

13.3 Λύσεις επαναληπτικών ασκήσεων

1. Είναι $[\rho(1+i)]^3 + \alpha[\rho(1+i)]^2 + \beta = 0 \Rightarrow \rho^3(2i-2) + \alpha\rho^2 \cdot 2i + \beta = 0 \Rightarrow$

$$-2\rho^3 + \beta + i(2\rho^3 + 2\alpha\rho^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2\rho^3 \\ 2\alpha\rho^2 = 2\rho^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ \alpha = \rho \end{cases} \Rightarrow \beta = 2\alpha^3$$

2. Είναι $-\beta + \alpha i = i(\alpha + \beta i)$ και $\beta - \alpha i = -i(\alpha + \beta i)$.

Η δοσμένη σχέση μας δίνει: $2^v(\alpha + \beta i)^v + 2 \cdot i^v(\alpha + \beta i)^v + 2(-i)^v(\alpha + \beta i)^v = 0 \Rightarrow$

$$(\alpha + \beta i)^v \cdot [2^v + 2 \cdot i^v + 2 \cdot (-i)^v] = 0 \Rightarrow 2^v + 2 \cdot i^v + 2 \cdot (-i)^v = 0 \quad (\text{αφού } \alpha + \beta i \neq 0)$$

Διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις:

- Αν είναι $v = 4\kappa$, με $\kappa \in \mathbb{N}^*$ τότε $2^{4\kappa} + 2 \cdot i^{4\kappa} + 2 \cdot (-i)^{4\kappa} = 0 \Rightarrow 2^{4\kappa} + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0$, αδύνατη.

- Αν είναι $v = 4\kappa + 1$, με $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε $2^{4\kappa+1} + 2 \cdot i^{4\kappa+1} + 2 \cdot (-i)^{4\kappa+1} = 0 \Rightarrow 2^{4\kappa+1} + 2 \cdot i - 2 \cdot i = 0$, αδύνατη.

- Αν είναι $v = 4\kappa + 2$, με $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε $2^{4\kappa+2} + 2 \cdot i^{4\kappa+2} + 2 \cdot (-i)^{4\kappa+2} = 0 \Rightarrow 2^{4\kappa+2} + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow 2^{4\kappa+2} = 4 \Rightarrow 2^{4\kappa+2} = 2^2 \Rightarrow 4\kappa + 2 = 2 \Rightarrow \kappa = 0$. Επομένως είναι $v = 2$

- Αν είναι $v = 4\kappa + 3$, με $\kappa \in \mathbb{N}$ τότε $2^{4\kappa+3} + 2 \cdot i^{4\kappa+3} + 2 \cdot (-i)^{4\kappa+3} = 0 \Rightarrow 2^{4\kappa+3} + 2 \cdot (-i) - 2 \cdot i = 0$, αδύνατη.

Άρα είναι $v = 2$.

3. α) $(\bar{z})^{1997} + 3z + 2i = 0 \Rightarrow 3z + 2i = -(\bar{z})^{1997}$. Άρα $|3z + 2i| = |-(\bar{z})^{1997}| = 1$.

β) $|3z + 2i| = 1 \Rightarrow \left| z + \frac{2}{3}i \right| = \frac{1}{3}$. Κύκλος με κέντρο το $\left(0, -\frac{2}{3} \right)$ και ακτίνα $\frac{1}{3}$.

Από την σχέση $|z| = 1$ συμπεραίνουμε ότι ο z ανήκει και σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 1.

Άρα ο z ανήκει στην τομή των δύο κύκλων.

4. α) $|z + 9| = 3|z + 1| \Rightarrow |z + 9|^2 = 9|z + 1|^2 \Rightarrow (z + 9)(\bar{z} + 9) = 9(z + 1)(\bar{z} + 1) \Rightarrow$

$$|z|^2 + 9z + 9\bar{z} + 81 = 9|z|^2 + 9z + 9\bar{z} + 9 \Rightarrow 8|z|^2 = 72 \Rightarrow |z|^2 = 9 \Rightarrow |z| = 3$$

β) $|z + 16| = 4|z + 1| \Rightarrow |z + 16|^2 = 16|z + 1|^2 \Rightarrow$

$$(z + 16)(\bar{z} + 16) = 16(z + 1)(\bar{z} + 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow |z|^2 = 16 \Rightarrow |z| = 4$$

γ) $|2z - 1| = |z - 2| \Rightarrow |2z - 1|^2 = |z - 2|^2 \Rightarrow (2z - 1)(2\bar{z} - 1) = (z - 2)(\bar{z} - 2) \Rightarrow$

$$4|z|^2 - 2z - 2\bar{z} + 1 = |z|^2 - 2z - 2\bar{z} + 4 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

δ) $|6z + 1| = |4z - 1| \Rightarrow |6z + 1|^2 = |4z - 1|^2 \Rightarrow (6z + 1)(6\bar{z} + 1) = (4z - 1)(4\bar{z} - 1) \Rightarrow$

$$\dots \Rightarrow 20|z|^2 + 10z + 10\bar{z} = 0 \Rightarrow 4|z|^2 + 2z + 2\bar{z} = 0.$$

$$\text{Είναι } |2z+1|^2 = (2z+1)(2\bar{z}+1) = \underbrace{4|z|^2 + 2z + 2\bar{z} + 1}_{=0} = 1$$

5. α) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $x^2 + y^2 = 1$ άρα $-1 \leq x \leq 1$ και $-1 \leq y \leq 1$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{z - \bar{z}}{2} + i \right| + \left| \frac{z - \bar{z}}{2} - i \right| &= \left| \frac{2yi}{2} + i \right| + \left| \frac{2yi}{2} - i \right| = |(y+1)i| + |(y-1)i| = |i|(y+1) + |i|(y-1) = \\ &= |y+1| + |y-1|. \text{ Είναι } -1 \leq y \leq 1 \text{ άρα } |y+1| = y+1 \text{ και } |y-1| = 1-y. \\ \text{Άρα } |y+1| + |y-1| &= y+1+1-y = 2. \end{aligned}$$

β) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } z + \bar{z} = 2|z| \Rightarrow \mathcal{Z}x = \mathcal{Z}\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}.$$

γ) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. w φανταστικός άρα $w = -\bar{w} \Rightarrow$

$$\frac{z-i}{z-1} = -\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow 2z\bar{z} - z - \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) - 2x + i(2yi) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \text{ που είναι κύκλος με κέντρο } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \text{ και ακτίνα } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Επομένως } \left| z - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Άρα } |2z-1-i| = 2 \left| z - \frac{1}{2} - i\frac{1}{2} \right| = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

