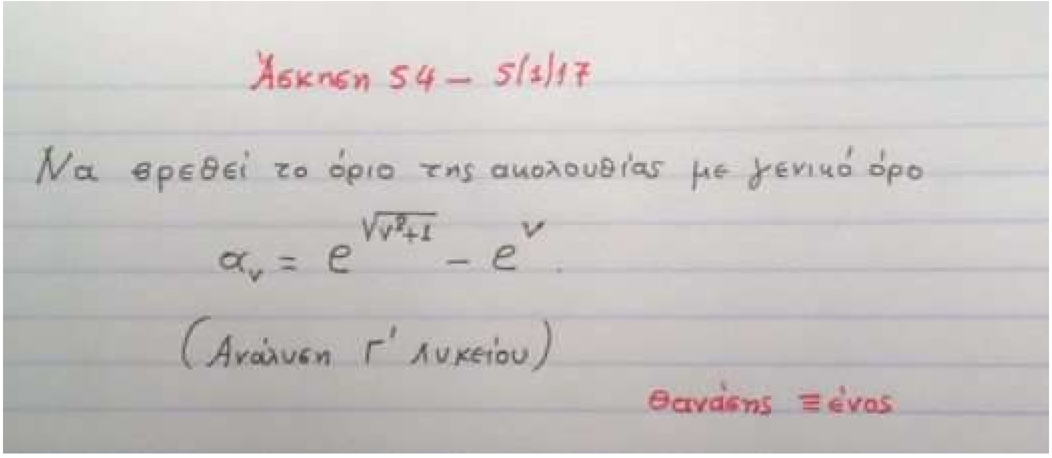
Άσκηση 54 – 5/1/17

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας με γενικό όρο

$$\alpha_\nu = e^{\sqrt{\nu^2+1}} - e^{\nu}.$$

(Ανάλυση Γ' λυκείου)

Θανάσης Ξένος

Λύση

ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 5-1-2017

Σχόλιο.

Για το όριο της σύνθετης συνάρτησης $f\left(g(x)\right)$ γνωρίζουμε ότι:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ u=g(x) \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=u_o \\ \bullet\ \lim\limits_{u\to u_o} f(u)=\ell \\ \bullet\ g(x)\neq u_o \text{ κοντά στο } x_o \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f\left(g(x)\right)=\lim_{u\to u_o} f(u)$$

Άρα έχουμε το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα

Αν για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=\ell$, τότε για κάθε ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu\in A$, $\alpha_\nu\neq x_o$ ($\nu>\nu_o\in\mathbb{N}$) και $\lim a_\nu = x_o$, η αντίστοιχη ακολουθία f(α_ν) των τιμών της f έχει επίσης όριο ℓ.

Εφαρμογή. Να αποδειχθεί ότι $\lim \frac{3^\nu}{\nu^2}=+\infty$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{3^x}{x^2}$.

(Η ακολουθία (α_ν) με $\alpha_\nu = \dfrac{3^\nu}{\nu^2}$ είναι ο περιορισμός της f στο $\mathbb{N}^*$)

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{x^2} \underset{DHL}{\overset{+\infty/+\infty}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x \ln 3}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^x (\ln 3)^2}{2} = +\infty .$$

Άρα: $\lim \dfrac{3^\nu}{\nu^2} = +\infty$

Ας έρθουμε τώρα στην άσκηση 54.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x$ και την ακολουθία (x_ν) με $x_\nu = \nu$.

Είναι $f(x_\nu) = e^{\sqrt{\nu^2+1}} - e^\nu$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x\right) = +\infty$,

Βλέπε Θ. Ξένος
https://www.facebook.com/photo.php?fbid=238132026600421&set=a.238311146582509.1073741831.100012108761525&type=3&theater

Βλέπε Παύλος Τρύφων

https://www.facebook.com/photo.php?fbid=10211441719509373&set=p.10211441719509373&type=3&theater

Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \lim x_\nu = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x_\nu) = +\infty$$

Δηλαδή: $\lim\left(e^{\sqrt{\nu^2+1}} - e^\nu\right) = +\infty$