) $M(-5,12)$ στ) $M(-2,-5)$

ζ) $M(3,0)$ η) $M(0,-4)$

2. Δίνεται το παρακάτω σχήμα:



α) Αν είναι $M(-4,\beta)$ και $\varepsilon\varphi\omega=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ τότε να υπολογίσετε: **i)** το β
ii) το ημω και το συνω

β) Αν είναι $M(\alpha,4)$ και $\eta\mu\omega=\frac{2\sqrt{13}}{13}$ τότε να υπολογίσετε: **i)** το α
ii) το συνω και την εφω

3. Μια ευθεία ε έχει εξίσωση $y=-\frac{3}{4}x$.

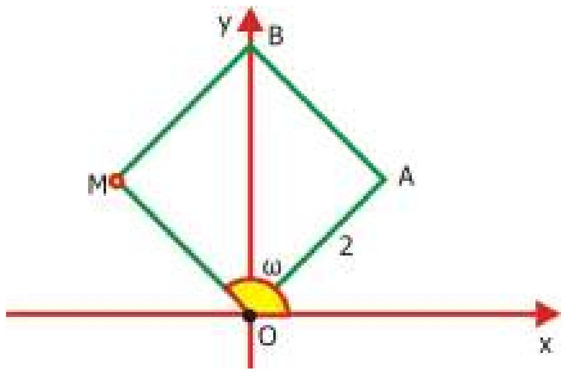
α) Να σχεδιάσετε την ε και να προσδιορίσετε την τεταγμένη σημείου της Μ με τετμημένη –4

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$

4. Στο παρακάτω σχήμα το ΟΑΒΜ είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με 2. Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του Μ

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$

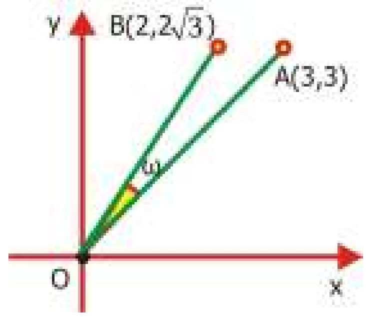


5. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=(\sigma\upsilon\nu 0^\circ+\eta\mu 30^\circ)^2-(\eta\mu 0^\circ+\sigma\upsilon\nu 30^\circ)^2+$$
$$+2\cdot(\eta\mu 45^\circ+\sigma\upsilon\nu 45^\circ)+3\cdot(\eta\mu 180^\circ+\sigma\upsilon\nu 180^\circ)$$

$$B=(\eta\mu 30^\circ+\eta\mu 60^\circ)-(\sigma\upsilon\nu 30^\circ+\sigma\upsilon\nu 60^\circ)+$$
$$+2\cdot(\eta\mu 45^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 45^\circ)^2-2\cdot(\eta\mu 90^\circ\cdot\sigma\upsilon\nu 90^\circ)$$

6. Να υπολογίσετε την γωνία ω στο παρακάτω σχήμα.



2.1 / 4 — **Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας – Ανισοτικές σχέσεις** — **111**

1. Θεωρία

- Αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ τότε $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \varepsilon\varphi\omega > 0$. Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ τότε $\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \varepsilon\varphi\omega < 0$
- $\eta\mu 0^\circ = 0, \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1, \varepsilon\varphi 0^\circ = 0$. $\eta\mu 90^\circ = 1, \sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0, \varepsilon\varphi 90^\circ = \Delta.\text{Ο}.$ $\eta\mu 180^\circ = 0, \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1, \varepsilon\varphi 180^\circ = 0$
- Για μία γωνία $0^\circ \le \omega \le 180^\circ$ ισχύει: $0 \le \eta\mu\omega \le 1$ και $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$
- Για μία γωνία $0^\circ \le \omega \le 180^\circ$, $\omega \ne 90^\circ$ η εφω παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Είναι θετικός αριθμός το γινόμενο
$$\eta\mu 40^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 140^\circ$$

2. Αν $90^\circ < \omega < 180^\circ$ τότε ποιο είναι το πρόσημο της παράστασης $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να βρείτε τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών:
α) $\sigma\upsilon\nu 50^\circ$ β) $\sigma\upsilon\nu 145^\circ$ γ) $\eta\mu 172^\circ$
δ) $\varepsilon\varphi 89^\circ$ ε) $\varepsilon\varphi 175^\circ$ στ) $\eta\mu 46^\circ$

2. Να βρείτε τα πρόσημα των παραστάσεων:
$\text{Α} = \eta\mu 56^\circ \cdot \eta\mu 110^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 137^\circ$
$\text{Β} = \sigma\upsilon\nu 32^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 110^\circ \cdot \varepsilon\varphi 124^\circ$
$\Gamma = \eta\mu 135^\circ - \sigma\upsilon\nu 168^\circ$
$\Delta = (\sigma\upsilon\nu 47^\circ - \sigma\upsilon\nu 110^\circ) \cdot (\varepsilon\varphi 124^\circ + \eta\mu 37^\circ)$

3. Να βρείτε την ω αν:
α) αν $\varepsilon\varphi\omega = 1$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$
β) αν και $0^\circ < \omega < 90^\circ$
γ) αν $25\eta\mu^2\omega - 9 = 0$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$

4. Να βρείτε το τεταρτημόριο στο οποίο ανήκει το σημείο Μ αν $\omega = x\hat{O}M$ και ισχύει:
α) $\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega < 0$ β) $\eta\mu\omega \cdot \varepsilon\varphi\omega > 0$

5. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουν νόημα οι παρακάτω σχέσεις αν $0^\circ \le \omega \le 180^\circ$:
α) $\eta\mu\omega = 3\lambda - 4$ β) $\sigma\upsilon\nu\omega = 7 - 5\lambda$

6. Αν η γωνία ω είναι οξεία και η γωνία θ είναι αμβλεία τότε να βρείτε το πρόσημο της παράστασης
$$\text{Α} = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta + \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta - \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega$$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\text{Α}} = 90^\circ$). Να αποδείξετε ότι:
α) $\eta\mu\text{Β} < \varepsilon\varphi\text{Β}$ β) $\dfrac{\eta\mu\text{Β}}{\eta\mu\Gamma} = \dfrac{\beta}{\gamma}$

8. Αν για την γωνία ω ισχύει $0^\circ \le \omega \le 180^\circ$ τότε να αποδείξετε ότι:
α) $3 \le 2\eta\mu\omega + 3 \le 5$
β) $-4 \le 2\eta\mu\omega - 4 \le -2$
γ) $-7 \le 5\sigma\upsilon\nu\omega - 2 \le 3$
δ) $2 \le 4\sigma\upsilon\nu\omega + 6 \le 10$
ε) $-2 \le -3\eta\mu\omega + 1 \le 1$
στ) $2 \le -\sigma\upsilon\nu\omega + 3 \le 4$

9. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων ($0^\circ \le \omega \le 180^\circ$)
$\text{Α} = 3\eta\mu\omega + 5$ $\text{Β} = 4 - 2\sigma\upsilon\nu\omega$
$\Gamma = 2\eta\mu\omega - 3$ $\Delta = 4\sigma\upsilon\nu\omega - 1$
$\text{Ε} = 3\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega - 2$ $\text{Ζ} = 2\sigma\upsilon\nu\omega - 4\eta\mu\omega + 1$

10. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή των παραστάσεων
$\text{Α} = 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 2$ $\text{Β} = 4\eta\mu^2 x - 3$

11. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή των παραστάσεων
$\text{Α} = \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x + 1$ $\text{Β} = 4\eta\mu^2 x + 4\sigma\upsilon\nu x + 1$
$\Gamma = \eta\mu^2 x + 6\sigma\upsilon\nu x + 9$ $\Delta = \sigma\upsilon\nu^2 x - 8\sigma\upsilon\nu x + 16$

4. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει
$$\eta\mu\omega = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 2}, \quad 0^\circ \le \omega \le 180^\circ$$

2. Αν η γωνία Α ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι αμβλεία τότε να αποδείξετε ότι
$$\sigma\upsilon\nu\text{Α} < \eta\mu\text{Β} + \varepsilon\varphi\Gamma$$

2.2 / 1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών – Εξισώσεις 112

1. Θεωρία

$0^\circ < \omega < 90^\circ$ τότε: $ημ(180^\circ-\omega)=ημ\omega$, $συν(180^\circ-\omega)=-συν\omega$, $εφ(180^\circ-\omega)=-εφ\omega$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Αν $\omega+\varphi=90^\circ$ τότε $ημ2\omega=συν2\varphi$.

2. Είναι δυνατόν διαφορετικές γωνίες να έχουν ίδιο ημίτονο;

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παρακάτω γωνιών:
α) 120° β) 135° γ) 150°

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
α) $συν120^\circ\cdot ημ135^\circ\cdot εφ150^\circ$
β) $ημ150^\circ\cdot συν150^\circ\cdot εφ180^\circ$
γ) $ημ135^\circ\cdot συν180^\circ\cdot εφ135^\circ$
δ) $ημ90^\circ\cdot συν135^\circ\cdot εφ120^\circ$

3. Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2 30^\circ+συν^2 150=\frac{3}{2}$
β) $ημ^2 30^\circ+2\cdot ημ150^\circ\cdot συν120^\circ+συν^2 120^\circ=0$

4. Να αποδείξετε ότι:
α) $ημ115^\circ+συν36^\circ-ημ65^\circ+συν144^\circ=0$
β) $εφ101^\circ+εφ79^\circ\cdot(ημ150^\circ+συν60^\circ)=0$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
α) $ημ35^\circ+συν35^\circ - ημ145^\circ+συν145^\circ$
β) $\frac{ημ63^\circ\cdot συν117^\circ}{συν63^\circ\cdot ημ117^\circ}$
γ) $\frac{ημ40^\circ}{ημ140^\circ}+\frac{συν40^\circ}{συν140^\circ}+\frac{εφ40^\circ}{εφ140^\circ}$

6. Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση για όλες τις τιμές της γωνίας ω που ορίζεται:
$$A=\frac{ημ(180^\circ-\omega)+ημ(90^\circ-\omega)-ημ\omega}{συν(180^\circ-\omega)+συν(90^\circ-\omega)-συν\omega}$$

7. Να αποδείξετε ότι:
α) $ημ(90^\circ+\omega)=συν\omega$ β) $συν(90^\circ+\omega)=-ημ\omega$

8. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:
α) $ημ(34^\circ-\omega)=ημ(146^\circ+\omega)$
β) $συν141^\circ=-συν39^\circ$

