

**Ύλη και Οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης Γυμνασίων ΕΝ.Ε.Ε.ΓΥ.-Λ.
για το σχολικό έτος 2024-2025**

ΒΙΒΛΙΟ

«Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου» των Δημητρίου Αργυράκη, Παναγιώτη Βουργάνα, Κωνσταντίνου Μεντή, Σταματούλας Τσικοπούλου, Μιχαήλ Χρυσοβέργη

Ύλη

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφ. 1^ο: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

- 1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων
- 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις
- 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων
 - A. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων
 - B. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

Κεφ. 2^ο: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

- 2.1 Η εξίσωση $ax + b = 0$
- 2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού
 - A. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων
 - B. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου.
- 2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού
- 2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις μ' έναν άγνωστο
 - B. Ιδιότητες της διάταξης
 - Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο

Κεφ. 3^ο: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

- 3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης
- 3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του
- 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Κεφ. 5^ο: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- 5.1 Σύνολα (χωρίς την υποπαράγραφο: «Πράξεις με σύνολα», και χωρίς την εφαρμογή 2)
- 5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα (χωρίς τις υποενότητες: «Πράξεις με ενδεχόμενα» και «Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα» που εντοπίζονται στην υποπαράγραφο «Ενδεχόμενα»)
- 5.3 Έννοια της πιθανότητας (χωρίς την υποπαράγραφο: «Βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων»)

ΜΕΡΟΣ Β΄

Κεφ. 1^ο: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

- 1.1 Ισότητα τριγώνων

- 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων
- 1.3 Θεώρημα Θαλή
- 1.5 Ομοιότητα
 - A. Όμοια πολύγωνα
 - B. Όμοια τρίγωνα (χωρίς την αιτιολόγηση του κριτηρίου ομοιότητας δύο τριγώνων στη σελίδα 220)

Κεφ. 2^ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

- 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$
- 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών
- 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Οδηγίες διδασκαλίας

Οι παρακάτω οδηγίες έχουν στόχο να παρουσιάσουν κάποιες σημαντικές πλευρές για κάθε ενότητα και έτσι να υποστηρίξουν τον/την εκπαιδευτικό ώστε να σχεδιάσει τη διδασκαλία του/της και να επιλέξει υλικό. Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ. Οι δραστηριότητες που περιέχονται είναι ενδεικτικές και προέρχονται από το πρόγραμμα σπουδών για το γυμνάσιο και τον οδηγό του εκπαιδευτικού τα οποία είναι συμπληρωματικά προς τα ισχύοντα και μπορούν να ανακτηθούν από τον ιστότοπο του ψηφιακού σχολείου: <http://ebooks.edu.gr/new/ps.php>.

Ταυτόχρονα κατεβλήθη προσπάθεια οι οδηγίες να εξειδικευθούν **ανά παράγραφο** με συγκεκριμένες διδακτικές προτάσεις που λαμβάνουν υπόψη τη συνοχή και εξέλιξη των διδασκόμενων εννοιών και μεθόδων, την ανάδειξη των σημαντικών ιδεών καθώς και τη διδακτική πρακτική.

Τέλος, επισημαίνεται ότι η **παράλειψη** κεφαλαίων ή ενοτήτων που περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη θα πρέπει να αποφεύγεται.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Κεφάλαιο 1^ο (Να διατεθούν 8 ώρες)

Με τις επιμέρους προτάσεις ανά ενότητα γίνεται προσπάθεια να αποφευχθεί ο υπερβολικά δύσκολος αλγεβρικός χειρισμός σε βάρος της κατανόησης.

§§1.8 και 1.9

Προτείνονται:

- Από την §1.8 θα διδαχθεί μόνο η έννοια του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου μέσω της δραστηριότητας της σελίδας 68 και των παραδειγμάτων 1, 2 σ. 69 (μόνο για το ΕΚΠ). Προτείνεται να μην γίνουν άλλες ασκήσεις στο ΕΚΠ.
- Σημειώνεται ότι η διδασκαλία της έννοιας του μέγιστου κοινού διαιρέτη μπορεί να παραλειφθεί χωρίς να δημιουργήσει προβλήματα αφού οι απλοποιήσεις μπορούν να γίνουν με παραγοντοποίηση. Σε κάθε περίπτωση η έννοια του ΜΚΔ δεν αποτελεί αντικείμενο εξέτασης.
- Δραστηριότητα σ. 71. Προτείνεται επιπλέον να συζητηθεί για ποια τιμή του x η παράσταση του ερωτήματος 1, είναι ίση με το μηδέν.
- Εφαρμογές 1, 2 (μόνο τα ερωτήματα α) β) και όχι το γ) σ. 72.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 4 σ. 73.
- Ασκήσεις 1, 2, 3 (χωρίς το ερώτημα η)) σ. 74.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 60 και 225 και να βρείτε το ΕΚΠ τους.