δ) w φανταστικός άρα

$$w = -\bar{w} \Rightarrow \frac{z^v - 1}{z^v + 1} = -\frac{\bar{z}^v - 1}{\bar{z}^v + 1} \Rightarrow (z\bar{z})^v = 1 \Rightarrow (|z|^2)^v = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

$$\text{ε)} \left| z + \frac{1}{z} \right| = |z| \Rightarrow \left| \frac{z^2 + 1}{z} \right| = |z| \Rightarrow |z^2 + 1| = |z^2|. \text{ Άρα το } z^2 \text{ ανήκει στη μεσοκάθετο του } AB, \text{ όπου}$$

$$A(-1,0) \text{ και } B(0,0) \text{ δηλαδή την } x = -\frac{1}{2}. \text{ Άρα } \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{6. α)} |z+1| = \sqrt{5} \Rightarrow |z+1|^2 = 5 \Rightarrow (z+1)(\bar{z}+1) = 5 \Rightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} = 4$$

$$|2z-1| = \sqrt{5} \Rightarrow |2z-1|^2 = 5 \Rightarrow (2z-1)(2\bar{z}-1) = 5 \Rightarrow 4z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 4 \Rightarrow z + \bar{z} = 2z\bar{z} - 2$$

$$\text{Η σχέση (1) λόγω της (2) γίνεται } z\bar{z} + 2z\bar{z} - 2 = 4 \Rightarrow 3z\bar{z} = 6 \Rightarrow z\bar{z} = 2 \Rightarrow |z|^2 = 2 \Rightarrow |z| = \sqrt{2}$$

β) Από το $|z+1| = \sqrt{5}$ συμπεραίνουμε ότι ο z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $(-1,0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$.

Από το $|z| = \sqrt{2}$ συμπεραίνουμε ότι ο z ανήκει σε κύκλο με κέντρο

το $(0,0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$. Άρα ο z ανήκει στην τομή αυτών των δύο κύκλων.

$$\text{Έστω } z = x + yi, \text{ με } x, y \in \mathbb{R}. \begin{cases} |z+1| = \sqrt{5} \\ |z| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+yi+1| = \sqrt{5} \\ |x+yi| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2x + 1 = 5 \\ \rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Άρα είναι $z = 1 + i$ ή $z = 1 - i$.

$$7. \quad \alpha) z = -\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i \quad \beta) z = \frac{3}{4} + i \quad \gamma) z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$8. \quad \text{Είναι } |z| = |(z-1)+1|. \text{ Ισχύει } ||z-1|-1| \leq |(z-1)+1| \leq |z-1|+1 \Rightarrow$$

$$|\eta\mu^2\theta-1| \leq |z| \leq \eta\mu^2\theta+1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\theta \leq |z| \leq \eta\mu^2\theta+1$$

$$9. \quad \text{Είναι } |z_1|=1 \Rightarrow |z_1|^2=1 \Rightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1=1 \Rightarrow \bar{z}_1=\frac{1}{z_1}. \text{ Ομοίως } \bar{z}_2=\frac{1}{z_2} \text{ και } \bar{z}_3=\frac{1}{z_3}.$$

$$\text{Άρα } z_1+z_2+z_3=1 \Rightarrow \overline{z_1+z_2+z_3}=\bar{1} \Rightarrow \bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=1 \Rightarrow \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1.$$

$$10. |z+1|+|z| \leq |z+2|+|z-1|$$

$$1^\circ \text{ μέλος: } (|z+1|+|z|)^2 = |z+1|^2 + 2|z+1||z| + |z|^2 = |z+1|^2 + 2|z^2+z| + |z|^2 =$$

$$(z+1)(\bar{z}+1) + 2|z^2+z| + z\bar{z} = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 + 2|z^2+z| + z\bar{z} = 2|z|^2 + z + \bar{z} + 1 + 2|z^2+z|$$

$$2^\circ \text{ μέλος: } (|z+2|+|z-1|)^2 = |z+2|^2 + 2|z+2||z-1| + |z-1|^2 = |z+2|^2 + 2|z^2+z-2| + |z-1|^2 =$$

$$(z+2)(\bar{z}+2) + 2|z^2+z-2| + (z-1)(\bar{z}-1) =$$

$$z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} + 4 + 2|z^2+z-2| + z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = 2|z|^2 + z + \bar{z} + 2|z^2+z-2| + 5$$

Λόγω των (1) και (2) η αρχική ανίσωση παίρνει τη μορφή

$$2|z|^2 + z + \bar{z} + 1 + 2|z^2+z| \leq 2|z|^2 + z + \bar{z} + 2|z^2+z-2| + 5 \Leftrightarrow$$

$$2|z^2+z| \leq 2|z^2+z-2| + 4 \Leftrightarrow |z^2+z| - |z^2+z-2| \leq 2$$

$$\text{Ισχύει } |z|-|w| \leq |z-w| \text{ άρα } |z^2+z| - |z^2+z-2| \leq |z^2+z-z^2-z+2| \Rightarrow |z^2+z| - |z^2+z-2| \leq 2.$$

Επομένως η σχέση (3) ισχύει, άρα και η αρχική.

$$11. \alpha) \left| \frac{z-i}{z+i} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < |z+i| \Leftrightarrow |z-i|^2 < |z+i|^2 \Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i) < (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 1 < z\bar{z} - iz + i\bar{z} + 1 \Leftrightarrow iz - i\bar{z} < 0 \Leftrightarrow i(z - \bar{z}) < 0 \Leftrightarrow i \cdot 2\text{Im}(z)i < 0 \Leftrightarrow \text{Im}(z) > 0$$

$$\beta) \text{ i) } \left| \frac{z_1-i}{z_1+i} \right| + \left| \frac{z_2-i}{z_2+i} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{z_1-i}{z_1+i} \right| < 1 \text{ και } \left| \frac{z_2-i}{z_2+i} \right| < 1. \text{ Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε}$$

ότι $\text{Im}(z_1) > 0$ και $\text{Im}(z_2) > 0$ άρα οι z_1, z_2 είναι μιγαδικοί και επομένως δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

$$\text{ii) } \left| \frac{z_1+z_2-i}{z_1+z_2+i} \right| < 1 \text{ άρα σύμφωνα με τα παραπάνω αρκεί να αποδείξουμε ότι}$$

$$\text{Im}(z_1+z_2) > 0. \text{ Είναι } \text{Im}(z_1) > 0 \text{ και } \text{Im}(z_2) > 0 \text{ οπότε } \text{Im}(z_1+z_2) > 0.$$

12. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Ο δοσμένος αριθμός παίρνει την μορφή

$$2z^2 - |z|^2 - (1+3i)z - (1-3i)\bar{z} - 5 =$$

$$2(x+yi)^2 - (x^2+y^2) - (1+3i)(x+yi) - (1-3i)(x-yi) - 5 =$$

$$2x^2 + 4xyi - 2y^2 - x^2 - y^2 - (x+yi+3xi-3y) - (x-yi-3xi-3y) - 5 =$$

$$x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 5 + 4xyi$$

Για να είναι ο παραπάνω αριθμός φανταστικός αρκεί να ισχύει

$$x^2 - 3y^2 - 2x + 6y - 5 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 3(y-1)^2 = 3 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{3} - (y-1)^2 = 1$$

13. Η σχέση $|z - 2 + i| < \frac{3}{2}$ περιγράφει τους μιγαδικούς που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho_1 = \frac{3}{2}$.

