

Συνοπτική μεθοδολογία μιγαδικών

Πράξεις μιγαδικών αριθμών	Συζυγής μιγαδικού αριθμού	
Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζονται οι ακόλουθες πράξεις: - Πρόσθεση μιγαδικών αριθμών - Αφαίρεση μιγαδικών αριθμών - Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών - Διαίρεση μιγαδικών αριθμών - Δύναμη μιγαδικού αριθμού $z^1 = z, z^v = z^{v-1} \cdot z$ Για $z \neq 0$ ορίζεται $z^0 = 1$ και για $v \in \mathbb{N}^*$ είναι $z^{-v} = \frac{1}{z^v} \cdot \text{Ακόμη } i^v = \begin{cases} 1, & v = 4\kappa \\ i, & v = 4\kappa + 1 \\ -1, & v = 4\kappa + 2 \\ -i, & v = 4\kappa + 3 \end{cases}$ $(1+i)^{2v} = (2i)^v, (1-i)^{2v} = (-2i)^v \quad v \in \mathbb{N}^*$	Ορισμός: $z = \alpha + \beta i \Rightarrow \bar{z} = \alpha - \beta i$ Ιδιότητες συζυγούς μιγαδικού αριθμού Δύο μιγαδικοί $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\overline{(z^v)} = (\bar{z})^v$ Περισσότεροι από δύο μιγαδικοί: $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_v} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_v$ $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_v} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_v$ Σχέση z με $\bar{z}$ $z + \bar{z} = 2x \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $z - \bar{z} = 2y \cdot i \Leftrightarrow z - \bar{z} = 2\text{Im}(z) \cdot i \Leftrightarrow \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ Αντισυζυγής μιγαδικού αριθμού $\beta - \alpha i = -i(\alpha + \beta i)$ $\alpha + \beta i = i(\beta - \alpha i)$	
Ελάχιστη τιμή εκθέτη ή εύρεση εκθέτη Συνήθως διακρίνω περιπτώσεις		
Μέτρο Ορισμός: $ z = \overline{OM} = x + yi = \sqrt{x^2 + y^2}$ - Αν μέσα σε μέτρο ο μιγαδικός έχει συντελεστή τότε δίνω τον συντελεστή. - Αν μέσα σε μέτρο υπάρχει ο $\bar{z}$ τότε μπορώ να τον αλλάξω σε z. $z = \alpha \Rightarrow z \cdot \bar{z} = \alpha^2 \Rightarrow \bar{z} = \frac{\alpha^2}{z}$ και $z_1 + z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \dots$ $z+1 ^v = z ^v \Rightarrow z+1 = z$	Ιδιότητες μέτρου μιγαδικών αριθμών Για ένα τυχαίο μιγαδικό z ισχύει: $z = \bar{z} = -z$ $z ^2 = z\bar{z}$ Για δύο τυχαίους μιγαδικούς z_1 και z_2 ισχύει: $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$ $z^v = z ^v$ $\frac{ z_1 }{ z_2 } = \frac{ \bar{z}_1 }{ \bar{z}_2 }$ $z_1 - z_2 \leq z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2$	
Παρατηρήσεις $z \geq 0$ - Αν $z = w \Rightarrow z = w$ ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει $z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ $z = iz = -iz = i\bar{z} = -i\bar{z}$ $z ^2 \in \mathbb{R}, z^2 \in \mathbb{C}$ $\lambda \cdot z = \lambda \cdot z , \lambda \in \mathbb{R}$ - Αν $z = \alpha + \beta i, \bar{z} = \alpha - \beta i$ δύο συζυγείς μιγαδικοί τότε: $z - \bar{z} = 2\beta i = 2 \text{Im}(z)$ και $z + \bar{z} = 2\alpha = 2 \text{Re}(z)$ - Αν $z - z_1 ^v = z - z_2 ^v$ τότε $z - z_1 = z - z_2$ άρα και $z - z_1 ^2 = z - z_2 ^2, v \in \mathbb{N}^*$ - Αν $z_1^2 + z_2^2 = 0$ τότε $z_1 = z_2$. (Είναι $z_1^2 + z_2^2 = 0 \Rightarrow z_1^2 = -z_2^2 \Rightarrow z_1 ^2 = -z_2 ^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow z_1 = z_2$)		
Στο σύνολο $\mathbb{C}$ δεν ισχύουν: - η διάταξη μιγαδικών. Αν $\alpha + \beta i > \gamma + \delta i \Rightarrow \begin{cases} \alpha > \gamma \\ \text{και} \\ \beta = \delta = 0 \end{cases}$. $z ^2 = z^2$. Είναι $z\bar{z} - z^2 = 0 \Rightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow z = 0$ ή $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$. Άρα $z \in \mathbb{R}$. $z^2 \geq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Το $z^2 \in \mathbb{C}$ και δεν ισχύει η διάταξη στο $\mathbb{C}$. $z^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow z = w = 0$. Είναι $z^2 + w^2 = 0 \Rightarrow z^2 - (iw)^2 = 0 \Rightarrow z = \pm iw$.		
$z \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ \text{Im}(z) = 0 \\ z ^2 = z^2 \\ M(z) \in x'x \\ z = u + \bar{u} \end{cases}$	$z \in \mathbb{I} \Rightarrow \begin{cases} z = -\bar{z} \\ \text{Re}(z) = 0 \\ z ^2 = -z^2 \\ M(z) \in y'y \\ z = u - \bar{u} \end{cases}$	Εξισώσεις - Ως προς z - Με z και z - Με z και $\bar{z}$ $z^x = \bar{z}^\lambda$ - Γεωμετρική λύση
Κανόνες παραλληλογράμμου $ z_1 + z_2 ^2 + z_1 - z_2 ^2 = 2(z_1 ^2 + z_2 ^2)$		Ισόπλευρο τρίγωνο Αρκεί $ z_1 - z_2 = z_2 - z_3 = z_1 - z_3 $