β) Με τον ίδιο τρόπο, να βρείτε το ΕΚΠ:

I) των μονωνύμων $6x^2y$ και $9xy^3$ II) των πολυωνύμων $x^2 - 1$ και $x^2 + x$.

[Σχόλιο: Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα επιδιώκεται η διερεύνηση της έννοιας του ΕΚΠ μονώνυμων και απλών πολυωνύμων και ανάπτυξη στρατηγικών υπολογισμού του. Η ανάδειξη των αναλογιών με την ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και το ΕΚΠ φυσικών έχει στόχο την απόδοση νοήματος στους αλγόριθμους της παραγοντοποίησης και του ΕΚΠ πολυωνύμων. Οι μαθητές/-τριες μπορούν να οδηγηθούν στη διατύπωση του κανόνα εύρεσης του ΕΚΠ μέσα από προσπάθειες και βελτιώσεις. Η αναζήτηση αιτιολογήσεων του κανόνα είναι χρήσιμη και μπορεί να γίνει πρώτα για τους φυσικούς και να επεκταθεί στα μονώνυμα και στα πολυώνυμα.]

§1.10

Προτείνονται:

- Δραστηριότητα σ. 75
- Παραδείγματα 1, 2 (μόνο το ερώτημα β)) σ. 76
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2 σ. 77
- Από τις ασκήσεις της σ. 77 προτείνονται οι 1 (β), δ), στ)), 2 (α β)), 3 (α), β)) , 4 (α β))
- Δραστηριότητα σ. 78
- Παράδειγμα 1 σ. 79
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2 σ. 80.
- Από τις ασκήσεις σ. 80-81 προτείνονται οι 1 (α γ) δ)), 2 (α , γ)), 3 (α , δ)), 4 α).

Κεφάλαιο 2^ο (Να διατεθούν 15 ώρες)

Οι μαθητές/-τριες έχουν διδαχθεί τις εξισώσεις 1^{ου} βαθμού και τις έχουν χρησιμοποιήσει στη λύση προβλημάτων. Επίσης έχουν αντιμετωπίσει εξισώσεις της μορφής $x^2 = a$ στο 2ο κεφάλαιο της Β΄ Γυμνασίου. Το υπόλοιπο περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι νέο και συνδέεται με το προηγούμενο κεφάλαιο.

§§2.1 και 2.2

Η επανάληψη των εξισώσεων 1ου βαθμού προτείνεται να γίνει μέσω παραδειγμάτων.

Σκοπός της διδασκαλίας των παραγράφων είναι

- A) Η επανάληψη των πρωτοβαθμίων εξισώσεων.
B) Η σύνδεση τους με τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις μέσω της παραγοντοποίησης και η τελική τους επίλυση.

Προτείνονται:

- Η απόδειξη του τύπου για την δευτεροβάθμια εξίσωση μπορεί να γίνει κατά την κρίση του/της διδάσκοντα/-ούσας χωρίς να αποτελεί αντικείμενο εξέτασης.
- Να γίνουν τα παραδείγματα 1 ,2, 3 σ. 95. Ειδικά για το ερώτημα γ) του παραδείγματος 1 προτείνεται να συζητηθεί και η δυνατότητα επίλυσης με παραγοντοποίηση και να συγκριθούν οι μέθοδοι. Μέσω αυτής της συζήτησης επιδιώκεται να αναδειχθεί η λειτουργικότητα της παραγοντοποίησης πολυωνύμων. Στο παράδειγμα 2 α) να επισημανθεί ότι η χρήση της ταυτότητας διαφοράς τετραγώνων δεν μπορεί να δώσει απάντηση.
- Στην υποπαράγραφο παραγοντοποίηση τριωνύμου να χρησιμοποιηθεί το παράδειγμα της σ. 96
- Ασκήσεις 3, 4, 6 σ. 97

Ενδεικτική δραστηριότητα 1^η:

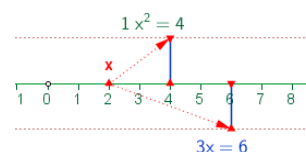
Παρατηρήστε ότι $1^3=1$, δηλαδή ότι ο κύβος του 1 ισούται με το 1. Μπορείτε να βρείτε όλους τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή ο κύβος του αριθμού να είναι ίσος με τον ίδιο τον αριθμό; Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;

