ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΑΤΣΗΣ

Δίνεται συνάρτηση f:IR→IR με συνεχή πρώτη παράγωγο και F μια παράγουσα της f στο IR.

Δίνεται επιπλέον ότι:

- $f'(x)\neq 0$ για κάθε x∈IR.
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(1+h)-f^2(1-h)}{h}=4$
- F(1)=1
- $\int_1^{f(1)}\left(e^{\eta\mu t}-\eta\mu t\right)dt=0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=f(1)=1$.

Γ2. Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{F(x)}$

Γ4. Να αποδείξετε ότι $f(x+1)+f(x)<F(x+2)-F(x)<f(x+2)+f(x+1)$ για κάθε x∈IR.

Λύση

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ

Μυτιλήνη, 28-12-2016

Γ1.

- **Θα αποδείξουμε ότι f(1)=1**.

Έχουμε:

Για κάθε x∈IR ισχύει $e^x>x$. Πράγματι:

Επειδή $\ln x<x$ για κάθε $x>0$, θέτοντας όπου x το e^x παίρνουμε $\ln e^x<e^x$, δηλ. $x<e^x$.

Οπότε: $e^{\eta\mu t}-\eta\mu t>0$ και επειδή $\int_1^{f(1)}\left(e^{\eta\mu t}-\eta\mu t\right)dt=0$ θα είναι f(1)=1 γιατί:

Αν f(1)>1, τότε $\int_1^{f(1)}\left(e^{\eta\mu t}-\eta\mu t\right)dt>0$, άτοπο.

Αν f(1)<1, τότε $\int_{f(1)}^{1}\left(e^{\eta\mu t}-\eta\mu t\right)dt>0\Rightarrow-\int_1^{f(1)}\left(e^{\eta\mu t}-\eta\mu t\right)dt>0$, άτοπο.

- **Θα αποδείξουμε ότι** $f'(1)=1$

Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f^2(1+h)-f^2(1-h)}{h}\overset{0/0}{\underset{DLH}{=}}\lim_{h\to 0}2f(1+h)f'(1+h)+2f(1-h)f'(1-h)=4f(1)f'(1)$$

Άρα $4f(1)f'(1)=4$. Όμως f(1)=1, επομένως $f'(1)=1$.

Γ2. Είναι $F'(x)=f(x)$.

Όμως $f'(x)\neq 0$ για κάθε x∈IR και f' συνεχής, άρα η f' διατηρεί πρόσημο στο διάστημα (-∞,+∞) και επειδή $f'(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x)>0$ για κάθε x∈IR.

Άρα η f, οπότε και η F', είναι γνησίως αύξουσα και επομένως η F είναι κυρτή.

Γ3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot \eta\mu x\cdot \eta\mu\frac{1}{x}}{F(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\cdot\dfrac{\eta\mu x}{F(x)}\right)$, **(1)**

Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)\overset{u=1/x}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$, **(2)**
- Η F είναι κυρτή άρα η C_f είναι πάνω από την εφαπτομένη της C_F σε κάθε σημείο του IR με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Η εφαπτομένη της C_F στο σημείο της A(1,F(1)) είναι ευθεία ε: y=x. Πράγματι:

$$y-F(1)=F'(1)(x-1)\Rightarrow y-1=x-1\Rightarrow y=x$$

Άρα F(x)≥x για κάθε x∈IR. Η ισότητα ισχύει μόνο για x=1.

Επειδή F(x)≥x και $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. Άρα:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{F(x)}=0$ και F(x)>0 για x «κοντά» στο +∞

Για x «κοντά» στο +∞ έχουμε:

$$\left|\frac{\eta\mu x}{F(x)}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{|F(x)|}\leq\frac{1}{F(x)}\Rightarrow-\frac{1}{F(x)}\leq\frac{\eta\mu x}{F(x)}\leq\frac{1}{F(x)}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{F(x)}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{F(x)}$ θα είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{F(x)}=0$, **(3)**

άρα, λόγω των (1),(2),(3) έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}}{F(x)}=0$

Γ4. Έχουμε:

$$F(x+2)-F(x)=\big(F(x+2)-F(x+1)\big)+\big(F(x+1)-F(x)\big),\ \textbf{(4)}$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την F στα διαστήματα [x,x+1] και [x+1,x+2], συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (x,x+1)$ και $\xi_2 \in (x+1,x+2)$ για τα οποία ισχύουν:

- $F'(\xi_1)=\dfrac{F(x+1)-F(x)}{(x+1)-x} \Rightarrow f(\xi_1)=F(x+1)-F(x)$ και
- $F'(\xi_2)=\dfrac{F(x+2)-F(x+1)}{(x+2)-(x+1)} \Rightarrow f(\xi_2)=F(x+2)-F(x+1)$.

(Τα ξ_1, ξ_2, είναι μοναδικά, αφού η F' είναι γνησίως αύξουσα και μάλιστα εξαρτώνται από το x).

Λόγω των παραπάνω ισοτήτων η **(4)** γίνεται:

$$F(x+2)-F(x)=f(\xi_1)+f(\xi_2)\,, \quad \textbf{(5)}$$

Επειδή όμως η f είναι γνησίως αύξουσα θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x<\xi_1<x+1 \Rightarrow f(x)<f(\xi_1)<f(x+1) \\ x+1<\xi_2<x+2 \Rightarrow f(x+1)<f(\xi_2)<f(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)+f(x+1)<f(\xi_1)+f(\xi_2)<f(x+1)+f(x+2), \quad \textbf{(6)}$$

Από **(5), (6)** συμπεραίνουμε ότι:

$$f(x+1)+f(x)<F(x+2)-F(x)<f(x+2)+f(x+1)$$