ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

1. **Ιωάννης Ράλλης,** Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03 με έδρα τη Σάμο.
2. **Πρόδρομος Ελευθερίου,** Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03.
3. **Ανδρέας Διαμάντας,** Μαθηματικός του Γ.Ε.Λ. Καλλιμασιάς Χίου.
4. **Θωμάς Μαμάκος,** Μαθηματικός του 2ου Γ.Ε.Λ. Μυτιλήνης.
5. **Νικόλαος Κεφαλάς,** Μαθηματικός του Γ.Ε.Λ. Παμφίλων Λέσβου.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΜΑΪΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, τότε η f είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] με $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα x΄x.

δ) Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα (α,β) οι οποίες έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ε) Για κάθε ζεύγος συνεχών συναρτήσεων f, g στο $\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

Μονάδες 2x5 = 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει αντίστροφη (μονάδες 3) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει:

$$f(x) \leq x \leq f^{-1}(x)$$

Μονάδες 6

Β3. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία y = x και τις ευθείες x = 1 και x = λ, λ > 1, τότε να αποδείξετε ότι:

$$E = \ln\left(\lambda^2+2\right) - \ln 3$$

Μονάδες 6

Β4. Αν το λ αυξάνεται με ρυθμό $3\,\text{cm}/\text{sec}$, τότε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του ερωτήματος **Β3** όταν λ = 2 cm.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η δεύτερη παράγωγος είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Αν η ευθεία $y=1$ είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\left(1, f(1)\right)$ και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(1+h)-f'(1-h)}{h}=0$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(1)=1$ και $f'(1)=0$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο $x_0=1$.

Μονάδες 6

Γ3. **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι:

$$2F(x+1) < F(x)+F(x+2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4. Αν επιπλέον ισχύει:

$$\left|f'(x)+6\alpha x\right| = 3\left(x^2+1\right) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha>0,$$

τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-3x^2+3x$.

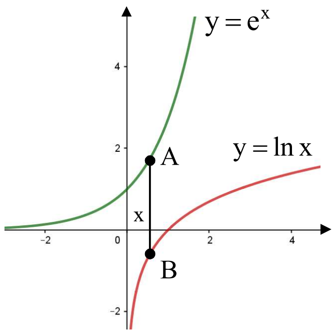
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R} \text{ και } g(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x)=f(x)-g(x)$, $x>0$.



Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε: $H'(x_0)=0$.

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι στο σημείο x_o του ερωτήματος **Δ1** η κατακόρυφη απόσταση (AB), όπου $A(x,e^x)$ και $B(x,\ln x)$, παίρνει τη μικρότερη τιμή, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$H(x_0)=x_0+\frac{1}{x_0}.$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

$H(x)>2$ για κάθε $x>0$ (μονάδες 4) και $\int_1^2 \frac{e^x-\ln x}{x^2}\,dx>1$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(x\cdot H(x)\right)'>1 \text{ για κάθε } x>0 \text{ (μονάδες 2)}$$

και να λύσετε την ανίσωση:

$$e^x-\ln x\le\frac{e}{x} \text{ (μονάδες 2).}$$

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Δυνατή αποχώρηση : Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελ. 106.

Α2. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελ. 162 (Ορισμός).

Α3. **α.** Ψ

β. Αντιπαράδειγμα: Σχολικό βιβλίο σελ. 134.

Α4. Σ, Σ, Σ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f'(x)=\dfrac{x^4+6x^2}{\left(x^2+2\right)^2}$, οπότε $f'(x)>0$ στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και f συνεχής στο 0.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι και «1 – 1», οπότε ορίζεται η αντίστροφή της. Πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $f(A)$. Όμως $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)= =\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} x, \lim\limits_{x\to+\infty} x\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επομένως η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Β2. $f(x)\le x \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{x^2+2}\le x \Leftrightarrow x^3\le x\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow 2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$, που ισχύει.

$x\le f^{-1}(x) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\le f\left(f^{-1}(x)\right) \Leftrightarrow f(x)\le x$, που ισχύει από το προηγούμενο.

Β3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^\lambda [x-f(x)]dx=\int_1^\lambda\left(x-\dfrac{x^3}{x^2+2}\right)dx=\int_1^\lambda \dfrac{2x}{x^2+2}dx$

$=\left[\ln\left(x^2+2\right)\right]_1^\lambda=\ln\left(\lambda^2+2\right)-\ln3$.