[Σχόλιο: Είναι ένα μαθηματικό πρόβλημα που οδηγεί στη διατύπωση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και την επίλυσή της με παραγοντοποίηση. Μια διερεύνηση των μαθητών/-τριών με δοκιμές είναι πιθανόν να οδηγήσει σε κάποιες λύσεις (πχ. στο 0 και το 1) αλλά όχι σε όλες. Αυτή η δυσκολία μπορεί να λειτουργήσει ως αφορμή ώστε να αναδειχτεί η σημασία της επίλυσης μιας εξίσωσης μέσω αλγεβρικού μετασχηματισμού για την εύρεση όλων των λύσεών της.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2^η:

Η επίλυση της εξίσωσης $ax^2+bx = 0$ μπορεί να υποστηριχτεί και με το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων της μορφής $ax^2+bx = 0$, με $a \neq 0$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση και εξάσκηση αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού (ειδική μορφή: $\gamma = 0$).

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2130>



Ενδεικτική δραστηριότητα 3^η:

Σχεδιάστε με λογισμικό (πχ. Geogebra) τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\gamma=x^3+2x^2$ και $\gamma=2x^2+x$. Σημειώστε στη γραφική παράσταση το ή τα κοινά σημεία τους. Αν υποθέσουμε ότι ένα κοινό σημείο είναι το Α, να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του σε σχέση με τους τύπους των δύο συναρτήσεων. Προσδιορίστε τις συντεταγμένες του κοινού ή των κοινών τους σημείων (α) από τις γραφικές παραστάσεις και (β) αλγεβρικά με χρήση των τύπων των δύο συναρτήσεων.

[Σχόλιο: Οι στόχοι της δραστηριότητας είναι α) η σύνδεση των πολυωνυμικών εξισώσεων και των αλγεβρικών μεθόδων επίλυσής τους με την γραφική αναπαράστασή τους και β) η αναγνώριση της λύσης της εξίσωσης ως τετμημένης του κοινού σημείου (ή των κοινών σημείων).]

§2.3

Προτείνονται:

- Πρόβλημα 1 σ. 99
- Ως παράδειγμα να γίνει η άσκηση 12 σ. 102
- Ασκήσεις 3, 4, 6, 7 σ. 101

§2.5

- Η §2.5.A (διάταξη) δεν θα διδαχτεί.
- Από την §2.5.B θα διδαχτούν μόνο εκείνες οι ιδιότητες που χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων πρώτου βαθμού (δηλαδή η α), η β) και η γ)). Αυτές οι ιδιότητες θα πρέπει να συζητηθούν διαισθητικά και χωρίς την απόδειξη του σχολικού βιβλίου.
- Η §2.5.Γ θα διδαχτεί εξ ολοκλήρου.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι η διδασκαλία της §2.5 περιορίζεται μόνο στις ανισώσεις πρώτου βαθμού. Η έννοια της διάταξης και οι ασκήσεις που αναφέρονται στη διάταξη και τις ιδιότητές της δεν περιλαμβάνονται στη διδακτέα ύλη. Εξάλλου, αυτές οι έννοιες θα διαπραγματευθούν διεξοδικά στην επόμενη τάξη.

Προτείνονται ανά υποπαράγραφο

2.5 Β: Να διδαχθούν οι ιδιότητες των ανισοτήτων με παραδείγματα. Στη συνέχεια μπορούν να συζητηθούν στην τάξη με αιτιολόγηση τα παρακάτω:

Αν έχουμε:	Προκύπτει ότι:
$\alpha > 2$	$2\alpha > 4$
$\alpha > 3$	$\alpha - 2 > 1$
$t > 7$	$t - 1 > 6$
$t > 7$	$t + 1 > 8$
$\omega \geq 7$	$\omega > 6$
$m > 7$	$m \geq 7$
$\xi < 2$	$2\xi < 4$
$\lambda > -1$	$\lambda + 1 > 0$
$1 < x < 3$ $2 < y < 5$	$-4 < x - y < 1$

2.5 Γ: Να γίνει το παράδειγμα 1 της σ. 113

- Ασκήσεις 16 α) β) γ) σ. 117

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το εισιτήριο εισόδου σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει €7 και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι €4. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι €75, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού;

