

**ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΒΟΡΕΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ**

**ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ)
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
20 ΜΑΪΟΥ 2020**

Η διεξαγωγή του διαγωνίσματος γίνεται στη μνήμη του πρόσφατα εκλιπόντος ε-
ξαίρετου συναδέλφου Ιωάννη Ράλλη, Συντονιστή Εκπαιδευτικού Έργου
ΠΕ03 Β. Αιγαίου.

ΕΠΟΠΤΕΙΑ

Πρόδρομος Ελευθερίου, Μαθηματικός, Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Ράλλης Ιωάννης, **ΖΕΙ ΠΑΝΤΑ ΣΤΟ ΜΥΑΛΟ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΚΑΡΔΙΑ ΜΑΣ,**
συμβάλλει με την επιθυμία του στη διεξαγωγή του
συγκεκριμένου διαγωνίσματος, συντροφεύει και κα-
θοδηγεί τη μαθηματική σκέψη μας από εκεί ψηλά
που βρίσκεται παρέα με τους Αγγέλους.

1. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Λέσβου

- **Ελευθερίου Πρόδρομος,** Μαθηματικός, Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος.
- **Κεφαλός Νικόλαος,** Μαθηματικός στο ΓΕ.Λ. Παμφίλων.
- **Μαμάκος Θωμάς,** Μαθηματικός στο 2ο ΓΕ.Λ. Μυτιλήνης.

2. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Σάμου

- **Γιαννούλης Στέφανος,** Μαθηματικός στο «Πυθαγόρειο» ΓΕ.Λ.
- **Κίννας Κωσταντίνος,** Μαθηματικός στο «Πυθαγόρειο» ΓΕ.Λ.

3. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Χίου

- **Διαμάντας Ανδρέας,** Μαθηματικός στο ΓΕ.Λ. Καλλιμασιάς.
- **Τομάζος Γεώργιος,** Μαθηματικός στο ΓΕ.Λ. Καλλιμασιάς.
- **Τσικαλός Δημήτριος,** Μαθηματικός στο 2ο ΓΕ.Λ. Χίου.

ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ (ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ)

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

20 ΜΑΪΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 7

A2. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f ορισμένης σ' ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3).

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^x}$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \Delta$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $f'(x_0) = 0$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- γ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbb{R} και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- δ) Η συνάρτηση $f(x) = x^a, a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ και $a > 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.
- ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}, \quad g(x) = x+1 \text{ και } h(x) = (f \circ g)(x).$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει πεδίο ορισμό το διάστημα $A = (-1, +\infty)$ (μονάδες 3) και για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} \quad (\text{μονάδες 2})$$

Μονάδες 5

- B2.** Να αποδείξετε ότι, αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - \lambda x) = 1$, τότε:

α) $\lambda = 1$ και

Μονάδες 5

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+1) \cdot h(x)} - \lambda x) = 1$

Μονάδες 5

- B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ολικό ελάχιστο το 4 και μάλιστα η συνάρτηση h μόνο για $x = 1$ παίρνει την τιμή 4.

Μονάδες 5

- B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1} = 4 \sin(2\pi x)$$

έχει στο διάστημα $(-1, +\infty)$ ακριβώς μια λύση, την $x = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $f(x) < 1$
- $f(x) + f(-x) = 1$
- $f'(x) + e^x \cdot f^2(x) = 0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β) $f(x) = \frac{1}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1} : (0,1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \ln \frac{1-x}{x}$$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι, αν $g(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

να ισχύει:

$$g(1-x_0) = f(x_0) = x_0$$

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος (Γ3), τότε να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $(x_0, f^{-1}(x_0))$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση και, επιπλέον, ισχύουν $f(2) = 0$ και $f'(0) = 3$.

Θεωρούμε, επίσης, τη συνάρτηση g με $g(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.

Δ1. α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι για κάθε $x > e$ ισχύει:

$$x^e < e^x$$

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{g(x-e)}{f'(x^e) - f'(e^x)}$$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι, αν $\alpha, \beta > 0$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:

$$(gof')(a^{\ln x} + \beta^{\ln x}) \leq (gof')(2)$$

τότε $\alpha \cdot \beta = 1$.

Μονάδες 4

Δ4. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x+1) \geq f'(2)(x-1)$$

Μονάδες 5

β) Θεωρούμε σημείο $M(x, f(x))$ με $x > 2$ στη γραφική παράσταση της f και το σημείο $A(1, 0)$ του θετικού ημιάξονα Ox . Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου OMA , όπου O η αρχή των αξόνων, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 > 2$ ώστε $E(x_0) = 2020$ τετραγωνικές μονάδες.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο **εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην **αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