Άσκηση **Panos Gribaviotis**
https://www.facebook.com/groups/119060981470596/?fref=nf

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει

$(2x-1)\big(2f(x)-x\big)>0$ για κάθε $x\neq\frac{1}{2}$

Αν υπάρχει το $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ να δείξετε ότι $f'\left(\frac{1}{2}\right)\geq\frac{1}{2}$

ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 13-12-2016

Λύση

Είναι: $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$ και $(2x-1)(2f(x)-x)>0$ για κάθε $x\neq\frac{1}{2}$.

- Αν $0\leq x<\frac{1}{2}$, τότε $f(x)<\frac{1}{2}x$ και επειδή f συνεχής στο $x_o=\frac{1}{2}$, θα ισχύει:

  $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}f(x)\leq\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{1}{2}x\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{4}$.

- Αν $\frac{1}{2}<x\leq1$, τότε $f(x)>\frac{1}{2}x$ και επειδή f συνεχής στο $x_o=\frac{1}{2}$, θα ισχύει:

  $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}f(x)\geq\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(\frac{1}{2}x\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\geq\frac{1}{4}$. Άρα $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Έχουμε:

$$0\leq x<\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)<\frac{1}{2}x\Rightarrow f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}>\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}\geq\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right)\geq\frac{1}{2}$$