[Σχόλιο: Πρόκειται για ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που κάποιος εξοικειωμένος λύτης πιθανόν να το λύσει χρησιμοποιώντας ανίσωση πρώτου βαθμού. Ωστόσο, μπορεί να επιλεγούν από τους/τις μαθητές/-τριες άλλοι ισοδύναμοι τρόποι λύσης (αριθμητικά με πίνακες τιμών ή γραφικά με χρήση δύο συναρτήσεων). Ακόμη και μια λύση με δοκιμές θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να οδηγηθούν οι μαθητές/-τριες σε περισσότερο συστηματικές μεθόδους διερεύνησης, όπως έναν πίνακα τιμών και μια γραφική παράσταση. Ο στόχος σε κάθε περίπτωση είναι η μοντελοποίηση του προβλήματος και η ανάδειξη των πλεονεκτημάτων κάθε μεθόδου επίλυσης.]

Κεφάλαιο 3^ο (Να διατεθούν 11 ώρες)

Το περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι εξολοκλήρου νέο για τους/τις μαθητές/-τριες.

Γενικά για τα συστήματα προτείνεται: α) να χρησιμοποιούνται τόσο οι γραφικές όσο και οι αλγεβρικές μέθοδοι, β) να δίνεται έμφαση σε προβλήματα.

Όλα τα παραπάνω (και όχι μόνο οι αλγεβρικές μέθοδοι) συνιστάται να αποτελούν αντικείμενο εξέτασης.

§3.1

Οι μαθητές/-τριες γνωρίζουν από την Β' τάξη ότι η εξίσωση $y = ax + b$, στην οποία θα στηριχθεί ή διδασκαλία της παραγράφου, παριστάνει ευθεία. Ωστόσο, θεωρείται σκόπιμο οι μαθητές/-τριες να ασχοληθούν ξανά με βασικές έννοιες σχετικά με τη συνάρτηση (σχέση των x - y , γραφική παράσταση) και να τις συνδέσουν πιο συγκεκριμένα με την ευθεία.

Προτείνονται:

- Δραστηριότητα σ. 122
- Παραδείγματα 1, 2 σ. 125 (που περιλαμβάνει αξιοποίηση της ιδιότητας ένα σημείο να ανήκει σε ευθεία και κατάστρωση-επίλυση εξίσωσης).
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3, 4, 5 σ. 126

- Ασκήσεις 1, 3, 8 σελ. 127

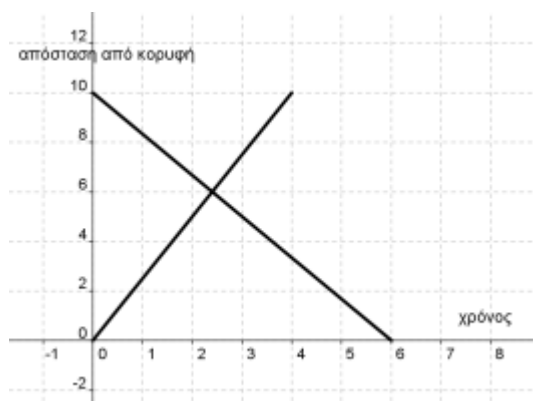
§3.2

Προτείνονται:

- Δραστηριότητα σ. 128
- Στην τάξη να γίνουν οι ασκήσεις 3, 4 σ. 132.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1^η:

Η Μαρία ξεκινάει το πρωί από τη βάση της κατασκήνωσης, για να ανέβει στην κορυφή του Ολύμπου, η οποία απέχει 10 χιλιόμετρα. Η Έλενα ξεκινάει την ίδια ώρα από την κορυφή, για να επιστρέψει στην κατασκήνωση από την ίδια διαδρομή. Τα γραφήματα που περιγράφουν την απόσταση κάθε ορειβάτισσας από την κορυφή του βουνού είναι σχεδιασμένα στο σχήμα.

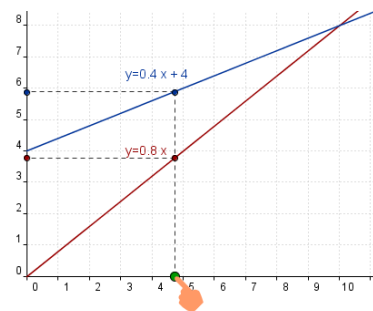


Ποια γραμμή αντιστοιχεί στη Μαρία και ποια στην Έλενα; Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών; Σε πόση ώρα θα συναντήσει η Μαρία την Έλενα; Πώς μπορούμε να περιγράψουμε αλγεβρικά τη συνάντησή τους και να βρούμε την ώρα συνάντησης;

[Σχόλιο: Η δραστηριότητα μπορεί να αξιοποιηθεί και στην 3.1 και στην 3.3. Προσφέρει αρκετές ευκαιρίες να συζητηθούν στην τάξη η γραμμική εξίσωση, η γραφική και η αλγεβρική επίλυση, ακόμα και το πόσο τα μαθηματικά μοντέλα εκφράζουν πιστά την πραγματικότητα.]