Η σχέση $|z - 4 - i| > 2$ περιγράφει τους μιγαδικούς που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $\Lambda(4, 1)$ και ακτίνα $\rho_2 = 2$.

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι μιγαδικοί που οι εικόνες τους είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο (K, ρ_1) και εξωτερικά του κύκλου (Λ, ρ_2) .

14. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Είναι w πραγματικός άρα $w = \bar{w} \Rightarrow \frac{z - 2i}{z + 1} = \frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} + 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$z - \bar{z} = 2i(z + \bar{z}) + 4i \Rightarrow 2yi = 2i \cdot 2x + 4i \Rightarrow 2y = 4x + 4 \Rightarrow y = 2x + 2.$$

Άρα η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία $y = 2x + 2$.

β) Είναι w φανταστικός άρα $w = -\bar{w} \Rightarrow \frac{z - 2i}{z + 1} = -\frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} + 1} \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$2z\bar{z} + z + \bar{z} + 2i(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) + 2x + 2i \cdot 2yi = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - 2y = 0.$$

Άρα η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο το $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

15. Έστω $z = x + yi$ και $w = \alpha + \beta i$ με $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Από τη δοσμένη σχέση έχουμε: $w \cdot \operatorname{Re}(z) - \bar{w} \cdot \operatorname{Im}(z) = 2(1 + i) - 2i \cdot \bar{w} \Rightarrow$

$$(\alpha + \beta i) \cdot x - (\alpha - \beta i) \cdot y = 2 + 2i - 2i(\alpha - \beta i) \Rightarrow$$

$$(\alpha x - \alpha y) + i(\beta x + \beta y) = (2 - 2\beta) + i(2 - 2\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \alpha x - \alpha y = 2 - 2\beta \\ \beta x + \beta y = 2 - 2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha(x - y) + 2\beta = 2 \\ 2\alpha + \beta(x + y) = 2 \end{cases}.$$

Το παραπάνω σύστημα έχει δύο τουλάχιστον λύσεις ως προς w , άρα ως προς α και β επομένως έχει άπειρες λύσεις. Άρα είναι

$D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - y & 2 \\ 2 & x + y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ που είναι μία ισοσκελές υπερβολή με $\alpha = \beta = 2$.

16. α) Έστω $z \in \mathbb{R}$. Η (1) δίνει $\left| \frac{\alpha + \beta i}{\beta + \alpha i} \right| = \left| \frac{1 + iz}{1 + iz} \right| = 1 \Rightarrow |1 + iz| = 1 \Rightarrow$

$$\sqrt{1^2 + z^2} = 1 \Rightarrow z = 0$$

Για $z = 0$ η (1) δίνει $1 = \frac{\alpha + \beta i}{\beta + \alpha i} \Rightarrow \alpha + \beta i = \beta + \alpha i \Rightarrow \alpha = \beta$ άτοπο από την υπόθεση

β) Η (1) δίνει $|1 + iz| = 1 \Rightarrow |-i^2 + iz| = 1 \Rightarrow |i||z - i| = 1 \Rightarrow |z - i| = 1.$

Άρα η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

γ) Είναι $z_{\min} = 0$ για $z = 0 + 0i$ (απορρίπτεται λόγω του α ερωτήματος) άρα δεν υπάρχει $z_{\min}$ και $z_{\max} = 2$ για $z = 0 + 2i$.

δ) Η παράσταση $|z - 3 + 4i|$ εκφράζει την απόσταση της εικόνας του z στο μιγαδικό επίπεδο από το σημείο $A(3, -4)$.

Αν είναι B και Γ τα σημεία τομής της AK με τον κύκλο τότε $AB \leq AK \leq A\Gamma$

Είναι $AK = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{34}$ άρα $AB = AK - \rho = \sqrt{34} - 1$ και

$$A\Gamma = AK + \rho = \sqrt{34} + 1$$

Επομένως $4 < \sqrt{34} - 1 < |z - 3 + 4i| < \sqrt{34} + 1 < 7$.

ε) Οι εικόνες των z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν στον κύκλο άρα η μέγιστη τιμή της απόστασής τους είναι ίση με $2\rho = 2$. Επομένως $|z_1 - z_2| \leq 2$.

17. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι w φανταστικός άρα

$$w = -\bar{w} \Rightarrow \frac{z^2 + 1}{z + 1}i = -\frac{\bar{z}^2 + 1}{\bar{z} + 1}(-i) \Rightarrow \frac{z^2 + 1}{z + 1} = \frac{\bar{z}^2 + 1}{\bar{z} + 1} \Rightarrow$$

$$(z^2 + 1)(\bar{z} + 1) = (z + 1)(\bar{z}^2 + 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow z\bar{z}(z - \bar{z}) + z^2 - \bar{z}^2 - (z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow$$

$$z\bar{z}(z - \bar{z}) + (z + \bar{z})(z - \bar{z}) - (z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} + z + \bar{z} - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$z - \bar{z} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (ευθεία)}$$

ή $z\bar{z} + z + \bar{z} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ (κύκλος με κέντρο $(-1, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{2}$)

$$(x^2 + y^2)2yi + (z + \bar{z})(z - \bar{z})$$

18. Έστω $w = x + ix$ και $z = \alpha + \beta i$. Είναι $z = w + \frac{1}{w} = \dots = x + \frac{1}{2x} + i\left(x - \frac{1}{2x}\right)$.

$$\text{Άρα } \begin{cases} x + \frac{1}{2x} = \alpha \\ x - \frac{1}{2x} = \beta \end{cases} \text{ . Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε } x = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ . Με αφαίρεση κατά μέλη έ-}$$

$$\text{χουμε } \frac{1}{x} = \alpha - \beta \text{ .}$$

Από τα παραπάνω $\alpha^2 - \beta^2 = 2$ (Υπερβολή).

