

Μιγαδικοί αριθμοί

3.1 Πράξεις

Τέσσερις βασικές πράξεις στο $\mathbb{C}$

1. Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς:

$$\alpha) u = (1+2i)^2 + \frac{1-2i}{1+i}$$

$$\beta) u = (1+2i)^2 + (1-2i)^3 + (1+2i)^2 \cdot (1-2i)^3$$

Ισότητα μιγαδικών

$$2. \text{ Να βρείτε τα } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ώστε } (\alpha + \beta i)^2 = \frac{2+3i}{1+i}.$$

3. Να βρεθούν δύο μιγαδικοί που έχουν άθροισμα τον πραγματικό αριθμό α και διαφορά τον μιγαδικό αριθμό βi .

4. Αν $z = x + yi$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ με $(x+3)^2 + y^2 = 1$ και

$$w = \frac{z}{z+3} = \alpha + \beta i, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ τότε να αποδείξετε}$$

ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 8$$

Διάταξη στο $\mathbb{C}$

5. $\alpha)$ Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $z^2 \geq 0$ τότε να δείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$.

$\beta)$ Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $z^2 \leq 0$ τότε να δείξετε ότι $z \in i$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $z^2 - 4z + 5 < 0$ και την αντίσωση $z^2 + 5 < 4z$. Τι παρατηρείτε;

3.2 Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

1. Αν x, y, z είναι τρεις μιγαδικοί αριθμοί με $x\bar{x} = y\bar{y} = z\bar{z} = 1$, τέτοιοι ώστε $x + y + z = 1$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

$$\beta) xy + yz + zx = xyz$$

2. Αν είναι z_1, z_2 δύο μη πραγματικοί μιγαδικοί αριθμοί τότε να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$z_1 + z_2, z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 = \bar{z}_2$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

3. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2z_2 \bar{z}_2} \quad \beta) \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2}{2z_2 \bar{z}_2 i}$$

4. Αν είναι z_1, z_2 οι δύο ρίζες μίας εξίσωσης δεύτερου

βαθμού με $\Delta < 0$ τότε να δείξετε ότι $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.

$$\text{Αντισυζυγείς } \alpha + \beta i = i(\beta - \alpha i), \alpha - \beta i = -i(\beta + \alpha i)$$

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$(\alpha + \beta i)^{4v+2} + (\beta - \alpha i)^{4v+2} = 0$$

6. Να βρείτε τον $v \in \mathbb{N}^*$ για τον οποίο ισχύει η σχέση

$$\left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)^{2v} + \left(\frac{4+5i}{5-4i}\right)^{2v} = 2^{v^2-7v+13}$$

Απόδειξη ότι ο $z \in \mathbb{R}$ ή $z \in i$

6. Να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός

$$z = (2-i)^{12} - (1-2i)^{12} \in \mathbb{R}$$

7. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\text{i) } f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$$

$$\text{ii) } f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$$

$$\text{iii) } f(\alpha) = \alpha$$

Να αποδείξετε ότι: $\alpha) f(i) = i$ ή $f(i) = -i$

$$\beta) f(z) = z \text{ ή } f(z) = \bar{z}$$

3.3 Δυνάμεις του i

Πράξεις με δυνάμεις του i

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $v \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση:

$$i^{2v} + i^{2v+1} + i^{2v+2} + i^{2v+3} = \frac{1}{i^{2v}} + \frac{1}{i^{2v+1}} + \frac{1}{i^{2v+2}} + \frac{1}{i^{2v+3}}$$

2. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε: $x + yi = i^{3v+1}, v \in \mathbb{N}$.

3. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $f(v) = i^v z, v \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι:

$$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$$

Ελάχιστη τιμή εκθέτη

4. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $v \in \mathbb{N}^*$ ώστε

$$(1+i)^v = (1-i)^v$$

Εύρεση του εκθέτη

5. Να βρείτε τα $v \in \mathbb{N}$ ισχύει $(1+i)^v + (1-i)^v = 32$.

6. Αν $\alpha + \beta i \neq 0$ να βρείτε τον $v \in \mathbb{N}^*$ ώστε να ισχύει

$$(2\alpha + 2\beta i)^v + 2(-\beta + \alpha i)^v + 2(\beta - \alpha i)^v = 0$$

Δυνάμεις του i και πρόοδοι

7. α) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{16}$$

β) Να υπολογίσετε το γινόμενο $P = i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{15}$

Εφαρμογές

8. Αν ένα πολυώνυμο $f(z)$ με πραγματικούς συντελεστές έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό z_0 , να δείχτεί ότι θα έχει ρίζα και το συζυγή του $\bar{z}_0$.