9. Αν γνωρίζουμε ότι για κάθε οξεία γωνία ω ισχύει $ημ(90^\circ-\omega)=συν\omega$ τότε:
α) Να αποδείξετε ότι
$ημ(90^\circ+x)=συνx$ και $συν(90^\circ+x)=-ημx$
β) Να απλοποιήσετε την παράσταση:
$$A=2ημx\cdot συν(180^\circ-x)-συν(90^\circ+x)\cdot συνx+ημ(90^\circ+x)\cdot ημ(180^\circ-x)$$

10. Να βρείτε τη γωνία x ($0^\circ\le x\le 180^\circ$) όταν:
Α. α) $συνx=\frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $ημx=\frac{1}{2}$
γ) $ημx=\frac{\sqrt{3}}{2}$ δ) $εφx=\frac{\sqrt{3}}{3}$
ε) $συνx=\frac{\sqrt{2}}{2}$ στ) $εφx=\sqrt{3}$
Β. α) $συνx=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ β) $εφx=-\sqrt{3}$
γ) $ημx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ δ) $συνx=-\frac{1}{2}$
ε) $εφx=-1$ στ) $συνx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Γ. α) $συνx=-1$ β) $ημx=1$
γ) $συνx=0$ δ) $ημx=0$
Δ. α) $\sqrt{2}ημx-1=0$ β) $συνx=1-συνx$
γ) $συνx=2+5συνx$ δ) $2εφx=\sqrt{3}-εφx$
Ε. α) $εφ^2x-1=2$ β) $4ημ^2x-1=0$
γ) $4ημ^2x+2ημx=+0$
δ) $(3συνx-2)^2=4$
ε) $συν^2x-2συνx+1=0$
στ) $4ημx\cdot συνx+2ημx-2συνx-1=0$

11. Να βρείτε τη γωνία x ($0^\circ\le x\le 180^\circ$) όταν:
α) $ημ(2x-25^\circ)=ημ(50^\circ-x)$
β) $συν(4x-37^\circ)=συν(64^\circ+x)$

2.2 / 2 | **Εφαρμογή σε τρίγωνα, τετράπλευρα** |

1. Θεωρία

- Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $A+B+\Gamma=180°$.
- Σε κάθε τετράπλευρο ισχύει $A+B+\Gamma+\Delta=360°$.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\etaμ(A+B)=1$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο;

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=A\Gamma$ ισχύει $\etaμA=\etaμ(2B)$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Αν Α, Β, Γ είναι οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

α) $\etaμ(A+B)=\etaμ\Gamma$

β) $συν(A+B)=-συν\Gamma$

γ) $εφ(A+B)=-εφ\Gamma$

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $συν\Gamma=\frac{3}{5}$ και $\etaμB=\frac{1}{3}$. Να υπολογίσετε:

α) το $συν(A+B)$ β) το $\etaμ(A+\Gamma)$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $συν(A+B)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $εφB=1$. Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες Α, Β και Γ του τριγώνου

β) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της Γ

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνίες Α, Β, Γ, Δ.

Α. Να αποδείξετε ότι

α) $\etaμA=\etaμB=\etaμ\Gamma=\etaμ\Delta$

β) $συνA=-συνB=συν\Gamma=-συν\Delta$

γ) $εφA=-εφB=εφ\Gamma=-εφ\Delta$

Β. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων

α) $K=\etaμA-\etaμB$

β) $\Lambda=συνA+συνB$

γ) $M=συν\frac{A+B+\Gamma+\Delta}{2}$

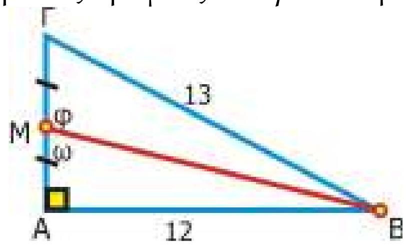
5. Δίνεται τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ με γωνίες Α, Β, Γ, Δ. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $K=\etaμ\frac{A+B}{2}-\etaμ\frac{\Gamma+\Delta}{2}$

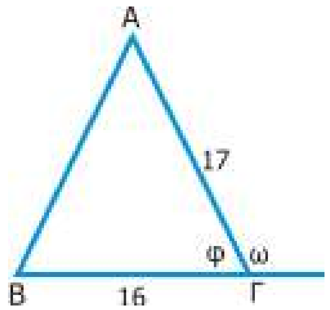
β) $\Lambda=συν\frac{A+\Gamma}{2}+συν\frac{B+\Delta}{2}$

γ) $M=εφ\frac{A+\Delta}{2}+εφ\frac{B+\Gamma}{2}$

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) με $AB=12$ και $A\Gamma=13$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών φ και ω.

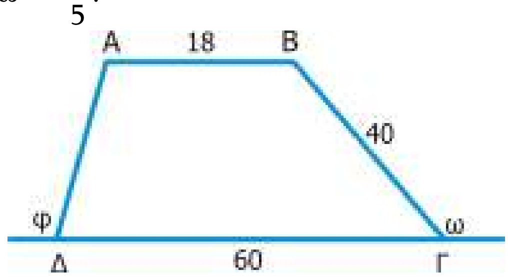


7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma=16$ και $AB=A\Gamma=17$.



Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών φ και ω

8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB=18$, $B\Gamma=40$, $\Gamma\Delta=60$. Φέρουμε τις εξωτερικές γωνίες ω και φ των γωνιών Γ και Δ του τραπεζίου αντίστοιχα με $συνω=-\frac{4}{5}$.