Β4. Το λ άρα και το εμβαδόν Ε είναι συνάρτηση του χρόνου t και επομένως έχουμε $E(t)=\ln\left(\lambda^2(t)+2\right)-\ln3$.

Άρα $E'(t)=\left[\ln\left(\lambda^2(t)+2\right)\right]'=\dfrac{2\lambda(t)\cdot\lambda'(t)}{\lambda^2(t)+2}=\dfrac{2\lambda(t)\cdot 3}{\lambda^2(t)+2}=\dfrac{6\cdot\lambda(t)}{\lambda^2(t)+2}$ (1).

Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $\lambda(t_0)=2$.

Η (1) για $t=t_0$ δίνει $E'(t_0)=\dfrac{6\cdot\lambda(t_0)}{\lambda^2(t_0)+2}=\dfrac{6\cdot2}{2^2+2}=\dfrac{12}{6}=2\ cm^2/sec$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η $\varepsilon: y=1$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\left(1,f(1)\right)$, θα είναι $f(1)=1$ και $f'(1)=\lambda_\varepsilon=0$.

Γ2. Επειδή $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=0$ με De L'Hospital έχουμε ότι $f''(1)=0$

Επειδή $f''(1)=0$ και η f'' είναι γνησίως αύξουσα θα ισχύει $f''(x)>0$ για $x>1$ και $f''(x)<0$ για $x<1$. Άρα η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0=1$.

Γ3. **α.** Για $x>1$ έχουμε $f''(x)>0$ και για $x<1$ έχουμε $f''(x)<0$, οπότε η f' γν. αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $(-\infty,1]$. Επομένως η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$, δηλ. $f'(x)>f'(1)=0$, για $x\neq 1$. Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, λόγω συνέχειας στο $x_0=1$.

β. Η ζητούμενη σχέση προκύπτει από την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα $[x,x+1]$ και $[x+1,x+2]$ και λαμβάνοντας υπόψη τη μονοτονία της f.

Γ4. Για $x=1$ έχουμε $|6\alpha|=6$, οπότε α = 1, γιατί α > 0.

Επομένως $|f'(x)+6x|=3(x^2+1)\neq 0$ και η συνάρτηση $f'(x)+6x$ συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο και είναι θετική για x = 1. Άρα $f'(x)+6x>0$, για κάθε x.

Συνεπώς $f'(x)+6x=3(x^2+1)$.

Έχουμε: $f'(x)+6x=3(x^2+1)\Rightarrow \left(f(x)+6\right)'=\left(x^3+3x\right)'$ κ.λ.π.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού $H(x)=f(x)-g(x)$, έχουμε $H'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$

Η H' είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, $H'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$ και $H'(1)=e-1>0$, οπότε σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ με $H'(x_0)=0$.

$H''(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$, άρα η $H'\uparrow$, άρα το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2. Η κατακόρυφη απόσταση $(AB)=\left|e^x-\ln x\right|=e^x-\ln x$, γιατί $e^x>\ln x$.

- $x>x_0 \overset{H'\uparrow}{\Rightarrow} H'(x)>H'(x_0)=0$, οπότε $H\uparrow$ στο $[x_0,+\infty)$
- $0<x<x_0 \overset{H'\uparrow}{\Rightarrow} H'(x)<H'(x_0)=0$ οπότε $H\downarrow$ στο $(0,x_0]$

Άρα η Η παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το $H(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0$.

Έχουμε: $H'(x_0)=0 \Leftrightarrow e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0 \Leftrightarrow e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0} \Leftrightarrow \ln e^{x_0}=\ln\dfrac{1}{x_0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0=-\ln x_0$, οπότε $H(x_0)=x_0+\dfrac{1}{x_0}$.

Δ3.

Απόδειξη της Η(x)>2.