Ενδεικτική δραστηριότητα 2^η:

Η άσκηση 4 του σχολικού βιβλίου μπορεί να γίνει πιο διερευνητικά με το μικροπείραμα «Γραφική επίλυση συστήματος και επιλογή πακέτου κινητής τηλεφωνίας» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ των συντεταγμένων του σημείου τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις ενός γραμμικού συστήματος και της λύσης του, με τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος με δραστηριότητες.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2052>

§3.3

Προτείνονται:

- Δραστηριότητα σ. 133.
- Να διδαχθούν οι μέθοδοι α) β) των σελίδων 133 & 134. Προτείνεται να συζητηθούν μέσω παραδειγμάτων τα πλεονεκτήματα κάθε μεθόδου αλλά να αφεθούν ελεύθεροι οι μαθητές/-τριες να επιλέγουν μέθοδο.
- Παράδειγμα 2 σ.135.
- Παράδειγμα 4 σ.136.
- Ασκήσεις 1, 2, 8, 10, 11, 13, 20, 21 σ. 137-138.

Κεφάλαιο 5° (Να διατεθούν 8 ώρες)

Το περιεχόμενο είναι εξολοκλήρου νέο. Η διδασκαλία του κρίνεται απαραίτητη κυρίως λόγω των εφαρμογών σε δραστηριότητες εκτός των μαθηματικών και του διαφορετικού «τρόπου σκέψης» που απαιτεί (σε σχέση με την υπόλοιπη ύλη των μαθηματικών αυτής της τάξης). Με την εξαίρεση από τη διδακτέα ύλη των πράξεων με σύνολα και του λογισμού πιθανοτήτων, ο στόχος είναι να δοθεί έμφαση στην εμπλοκή των μαθητών/-τριών με απλά προβλήματα που θα αναδεικνύουν την έννοια της πιθανότητας και θα αποφεύγεται η "αλγεβροποίηση" της διδασκαλίας των πιθανοτήτων.

§5.1

Να μην διδαχθεί η υποπαράγραφος «πράξεις με σύνολα», η εφαρμογή 2 σ. 163, οι ερωτήσεις κατανόησης 1ε, στ, 3, 4, 5 και οι ασκήσεις 6, 7, 8 και 9 σ. 166.

§5.2

Να μη διδαχθούν οι πράξεις με ενδεχόμενα και τα ασυμβίβαστα ενδεχόμενα. Να εξαιρεθούν η ερώτηση κατανόησης 8 σ. 172 και η άσκηση 6 σ. 173.

§5.3

Να μη διδαχθούν η υποπαράγραφος «βασικοί κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων», η εφαρμογή 2 σ. 176, οι ερωτήσεις κατανόησης 4, 5 σ. 177 και οι ασκήσεις 9, 10, 11, 12, 13 σ. 179.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1^η:

Ρίχνοντας δυο ζάρια τι πιθανότητα έχουμε να φέρουμε δυο βάρια και τι πιθανότητα να φέρουμε ένα 6 κι ένα 5; Τι είναι πιο εύκολο να φέρουμε: ζαριά με άθροισμα μεγαλύτερο από 7 ή ζαριά με γινόμενο μικρότερο από 7;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2^η:

Έχουμε ένα ερωτηματολόγιο με 2 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τέσσερις απαντήσεις, εκ των οποίων μόνο μια σωστή. Οι ερωτήσεις είναι τέτοιες, ώστε αναγκαζόμαστε να τις απαντήσουμε στην τύχη. Ποια είναι η πιθανότητα να απαντήσουμε όλες τις ερωτήσεις σωστά; Τι είναι πιθανότερο, να απαντήσουμε μία τουλάχιστον σωστά ή να τις απαντήσουμε και τις δύο λάθος;
[Σχόλιο: Τα προβλήματα είναι σχετικά δύσκολα, αλλά το οικείο πλαίσιο (ζάρι, ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής) αναμένεται να λειτουργήσει προκλητικά ώστε να εμπλακούν οι μαθητές/-τριες με τη διερεύνησή τους. Προσδοκούμε να κατανοηθεί η ανάγκη συστηματικής καταγραφής των δυνατών αποτελεσμάτων, που θα οδηγήσει σε πίνακα διπλής εισόδου (στην 1) και σε δενδροδιάγραμμα (στη 2)]