9. Κάθε πολυωνυμική εξίσωση περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

3.4. Γεωμετρική ερμηνεία μιγαδικού

1. Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του μιγαδικού $z = 3 - 4i$.

2. Δίνεται ο μιγαδικός $z = \lambda + (4 - \lambda)i$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία του z .

β) Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εικόνα του z ανήκει στην ευθεία $y = 2x - 1$;

3. Έστω A, B, Γ, Δ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2, z_3, z_4 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν $z_2 - z_1 = z_3 - z_4$.

β) Αν οι κορυφές A, B, Γ ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 1 + i$ τότε να βρείτε το μιγαδικό z_4 του οποίου εικόνα είναι το Δ .

4. Έστω $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί.

α) Να οριστούν στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες των μιγαδικών z που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = 2\lambda$$

β) Αν η εικόνα ενός μιγαδικού z διαγράφει μία δεδομένη ευθεία του μιγαδικού επιπέδου, να βρεθεί το σύνολο των εικόνων του w , όταν $w = \frac{1}{z}$. **E.M.E.**

5. α) Να βρεθούν οι μιγαδικοί z ώστε:

$$(3-i)z + 9\bar{z} + 12 + i = 0$$

β) Να βρεθούν οι μιγαδικοί z ώστε $iz + \bar{z} + 2 = 0$.

γ) Να αποδειχθεί ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η εξίσωση $\alpha z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ και $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ να παριστάνει ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο είναι: $(\alpha = \bar{\beta} \text{ και } \gamma \in \mathbb{R})$ ή $(\alpha = -\bar{\beta} \text{ και } \gamma \in i\mathbb{R})$ **E.M.E.**

Σχέση με δύο μιγαδικούς που λύνεται ως προς τον ένα μιγαδικό

6. Έστω ο μιγαδικός w που η εικόνα του ανήκει στον κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $zw - w^2 - 2 = 0$.

3.5 Εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ **1^{ου} βαθμού εξισώσεις στο $\mathbb{C}$**

1. Να λύσετε την εξίσωση $z - (3 - 5i) = 5 - 2i$

2^{ου} βαθμού εξισώσεις στο $\mathbb{C}$

2. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε ο μιγαδικός $w = 1 + i$ να είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$\alpha z^2 - (\alpha + \beta - 1)z + \alpha\beta - 6 = 0$$

3. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ώστε ο μιγαδικός

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$
 να είναι ρίζα της εξίσωσης

$$z^2 - 2\eta\mu\alpha \cdot z - 2\sigma\upsilon\nu\beta = 0$$

4. Αν z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 4z + 8 = 0$ να

αποδείξετε ότι: $w = \frac{z_1 + z_2 + 4i}{z_1 z_2 + 8i} \in i$. **E.M.E.**

Εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ μεγαλύτερου του 2^{ου} βαθμού

5. Να λύσετε την εξίσωση $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$.

Εξισώσεις στο $\mathbb{C}$

6. Αν $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}_+$ να δείξετε ότι η εξίσωση $z^{2008} + \kappa z + \lambda i = 1$, δεν έχει φανταστική ρίζα.

3.6 Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Υπολογισμός μέτρου

1. Να υπολογίσετε το μέτρο των μιγαδικών

$$z = \frac{1-3i}{(3+2i)^2} \text{ και } w = \left(\frac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i} \right)^{2008}$$

2. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Αν ισχύει $2z_1^2 + z_1z_2 + 3z_2^2 = 0$ τότε

να βρείτε την τιμή του α όπου $\alpha = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

$$|z|^2 = z\bar{z}$$

3. Αν είναι $|3z+1| = |z+3|$ τότε να υπολογίσετε το μέτρο του z .

4. Αν ο μιγαδικός z ανήκει σε κύκλο με κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα 1 τότε να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού $w = 2z - 1$.

Σχέσεις με μέτρα

5. Αν είναι $|z-6| = 4|z+4|$ τότε να αποδείξετε ότι $|z+10| = 8$

6. Να δείξετε ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών έχουν το ίδιο μέτρο αν και μόνο αν το πηλίκο τους είναι φανταστικός αριθμός.