19. Αν είναι $z = x + yi$ τότε $w = \frac{x^2 + y^2 + y + iy}{(x+1)^2 + y^2}$. $\text{Re}(w) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + x = 0$ που είναι κύ-

κλος με κέντρο το $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$.

20. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2 = 0$. Αν θέσουμε $u = z_1 \bar{z}_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)$ τότε $u + \bar{u} = 0 \Rightarrow \text{Re}(u) = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

21. $|z - 2 - 3i| = |(z + 1 + i) + (-3 - 4i)|$. Άρα $|z - 2 - 3i| \leq |z + 1 + i| + |-3 - 4i| = 1 + 5 = 6$.

Επίσης $|z - 2 - 3i| \geq ||z + 1 + i| - |-3 - 4i|| = |1 - 5| = 4$. Επομένως $4 \leq A \leq 6$.

22. α) Από τη σχέση $|z - 1 - 2i| = 5$ συμπεραίνουμε ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $\rho = 5$. Η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2.$$

Η παράσταση $|z - 7 - 10i|$ εκφράζει την απόσταση του σημείου $M(7, 10)$ από ένα τυχαίο σημείο του κύκλου.

Η ελάχιστη απόσταση είναι η MA και η μέγιστη η MB .

$$\text{Είναι } MK = \sqrt{(10 - 2)^2 + (7 - 1)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

$$\text{Άρα είναι } |z - 7 - 10i|_{\min} = MA = 10 - 5 = 5 \text{ και } |z - 7 - 10i|_{\max} = MB = 10 + 5 = 15$$

β) Η ευθεία MK έχει εξίσωση: $y - 2 = \frac{10 - 2}{7 - 1}(x - 1) \Rightarrow y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow$

$$3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

Για να βρούμε τις συντεταγμένες των σημείων τομής A και B του κύκλου και της ευθείας λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους. Είναι:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ 4x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow (x, y) = (4, 6) \text{ ή } (x, y) = (-2, -2)$$

Επομένως η παράσταση ελαχιστοποιείται για $z = 4 + 6i$ και μεγιστοποιείται για $z = -2 - 2i$.

23. α) $\Delta = 4\sin^2\theta - 4 = 4(\sin^2\theta - 1) = -4\eta\mu^2\theta < 0$.

$$\text{Άρα } z_{1,2} = \frac{2\sin\theta \pm 2i\eta\mu\theta}{2} = \sin\theta \pm i\eta\mu\theta$$

β) $M(\sin\theta, \eta\mu\theta)$. Θέτω $x = \sin\theta > 0$, $y = \eta\mu\theta > 0$.

Είναι $x^2 + y^2 = 1$ με $x > 0$ και $y > 0$. Άρα το M διατρέχει τεταρτοκύκλιο.

24. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Αντικαθιστούμε και κάνουμε πράξεις. Καταλήγουμε $x^2 + y^2 = 1$.

$$\text{25. } \Theta\acute{\epsilon}\tau\omicron\upsilon\mu\epsilon \ w = \frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}. \text{ Ισχύει } \text{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} = \overline{\left(\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\lambda' + \frac{2z}{1 - z + z^2} = \lambda' + \frac{2\bar{z}}{1 - \bar{z} + \bar{z}^2} \Leftrightarrow \mathcal{Z}(z - z\bar{z} + z\bar{z}^2) = \mathcal{Z}(\bar{z} - z\bar{z} + z^2\bar{z}) \Leftrightarrow$$

$$z - \bar{z} = (z - \bar{z})z\bar{z} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0$$

Επομένως είναι $z - \bar{z} \Rightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ αδύνατο

$$\text{ή } z\bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

26. Για $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ είναι $\sin\theta > \eta\mu\theta$. Από τη σχέση $\frac{\alpha^2}{\sin^2\theta} + \frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta} = 1$ συμπεραίνουμε ότι η

εικόνα του z ανήκει σε έλλειψη με $\alpha = \sin\theta$ και $\beta = \eta\mu\theta$.

$$\text{Άρα είναι } \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{\sin^2\theta - \eta\mu^2\theta} = \sqrt{\sin 2\theta}.$$

Οι εστίες της έλλειψης είναι $E'(-\sqrt{\sin 2\theta}, 0)$ και $E(\sqrt{\sin 2\theta}, 0)$. Η εξίσωσή της είναι

$$|z - \sqrt{\sin 2\theta}| + |z + \sqrt{\sin 2\theta}| = 2\sin\theta \Rightarrow \left(|z - \sqrt{\sin 2\theta}| + |z + \sqrt{\sin 2\theta}|\right)^2 = 4\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$|z - \sqrt{\sin 2\theta}|^2 + |z + \sqrt{\sin 2\theta}|^2 + 2|z^2 - \sin 2\theta| = 4\sin^2\theta$$

$$\text{Είναι } |z - \sqrt{\sin 2\theta}|^2 + |z + \sqrt{\sin 2\theta}|^2 =$$

$$z\bar{z} - z\sqrt{\sin 2\theta} - \bar{z}\sqrt{\sin 2\theta} + \sin 2\theta + z\bar{z} - z\sqrt{\sin 2\theta} - \bar{z}\sqrt{\sin 2\theta} + \sin 2\theta =$$

$$2|z|^2 + 2\sin 2\theta \text{ άρα η (1) δίνει } 2|z|^2 + 2\sin 2\theta + 2|z^2 - \sin 2\theta| = 4\sin^2\theta \Rightarrow$$

$$2|z|^2 + 2\sin 2\theta + 2|z^2 - \sin 2\theta| = 2\sin 2\theta + 2 \Rightarrow |z|^2 + |z^2 - \sin 2\theta| = 1$$

$$\mathbf{27. \alpha)} (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 + z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2 + z_3^2 - 2z_3z_1 + z_1^2 = 0 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$$

$$\text{Άρα } (z_1 + z_2 + z_3)^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_2z_3 + 2z_1z_3 \stackrel{(1)}{=} 3 \cdot (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)$$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$

$$\text{Είναι } |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |(z_1 + z_2 + z_3)|^2 = |3 \cdot (z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3)| = 3|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3| =$$

$$3 \frac{|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3|}{|z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3|} = 3 \frac{|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3|}{z_1z_2z_3} = 3 \left| \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right| = 3|\bar{z}_3 + \bar{z}_1 + \bar{z}_2| = 3|\overline{z_3 + z_1 + z_2}| = 3|z_3 + z_1 + z_2|$$

$$\text{Άρα } |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3|z_1 + z_2 + z_3| \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3|^2 - 3|z_1 + z_2 + z_3| = 0 \Rightarrow$$

$$|z_1 + z_2 + z_3|(|z_1 + z_2 + z_3| - 3) = 0 \Rightarrow |z_1 + z_2 + z_3| = 0 \text{ αφού } |z_1 + z_2 + z_3| \neq 3$$

28. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $|z| = 1$ άρα ο z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Ακόμη $|z+1| = 1$ άρα ο z ανήκει σε κύκλο με κέντρο $A(-1, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί ανήκουν στην τομή των δύο παραπάνω κύκλων. Είναι:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rightarrow \\ 2x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Για τον $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ είναι

$$z^2 + z + 1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$$

Για τον $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ είναι

$$z^2 + z + 1 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0$$

Επομένως οι μιγαδικοί που επαληθεύουν την πρώτη σχέση επαληθεύουν και τη δεύτερη.

29. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\alpha) z^5 = \bar{z}^7 \Rightarrow |z^5| = |\bar{z}^7| \Rightarrow |z|^5 = |\bar{z}|^7 \Rightarrow |z|^5 = |z|^7 \Rightarrow \frac{|z|^7}{|z|^5} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

$$\beta) \text{ Είναι } |z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}. \text{ Άρα } z^5 = \bar{z}^7 \Rightarrow z^5 = \frac{1}{z^7} \Rightarrow z^{12} = 1.$$

30. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Οι μιγαδικοί που ικανοποιούν τη σχέση $|z + 8| + |z - 8| = 20$ είναι αυτοί που το άθροισμα των αποστάσεών τους από τα σημεία $(-8, 0)$ και $(8, 0)$ είναι ίση με 20. Επομένως είναι $2\alpha = 20$ άρα $\alpha = 10$ και $\gamma = 8$.

$$\text{Είναι } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6. \text{ Άρα ανήκουν στην έλλειψη } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$|4z - \bar{z}| = 30 \Leftrightarrow |4(x + yi) - (x - yi)| = 30 \Leftrightarrow |3x + 5yi| = 30 \Leftrightarrow \sqrt{(3x)^2 + (5y)^2} = 30$$

$$\Leftrightarrow (3x)^2 + (5y)^2 = 900 \Leftrightarrow 9x^2 + 25y^2 = 900 \Leftrightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \text{ που ισχύει λόγω της (1) άρα ι-}$$

σχύει και η αρχική.

$$\mathbf{31.} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|}{|z_1 z_2 z_3|} = \frac{|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|}{|z_1 z_2 z_3|} = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| \leq \left| \frac{1}{z_1} \right| + \left| \frac{1}{z_2} \right| + \left| \frac{1}{z_3} \right|. \quad \text{Άρα}$$

$$\left| \frac{1}{z_1} \right| + \left| \frac{1}{z_2} \right| + \left| \frac{1}{z_3} \right| \geq \frac{\alpha}{\beta}.$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους προσθετέους

$$\left| \frac{1}{z_1} \right|, \left| \frac{1}{z_2} \right|, \left| \frac{1}{z_3} \right| \text{ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το } \frac{\alpha}{3\beta}. \text{ Σε αντίθετη περίπτωση θα ήταν}$$

$$\left| \frac{1}{z_1} \right| + \left| \frac{1}{z_2} \right| + \left| \frac{1}{z_3} \right| < 3 \frac{\alpha}{3\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Επομένως υπάρχει ένας τουλάχιστον από τους z_1, z_2, z_3 , έστω ο z_k για το οποίο ισχύει

$$\left| \frac{1}{z_k} \right| \geq \frac{\alpha}{3\beta} \Rightarrow \frac{1}{|z_k|} \geq \frac{\alpha}{3\beta} \Rightarrow |z_k| \leq \frac{3\beta}{\alpha}.$$

$$\mathbf{32. \alpha)} z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{(z_1 \bar{z}_2)} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

$$\beta) |z_1 + z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 1 \Rightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1 \Rightarrow$$

$$|z_1|^2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = 1 \Rightarrow 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) \leq \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{33.} \text{ Είναι } |z_1| = 1 \Rightarrow |z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1 \cdot \bar{z}_1 = 1 \Rightarrow \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}. \text{ Ομοίως για όλους τους υπόλοιπους μιγα-}$$

δικούς.

$$\text{Άρα } (z_1 + z_2 + \dots + z_v) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_v} \right) = (z_1 + z_2 + \dots + z_v) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_v)$$

$$= (z_1 + z_2 + \dots + z_v) \overline{(z_1 + z_2 + \dots + z_v)} = |z_1 + z_2 + \dots + z_v|^2 \leq (|z_1| + |z_2| + \dots + |z_v|)^2$$

Είναι $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_v| = 1$ άρα $(|z_1| + |z_2| + \dots + |z_v|)^2 = (1 + 1 + \dots + 1)^2 = v^2$.

Επομένως $|z_1 + z_2 + \dots + z_v|^2 \leq v^2$.

$$34. \alpha) z^2 - 5zi - 4 = z^2 - zi - 4zi - 4 = z(z-i) - 4i(z-i) = (z-4i)(z-i)$$

$$\begin{aligned} \beta) |z^2 - zi| + |z - 4i| &= |z| + |z^2 - 5zi - 4| \stackrel{(\alpha)}{\Rightarrow} |z||z-i| + |z-4i| = |z| + |z-4i||z-i| \Rightarrow \\ |z||z-i| + |z-4i| - |z| - |z-4i||z-i| &= 0 \Rightarrow |z|(|z-i|-1) - |z-4i|(|z-i|-1) = 0 \Rightarrow \\ (|z| - |z-4i|)(|z-i|-1) &= 0 \Rightarrow |z| = |z-4i| \text{ ή } |z-i| = 1 \end{aligned}$$

• Αν είναι $|z| = |z-4i|$ τότε η εικόνα του z ανήκει στην μεσοκάθετο του AB με $A(0,0)$ και $B(0,4)$. Άρα η εικόνα του z ανήκει στην $y=2$.

• Αν είναι $|z-i|=1$ τότε η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο με κέντρο το $K(0,1)$ και ακτίνα $\rho=1$.

$\gamma)$ Είναι $B = |2z - 6 - 2i| = 2|z - 3 - i|$ δηλαδή το διπλάσιο της απόστασης της εικόνας του z από το $\Gamma(3,1)$.

• Η ελάχιστη απόσταση του Γ από την $y=2$ είναι ίση με 1. Άρα $B = 2 \cdot 1 = 2$

• Η ελάχιστη απόσταση του Γ από τον κύκλο $|z-i|=1$ είναι ίση με $(KG) - \rho = 3 - 1 = 2$.