▶ **<u>1ος τρόπος</u>**

Είναι $H(x)\geq H(x_0)$. Όμως

$H(x_0)=x_0+\dfrac{1}{x_0}>2 \Leftrightarrow (x_0-1)^2>0$, που ισχύει γιατί $x_0\neq 1$ αφού $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

► **2ος τρόπος**

$$\left.\begin{array}{l} e^x > x+1,\ x>0 \\ \ln x \le x-1,\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^x > x+1,\ x>0 \\ -\ln x \ge x-1,\ x>0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^x - \ln x > 2,\ x>0$$

Σχόλιο

Κάποιος μαθητής θεώρησε τη συνάρτηση $g(x) = x + \frac{1}{x}$ τη μελέτησε ως προς τη μονοτονία και βρήκε ότι παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο x=1, οπότε έγραψε:

$g(x_o) = x_o + \frac{1}{x_o} > 2$ αφού $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

Απόδειξη της $\int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2}dx > 1$

► **1ος τρόπος**

$$e^x - \ln x > 2 \Rightarrow \frac{e^x - \ln x}{x^2} > \frac{2}{x^2},\ x>0 \Rightarrow \int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2}dx > \int_1^2 \frac{2}{x^2}dx = 1$$

► **2ος τρόπος**

Στο Δ2 αποδείξαμε ότι η $H(x)$ είναι $\uparrow (x_0,+\infty)$, $x_0<1$. Άρα για $x \ge 1$ έχουμε:

$H(x) \ge H(1) \Rightarrow e^x - \ln x \ge e \Rightarrow \frac{e^x - \ln x}{x^2} \ge \frac{e}{x^2}$ και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για x=1, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2}dx > \int_1^2 \frac{e}{x^2}dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2}dx > \frac{e}{2} > 1.$$

► **3ος τρόπος**

Έχουμε:

$$e^x - \ln x > 2,\ x>0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} - \ln\frac{1}{x} > 2,\ x>0 \Rightarrow \int_{1/2}^1 e^{\frac{1}{x}} - \ln\frac{1}{x}\ dx > \int_{1/2}^1 2\ dx = 1,\ (1)$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ οπότε:

- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 2$, $x = 1 \Rightarrow u = 1$
- $x = \frac{1}{u} \Rightarrow dx = -\frac{1}{u^2}du$.
- $\int_{1/2}^1 e^{\frac{1}{x}} - \ln\frac{1}{x}\ dx = \int_2^1 \frac{e^u - \ln u}{-u^2}\ du = \int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2}\ dx$, (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $\int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2}\ dx > 1$

Δ4. Απόδειξη της $(x \cdot H(x))' > 1$ για κάθε x > 0.

Έχουμε:

$$(xH(x))' > 1 \Leftrightarrow H(x) + xH'(x) > 1 \Leftrightarrow e^x - \ln x + x\left(e^x - \frac{1}{x}\right) > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (e^x - \ln x) + xe^x > 2 \Leftrightarrow H(x) + xe^x > 2,\ \text{που ισχύει}.$$

Επίλυση της ανίσωσης $e^x - \ln x \le \dfrac{e}{x}$

Έχουμε:

$$e^x - \ln x \le \frac{e}{x} \Leftrightarrow x\left(e^x - \ln x\right) \le e \Leftrightarrow x \cdot H(x) \le e \ (1)$$

Έστω $\Phi(x) = x \cdot H(x)$. Είναι $\Phi'(x) > 1 > 0$, οπότε η $\Phi \uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

$(1) \Leftrightarrow \Phi(x) \le e \Leftrightarrow \Phi(x) \le \Phi(1) \Leftrightarrow 0 < x \le 1$.

Σχόλιο

Μια ακόμη απόδειξη της ανισότητας $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2} dx > 1$ του ερωτήματος Δ3.

Η συνάρτηση $\Phi(x) = x \cdot H(x) = x\left(e^x - \ln x\right)$, που θεωρήσαμε στο ερώτημα Δ4 είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε:

$$x \ge 1 \Rightarrow \Phi(x) \ge \Phi(1) \Rightarrow x\left(e^x - \ln x\right) \ge e \Rightarrow e^x - \ln x \ge \frac{e}{x} \Rightarrow \frac{e^x - \ln x}{x^2} \ge \frac{e}{x^3}$$

και επειδή η ισότητα ισχύει μόνο για x=1, συμπεραίνουμε ότι:

$$\int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2} dx > \int_1^2 \frac{e}{x^3} dx \Rightarrow \int_1^2 \frac{e^x - \ln x}{x^2} dx > \frac{3e}{8} > 1$$