Μιγαδικοί με γνωστό μέτρο

7. Αν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \alpha$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3| = \alpha|z_1 + z_2 + z_3|$$

8. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 που οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι

$$w = \left(\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} \right)^2 \in \mathbb{R} \quad \text{E.M.E.}$$

9. Αν z_1, z_2 δύο μιγαδικοί με $|z_1| = |z_2| = \rho$ τότε να αποδείξετε ότι

$$w = \frac{(z_1 + z_2)^v}{z_1^v + z_2^v} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Βασική ιδιότητα } f(z)^v = g(z)^v \Rightarrow |f(z)^v| = |g(z)^v|$$

10. Αν $(1+zi)^v = (1-zi)^v$ τότε να δείξετε ότι $z \in \mathbb{R}$.

11. Αν $|z| = 1$ τότε να αποδείξετε ότι δεν έχει μιγαδική ρίζα η εξίσωση $(1-xi)^v = z(1+xi)^v$ ως προς x .

12. Αν w είναι ρίζα της εξίσωσης $(z+2)^v = z^v$ τότε να αποδείξετε ότι το πραγματικό μέρος του z είναι ίσο με -1 .

Περίκεντρο τριγώνου

13. α) Να βρείτε το μιγαδικό αριθμό z για τον οποίο ισχύει $|z-i| = |z-1| = |z-2|$

β) Να βρείτε το περίκεντρο του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(0,1)$, $B(1,0)$, $\Gamma(2,0)$.

Κανόνας του παραλληλογράμμου

14. Να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ταυτότητας;

Εξισώσεις στο $\mathbb{C}$ με z και $\bar{z}$

15. Να λύσετε την εξίσωση $|z| + i(z-1) = 3-5i$.

16. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ ώστε $z^{15} = \bar{z}^4$. Να αποδείξετε ότι $z^{19} = 1$.

Γενικές

17. Αν είναι $|z_1 - z_2| = |z_1| = |z_2|$ τότε να αποδείξετε ότι

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{3}|z_1|$$

18. Έστω $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε:

$$|z_1| = |z_2 + z_3|, |z_2| = |z_3 + z_1|, |z_3| = |z_1 + z_2|$$

Να δείξετε ότι $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

19. Έστω $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Αν είναι $z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι: $8\operatorname{Re}(z) + 1 \geq 0$.

20. Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε: $|z-1| = \sqrt{3}$ και $|z|=1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) z^2 + z + 1 = 0$$

$$\beta) z^{2007} = 1$$

3.7 Δυνάμεις μιγαδικών αριθμών

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η σχέση:

$$i^{2n} + i^{2n+1} + i^{2n+2} + i^{2n+3} = \frac{1}{i^{2n}} + \frac{1}{i^{2n+1}} + \frac{1}{i^{2n+2}} + \frac{1}{i^{2n+3}}$$

2. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $f(v) = i^v z$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να δείξετε ότι:

$$f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = 0$$

3. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε να

$$\text{ισχύει } (1 + xi)^v = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Να βρείτε τον μιγαδικό z και τον θετικό ακέραιο n για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$z^n = 8 - 6i \text{ και } z^{n+1} = 18 - 26i$$

5. Αν ισχύει $(x + yi)^{2000} = \frac{3 + 4i}{5}$, με $x, y \in \mathbb{R}$ τότε:

α) Να δείξετε ότι $x^2 + y^2 = 1$.

β) Να βρείτε το μιγαδικό $z = (y + xi)^{2000}$.

γ) Αν $w = x + yi + \frac{1}{x + yi}$ τότε να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός.

6. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης

$$(2 - i)^{20} (z - 2000)^{2004} - (\sqrt{3} + i\sqrt{2})^{20} (z - 2004 - 2i)^{2004} = 0$$

ανήκουν στην ευθεία $8x + 4y + 2000^2 - 2004^2 = 0$.

Γιατί αυτή η ευθεία είναι μεσοκάθετη στο τμήμα AB με $A(2000, 0)$ και $B(2004, 2)$;

7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|\alpha z_1 + \beta z_2|^2 + |\beta z_1 - \alpha z_2|^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

8. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός w για τον οποίο ισχύει: $1 + w + w^2 = 0$. Να δείξετε ότι:

α) $w \neq 1$

β) $w^3 = 1$

γ) $w^{3p} + w^{3p+1} + w^{3p+2} = 0$

δ) $w^9 + w^8 + w^{-2} = 0$

ε) $(1 + w)^5 = -w$

στ) $(3 + 3w + 5w^2)^{12} = 4096$

3.8 Γεωμετρικοί τόποι

Ευθεία

1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει $(2 + 3i)z + (2 - 3i)\bar{z} = 7$.

Ημιευθεία

2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των εικόνων του $z \in \mathbb{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο για τους οποίους ισχύει

$$|z - i| \leq |z - 3| \text{ και } z + \bar{z} = 2$$

είναι ημιευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$. Ποια είναι η αρχή της;

E.M.E.