Να βρείτε:

α) το ύψος ΒΕ του τραπεζίου

β) το ημω και την εφω

γ) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της φ

2.3 / 1 | Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες Ι (Υπολογισμός ημ, συν, εφ) | 114

1. Θεωρία

Για κάθε γωνία ω ισχύει: • $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ • $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

1. Λυμένες ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω αν ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{3}{5} \text{ με } 90°<\omega<180°$$

Λύση

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ άρα $\eta\mu^2\omega+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\omega+\dfrac{9}{25}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\eta\mu^2\omega=1-\dfrac{9}{25}\Leftrightarrow\eta\mu^2\omega=\dfrac{25}{25}-\dfrac{9}{25}\Leftrightarrow\eta\mu^2\omega=\dfrac{16}{25}\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\pm\dfrac{4}{5}$.

Όμως $90°<\omega<180°$ άρα $\eta\mu\omega>0\Rightarrow\eta\mu\omega=\dfrac{4}{5}$.

Επομένως είναι $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=-\dfrac{4\cdot5}{3\cdot5}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{4}{3}$.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Υπάρχει γωνία για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega=0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=0$;

2. Υπάρχει γωνία για την οποία ισχύει

$$\eta\mu\omega=-\frac{3}{5} \text{ και } \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{4}{5};$$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu^2157°+\sigma\upsilon\nu^223°=1$

β) $\sigma\upsilon\nu^219°+\sigma\upsilon\nu^271°=1$

2. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\eta\mu^252°+\sigma\upsilon\nu^252°$

β) $\eta\mu^237°+\sigma\upsilon\nu^2143°$

γ) $\varepsilon\varphi52°\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu52°}{\eta\mu52°}$

δ) $\varepsilon\varphi45°\cdot\sigma\upsilon\nu^2172°-\varepsilon\varphi135°\cdot\eta\mu^28°$

ε) $\varepsilon\varphi45°\eta\mu^2x-\varepsilon\varphi135°\sigma\upsilon\nu^2x$

στ) $6\eta\mu^238°-5\sigma\upsilon\nu^252°+6\sigma\upsilon\nu^2142°-5\eta\mu^2128°$

3. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\eta\mu^245°\cdot\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^245°\cdot\sigma\upsilon\nu^2x$

β) $\varepsilon\varphi^2135°\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+\varepsilon\varphi^245°\cdot\eta\mu^2x$

γ) $\varepsilon\varphi57°\cdot\sigma\upsilon\nu57°-\varepsilon\varphi127°\cdot\sigma\upsilon\nu127°$

δ) $\eta\mu30°\cdot\eta\mu^223-\sigma\upsilon\nu150°\cdot\sigma\upsilon\nu^2157$

4. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\eta\mu\omega=\dfrac{3}{5}$ με $90°<\omega<180°$

β) $\eta\mu\omega=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ και $90°<\omega<180°$

γ) $\sigma\upsilon\nu\omega=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ με $180°<\omega<270°$

δ) $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{3}{5}$ και $0<\omega<90°$

5. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{5}{12}$ και $0<\omega<90°$

β) $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ και $90°<\omega<180°$

γ) $\varepsilon\varphi\omega=-\dfrac{5\sqrt{6}}{12}$ με $270°<\omega<360°$

2.3 / 2 | Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ΙΙ (Υπολογισμός ημ, συν, εφ) | 115

1. Ασκήσεις για λύση

1. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις των ασκήσεων 4 και 5 της προηγούμενης καρτέλας να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \dfrac{5ημ^2ω + 4ημω \cdot συνω}{εφ^2ω}$

β) $B = \dfrac{4εφω + 3ημ^2ω + συνω}{ημω + 5}$

2. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $ημω = συνω$ β) $ημω + συνω = 0$

γ) $ημω = \sqrt{3}συνω$ δ) $συνω = -\sqrt{3}ημω$

3. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $4ημω + 3συνω = 0$ με $90° < ω < 180°$

β) $3ημω - 2συνω = 0$ με $0 < ω < 90°$

4. Αν $εφω = 2$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \dfrac{ημω + συνω}{συνω - ημω}$

β) $B = \dfrac{ημ^2ω - 2ημω \cdot συνω}{4ημ^2ω - 3συν^2ω}$

γ) $Γ = \dfrac{ημω - συνω}{εφω - 1}$

δ) $Δ = \dfrac{συνω}{ημω} - \dfrac{ημω}{συνω}$

5. Έστω γωνία ω με $90° < ω < 180°$ ώστε

$$2ημ^2ω - 7ημω + 3 = 0$$

Να υπολογίσετε:

α) το ημω

β) το συνω και την εφω

β) την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{4ημω - 2συνω}{3εφω}$$

6. Έστω γωνία ω με $90° < ω < 180°$ ώστε

$$5ημ^2ω - συν^2ω - 2 = 0$$

Να υπολογίσετε:

α) το ημω

β) το συνω και την εφω

7. Έστω γωνία ω με $0° < ω < 180°$ και $ω \neq 90°$ ώστε

$$εφω + \frac{1}{εφω} = 2$$

α) Να βρείτε την γωνία εφω

β) Να βρείτε τη γωνία ω

8. Έστω γωνία ω με $0° < ω < 180°$ και $ω \neq 90°$ ώστε

$$εφω + \frac{8}{εφω} = -4\sqrt{2}$$

α) Να βρείτε την γωνία εφω

β) Να εξετάσετε αν η γωνία ω είναι αμβλεία

γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$συν135° \cdot ημω - συνω \cdot συν180°$$

