ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Χίου

Τρίωρο ανακεφαλαιωτικό διαγώνισμα (προσομοίωση) στα Μαθηματικά των Ομάδων Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου

Υπό την αιγίδα της

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΒΟΡΕΙΟΥ ΑΙΓΑΙΟΥ

Την εποπτεία του εγχειρήματος είχαν οι :

- **Ελευθερίου Πρόδρομος, επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Λέσβου**
- **Ράλλης Γιάννης, πρώην Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Βορείου Αιγαίου**

Στην επιλογή, επιμέλεια, τελική διαμόρφωση και λύση των θεμάτων συμμετείχαν οι Μαθηματικοί :

- **Διαμάντας Ανδρέας, ΓΕΛ Καλλιμασιάς Χίου**
- **Κεφαλάς Νίκος, ΓΕΛ Παμφύλων Λέσβου**
- **Μαμάκος Θωμάς, 3ο ΓΕΛ Μυτιλήνης Λέσβου**
- **Τομάζος Γιώργος, ΓΕΛ Καλλιμασιάς Χίου**
- **Τσικαλάς Δημήτρης, 2ο ΓΕΛ Χίου**
- **Ψαρός Κώστας, 3ο ΓΕΛ Χίου**

Χίος, 11 Μαΐου 2019

Για τη Διοικούσα Επιτροπή του Παραρτήματος Χίου της Ε.Μ.Ε.

Γιάννης Ράλλης

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 11 ΜΑΪΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι : Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε την κατάλληλη γεωμετρική ερμηνεία.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$.

β. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

γ. Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

δ. Αν δυο συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε πάντοτε ισχύει $f(x) = g(x)$ στο Δ.

ε. Για δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g, για τις οποίες ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$ ισχύει ότι : Οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2x5 = 10

ΘΕΜΑ Β

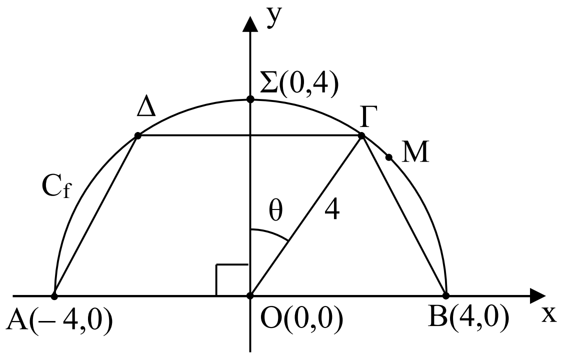
Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[-4,4] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 4$ και
- $x^2 + f^2(x) = 16$ για κάθε $x \in [-4,4]$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (–4,4) (μονάδες 3) και στη συνέχεια ότι $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ για κάθε $x \in [-4,4]$ (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Β2. Η γραφική παράσταση C_f της f είναι το ημικύκλιο του διπλανού σχήματος, το οποίο διέρχεται από τα Α(–4,0), Σ(0,4) και Β(4,0). Τα σημεία Γ και Δ είναι σημεία της C_f για τα οποία ισχύει ΔΓ // ΑΒ. Επίσης θέτουμε $\theta = \Sigma\hat{O}\Gamma$, $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.



α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη σχέση $E(\theta)=16\cdot(\eta\mu\theta+1)\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε το εμβαδόν $E(\theta)$ του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο όταν $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

Μονάδες 8

Β3. Το σημείο Γ είναι μεταξύ του Σ και του μέσου Μ του τόξου $\overset{\frown}{\Sigma B}$ και κάποια στιγμή το Γ αρχίζει να κινείται προς το σημείο Β έτσι, ώστε η γωνία θ να αυξάνει με ρυθμό $0,5\ \text{rad}/\text{sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ΑΒΓΔ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το Γ διέρχεται από το μέσου του τόξου $\overset{\frown}{\Sigma B}$ (δηλαδή όταν $\theta=\pi/4$).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε :

- $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $\ln f(0)=f(0)-1$
- $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0)=1$

Μονάδες 4

β. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν $g(x)=\ln x,\ x>0$ και $h=g\circ f$, τότε :

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα, να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτές της, εφόσον υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $h(x) < \frac{1}{2}x$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της h, τις ευθείες x = 0, x = 2 και τον άξονα x΄ x, να αποδείξετε δείξετε ότι : $E < 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, γνησίως φθίνουσα, κυρτή και για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\ln 2}{x^2+x} = -\frac{1}{2}$.