B' ΜΕΡΟΣ

Κεφάλαιο 1^ο (Να διατεθούν 21 διδακτικές ώρες)

§1.1

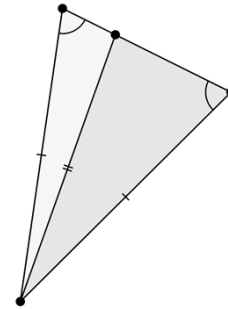
Η ενότητα προσφέρεται για επαφή των μαθητών/-τριών με πτυχές της μαθηματικής αποδεικτικής διαδικασίας (ευθεία απόδειξη, αναλυτική μέθοδος, αντιπαραδείγματα). Προτείνεται στο εισαγωγικό κομμάτι της ενότητας, πριν από την έννοια της ισότητας των τριγώνων, να γίνει επανάληψη των απαραίτητων γνώσεων που θα χρειαστούν (π.χ. οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, οι παρά τη βάση γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες κτλ.)

Επίσης προτείνεται, όπου είναι δυνατόν να χρησιμοποιείται η συμμετρία ως προς άξονα ή κέντρο, ως επιχειρήμα αιτιολόγησης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων και γωνιών (βλέπε ενδεικτική δραστηριότητα 1).

Συνιστάται κατά την διδασκαλία του κεφαλαίου, συμπληρωματικά, να χρησιμοποιείται ρυζόχαρτο για την επαλήθευση της ισότητας σχημάτων.

Μετά την υπενθύμιση όρων και αποτελεσμάτων των σελίδων 186-187 να επισημανθεί στην εισαγωγή της έννοιας της ισότητας τριγώνων ότι κατ' αρχάς απαιτείται ισότητα 6 στοιχείων τα οποία μειώνονται χάρη στα κριτήρια και στην ιδιότητα που αφορά το άθροισμα γωνιών τριγώνου.

Επίσης προτείνεται να δοκιμάσουν οι μαθητές και οι μαθήτριες κατασκευές τριγώνων από 3 δεδομένα στοιχεία τους και να γίνει επαλήθευση της σύμπτωσης των τριγώνων που θα κατασκευάσουν ως ένδειξη ισχύος των κριτηρίων (ενδεικτική δραστηριότητα 2). Μέσα από αυτή τη συζήτηση (και κατάλληλο αντιπαράδειγμα, όπως στο διπλανό σχήμα) μπορεί να αναδειχθεί ότι η διάταξη ισότητας στοιχείων Π-Π-Γ δεν αποτελεί κριτήριο ισότητας τριγώνων.



Ως διερευνητική εργασία μπορεί να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-τριες να ελεγχθεί αν το Γ-Γ-Π μπορεί να δικαιολογήσει ισότητα δύο τριγώνων.

Προτείνονται:

- Εφαρμογές 1-4 σ. 191-192
- Ερωτήσεις κατανόησης σ. 194
- Ασκήσεις 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 σ. 194-195
- Το θέμα από την Ιστορία των Μαθηματικών σελ. 197

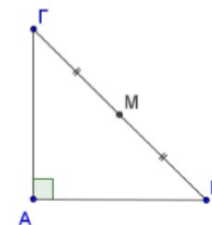
Ενδεικτική δραστηριότητα 1^η:

Η AM είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ABΓ.

α) Να σχεδιάσετε το συμμετρικό τρίγωνο του ABΓ ως προς κέντρο M.

β) Τι είδους τετράπλευρο προκύπτει και γιατί;

γ) Να εξετάσετε αν η διάμεσος AM είναι το μισό της υποτείνουσας ΒΓ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

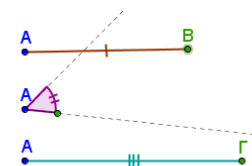


[Σχόλιο: Η παραπάνω δραστηριότητα έχει ως στόχο να αναδειχθεί η σημασία ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού (κεντρική συμμετρία) στην ανακάλυψη και αιτιολόγηση μιας ιδιότητας του ορθογωνίου τριγώνου (ιδιότητα της διαμέσου προς την υποτείνουσα)].

Ενδεικτική δραστηριότητα 2^η:

Το μικροπείραμα «Κατασκευή τριγώνου-1ο κριτήριο ισότητας» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά για την κατασκευή τριγώνου με το 1ο κριτήριο ισότητας.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2160>



§§1.2 και 1.3

Θα διδαχθεί το θεώρημα του Θαλή για να φανεί η δυνατότητα μεταφοράς λόγων μέσω παραλλήλων ευθειών και να προετοιμαστεί διδακτικά η ομοιότητα.