Ισοσκελές τρίγωνο

3. Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες τα σημεία M_1 και M_2 αντίστοιχα τότε να δείξετε ότι ο αριθμός $z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ είναι καθαρά φανταστικός αν και μόνο αν το τρίγωνο OM_1M_2 είναι ισοσκελές ή τα O, M_1, M_2 είναι συνευθειακά.

Ισόπλευρο τρίγωνο

4. Αν z_1, z_2, z_3 είναι τρεις μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί έτσι ώστε

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \text{ και } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Κύκλος

5. α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ^{E.M.E.} για τους οποίους ισχύει: $|z - z_0| = \rho$ με $\rho > 0$.

β) Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω γεωμετρικός τόπος μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$z\bar{z} - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) - \alpha^2 + |z_0|^2 = 0 \quad \text{E.M.E.}$$

6. Έστω A και B οι εικόνες δύο μιγαδικών z_1 και z_2 αντίστοιχα για τους οποίους ισχύει $z_1 = (1 + i\sqrt{3})z_2$ και έστω ότι το A ανήκει σε κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -8z_2^3$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο B κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.

δ) Όταν το σημείο A, κατά την κίνησή του, βρίσκεται πάνω στο θετικό ημιάξονα Oy, ποια είναι η θέση του σημείου B;

Έλλειψη

7. Αν $|z-2|+|z+2|=8$ τότε να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $M(z)$ είναι έλλειψη.

Κλάδος υπερβολής

8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες του $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $|z+5|=6+|z-5|$

$w=f(z)$ Κύκλος

9. Έστω $w = \frac{z-4}{z+i}$. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων M του z όταν $|w|=\sqrt{2}$.

10. Δίνεται ο μιγαδικός z με $|z-1|=10$ για τον οποίο ισχύει $|z+\frac{1}{3}|=12$. Αν για τον μιγαδικό w ισχύει:

$$3wz+6=6\bar{z}-w$$

α) Να βρεθεί το μέτρο του $\bar{w}$.

β) Αν για τον μιγαδικό u ισχύει:

$$\left|2u-\frac{3}{2}\right|\left|u-\frac{3}{4}\right|=6w\bar{w}$$

τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του u. E.M.E.

$w=f(z)$ Έλλειψη

11. Αν για τους $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|=2$ τότε να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των $w \in \mathbb{C}$ με $w=z+\frac{1}{z}$.

12. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w για τους οποίους ισχύει:

$$3w - [\operatorname{Im}(w)]i = z + 2i$$

Αν η εικόνα του z κινείται στην έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ να αποδείξετε ότι η εικόνα του w κινείται σε κύκλο.

13. Έστω ένας μιγαδικός z και ο μιγαδικός w με $w=3|z|^2+z^2+2z$. Να βρεθεί το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ του μιγαδικού επιπέδου όταν:

α) w φανταστικός β) w πραγματικός.

3.9 Μέγιστα – ελάχιστα

Απόδειξη ανισοτήτων με υπόθεση $|z| \leq \alpha$

1. Αν οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 στο μιγαδικό επίπεδο είναι εσωτερικά σημεία του κύκλου $x^2+y^2=1$ τότε να δείξετε ότι: $|z_1-z_2| < |1-\bar{z}_1z_2|$.

2. Ο μιγαδικός αριθμός z δίνεται από τη σχέση $z = \frac{w-k}{kw-1}$, όπου $k \in (0,1)$. Να αποδειχτεί η ισοδυναμία $z\bar{z} < 1 \Leftrightarrow w\bar{w} < 1$.

Ανισότητες με $\operatorname{Re}(z)$ και $\operatorname{Im}(z)$

3. Να αποδείξετε ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $||\operatorname{Re}(z)| - |\operatorname{Im}(z)|| \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$

Βασική ιδιότητα $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

4. Αν είναι z_1 και z_2 δύο μιγαδικοί τότε να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο του $|z_1+z_2|$. Ποια σχέση συνδέει τα z_1 και z_2 σε κάθε περίπτωση;

5. Αν είναι $|z|=3$ τότε να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z+2-i|$.

6. Αν z μιγαδικός και $|z-3-2i|=7$ να αποδειχθεί ότι $2 \leq |z+2i| \leq 12$ [S.F.E.]

7. Αν είναι $|z|=3$ και $w=5-12i$ τότε να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

8. Αν $z=3+4i$ και $|w|=4$ να βρείτε:
α) τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων $3|z+w|$, $|z-w|$.
β) τους μιγαδικούς w, αν οι εικόνες των z, w, O(0,0) είναι συνευθειακά σημεία. [S.F.E.]