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$.

Μονάδες 6

Δ2. Αν F είναι μια παράγουσα της f με F(0)=0, τότε να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4F(x)+x^2-4f(0)x}$.

Μονάδες 7

Αν $f(x) = \ln\left(e^x+1\right) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,1)$ για το οποίο ισχύει : $f(x_o) = x_o$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι : $\int_{x_o}^{2x_o} x f'(x-x_o)dx = 2x_0^2 - x_o \ln 2 - \int_0^{x_o} f(x)dx$, όπου x_o ο θετικός αριθμός του ερωτήματος Δ3.

Μανάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω – πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

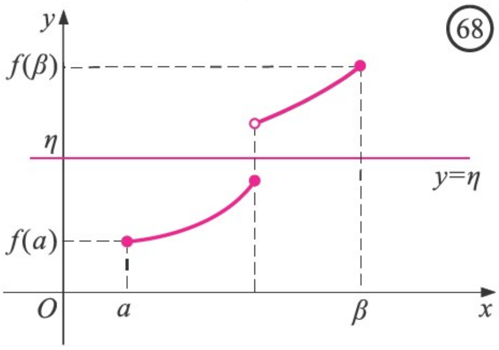
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

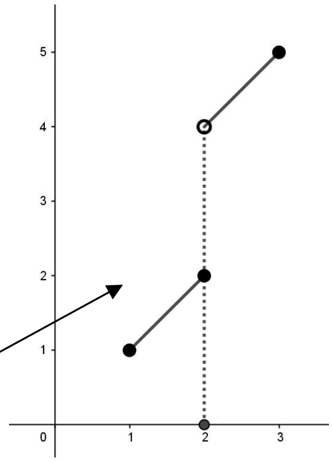
Α1. Θεωρία από το βιβλίο σελ. 142, 143 (Θεώρημα Fermat)

Α2. **α.** Ψ

β. Για να ισχύει ο ισχυρισμός θα πρέπει η f να είναι επιπλέον και συνεχής στο [α,β]. Θεωρούμε τα εξής αντιπαραδείγματα :
Αντιπαράδειγμα 1. Το σχήμα 68 της σελίδας 76 του βιβλίου
Αντιπαράδειγμα 2. Η συνάρτηση f του παρακάτω σχήματος.



$$f(x)=\begin{cases} x & ,\ \text{αν } x\in[1,2] \\ x+2, & \text{αν } x\in(2,3]\end{cases}$$



Α3. Θεωρία από το βιβλίο σελ. 128 – 129.

Α4. αΛ, βΣ, γΛ, δΛ, εΣ.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Στο $(-4,4)$ έχουμε $f(x)\neq 0$ (γιατί $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow 16-x^2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-4$). Επίσης η f είναι συνεχής στο $(-4,4)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $f(0)=4>0$, άρα $f(x)>0$ στο $(-4,4)$.

Επομένως η $x^2+f^2(x)=16 \Leftrightarrow f^2(x)=16-x^2 \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{16-x^2}$ στο $(-4,4)$.

Όμως οι τιμές $f(4)=0$ και $f(-4)=0$ περιλαμβάνονται στον παραπάνω τύπο, οπότε έχουμε $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ στο $[-4,4]$.

Β2. **α.** Επειδή $Ο\Gamma=4$, είναι $ΟΚ=4\cdot συνθ$ και $Κ\Gamma=4\cdot ημθ$. Άρα το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι $E(\theta)=\dfrac{(AB+\Delta\Gamma)\cdot OK}{2}=\dfrac{(8+2\cdot 4ημθ)\cdot 4συνθ}{2}=16(ημθ+1)\cdot συνθ$

β. Έχουμε $E'(\theta)=16\left[(ημθ+1)\cdot συνθ\right]'=16\left[συνθ\cdot συνθ-(ημθ+1)\cdot ημθ\right]=$

$=16\left[συν^2θ-ημ^2θ-ημθ\right]=16\left[1-ημ^2θ-ημ^2θ-ημθ\right]=$

$=16\left[-2ημ^2θ-ημ^2θ+1\right]=-32(ημθ+1)\left(ημθ-\dfrac{1}{2}\right)$.