Άρα $B = 2 \cdot 2 = 4$

$$35. \text{ Έστω } w = x + yi \text{ με } x, y \in \mathbb{R}. w = \frac{z-i}{z-2i} \Rightarrow wz - 2wi = z - i \Rightarrow z = \frac{2wi-i}{w-1}$$

$$\alpha) \text{ Ο } z \text{ είναι πραγματικός άρα } z = \bar{z} \Rightarrow \frac{2wi-i}{w-1} = \frac{-2\bar{w}i+i}{\bar{w}-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$4|w|^2 - 3i(w + \bar{w}) + 2i = 0 \Rightarrow 4(x^2 + y^2) - 3 \cdot 2x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

Άρα η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

$\beta)$ Ο z είναι φανταστικός άρα

$$z = -\bar{z} \Rightarrow \frac{2wi-i}{w-1} = -\frac{-2\bar{w}i+i}{\bar{w}-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow (w - \bar{w})i = 0 \Rightarrow 2yi^2 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Άρα η εικόνα του w ανήκει στην ευθεία $y=0$.

$$36. \text{ Για } v=1 \text{ είναι } (1-i)^1 = 1-i.$$

$$\text{ Για } v=2 \text{ είναι } (1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i.$$

$$\text{ Για } v=3 \text{ είναι } (1-i)^3 = -2i(1-i) = -2i-2.$$

$$\text{ Για } v=4 \text{ είναι } (1-i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4.$$

$$\text{ Για } v=5 \text{ είναι } (1-i)^5 = (1-i)^2(1-i)^3 = -2i(-2i-2) = -4+4i.$$

$$\text{ Για } v=6 \text{ είναι } (1-i)^6 = (-2i)^3 = 8i.$$

$$\text{ Για } v=7 \text{ είναι } (1-i)^7 = (1-i)^4(1-i)^3 = -4(-2i-2) = 8i+4i.$$

$$\text{ Για } v=8 \text{ είναι } (1-i)^8 = (-4)^2 = 16.$$

Άρα ο ελάχιστος θετικός φυσικός αριθμός είναι ο $v=8$.

$$37. w^2 + z^2 = 0 \Rightarrow w^2 = -z^2 \Rightarrow w^2 = (iz)^2 \Rightarrow w = iz \text{ ή } w = -iz$$

1^η περίπτωση: $w = iz$. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ άρα $w = -y + xi$. Είναι $O(0,0)$, $A(x,y)$, $B(-y,x)$.

Αν $xy \neq 0$ τότε $(OA) = (OB) = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\lambda_{OA} \cdot \lambda_{OB} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{-y} = -1 \Rightarrow \hat{O} = 90^\circ$

Αν $x = 0$ τότε είναι $O(0,0)$, $A(0,y)$, $B(-y,0)$ άρα $(OA) = (OB)$ και $\hat{O} = 90^\circ$

Αν $y = 0$ τότε είναι $O(0,0)$, $A(x,0)$, $B(0,x)$ άρα $(OA) = (OB)$ και $\hat{O} = 90^\circ$

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις το OAB είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.

2^η περίπτωση: $w = -iz$. Ομοίως.

$$38. z = \alpha(3-i) + \beta(1+3i) = -\alpha i(1+3i) + \beta(1+3i) = (\beta - \alpha i)(1+3i)$$

$$\text{Άρα } |z| = |\beta - \alpha i| |1+3i| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} = |w| \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10.$$

Άρα οι εικόνες του w ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 10.

$$39. \alpha + \beta i = (x + yi)^{v+1} \Rightarrow |\alpha + \beta i| = |(x + yi)^{v+1}| \Rightarrow |\alpha + \beta i|^2 = |(x + yi)^{v+1}|^2 \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (x^2 + y^2)^{v+1} \Rightarrow \gamma + \delta i = (y + xi)^v \Rightarrow |\gamma + \delta i| = |(y + xi)^v| \Rightarrow$$

$$|\gamma + \delta i|^2 = |(y + xi)^v|^2 \Rightarrow \gamma^2 + \delta^2 = (y^2 + x^2)^v$$

$$\text{Οι σχέσεις που καταλήξαμε είναι οι } \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (x^2 + y^2)^{v+1} \\ (x^2 + y^2)^v = \gamma^2 + \delta^2 \end{cases}.$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις δύο σχέσεις και έχουμε

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2)^v = (x^2 + y^2)^{v+1}(\gamma^2 + \delta^2) \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2) = (x^2 + y^2)(\gamma^2 + \delta^2)$$

$$40. \alpha) f(2) = \frac{2+i\bar{2}}{1-\bar{2}} = \frac{2+2i}{1-2} = -2-2i. \text{ Είναι } |f(2)| = |-2-2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\beta) \left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = \left| \frac{\frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} - 2}{\frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}} + i} \right| = \left| \frac{\frac{2+i\bar{z}-2+2\bar{z}}{1-\bar{z}}}{\frac{2+i\bar{z}+i-i\bar{z}}{1-\bar{z}}} \right| = \left| \frac{\cancel{1}\bar{z}(i+2)}{\cancel{2}+i} \right| = |\bar{z}| = |z|.$$

γ) Έστω $f(z) = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = |z| = 1 \text{ άρα}$$

$$|f(z)-2| = |f(z)+i| \Leftrightarrow |x+yi-2| = |x+yi+i| \Leftrightarrow |(x-2)+yi| = |x+(y+1)i| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 \Leftrightarrow 4x + 2y - 3 = 0$$

$$41. \alpha) (1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (1+2i-1)^2 = (2i)^2 = -4 \text{ και}$$

$$|12-5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} = 13$$

$$\beta) (12-5i)^{v-2} - (1+i)^4 = 13^{v-1} - 8 \Rightarrow (12-5i)^{v-2} - (-4) = 13^{v-1} - 8 \Rightarrow$$

$$(12-5i)^{v-2} = 13^{v-1} - 12 \Rightarrow \left| (12-5i)^{v-2} \right| = \left| 13^{v-1} - 12 \right| \Rightarrow \left| (12-5i) \right|^{v-2} = 13^{v-1} - 12 \Rightarrow$$

$$13^{v-2} = 13^{v-1} - 12 \Rightarrow 13^{v-1} - 13^{v-2} = 12 \Rightarrow 13^{v-2}(13-1) = 12 \Rightarrow 13^{v-2} = 1 \Rightarrow v-2=1 \Rightarrow v=3$$

42. α) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $|z+2i| = 2|z-i| \Rightarrow |x+yi+2i| = 2|x+yi-i| \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \Rightarrow x^2 + (y+2)^2 = 4 \cdot (x^2 + (y-1)^2) \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$. Άρα η εικόνα του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $K(0,2)$ και ακτίνα $\rho = 2$.