9. Αν για τους μιγαδικούς w_1, w_2 ισχύει: $\left|\frac{w_1-4}{w_1+4}\right| = \left|\frac{w_2-4}{w_2+4}\right| = 3$, να βρεθεί η μέγιστη τιμή του $|w_1-w_2|$. [S.F.E.]

10. Αν $z_1 = -2\lambda + (1+2\lambda)i$ και $z_2 = (3-\lambda) + \lambda i$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $|z_1-z_2|$. [S.F.E.]

11. Αν ισχύει $z^5 = iz^2 + 2\sqrt{6} - 5i$ τότε να αποδείξετε ότι $1 < |z| < 2$

Ένας μιγαδικός που ανήκει σε ευθεία

12. Δίνεται ο μιγαδικός z . Η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 15 = 0$.

α) Να βρείτε το ελάχιστο μέτρο του z .

β) Να βρείτε τον μιγαδικό που έχει το ελάχιστο μέτρο.

Ένας μιγαδικός που ανήκει σε κύκλο

13. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ με $|\bar{z} - 1| = 2$.

α) Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου που είναι εικόνες του z .

β) Ποιος από τους μιγαδικούς του ερωτήματος (α) έχει το μεγαλύτερο και το μικρότερο μέτρο; **E.M.E.**

14. Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση $y = |z - 2 - i|$, όταν ο z μεταβάλλεται έτσι ώστε $|z + 2 + 2i| = \sqrt{3}$. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του προβλήματος.

15. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z = (1 + \sin \varphi) + i(1 + \eta \mu \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

α) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες όλων των μιγαδικών z βρίσκονται πάνω σε έναν ορισμένο κύκλο.

β) Να βρείτε τον μιγαδικό με το μεγαλύτερο μέτρο και το μιγαδικό z με το μικρότερο μέτρο.

Μιγαδικός ανήκει σε κύκλο και κυκλικό δίσκο

16. Αν είναι $|z - 2| = 1$ και $|z - 1| \leq 1$ τότε να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq \sqrt{3}$.

Δύο μιγαδικοί που ανήκουν σε έναν κύκλο

17. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $|z|^2 - 2\operatorname{Re}(z) = 0$

τότε να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2$.

18. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 με $|z_1 - z_2| = 2$. Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) + (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2) = 4 \quad (1)$$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z \in \mathbb{C}$.

β) Να βρείτε το μέγιστο της παράστασης $|z - z_2|$.

E.M.E.

Δύο μιγαδικοί που ανήκουν σε κύκλο και ευθεία

19. Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $|w| = 1$ έτσι ώστε να ισχύει $wz = z + 3 + (w - 1)i$

α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z .

β) Να βρείτε το ελάχιστο της παράστασης $|z - w|$.

Δύο μιγαδικοί που ανήκουν σε δύο κύκλους

20. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, w για τους οποίους ισχύει:

$$|z - 1 + i| = 3 \quad \text{και} \quad |w - 5 + 7i| = 1$$

Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|z - w|$.

21. Δίνονται οι μιγαδικοί z και $w = \frac{3z + 2i}{i\bar{z} + 6}$. Η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

α) Να αποδείξετε ότι η εικόνα του w βρίσκεται σε ομόκεντρο κύκλο ακτίνας 1

β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z - w|$.

E.M.E.

Δύο μιγαδικοί που ανήκουν σε έλλειψη

22. α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$z^2 - 6\sin \theta \cdot z + 5\sin^2 \theta + 4 = 0, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

β) Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των ριζών z_1, z_2 της παραπάνω εξίσωσης, για τις διάφορες τιμές του θ .

γ) Για τις ρίζες αυτές να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$.

Γεωμετρική λύση ανισότητας

23. Θεωρούμε τα σημεία A, B, Γ, Δ εικόνες των μιγαδικών $0, 3, 3 + 3i, 6 + 3i$ αντίστοιχα.

α) Να εξετάσετε το είδος του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$f(z) = |z| + |z - 3| + |z - 3 - 3i| + |z - 6 - 3i| \quad \text{με} \quad z \in \mathbb{C}$$

Χρήση ιδιοτήτων - ταυτοτήτων

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2}{|z|^2}, z \in \mathbb{C}^*$.

α) Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(f(z)) \geq -1$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

β) Να αποδείξετε ότι $2\operatorname{Re}(f(z)) = \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$.