Εξετάζω πότε $E'(\theta)>0 \Leftrightarrow ημθ-\dfrac{1}{2}<0 \Leftrightarrow ημθ<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ ημθ < ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow\ θ < \frac{π}{6}$.

Επομένως για $θ = \frac{π}{6}$ το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο.

θ	0	$\frac{π}{6}$	$\frac{π}{2}$
$E'(θ)$	+	0	−
$E(θ)$	↗		↘

Ο.Μ.

Β4. Έστω θ(t) η γωνία θ και E(t) το εμβαδόν του ΑΒΓΔ. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ είναι $θ'(t) = 0,5$ rad / sec.

Τότε $E(t) = 16\left(ημθ(t)+1\right)\cdot συνθ(t)$ (1). Ζητούμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $θ(t_0) = \frac{π}{4}$.

Παραγωγίζουμε την (1) ως προς t και έχουμε :

$$E'(t) = 16\left[συνθ(t)\cdot θ'(t)\cdot συνθ(t) - \left(ημθ(t)+1\right)ημθ(t)\cdot θ'(t)\right] =$$

$$= 16\left[συν^2θ(t)\cdot θ'(t) - \left(ημ^2θ(t) + ημθ(t)\right)\cdot θ'(t)\right] =$$

$$= 16\cdot θ'(t)\left(συν^2θ(t) - ημ^2θ(t) - ημθ(t)\right) = 8\cdot\left(συν^2θ(t) - ημ^2θ(t) - ημθ(t)\right)$$

Για $t = t_0$ έχουμε $E'(t_0) = 8\left(συν^2θ(t_0) - ημθ^2(t_0) - ημθ(t_0)\right) =$

$$= 8\left(συν^2\frac{π}{4} - ημ^2\frac{π}{4} - ημ\frac{π}{4}\right) = 8\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{2} \text{ τ.μ.μ./ sec}.$$

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. **α.** Γνωρίζουμε ότι $\ln x \le x - 1$ και ότι το «=» ισχύει μόνο για $x = 1$. Επομένως η σχέση $\ln f(0) = f(0) - 1$ ισχύει μόνο όταν $f(0) = 1$.

β. Η $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\ln f(x)\right)' = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)'$, οπότε

$\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$. Για $x = 0$ έχουμε $\ln f(0) = \frac{1}{2}\ln(0^2+1) + c \Leftrightarrow c = 0$.

Άρα $\ln f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Leftrightarrow f(x) = \ln\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Γ2 Είναι $h(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \ln\sqrt{x^2+1}$

Άρα $h'(x) = \left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{x}{x^2+1}$

Επίσης $h''(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

Σύνολο τιμών. Είναι

$h(\mathbb{R}) = h\left((-\infty,0]\right) \cup h\left([0,+\infty)\right) =$

$= \left[h(0), \lim_{h\to-\infty} h(x)\right) \cup \left[h(0), \lim_{h\to+\infty} h(x)\right) =$

$= [0,+\infty) \cup [0,+\infty) = [0,+\infty)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘		↗

Ο.Ε. $h(0) = 0$

x	$-\infty$	−1	1	$+\infty$
$h''(x)$	−	0	+ 0	−
$h(x)$	∩		∪	∩

Σ.Κ. Σ.Κ.

γιατί $\lim\limits_{h\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{h\to+\infty} h(x) = +\infty$.

Ασύμπτωτες. Π.Ο είναι το $\mathbb{R}$ και η h είναι συνεχής, άρα δεν έχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\sqrt{x^2+1}\right)'}{(x)'} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0$$, οπότε λ=0.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ Επομένως δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Όμοια δεν υπάρχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = h(x) - \frac{1}{2}x,\ x\in\mathbb{R}$, όπου

$$g'(x) = h'(x) - \frac{1}{2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x-x^2-1}{2\left(x^2+1\right)} = -\frac{(x-1)^2}{2\left(x^2+1\right)} < 0 \text{ στο } (-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

Επίσης η g είναι συνεχής στο 1. Επομένως η g στο $\mathbb{R}$ είναι γν. φθίνουσα.

Τότε η $h(x) < \frac{1}{2}x \Leftrightarrow h(x) - \frac{1}{2}x < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(0) \Leftrightarrow x > 0$, αφού η η g είναι γν. φθίνουσα.