Τύπος	Γεωμετρικός τόπος
$ z_1 - z_2 $	Η απόσταση των εικόνων των δύο μιγαδικών
$ z = \rho$	Κύκλος (O,ρ)
$ z - z_1 = \rho$	Κύκλος (A,ρ)
$ z < \rho$	Το εσωτερικό του κύκλου (O,ρ)
$ z - z_1 < \rho$	Το εσωτερικό του κύκλου (A,ρ)
$ z \leq \rho$	Κυκλικός δίσκος (O,ρ)
$ z - z_1 \leq \rho$	Κυκλικός δίσκος (A,ρ)
$ z > \rho$	Το εξωτερικό του κύκλου (O,ρ)
$ z - z_1 > \rho$	Το εξωτερικό του κύκλου (A,ρ)
$ z - z_1 = z - z_2 $	Μεσοκάθετος του τμήματος AB.
$ z - z_1 > z - z_2 $	Το ημιεπίπεδο (ε, B) , όπου ε η μεσοκάθετος του AB
$ z - z_1 + z - z_2 = 2\alpha$	Έλλειψη με εστίες A, B και σταθερό άθροισμα 2α (Αρκεί $ z_1 - z_2 < 2\alpha$)
$ z - z_1 - z - z_2 = 2\alpha$	Υπερβολή με εστίες A, B και σταθερή διαφορά 2α (Αρκεί $ z_1 - z_2 > 2\alpha$) (ή κλάδος)

Παρατηρήσεις

- Ισχύει: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ αφού όπως γνωρίζουμε αντίθετοι μιγαδικοί έχουν ίσα μέτρα.
- Αν ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$ και A, B, Γ οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 αντίστοιχα τότε προφανώς το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.
- Αν $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$ και $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων και $A(z_1)$, $B(z_2)$ οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα τότε το OAB είναι ισόπλευρο.
- Αν $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ κορυφές τριγώνου ABΓ και για z μιγαδικό ισχύει $|z - z_1| = |z - z_2| = |z - z_3|$ τότε οι εικόνες του z είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.
- Αν ισχύει $|z - z_1| < |z - z_2|$ συμπεραίνουμε ότι οι εικόνες του z βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την μεσοκάθετο του $M_1(z_1)M_2(z_2)$ και προς το μέρος του $M_1(z_1)$.
Αν έχουμε $\leq$ συμπεριλαμβάνουμε και τα σημεία που ανήκουν στη μεσοκάθετο.
- Αν έχουμε $|z - z_1| = |z - \bar{z}_1|$ σημαίνει ότι τα σημεία $M(z)$, οι εικόνες του z ισαπέχουν από τα $M_1(z_1)$, $M_2(\bar{z}_1)$ τις εικόνες των $z_1, \bar{z}_1$ αντίστοιχα, άρα ανήκουν στον άξονα $x'x$.
- Αν έχουμε $|z - z_1| = |z + \bar{z}_1|$ σημαίνει ότι τα σημεία $M(z)$, οι εικόνες του z ισαπέχουν από τα $M_1(z_1)$, $M_2(-\bar{z}_1)$ τις εικόνες των $z_1, -\bar{z}_1$ αντίστοιχα, άρα ανήκουν στον άξονα $y'y$.
- Αν έχουμε $|z - \alpha| = |z + \alpha|$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εικόνες του z ανήκουν στον άξονα $y'y$.
- Αν έχουμε $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 = |z_1 - z_3|^2$, τότε οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο αφού ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα για τις αποστάσεις των εικόνων των μιγαδικών.

Ανισότητες

Σχέση με έναν μιγαδικό

- Αν $z = \alpha + \beta i$ τότε $\alpha = \operatorname{Re}(z) \leq |z|$ και $\beta = \operatorname{Im}(z) \leq |z|$.
- Αν ο μιγαδικός ανήκει σε ευθεία τότε ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι αυτός που έχει μέτρο ίσο με την απόσταση του σημείου $O(0,0)$ από την ευθεία.
- Αν ο μιγαδικός ανήκει σε κύκλο (K, ρ) τότε
 - αν το $O(0,0)$ είναι εσωτερικό του κύκλου τότε $|z|_{\min} = \rho - (KO)$, $|z|_{\max} = (KO) + \rho$
 - αν το $O(0,0)$ είναι εξωτερικό του κύκλου τότε $|z|_{\min} = (KO) - \rho$, $|z|_{\max} = (KO) + \rho$
- Αν $|z - z_1| = |z - z_2|$ τότε $|z - z_3|_{\min} = ?$. Ο μιγαδικός z ανήκει στην μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος AB όπου $A(z_1), B(z_2)$.
Αν είναι $\Gamma(z_3)$ τότε το $|z - z_3|_{\min}$ είναι ίσο με την απόσταση του Γ από την δοσμένη μεσοκάθετο.

Σχέση με δύο μιγαδικούς

- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- Αν $|z - z_0| = |w - z_0| = \alpha > 0$ τότε $|z - w|_{\max} = 2\alpha$ (Οι εικόνες των $K(z)$, $\Lambda(w)$ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το $M(z_0)$ και ακτίνα ίση με α άρα το μέγιστο της χορδής ΚΛ είναι η διάμετρος)
- Αν $|z - z_1| = \alpha > 0$ και $|w - z_2| = \beta > 0$ τότε
αν κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου τότε $|z - w|_{\max} = |z_1 - z_2| + \alpha + \beta$ και $|z - w|_{\min} = |z_1 - z_2| - \alpha - \beta$