Προτείνονται:

§1.2

- Δραστηριότητα σ. 198
- Παραδείγματα 1, 2, 3, 4 σ. 202-203.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3, 4, 5, 7 σ. 203-204
- Ασκήσεις 5, 6 σ. 205.

§1.3

- Δραστηριότητα της σ. 206 με σκοπό να διατυπωθεί το συμπέρασμα.
- Παράδειγμα 1 της σ. 207
- Ερώτηση κατανόησης 1 σ 208.

§1.5A

Δεν θα γίνει αναφορά στην ομοιοθεσία. Η έννοια της ομοιότητας θα οριστεί με βάση τον κανόνα : «Γενικά. Αν δύο πολύγωνα...» που υπάρχει στο τέλος της σελίδας 215 και θα επέχει θέση ορισμού.

Προτείνονται:

- Παραδείγματα 1, 2 σ. 216-217
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 3, 4 σ. 217–218
- Ασκήσεις 1, 2, 5, 6 σ. 218-219.
- Σημειώνεται ότι η επίλυση της άσκησης 5 μπορεί να στηριχθεί στην εφαρμογή 1 σ. 207.

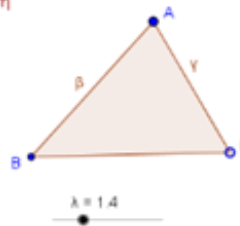
Ενδεικτική δραστηριότητα:

Με το μικροπείραμα «Κριτήριο ομοιότητας 3» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-τριες μπορούν να κατασκευάσουν όμοια τρίγωνα δοσμένου τριγώνου, με συγκεκριμένο λόγο ομοιότητας.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5476>

Μπορείτε να σχεδιάσετε ένα νέο τρίγωνο χρησιμοποιώντας μόνο τη γωνία A και τους λόγους των πλευρών AB/λ και AG/λ :

Βοήθεια Πείραμα Διευκρίνηση



§1.5B

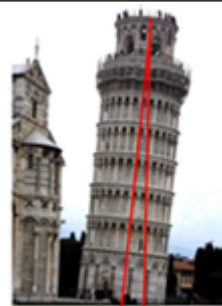
Το κριτήριο ομοιότητας της σ. 220 (από ισότητα γωνιών) θα δοθεί χωρίς αιτιολόγηση.

Προτείνονται:

- Παραδείγματα 1, 2 σ. 220-221
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 3, 4 σ. 221-222
- Ασκήσεις 1, 2, 4, 6, 8 σ. 222–224

Ενδεικτική δραστηριότητα 1^η:

Ένα ζωγράφος δοκιμάζει να ζωγραφίσει τον κεκλιμένο πύργο της Πίζας. Το ύψος του πύργου είναι 60 m και το ύψος που έχει τώρα, λόγω της απόκλισης από την κατακόρυφη, είναι 59,8m. Στο σχέδιό του το ύψος του πύργου θέλει να είναι 30 cm. Αν εσύ ήσουν ο ζωγράφος πόσο θα σχεδιάζες το κατακόρυφο ύψος; Πώς θα ήσουν σίγουρος ότι με αυτές τις διαστάσεις ο πύργος της ζωγραφιάς θα γέρνει όπως ο πύργος της Πίζας;
[Σχόλιο: Στόχος της δραστηριότητας είναι οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιήσουν το λόγο ομοιότητας σχημάτων]



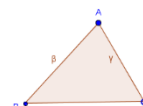
Ενδεικτική δραστηριότητα 2^η:

Το μικροπείραμα «Κριτήριο ομοιότητας 3» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στα κριτήρια ομοιότητας και την κατασκευή γεωμετρικών αντικειμένων στο Geogebra

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5474>

Βοήθεια Πείραμα Δικρέιωση

Μπορείτε να μετακινήτε το ΑΒΓ από την κορυφή Α και να το περιστρέψετε από την κορυφή Γ. Προσπαθήστε να μετακινήσετε το τρίγωνο ΑΒΓ ή το συμμετρικό του ως προς μια πλευρά του (καταπριτσμός) ώστε να ταυτιστούν οι γωνίες Α και Δ.
- Εξετάστε αν οι τρίτες πλευρές είναι παράλληλες.



καταπριτσμός του ΑΒΓ

Κεφάλαιο 2^ο (Να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

§2.1

Ως σύνδεση με την τριγωνομετρία της προηγούμενης τάξης, οι μαθητές/-τριες υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 30°, 45° και 60°.