2. Επεκτάσεις

1. Να βρείτε την τιμή του $λ \in \mathbb{R}$:

$$ημω = \frac{3λ - 1}{5λ - 1} \text{ και } συνω = \frac{4λ - 1}{5λ - 1}$$

2. Αν $ημω = \dfrac{κ^2 - λ^2}{κ^2 + λ^2}$, $κ > λ > 0$ και $90° < ω < 180°$ τότε να υπολογίσετε:

α) το συνφ β) την εφφ

3. Η εξίσωση

$$x^2 + ημα \cdot x + συν^2α = 0$$

έχει μοναδική λύση. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α, αν η γωνία ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο.

4. Αν $ημω = 3λ$ και $συνω = 4λ$ με $0 < λ < \dfrac{1}{4}$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A = 25λ^2 + (5λ - 1)^3$$

5. Δίνεται $α = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$ και

$β = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}$

α) Να υπολογίσετε τα α και β

β) Αν η γωνία ω ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο και $ημω = α / β$ τότε να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \frac{2ημω - συν^2ω}{εφ^2ω}$$

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες ΙΙΙ (Απόδειξη ταυτοτήτων)

1. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $3\eta\mu^2\omega+3\sigma\upsilon\nu^2\omega=3$

β) $\eta\mu^2\omega=1-\sigma\upsilon\nu^2\omega$

γ) $\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega$

δ) $\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-2\sigma\upsilon\nu^2\omega=2\eta\mu^2\omega-1$

2. Αν είναι $x=2\eta\mu\omega$ και $y=2\sigma\upsilon\nu\omega$ τότε να αποδείξετε ότι

$$x^2+y^2=4$$

3. Αν είναι $x=5\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\varphi$, $y=5\eta\mu\omega\eta\mu\varphi$ και $z=5\sigma\upsilon\nu\omega$ τότε να αποδείξετε ότι

$$x^2+y^2+z^2=5$$

4. Αν είναι $x=3\eta\mu\omega$ και $y=2\sigma\upsilon\nu\omega$ τότε να αποδείξετε ότι

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

5. Να αποδείξετε ότι:

δ) $\eta\mu^2\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\beta=1$

α) $(2\eta\mu\omega-3\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(3\eta\mu\omega+2\sigma\upsilon\nu\omega)^2=13$

β) $\eta\mu^4\omega+\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$

γ) $\eta\mu^3\omega+\sigma\upsilon\nu^3\omega=(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)\cdot(1-\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega)$

δ) $\eta\mu^4\omega-\sigma\upsilon\nu^4\omega=2\eta\mu^2\omega-1$

6. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι ταυτότητες:

α) $(2x\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha)^2+x^2(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha)^2=x^2$

β) $(x\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(x\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta)^2+(x\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=x^2$

γ) $\varepsilon\varphi x-\eta\mu^2x\cdot\varepsilon\varphi x=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α ισχύει:

α) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\dfrac{1}{\eta\mu\alpha}$

β) $\dfrac{1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha$

γ) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}=\dfrac{2}{\eta\mu\alpha}$

δ) $1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1+\eta\mu\alpha}=\eta\mu\alpha$

ε) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu^4\alpha-\eta\mu^2\alpha}=-1$

γ) $\left(1+\dfrac{\eta\mu\alpha-1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)\left(1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha+1}{\eta\mu\alpha}\right)=2$

8. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{1+\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}-2\varepsilon\varphi^2\omega=1$

β) $\dfrac{1}{\eta\mu\alpha}-\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha}=\eta\mu\alpha$

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\omega}{\varepsilon\varphi\omega}$

β) $(1-\eta\mu^2\omega)\cdot(1+\varepsilon\varphi^2\omega)=1$

γ) $\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega-1}{\varepsilon\varphi^2\omega+1}=\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega$

δ) $\dfrac{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}=\sigma\upsilon\nu\omega$

ε) $\varepsilon\varphi\omega+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=\dfrac{1}{\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}$

στ) $\varepsilon\varphi\omega+\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\eta\mu\omega}=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

ζ) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\eta\mu^2\omega}{1+2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}=\dfrac{1-\varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}$

4. Επεκτάσεις

1. α) Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases}\dfrac{2x-y+1}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=x+2\\ 2y=3(x-1)\end{cases}$$

β) Αν (x,y) είναι η λύση του συστήματος τότε να αποδείξετε ότι

$$4(x\eta\mu\omega+2006y\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(2006y\eta\mu\omega+2x\sigma\upsilon\nu\omega)^2=4$$

2. Αν ισχύει $\eta\mu^2x\cdot\varepsilon\varphi x-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x}{\varepsilon\varphi x}+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}=7$ τότε να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$$A=\sqrt{32}\cdot\eta\mu x-\sqrt{18}\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

είναι ακέραιος αριθμός.

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει

$$(\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega)^2\le 2$$

1. Λυμένες ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει:

α) $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$ β) $\eta\mu^2\omega=\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

Λύση

α) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{\dfrac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\sigma\upsilon\nu^2\omega$ που ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική.