γ) Αν $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$ να αποδείξετε ότι $|z| + \frac{1}{|z|} \leq \sqrt{5}$.

3.10 Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να βρείτε την αναγκαία συνθήκη μεταξύ των πραγματικών συντελεστών α, β ώστε η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta = 0$ να έχει ρίζα τον $z_1 = \rho + \rho i$, με $\rho \in \mathbb{R}^*$.

E.M.E.

2. Αν $\alpha + \beta i \neq 0$ να βρείτε τον $v \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε να ισχύει $(2\alpha + 2\beta i)^v + 2(-\beta + \alpha i)^v + 2(\beta - \alpha i)^v = 0$

3. Για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z| = 1$ και $(\bar{z})^{1997} + 3z + 2i = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $|3z + 2i| = 1$

β) Υπολογίστε τον z .

4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$:

α) αν $|z + 9| = 3|z + 1|$, τότε $|z| = 3$

β) αν $|z + 16| = 4|z + 1|$, τότε $|z| = 4$

γ) αν $|2z - 1| = |z - 2|$, τότε $|z| = 1$

δ) αν $|6z + 1| = |4z - 1|$, τότε $|2z + 1| = 1$

5. Να αποδείξετε ότι

α) αν η εικόνα του z κινείται στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1 τότε:

$$\left| \frac{z - \bar{z}}{2} + i \right| + \left| \frac{z - \bar{z}}{2} - i \right| = 2$$

β) αν $z + \bar{z} = 2|z|$, τότε ο z είναι πραγματικός αριθμός

γ) αν ο $w = \frac{z - i}{z - 1}$ είναι φανταστικός, τότε

$$|2z - 1 - i| = \sqrt{2}$$

δ) αν ο $w = \frac{z^v - 1}{z^v + 1}$ είναι φανταστικός, τότε $|z| = 1$

ε) αν $\left| z + \frac{1}{z} \right| = |z|$, τότε $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$

6. Αν $|z + 1| = |2z - 1| = \sqrt{5}$ τότε:

α) να αποδείξετε ότι $|z| = \sqrt{2}$

β) να βρείτε τον z .

7. Υπολογίστε τον μιγαδικό z , σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

$$\alpha) 2iz = 3z + 1 \quad \beta) |z| + z = 2 + i \quad \gamma) |z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 1|$$

8. Αν για τον μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z - 1| = \eta \mu^2 \theta$ να δείξετε ότι $\sin^2 \theta \leq |z| \leq 1 + \eta \mu^2 \theta$

9. Αν οι $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ έχουν μέτρο 1 και ισχύει $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ τότε να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$

10. Να αποδείξετε ότι $|z + 1| + |z| \leq |z + 2| + |z - 1|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

11. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{-i\}$ ι-

$$\text{σχύει: } \left| \frac{z - i}{z + i} \right| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) > 0$$

β) Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει

$$\left| \frac{z_1 - i}{z_1 + i} \right| + \left| \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \right| < 1 \text{ να δείξετε ότι}$$

$$\text{i) } z_1, z_2 \notin \mathbb{R} \quad \text{ii) } \left| \frac{z_1 + z_2 - i}{z_1 + z_2 + i} \right| < 1$$

12. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων $M(z)$ του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία ο αριθμός $2z^2 - |z|^2 - (1 + 3i)z - (1 - 3i)i\bar{z} - 5$ είναι φανταστικός.

13. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει $|z - 2 + i| < \frac{3}{2}$ και $|z - 4 - i| > 2$.

14. Έστω $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = \frac{z - 2i}{z + 1}$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ο w είναι πραγματικός τότε η εικόνα του z κινείται σε ευθεία.

β) Αν ο w είναι φανταστικός τότε η εικόνα του z κινείται σε κύκλο.

15. Οι μιγαδικοί αριθμοί z και w συνδέονται με τη σχέση $w \cdot \operatorname{Re}(z) - \bar{w} \cdot \operatorname{Im}(z) = 2(1 + i) - 2i \cdot \bar{w}$

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο τουλάχιστον λύσεις ως προς w , διαφορετικές μεταξύ τους, να δείξετε ότι η εικόνα του z , στο μιγαδικό επίπεδο, ανήκει σε μία ισοσκελή υπερβολή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

16. Έστω $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$ και

$$(1 + iz)^v = \frac{\alpha + \beta i}{\beta + \alpha i} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι ο z δεν είναι πραγματικός αριθμός

β) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

γ) Να βρείτε τους μιγαδικούς z που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο

δ) Να αποδείξετε ότι $4 < |z - 3 + 4i| < 7$

ε) Αν οι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ικανοποιούν την (1) να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| \leq 2$ **E.M.E.**

17. Αν $z, w \in \mathbb{C}$ με $w = \frac{z^2 + 1}{z + 1}i$ και ο w είναι φανταστικός, να βρείτε την γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες του z .