Επίσης, θεωρείται κεντρική η σύνδεση της τριγωνομετρίας με την ομοιότητα τριγώνων. Η διατήρηση του λόγου δύο πλευρών σε ένα τρίγωνο διατηρείται όταν μεταβαίνουμε σε ένα όμοιο του τρίγωνο. Αυτό μπορεί να αξιοποιηθεί για να αναδείξει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί κατά κάποιον τρόπο «μετρούν» μία γωνία.

Οι μαθητές/-τριες επεκτείνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών γωνιών σε αμβλείες γωνίες. Για την περίπτωση της εφαπτομένης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη γνώση της κλίσης της ευθείας της μορφής $y = ax$, όταν αυτή σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

Προτείνονται:

- Κατά την κρίση του/της διδάσκοντα/-ουσας, μπορεί πλέον (με χρήση ομοιότητας) να τεκμηριωθεί ότι το ημίτονο (αλλά και οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί) μιας οξείας γωνίας παραμένει το ίδιο ανεξάρτητα από το επιλεγόμενο ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο θα υπολογιστεί και εξαρτάται μόνο από την γωνία.
- Για τον πίνακα της σ. 234 συνιστάται να γίνει υπολογισμός των τριγωνομετρικών αριθμών με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος με χρήση ορθογωνίου ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου.
- Εφαρμογή 1 σ. 234.
- Ερωτήσεις κατανόησης 1, 2, 4 σ. 234-235.
- Ασκήσεις 3, 4, 7 σ. 235-236.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Δίνεται στους/στις μαθητές/-τριες ένα μη-ορθογώνιο τρίγωνο και ζητούνται να υπολογιστούν τα στοιχεία του. Από την περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου, αναδεικνύεται η ανάγκη επέκτασης των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες.

§2.2

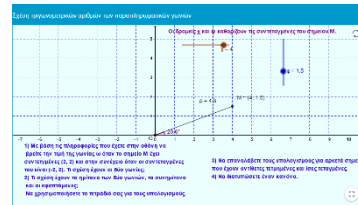
Προτείνονται:

- Δραστηριότητα σ. 237
- Παράδειγμα 1 σ. 238
- Ερώτηση κατανόησης 3 σ. 239
- Ασκήσεις 1, 5 α) β) γ) (όπου να τονιστεί ότι αναζητούμε γωνία μεταξύ 0 και 180 μοιρών), 6, 8 σ. 239.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Σχέση τριγωνομετρικών αριθμών των παραπληρωματικών γωνιών» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για τη σχέση τριγωνομετρικών αριθμών παραπληρωματικών γωνιών.

<http://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/2107>



§2.3

Στόχος είναι οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιούν τις βασικές ταυτότητες για να κάνουν απλούς υπολογισμούς, καθώς και για την απόδειξη απλών τριγωνομετρικών ισοτήτων. Έτσι, προτείνεται να εξαιρεθούν από την διδασκαλία οι ασκήσεις 5, 7, 8, 9 και 10 γιατί είναι εκτός στόχων του αναλυτικού προγράμματος και δεν είναι σε θέση να τις διαπραγματευτούν μόνοι/-ες τους οι περισσότεροι/-ες μαθητές/-τριες.

Προτείνονται:

- Δραστηριότητα σ. 240
- Παραδείγματα 1, 2 σ. 241
- Ασκήσεις 1, 2, 4 σ. 242

ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Οθονών Αφής στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / OER) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή μοzaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Όλα τα παραπάνω αποτελούν καινοτόμα μαθησιακά περιβάλλοντα, εύχρηστα, με πλούσιο οπτικοακουστικό υλικό οικείου χαρακτήρα και εξοικείωσης με την καθημερινότητα των μαθητών/-τριών, που ανταποκρίνονται στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Επίσης, δίνουν στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να οργανώσει το μάθημά του/της,

δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.

- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα στον/στην εκπαιδευτικό να μοιράζεται με τους/τις μαθητές/-τριες εκπαιδευτικό υλικό και να το επαναχρησιμοποιεί, μειώνοντας τον φόρτο εργασίας.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.
- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης διευκολύνουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το σύνολο του υλικού των Οδηγιών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπροπίνακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).
- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:
 - [Συχνές ερωτήσεις](#) Διαδραστικών [Συστημάτων](#).
 - [Χρήσιμα αρχεία](#) Διαδραστικών Συστημάτων.

Για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών**, οι διαδραστικές οθόνες αφής διευκολύνουν τη χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.