Γ4. Είναι η $h(x) \geq 0,\ x\in\mathbb{R}$, οπότε το $E = \int_0^2 h(x)\,dx$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_0^2 h(x)\,dx < 1 \Leftrightarrow \int_0^2 h(x)\,dx < \int_0^2 \frac{x}{2}dx \Leftrightarrow \int_0^2 \left[h(x) - \frac{x}{2}\right]dx < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \int_0^2 g(x)dx < 0$, που ισχύει γιατί $g(0) = 0$ και $g(x) < g(0) = 0$ στο (0,2], αφού η g είναι γν. φθίνουσα.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. Είναι $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\ln2}{x(x+1)} = -\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to0}\left[x(x+1)\right] = 0\end{array}\right\}$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-\ln2}{x(x+1)}\cdot\left[x(x+1)\right]\right] = -\dfrac{1}{2}\cdot0$, δηλαδή

$\lim\limits_{x\to0}\left(f(x)-\ln2\right) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0} f(x) = \ln2$. Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε έχουμε $f(0) = \ln2$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε $f'(0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\ln2}{x}$

Είναι $\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\ln2}{x(x+1)} = -\dfrac{1}{2}\\ \lim\limits_{x\to0}(x+1) = 1\end{array}\right\}$, οπότε $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{f(x)-\ln2}{x(x+1)}\cdot(x+1)\right] = -\dfrac{1}{2}\cdot1$, δηλαδή

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-\ln2}{x} = -\dfrac{1}{2}$, άρα $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0,f(0)\right)$ είναι η :

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - \ln 2 = -\frac{1}{2}(x-0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Δ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{4F(x)+x^2-4f(0)x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2x)'}{\left(4F(x)+x^2-4f(0)x\right)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{4f(x)+2x-4f(0)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2f(x)+x-2f(0)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2f(x)+x-2\ln 2}$ (1).

Όμως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, άρα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$, δηλ. $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2 \Leftrightarrow 2f(x) + x - 2\ln 2 \geq 0$ με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 0$. Άρα $2f(x)+x-2\ln 2 > 0$ στο $(-\infty, 0)\cup(0,+\infty)$ (2). Επιπλέον είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left(2f(x)+x-2f(0)\right) = 2f(0)+0-2f(0) = 0$ (3).

Από τις (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2f(x)+x-2f(0)} = +\infty$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{4F(x)+x^2-4f(0)x} = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, ορισμένη και συνεχή στο (0,1), για την οποία $g(0) = f(0) - 0 = \ln 2 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 = \ln(e+1) - 1 - 1 =$
$= \ln(e+1) - 2 < 0$ (γιατί $\ln(e+1) < 2 \Leftrightarrow \ln(e+1) < \ln e^2 \Leftrightarrow e+1 < e^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow e^2 - e - 1 > 0$ που ισχύει). Επομένως $g(0)\cdot g(1) < 0$. Τότε από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$, το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η g είναι γν. φθίνουσα ($g'(x) = f'(x) - 1 = -\dfrac{1}{x^2+1} - 1 < 0$).

Δ4. Θέτουμε $u = x - x_0$, οπότε $du = dx$. Για $x = x_0$ έχουμε $u = 0$ και για $x = 2x_0$ έχουμε $u = x_0$.

Επομένως $\displaystyle\int_{x_o}^{2x_o} x f'(x - x_o)\,dx = \int_0^{x_o} (u + x_0) f'(u)\,du =$

$$= \int_0^{x_o} u \cdot f'(u)\,du + \int_0^{x_o} x_0 \cdot f'(u)\,du = \left[u \cdot f(u)\right]_0^{x_o} - \int_0^{x_o} (u)' \cdot f(u)\,du + x_0 \int_0^{x_o} f'(u)\,du =$$

$$= x_o f(x_o) - \int_0^{x_o} f(u)\,du + x_0\left[f(u)\right]_0^{x_0} = x_o f(x_o) - \int_0^{x_o} f(u)\,du + x_0\left[f(x_0) - f(0)\right] =$$

$$= x_o{}^2 - \int_0^{x_o} f(u)\,du + x_0 f(x_0) - x_0 f(0) = 2x_o{}^2 - x_0 \cdot \ln 2 - \int_0^{x_o} f(x)\,dx\,.$$