18. Η εικόνα του w κινείται στη διχοτόμο των γωνιών του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου. Αν $z = w + \frac{1}{w}$ τότε να βρείτε την γραμμή στην οποία κινείται το $M(z)$.

19. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών z , για τους οποίους ο $w = \frac{z}{z + 1}$ είναι φανταστικός αριθμός.

20. Αν ισχύει $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ για τους $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $A(z_1), B(z_2)$ τότε να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

21. Αν $|z + 1 + i| = 1$ τότε να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $A = |z - 2 - 3i|$, όπου $z \in \mathbb{C}$.

22. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z - 1 - 2i| = 5$.

α) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $|z - 7 - 10i|$

β) Να βρείτε τις αντίστοιχες τιμές του z (για τις οποίες μεγιστοποιείται και ελαχιστοποιείται η παράσταση)

E.M.E.

23. α) Να λύσετε την εξίσωση $z^2 - 2z \sin \theta + 1 = 0$, όπου $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Αν M είναι η εικόνα της ρίζας που έχει θετικό φανταστικό μέρος, να αποδείξετε ότι το M κινείται σε τεταρτοκύκλιο όταν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

24. Έστω Σ η εικόνα ενός πραγματικού αριθμού θ και A, B οι εικόνες των μιγαδικών z, w αντίστοιχα στο

μιγαδικό επίπεδο, ώστε το τρίγωνο $\Delta \Sigma B$ να είναι ορθογώνιο στο Σ και ισοσκελές. Αν $\operatorname{Re}(w) > \theta > \operatorname{Re}(z)$ και τα φανταστικά μέρη των z, w είναι θετικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

α) ο αριθμός $(z - \theta)(\overline{w - \theta})$ είναι φανταστικός

β) $\omega = \theta - i(z - \theta)$

25. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \notin \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε να είναι $\operatorname{Im}\left(\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}\right) = 0$. Να δείξετε ότι θα είναι $|z| = 1$.

GM 1981 Manole

26. Έστω $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με

$$\frac{\alpha^2}{\sin^2 \theta} + \frac{\beta^2}{\eta \mu^2 \theta} = 1, \text{ όπου } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$$

Να αποδείξετε ότι $|z|^2 + |z^2 - \sin 2\theta| = 1$.

(Ισχύει $\sin 2\theta = \sin^2 \theta - \eta \mu^2 \theta$)

27. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ και ισχύουν: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $(z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$ και $|z_1 + z_2 + z_3| \neq 3$ τότε να αποδείξετε ότι:

α) $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 3 \cdot (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$

β) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

28. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| = |z + 1| = 1$ να αποδείξετε ότι $z^2 + z + 1 = 0$.

29. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $z^5 = \bar{z}^7$ με $z \neq 0$ να αποδείξετε ότι
α) $|z| = 1$ β) $z^{12} = 1$

30. Αν $z \in \mathbb{C}$ και $|z + 8| + |z - 8| = 20$ να αποδείξετε ότι $|4z - \bar{z}| = 30$.

31. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2, z_3 τέτοιους ώστε να ισχύει:

$$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| = \alpha \text{ και } |z_1 z_2 z_3| = \beta \text{ όπου } \alpha, \beta > 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχει ανάμεσά τους τουλάχιστον ένας, έστω z_k , τέτοιος ώστε να είναι $|z_k| \leq \frac{3\beta}{\alpha}$.

R.M.E.T. 1981 Batinetu

32. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$

β) Αν $|z_1 + z_2| = 1$ τότε $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq \frac{1}{2}$

33. Αν οι μιγαδικοί $z_1, z_2, \dots, z_v$ έχουν μέτρο 1 τότε να αποδείξετε ότι

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_v) \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_v} \right) \leq v^2$$

34. Έστω $z \in \mathbb{C}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση

$$A = z^2 - 5zi - 4$$

β) Να βρείτε το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z , για τους οποίους ισχύει:

$$|z^2 - zi| + |z - 4i| = |z| + |z^2 - 5zi - 4|$$

γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $B = |2z - 6 - 2i|$, όπου z ο μιγαδικός του ερωτήματος (β).