β) Για κάθε γωνία ω ισχύει $\dfrac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}=\dfrac{\left(\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2}=\dfrac{\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{1+\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\dfrac{\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=$

$=\dfrac{\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\dfrac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\dfrac{\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}=\dfrac{\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\eta\mu^2\omega$

2. Ασκήσεις για λύση

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω που έχει νόημα η κάθε παράσταση ισχύει

α) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega}+\dfrac{\eta\mu\omega}{1+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}}=\dfrac{1}{\eta\mu\omega+\sigma\upsilon\nu\omega}$

α) $\dfrac{\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}+\dfrac{\eta\mu^3x-\sigma\upsilon\nu^3x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}=2$

β) $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^4x}-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=\dfrac{\varepsilon\varphi^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}$

β) $\left(\varepsilon\varphi\omega+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\omega}\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}-\sigma\upsilon\nu\omega\right)\left(\dfrac{1}{\eta\mu\omega}-\eta\mu\omega\right)=1$

γ) $\dfrac{1-2\eta\mu\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\dfrac{\varepsilon\varphi\omega-1}{\varepsilon\varphi\omega+1}$

δ) $\dfrac{|\sigma\upsilon\nu\omega|}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}}+\dfrac{|\eta\mu\omega|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega}}}=1,\ \omega\neq 90^\circ$

2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω αν ισχύει

$$1+\varepsilon\varphi^2\omega=\frac{1}{2}+\frac{3}{4\sigma\upsilon\nu^2\omega}.\ \ 0<\omega<180^\circ$$

Παρατήρηση: Ισχύει $1+\varepsilon\varphi^2\omega=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$.

3. Αν έχει μοναδική λύση η παρακάτω εξίσωση

$$4x^2+(5-3\eta\mu\omega)\cdot x+\sigma\upsilon\nu^2\omega=0$$

τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{\left(\varepsilon\varphi\omega+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^{40}}{(20\eta\mu\omega+5\sigma\upsilon\nu\omega)^{13}},\ 90^\circ<\omega<180^\circ$$

4. Να αποδείξετε ότι η παρακάτω παράσταση έχει σταθερή τιμή, ανεξάρτητη της γωνίας α:

$$A=\frac{\eta\mu^2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

5. Αν για κάποιο $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{1}{2}$$

τότε να υπολογίσετε τις επόμενες παραστάσεις:

α) $\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$ β) $\dfrac{1}{\eta\mu\alpha}+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$

γ) $\eta\mu^3\alpha+\sigma\upsilon\nu^3\alpha$ δ) $|\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha|$

6. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$2\varepsilon\varphi\alpha+2\eta\mu\alpha+3+\eta\mu\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha$$

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$2\varepsilon\varphi\alpha+2\eta\mu\alpha+3+\eta\mu\alpha\cdot\varepsilon\varphi\alpha=0,\ 90^\circ<\alpha<180^\circ$$

2.4 / 1 Νόμος των ημιτόνων

1. Θεωρία

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$.

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A = \eta\mu B$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

2. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A = \eta\mu B$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

3. Ο νόμος των ημιτόνων εφαρμόζεται σε ορθογώνιο τρίγωνο;

4. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\eta\mu A = 3\eta\mu B$ τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$.

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 3\sqrt{2}$, $\gamma = 2\sqrt{3}$ και $\hat{\Gamma} = 45°$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία Β
β) τη γωνία Α
γ) την πλευρά α

2. Δίνεται το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 8$, $\gamma = 12$ και $\hat{B} = 60°$. Να υπολογίσετε τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha + \beta = 12$, $\hat{A} = 30°$ και $\hat{B} = 45°$. Να υπολογίσετε τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 1$, $\alpha = 3$ και $\hat{A} = 120°$. Να υπολογίσετε τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου.

5. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\eta\mu^2 A = \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma$$

τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

6. α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma = \frac{1}{2}\alpha\gamma\eta\mu B$$

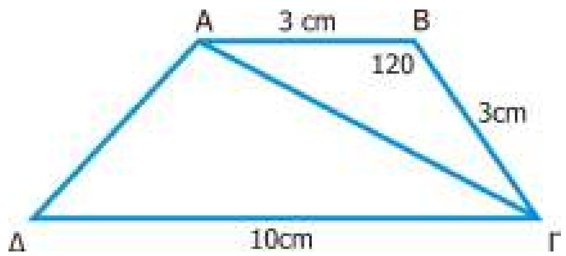
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ αν είναι $\beta = 13$, $\gamma = 9$ και $\hat{A} = 40°$

7. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\eta\mu B} = \frac{\beta}{\eta\mu A}$$

τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

8. Στο παρακάτω τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $AB = 3\text{cm}$, $B\Gamma = 3\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 10\text{cm}$ και $\hat{B} = 120°$.



Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΔ.

4. Επεκτάσεις

1. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 16$, $\beta = 18$ και $\hat{A} = 88°$.

2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma^2 \eta\mu A \cdot \eta\mu B}{\eta\mu \Gamma}$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 2\beta$, $\beta = \frac{\gamma}{\sqrt{3}}$ και $\hat{\Gamma} = 60°$.

α) Να υπολογίσετε το ημΑ, ημΒ και τις $\hat{A}$ και $\hat{B}$
β) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ;
γ) Αν $\alpha = 10$ να υπολογίσετε τις πλευρές β και γ
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓ

2.4 / 2 Νόμος των συνημιτόνων **119**

1. Θεωρία

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

2. Ερωτήσεις κατανόησης

1. Αν σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{A} > 90°$ τότε είναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$

2. Αν σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{A} < 90°$ τότε είναι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$

3. Ασκήσεις για λύση

1. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 5\text{cm}$ και $\gamma = 7\text{cm}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma} = 120°$.

2. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με
α) $\alpha = 5$, $\beta = 5\sqrt{3}$ και $\gamma = 5$
β) $\alpha = \sqrt{3} + 1\text{cm}$, $\beta = 2\text{cm}$ και $\gamma = \sqrt{6}\,\text{cm}$
Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

3. Δίνεται το αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$ και $\hat{A} = 30°$. Να υπολογίσετε τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου.

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \alpha\gamma}$$

Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{31}$, $\beta = x + 1$, $\gamma = x + 2$ και $\hat{A} = 60°$. Να υπολογίσετε τις πλευρές β και γ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 2\text{cm}$, $\gamma = \sqrt{2}\,\text{cm}$ και $\hat{A} = 45°$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

7. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:
α) αν $\hat{A} = 60°$ τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
β) αν $\hat{B} = 135°$ τότε $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + \alpha\gamma\sqrt{2}$

8. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

9. Να αποδείξετε ότι αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει

$$\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma = \gamma\sigma\upsilon\nu A$$

τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

10. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει:
α) $\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$
β) $\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma - \alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B = \beta^2 - \gamma^2$
γ) $\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A + \gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B + \alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$
γ) $\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$

11. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha$$

12. Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $AB = 30\text{cm}$, $B\Gamma = 20\text{cm}$ και $\hat{B} = 60°$. Να υπολογίσετε τις διαγώνιους του ΑΓ και ΒΔ.

13. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy φέρουμε τα σημεία Α, Β ώστε $A(7,0)$, $A\hat{O}B = 120°$ και $OB = 8$. Να υπολογίσετε την απόσταση ΑΒ.

4. Επεκτάσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της ΒΓ. Αν $\alpha = 12$, $\gamma = 8$ και $A\Delta = 7$ τότε να υπολογίσετε:
α) την περίμετρο του ΑΒΓ
β) την περίμετρο του ΑΔΓ

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = \gamma = \alpha - 4$, $\hat{A} = 120°$.
α) Να βρείτε την πλευρά α
β) Να βρείτε το ημΒ
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓ

Βιβλιογραφία

Όλα τα βιβλία Μαθηματικών, του Ο.Ε.Δ.Β., όλων των τάξεων Δημοτικού, Γυμνασίου, Τ.Ε.Ε. και Λυκείου.
Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των μαθηματικών στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.
Εφημερίς της κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (26/27–6–2019).

Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Ελένη Μήτσιου, Θεόδωρος Λαζαρίδης, Σωτήρης Τουλβατζής. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2011.
Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Βασίλης Παπαδάκης. Εκδόσεις Σαββάλας. 2014.
Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Κώστας Γκατζούλης, Γιάννης Ρίζος. Εκδόσεις Μαυρίδη. 2009.
Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Ελευθέριος Πρωτόπαπας. Εκδόσεις Πατάκη. 2006.
Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου. Αναστάσιος Μπάρλας. Αυτοέκδοση. 2016.
Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου για καλούς μαθητές. Τραγανίτης. Εκδόσεις Σαββάλας. 2003
Άλγεβρα Α’ Λυκείου. Λουκάς Κανάκης, Γιώργος Μαυρίδης, Παναγιώτης Μυταρέλλης, Γιάννης Σαράφης. Εκδόσεις Μαυρίδη. 2016
Άλγεβρα Α’ Λυκείου. Γιώργος Μιχαηλίδης. Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική. 2016.
Άλγεβρα Α’ Λυκείου. Βασίλης Παπαδάκης. Εκδόσεις Σαββάλας. 2008.
Άλγεβρα Α’ Λυκείου. Χρήστος Σιωζόπουλος. Εκδόσεις Ζήτη. 1993.
Άλγεβρα Α’ και Β’ Λυκείου. Στέφανος Ηλιάσκος – Γιώργος Φωτόπουλος. Εκδόσεις Ηλιάσκος Φροντιστήρια. 2013.
Αριθμοί και άλλα. Τάσος Αγάπης. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 1998.
Μαθηματικά Γ’ Λυκείου Γενικής Παιδείας. Αναστάσιος Μπάρλας. Εκδόσεις Ελληνοεκδοτική. 2003.
Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής Γ’ Λυκείου Γενικής Παιδείας. Π. Κανδύλας. Εκδόσεις Κανδύλας. 1999.
Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής Γ’ Λυκείου Γενικής Παιδείας. Θανάσης Ξένος. Εκδόσεις Ζήτη. 1999.
888 σπαζοκεφαλιές / δραστηριότητες. Θεολόγης Καρκαλέτσης. Αυτοέκδοση. 2002.
Ο Οιδίποδας και η σφίγγα. Ανδρέας Πούλος. Εκδόσεις Σαββάλας. 2002.
Στοιχεία Μαθηματικής Λογικής. Αθ. Τζουβάρας. Εκδόσεις Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ. 1987.
Συνδυαστική. Θ. Ν. Καζαντζής. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη – Χ. Βαφειάδης. 1997.
Την κυρία ή την τίγρη. Raymond Smyllyan. Εκδόσεις Κάτοπτρο. 1998.