β) Από το συμπέρασμα του (α) ερωτήματος προκύπτει ότι $|z-2i| = 2$.

$$\gamma) \quad w = \frac{z}{z-2i} \Rightarrow w = \frac{z-2i+2i}{z-2i} \Rightarrow w = \frac{z-2i}{z-2i} + \frac{2i}{z-2i} \Rightarrow w = 1 + \frac{2i}{z-2i} \Rightarrow$$

$$w-1 = \frac{2i}{z-2i} \Rightarrow |w-1| = \left| \frac{2i}{z-2i} \right| \Rightarrow |w-1| = 1$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $\Lambda(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

$$2^{\text{ος}} \text{ τρόπος: } w = \frac{z}{z-2i} \Rightarrow zw - 2iw = z \Rightarrow \dots \Rightarrow z = \frac{2iw}{w} \text{ . Άρα}$$

$$|z-2i| = 2 \Rightarrow \left| \frac{2iw}{w} - 2i \right| = 2 \Rightarrow \dots \Rightarrow |w-1| = 1 \text{ .}$$

43. α) Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι $f(z) = 2-i \Rightarrow |z| - i\bar{z} = 2-i \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - i(x-yi) = 2-i \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - y - xi = 2-i \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \text{ .}$$

Άρα είναι $z = 1 - \frac{3}{4}i$

$$\beta) \quad |f(|z|)| = \sqrt{2} \Rightarrow ||z| - i|\bar{z}|| = \sqrt{2} \Rightarrow |1-i||z| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}|z| = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = 1$$

$$\gamma) \quad w = f(z) \Rightarrow w = |z| - i\bar{z} \Rightarrow w = 1 - i\bar{z} \Rightarrow w-1 = -i\bar{z} \Rightarrow$$

$|w-1| = |-i\bar{z}| \Rightarrow |w-1| = 1$ άρα η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα 1 άρα με εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Οι συντεταγμένες του σημείου $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου άρα ο κύκλος διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

$$44. \quad z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z} \Rightarrow \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{\overline{(z_1 + z_2)^2}}{z_1 \cdot z_2} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{\bar{z}_1^2 + 2\bar{z}_1\bar{z}_2 + \bar{z}_2^2}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} + \cancel{2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \cancel{2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Rightarrow$$

$$\frac{z_1^2 + z_2^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2^2}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} \Rightarrow z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1^2 \cdot z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_2^2 \cdot z_1 \cdot z_2 \Rightarrow$$

$$|z_1|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 + |z_2|^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 + |z_2|^2 \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 \Rightarrow (|z_1|^2 - |z_2|^2) \cdot (z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \cdot z_2) = 0$$

1^η περίπτωση: $|z_1|^2 - |z_2|^2 = 0 \Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 \Rightarrow |z_1| = |z_2| \Rightarrow$ το OAB είναι ισοσκελές

2^η περίπτωση: $z_1 \cdot \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \cdot z_2 = 0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \lambda \Rightarrow z_1 = \lambda z_2 \Rightarrow$

$\overrightarrow{OA} = \lambda \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OB}$ άτοπο γιατί τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά.

45. α) Η δεύτερη ρίζα είναι η $z_2 = 2 - i$. Από τους τύπους Vieta έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -\frac{-\alpha}{1} \Rightarrow \alpha = 4 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = \frac{\beta}{1} \Rightarrow 4 + 1 = \beta \Rightarrow \beta = 5$$

β) Έστω $u = z_1^{2008} + z_2^{2008}$. Είναι $\bar{u} = \bar{z}_1^{2008} + \bar{z}_2^{2008} = z_2^{2008} + z_1^{2008} = u \Rightarrow u \in \mathbb{R}$

$$\gamma) \text{ Είναι } z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17+i) = \frac{2+i}{2-i} + \frac{1}{5}(17+i) = \frac{(2+i)^2}{4+1} + \frac{1}{5}(17+i) =$$

$$\frac{4+4i-1}{5} + \frac{1}{5}(17+i) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i + \frac{17}{5} + \frac{1}{5}i = 4+i$$

$$i) \text{ Είναι } AB = |z_2 - z_1| = |2-i-2-i| = |-2||i| = 2,$$

$$BG = |z_3 - z_2| = |4+i-2+i| = |2+2i| = 2|1+i| = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$AG = |z_1 - z_3| = |2+i-4-i| = |-2| = 2$$

Είναι $AB = AG$ άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επίσης είναι $AB^2 + AG^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ και

$$BG^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \text{ άρα } AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.}$$

ii) $|w - z_1| = |\bar{w} - z_1| \Rightarrow |w - z_1| = |\bar{w} - \bar{z}_1| \Rightarrow |w - z_1| = |\overline{w - z_2}| \Rightarrow |w - z_1| = |w - z_2|$ άρα η εικόνα του w στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στη μεσοκάθετο των εικόνων των z_1, z_2 δηλαδή των σημείων A(2,1) και B(2,-1) που είναι η $y = 0$. Άρα $w \in \mathbb{R}$.

$$\text{iii)} \quad |w - z_2| + |\bar{w} - z_2| = 10 \Rightarrow |w - z_2| + |\bar{w} - \bar{z}_1| = 10 \Rightarrow |w - z_2| + |\overline{w - z_1}| = 10 \Rightarrow$$

$$|w - z_2| + |w - z_1| = 10. \text{ Επίσης είναι } |z_1 - z_2| = 2.$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{10}{2} = 5$ και $\gamma = \frac{2}{2} = 1$. Επομένως είναι $\gamma < \alpha$ άρα η παραπάνω εξίσωση παριστάνει έλλειψη.

46.

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \Rightarrow z_1 z_2 - z_1 z_3 - z_2^2 + z_2 z_3 = z_3^2 - z_1 z_3 - z_1 z_3 + z_1^2 \Rightarrow$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$z_1^2 + z_2^2 = -z_3^2 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 = -z_3^2 - z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \Rightarrow$$

$$(z_1 - z_2)^2 = (z_2 - z_3)(z_3 - z_1) \Rightarrow (z_1 - z_2)^3 = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$$

$$\text{Ομοίως από τη σχέση (1) συμπεραίνουμε ότι } (z_1 - z_3)^3 = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$$

$$\text{και } (z_2 - z_3)^3 = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$$

Από τις σχέσεις (1) - (2) - (3) συμπεραίνουμε ότι:

$$(z_1 - z_2)^3 = (z_1 - z_3)^3 = (z_2 - z_3)^3 \Rightarrow |z_1 - z_2|^3 = |z_1 - z_3|^3 = |z_2 - z_3|^3 \Rightarrow \\ |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$$

Άρα το τρίγωνο που ορίζουν οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