35. Έστω $w = \frac{z-i}{z-2i}$, όπου $z \in \mathbb{C}$ και $z \neq 2i$. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν ο z είναι πραγματικός, οι εικόνες του w κινούνται σε κύκλο

β) Αν ο z είναι φανταστικός, οι εικόνες του w κινούνται σε ευθεία

36. Να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός $v \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει $(1-i)^v > 0$.

37. Αν είναι A και B οι εικόνες των μιγαδικών z και w αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο και $w^2 + z^2 = 0$ τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

38. Αν είναι $w = \alpha + \beta i$ και $|w| = \sqrt{10}$ τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού $z = \alpha(3-i) + \beta(1+3i)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

39. Αν είναι $\alpha + \beta i = (x + yi)^{v+1}$ και $\gamma + \delta i = (y + xi)^v$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x, y \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}^+$ τότε να αποδείξετε ότι $(x^2 + y^2)(\gamma^2 + \delta^2) = \alpha^2 + \beta^2$.

40. Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z) = \frac{2+i\bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z \neq 1$.

α) Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $f(2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $\left| \frac{f(z)-2}{f(z)+i} \right| = |z|$.

γ) Αν $|z|=1$ και M είναι η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε ευθεία. Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας.

O.E.Φ.E. 2001

41. α) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$(1+i)^4, |12-5i|$$

β) Να βρείτε την τιμή του $v \in \mathbb{N}$, $v \geq 2$ ώστε να ισχύει

$$(12-5i)^{v-2} - (1+i)^4 = 13^{v-1} - 8 \quad \text{E.M.E.}$$

42. Έστω ο μιγαδικός αριθμός z με $|z+2i| = 2|z-i|$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο $M(z)$ διαγράφει κύκλο

β) $|z-2i| = 2$

γ) Η εικόνα του μιγαδικού $w = \frac{z}{z-2i}$ διαγράφει κύκλο

43. Έστω $f(z) = |z| - i\bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(z) = 2-i$

β) Αν $|f(|z|)| = \sqrt{2}$ να βρείτε το $|z|$

γ) Αν $|z|=1$ να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του $w = f(z)$ είναι κύκλος που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. **E.M.E.**

44. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και A, B αντίστοιχα οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο OAB , όπου O η αρχή των αξόνων είναι ισοσκελές αν $z = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2} \in \mathbb{R}$, αν τα O, A, B δεν είναι συνευθειακά.

45. Δίνεται η εξίσωση $z^2 - \alpha z + \beta = 0$ με $z \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της με $z_1 = 2+i$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $z_1^{2008} + z_2^{2008}$ είναι πραγματικός

γ) Έστω $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο με $z_3 = \frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{5}(17 + i)$, τότε

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

ii) Αν $|w - z_1| = |\bar{w} - z_1|$ να αποδείξετε ότι $w \in \mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w , που επαληθεύουν την εξίσωση $|w - z_2| + |\bar{w} - z_2| = 10$ βρίσκονται σε έλλειψη. **E.M.E.**

46. Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ισχύει η αναλογία $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$ τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

47. Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq -1$ και $z \neq 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{(1 - z^v)(1 + \bar{z})}{(1 + z^v)(1 - \bar{z})}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, όταν $z \neq 0$

β) Αν επιπλέον $|z| = 1$ να αποδείξετε ότι $\overline{f(z)} = f(z)$
E.M.E.

48. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $|z_1| = |z_2| = 1$ και οι

$$w_1 = z_1 + z_2 - 2z_1z_2 + 1, \quad w_2 = z_1 + z_2 + z_1z_2 - 2$$

α) Να δείξετε ότι: $w_1 = z_1 \cdot z_2 \cdot \bar{w}_2$

β) Να δείξετε ότι: $|w_1| = |w_2|$

γ) Αν $|w_1| = 0$, να βρείτε τους z_1 και z_2

49. Θεωρούμε την εξίσωση

$$z^2 - (e^t + e^{-t})z + \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) = 0, \text{ με } t \geq 0$$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες z_1, z_2 των οποίων τα αντίστοιχα σημεία στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημεία του δεξιού κλάδου της ισοσκελούς υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε μία ρίζα z της εξίσωσης, ισχύει η σχέση $|z + \sqrt{2}| - |z - \sqrt{2}| = 2$.

50. Έστω ο θετικός πραγματικός αριθμός α και έστω οι μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $\left|z + \frac{1}{z}\right| = \alpha$. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|z|$.

51. Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z + 1| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ή $|1 + z^2| \geq 1$.

52. Αν ισχύει $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \leq 2$ τότε να αποδείξετε ότι $\left|z + \frac{1}{z}\right| \leq 2$.