Θέματα των διαγωνισμών της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας

Περιοδικά:
Απολλώνιος
Αστρολάβος
Διάσταση
Ευκλείδης Α', Β', Γ'
Μαθηματική Επιθεώρηση
Μαθηματική Παιδεία
Τα μαθηματικά στο Ενιαίο Λύκειο

Επίσης διατίθενται τα παρακάτω φυλλάδια και βιβλία

Φυλλάδια

Β' Γυμνασίου:
- Εξισώσεις α' βαθμού και προβλήματα στη Β' Γυμνασίου. 2015.

Γ' Γυμνασίου:
- Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου. 119 διδακτικές ενότητες. 2020.

Α' Λυκείου:
- Άλγεβρα Α' Λυκείου. 96 διδακτικές ενότητες . 2019.
- Άλγεβρα Α' Λυκείου. 96 διδακτικές ενότητες (Λύσεις). 2019.
- Γεωμετρία Α' Λυκείου. 59 διδακτικές ενότητες. 2020.
- Συνοπτικό φυλλάδιο θεωρίας Ευκλείδειας Γεωμετρίας. 2017.
- Τράπεζα θεμάτων στην Άλγεβρα Α' Λυκείου. 2015.
- Τράπεζα θεμάτων στη Γεωμετρία Α' Λυκείου. 2015.

Β' Λυκείου:
- Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου. 87 διδακτικές ενότητες. 2020.
- Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου. 87 διδακτικές ενότητες (Λύσεις). 2020.
- Συνοπτικό φυλλάδιο θεωρίας Ευκλείδειας Γεωμετρίας. 2017.
- Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου. 71 διδακτικές ενότητες. 2020.
- Μαθηματικά Προσανατολισμού Β' Λυκείου. 61 διδακτικές ενότητες (Λύσεις). 2020.
- Γεωμετρία Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου. 54 διδακτικές ενότητες. 2018.

Γ' Λυκείου:
- Μιγαδικοί αριθμοί. 2015.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 1ο τεύχος. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης: 57 διδακτικές ενότητες. 2017.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 1ο τεύχος. Όριο – Συνέχεια συνάρτησης: 57 διδακτικές ενότητες (Συνοπτικό φυλλάδιο). 2017.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 2ο τεύχος. Διαφορικός Λογισμός: 90 διδακτικές ενότητες. 2017.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 2ο τεύχος. Διαφορικός Λογισμός: 90 διδακτικές ενότητες (Συνοπτικό φυλλάδιο). 2017.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 3ο τεύχος. Ολοκληρωτικός Λογισμός: 34 διδακτικές ενότητες. 2017.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 3ο τεύχος. Ολοκληρωτικός Λογισμός: 34 διδακτικές ενότητες (Συνοπτικό φυλλάδιο). 2017.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 4ο τεύχος. Επαναληπτικό φυλλάδιο. 2019.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 5ο τεύχος. Θέματα Πανελλαδικών και Επαναληπτικών εξετάσεων στα Μαθηματικά 2000 – 2019. 2019.
- Μαθηματικά Προσ. Γ' Λυκείου. 6ο τεύχος. Προτάσεις Σ – Λ. 2020.
- Αναλυτικές λύσεις όλων των θεμάτων στα Μαθηματικά των Πανελλαδικών εξετάσεων 1ης και 4ης Δέσμης 1983 – 2001. 2013.
- Αναλυτικές λύσεις όλων των θεμάτων στα Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης των Πανελλαδικών εξετάσεων και των Επαναληπτικών εξετάσεων 2000 – 2015. 2015.
- Θέματα Πανελλαδικών και Επαναληπτικών εξετάσεων στα Μαθηματικά Γεν. Παιδείας 2000 – 2017. 2017.
- Αυτονόητες συμβουλές για τις Πανελλήνιες. 2019.

Επιμέλεια Βιβλίων

- **Μαθηματικοί Διαγωνισμοί και Ολυμπιάδες. Ε' Δημοτικού.** Σωκράτης Δ. Ρωμανίδης – Έφη Ν. Γυριχίδου. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009
- **Μαθηματικοί Διαγωνισμοί και Ολυμπιάδες. Στ' Δημοτικού.** Σωκράτης Δ. Ρωμανίδης – Έφη Ν. Γυριχίδου. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009
- **Μαθηματικά Α' Γυμνασίου.** Ελένη Μήτσιου – Λεωνίδας Θαρραλίδης. Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009.

Βιβλία

- Ένθετο λύσεων στο βιβλίο: **«Μαθηματικά Α' Γυμνασίου. Ελένη Μήτσιου – Λεωνίδας Θαρραλίδης.»** Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009.
- Ένθετο λύσεων στο βιβλίο: **«Μαθηματικά Β' Γυμνασίου. Ελένη Μήτσιου – Αναστασία Τσιρογιάννη.»** Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη. 2009.
- **Λεξικό Μαθηματικών όρων**
- **Μαθηματικές στιγμές**
- **Σωκρατικός διάλογος για τα Μαθηματικά.** Η Φιλοσοφία και τα Μαθηματικά
- **888 στίχοι από τραγούδια**
- **888 σπαζοκεφαλιές / δραστηριότητες**
- **Τραγούδια για κιθάρα.** Ταξινομημένα κατά είδος συγχορδιών, δρόμων και ρυθμών

e–mail: teokmail@gmail.com
blog: blogs.sch.gr/teomail