47. α) $f\left(\frac{1}{z}\right) = \dots = f(z)$

β) $|z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$. Άρα $\overline{f(z)} = f(\bar{z}) = f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$

48. α) Είναι

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{w}_2 = z_1 \cdot z_2 \cdot (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 - 2) = \cancel{|z_1|^2}^1 \cdot z_2 + z_1 \cdot \cancel{|z_2|^2}^1 + \cancel{|z_1|^2 |z_2|^2}^1 - 2z_1 \cdot z_2 = w_1$$

β) $w_1 = z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{w}_2 \Rightarrow |w_1| = |z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{w}_2| \Rightarrow |w_1| = |z_1| |z_2| |\bar{w}_2| \Rightarrow |w_1| = |w_2|$

γ) $|w_1| = 1 \Rightarrow w_1 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 - 2z_1 \cdot z_2 + 1 = 0$

$$|w_1| = |w_2| \Rightarrow |w_2| = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 2 = 0$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1)–(2) έχουμε $-3z_1 \cdot z_2 = -3 \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = 1$.

Από τις σχέσεις (1)–(3) έχουμε $z_1 + z_2 = 1$.

Από τις σχέσεις (3)–(4) συμπεραίνουμε ότι οι z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης

$$z^2 - z + 1 = 0 \text{ που είναι οι } z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

49. α) Είναι $\Delta = (e^t + e^{-t})^2 - 2(e^{2t} + e^{-2t}) = -(e^t - e^{-t})^2 \leq 0$. Είναι $\Delta = 0 \Rightarrow t = 0$ και $z = 1$.

Για $t \neq 0$ είναι $\Delta < 0$ άρα η εξίσωση έχει δύο μιγαδικές ρίζες τις $z_1 = \frac{e^t + e^{-t} + i(e^t - e^{-t})}{2}$,
 $z_2 = \frac{e^t + e^{-t} - i(e^t - e^{-t})}{2}$.

Είναι $z_1 = x + yi$ και $z_2 = x - yi$ με $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$ και $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

$$\text{Άρα } x^2 - y^2 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}}{4} = 1.$$

Από τη σχέση $x > 0$ συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες των z_1, z_2 ανήκουν στον δεξιό κλάδο της υπερβολής.

β) Από τη σχέση $x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\alpha = \beta = 1$. Άρα είναι $\gamma^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{2}$. Επομένως οι δύο εστίες της υπερβολής είναι οι $E'(-\sqrt{2}, 0)$ και $E(\sqrt{2}, 0)$. Άρα για το σημείο $M(z)$, όπου $z = z_1$ ή $z = z_2$ συμπεραίνουμε ότι $|(ME') - (ME)| = 2 \Rightarrow \|z + \sqrt{2}\| - \|z - \sqrt{2}\| = 2$.

Όμως οι δύο ρίζες ανήκουν στον δεξιό κλάδο της υπερβολής άρα είναι $|z + \sqrt{2}| > |z - \sqrt{2}|$.

Επομένως από την προηγούμενη σχέση προκύπτει $|z + \sqrt{2}| - |z - \sqrt{2}| = 2$.

$$50. \text{ Είναι } \alpha^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \Rightarrow \alpha^2 = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \Rightarrow \alpha^2 = |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 = \frac{|z|^4 + z^2 + \bar{z}^2 + 1}{|z|^2} \Rightarrow \alpha^2 |z|^2 = |z|^4 + z^2 + \bar{z}^2 + 1 \Rightarrow$$

$$|z|^4 + (z + \bar{z})^2 - 2|z|^2 - \alpha^2 |z|^2 + 1 = 0 \Rightarrow |z|^4 - (2 + \alpha^2)|z|^2 + 1 = -(z + \bar{z})^2 \leq 0$$

Άρα πρέπει

$$|z|^2 \in \left[\frac{\alpha^2 + 2 - \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}}{2}, \frac{\alpha^2 + 2 + \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}}{2} \right] \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha^2 + 2 - \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}}{2} \leq |z|^2 \leq \frac{\alpha^2 + 2 + \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}}{2}$$

$$\text{Είναι } \frac{\alpha^2 + 2 - \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}}{2} \leq |z|^2 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + 4 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 + 4} + \alpha^2}{4} \leq |z|^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} \right)^2 \leq |z|^2 \Rightarrow |z| \leq -\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} \quad \text{ή} \quad |z| \geq \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

$$\text{Ομοίως } |z|^2 \leq \frac{\alpha^2 + 2 + \sqrt{\alpha^4 + 4\alpha^2}}{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow -\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} \leq |z| \leq \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}$$

$$\text{Άρα } |z| \in \left(\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2} \right) \cdot |z|_{\min} = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}, |z|_{\max} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4}}{2}.$$

$$51. \text{ Υποθέτουμε ότι ισχύει } |z + 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ και } |1 + z^2| \geq 1.$$

Έστω $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Είναι $z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$.

Από τη σχέση

$$|1 + z^2| \geq 1 \Rightarrow |1 + \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i| \geq 1 \Rightarrow (1 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 \geq 1 \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2) < 0$$

$$\text{και από τη σχέση } |z + 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\alpha + \beta i + 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\alpha + 1)^2 + \beta^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 + \beta^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha + 2 + 2\beta^2 < 1 \Rightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) + 4\alpha + 1 < 0$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2): $(\alpha^2 + \beta^2)^2 + (2\alpha + 1)^2 < 0$, άτοπο.

$$52. \left| \left(z + \frac{1}{z} \right)^3 \right| = \left| z^3 + 3z^2 \frac{1}{z} + 3z \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right| = \left| z^3 + \frac{1}{z^3} + 3 \left(z + \frac{1}{z} \right) \right| \leq \left| z^3 + \frac{1}{z^3} \right| + 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2 + 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|$$

$$\text{δηλαδή } \left| z + \frac{1}{z} \right|^3 \leq 2 + 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|. \text{ Θέτουμε } w = \left| z + \frac{1}{z} \right|, \text{ άρα είναι}$$

$$w^3 \leq 2 + 3w \Rightarrow w^3 - 3w - 2 \leq 0 \Rightarrow w(w^2 - 1) - 2(w + 1) \leq 0 \Rightarrow$$

$$(w+1)(w^2 - w - 2) \leq 0 \Rightarrow (w+1)(w+1)(w-2) \leq 0 \Rightarrow (w+1)^2(w-2) \leq 0$$

Από το διπλανό πίνακα μεταβολής προσή-

μου της

$(w+1)(w-1)(w-2)$ συμπεραίνουμε ότι

$$w \leq 2 \Rightarrow \left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 2.$$

w	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
	-		-	 +