Thanasis Xenos

(8) Αν η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+\alpha)-f(x-\alpha)\right),\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 14-12-2016

Λύση

Αν η ευθεία y=λx+β είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞, τότε θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\beta$$

Θέτουμε $g(x)=f(x)-\lambda x$. Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\beta$ και $f(x)=g(x)+\lambda x$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+\alpha)-f(x-\alpha)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(g(x+\alpha)+\lambda(x+\alpha)-\big(g(x-\alpha)+\lambda(x-\alpha)\big)\Big)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x+\alpha)-g(x-\alpha)+2\alpha\lambda\right),\ (1)$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\beta$ θα έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x+\alpha)\overset{u=x+\alpha}{=}\lim\limits_{u\to+\infty} g(u)=\beta$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x-\alpha)\overset{u=x-\alpha}{=}\lim\limits_{u\to+\infty} g(u)=\beta$.

Άρα, λόγω της (1), συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+\alpha)-f(x-\alpha)\right)=2\alpha\lambda.$$