ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 9-1-2017

ΑΣΚΗΣΗ

Αν για τους θετικούς αριθμούς x_1,x_2,x_3 ισχύει $x_1+x_2+x_3=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$-x_1\ln x_1 - x_2\ln x_2 - x_3\ln x_3 \le \ln 3, \quad (1)$$

Για ποιες τιμές των x_1,x_2,x_3 η (1) ισχύει ως ισότητα;

Λύση

1^{ος} τρόπος

Έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow -x_1\ln x_1 - x_2\ln x_2 - x_3\ln x_3 - \ln 3 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1\ln\frac{1}{x_1} + x_2\ln\frac{1}{x_2} + x_3\ln\frac{1}{x_3} + \ln\frac{1}{3} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1\ln\frac{1}{x_1} + x_2\ln\frac{1}{x_2} + x_3\ln\frac{1}{x_3} + (x_1+x_2+x_3)\ln\frac{1}{3} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1\left(\ln\frac{1}{x_1}+\ln\frac{1}{3}\right)+x_2\left(\ln\frac{1}{x_2}+\ln\frac{1}{3}\right)+x_3\left(\ln\frac{1}{x_3}+\ln\frac{1}{3}\right) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1\ln\frac{1}{3x_1}+x_2\ln\frac{1}{3x_2}+x_3\ln\frac{1}{3x_3} \le 0 \ .$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής γιατί:

Από τη σχέση $\ln x \le x-1$ η οποία ισχύει για κάθε $x>0$, και μάλιστα ισχύει ως ισότητα μόνο για $x=1$, έχουμε:

- $\ln\frac{1}{3x_1} \le \frac{1}{3x_1} - 1 \Rightarrow x_1\ln\frac{1}{3x_1} \le \frac{1}{3} - x_1.$

  Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{1}{3x_1}=1$, δηλαδή $x_1=\frac{1}{3}$.

- $\ln\frac{1}{3x_2}\leq\frac{1}{3x_2}-1\Rightarrow x_2\ln\frac{1}{3x_2}\leq\frac{1}{3}-x_2$.

  Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{1}{3x_2}=1$, δηλαδή $x_2=\frac{1}{3}$.

- $\ln\frac{1}{3x_3}\leq\frac{1}{3x_3}-1\Rightarrow x_3\ln\frac{1}{3x_3}\leq\frac{1}{3}-x_3$.

  Η ισότητα ισχύει όταν $\frac{1}{3x_3}=1$, δηλαδή $x_3=\frac{1}{3}$.

  με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$x_1\ln\frac{1}{x_1}+x_2\ln\frac{1}{x_2}+x_3\ln\frac{1}{x_3}\leq\left(\frac{1}{3}-x_1\right)+\left(\frac{1}{3}-x_2\right)+\left(\frac{1}{3}-x_3\right)\Rightarrow$$

$$x_1\ln\frac{1}{x_1}+x_2\ln\frac{1}{x_2}+x_3\ln\frac{1}{x_3}\leq 0$$

Είναι επίσης προφανές ότι η (1) ισχύει ως ισότητα μόνο όταν:

$$x_1=x_2=x_3=\frac{1}{3}.$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=xlnx. Είναι $f'(x)=1+\ln x$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f είναι κυρτή.

Θα αποδείξουμε ότι:

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\geq 3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right),\ (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x_1)+f(x_2)+f(x)-3f\left(\frac{x_1+x_2+x}{3}\right)$$

την οποία μελετούμε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x_o=\frac{x_1+x_2}{2}$, οπότε για κάθε x>0 ισχύει:

$g(x) \geq g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \ldots = f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, (3)

Επειδή όμως η f είναι κυρτή, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι θα ισχύει:

$$f(x_1)+f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), \ (4)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x_1=x_2$.

Επειδή λοιπόν οι (3) και (4) ισχύουν συμπεραίνουμε ότι $g(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$.

Άρα $g(x_3)\geq 0$, οπότε και επομένως:

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)-3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \geq 0.$$

Έχουμε:

$$f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) = x_1\ln x_1 + x_2\ln x_2 + x_3\ln x_3$$

$$3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = 3\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\ln\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

Άρα: $x_1\ln x_1 + x_2\ln x_2 + x_3\ln x_3 + \ln 3 \geq 0$. Επομένως η (1) ισχύει.

Είναι επίσης προφανές ότι η (1) ισχύει ως ισότητα μόνο όταν:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}.$$