ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ

Μυτιλήνη, 10-1-2017

Δείκτης Shannon

Αν σε μια βιοκοινότητα που αποτελείται από S είδη παριστάνουμε με n_i τον αριθμό των ατόμων του είδους i και N το συνολικό αριθμό των ατόμων των S ειδών της βιοκοινότητας αυτής, τότε ορίζουμε ως:

- $p_i = \frac{n_i}{N}$, i=1,2,3….,S, τη σχετική αφθονία (συχνότητα εμφάνισης) του είδους i.
- $H' = -\sum_{i=1}^{S} p_i \ln p_i$ το **Δείκτη Ποικιλότητας του Shannon.**

Να αποδείξετε ότι ο **Δείκτης του Shannon** γίνεται μέγιστος μόνο όταν όλα τα S είδη αποτελούνται από τον ίδιο αριθμό ατόμων.

Απόδειξη

1ος τρόπος

Με τη βοήθεια της ανισότητας Jensen.

Με το ίδιο τρόπο την έλυσαν και άλλοι συνάδελφοι για παράδειγμα:

- **Αλέξανδρος Συγκελάκης**

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=61&t=57048

- **Lampros Katsapas**

https://www.facebook.com/photo.php?fbid=401671740176713&set=p.401671740176713&type=3&theater

- **Παύλος Τρύφων**

2ος τρόπος

- **Ανάλογη σκέψη είχε και ο συνάδελφος Παύλος Τρύφων**

Έχουμε:

- $\sum_{i=1}^{S} p_i = 1$

- $-\ln S=\ln\frac{1}{S}=1\cdot\ln\frac{1}{S}=\left(\sum_{i=1}^{s}p_i\right)\ln\frac{1}{S}=\sum_{i=1}^{s}p_i\ln\frac{1}{S}$

Θα αποδείξουμε ότι $-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i\le\ln S$

Έχουμε: $-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i-\ln S\overset{(1)}{=}\sum_{i=1}^{s}p_i\ln\frac{1}{p_i}+\sum_{i=1}^{s}p_i\ln\frac{1}{S}$

$$=\sum_{i=1}^{s}p_i\left(\ln\frac{1}{p_i}+\ln\frac{1}{S}\right)=\sum_{i=1}^{s}p_i\ln\frac{1}{p_iS},\ (2)$$

Σύμφωνα με την ανισότητα $\ln x\le x-1$, $x>0$,έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{s}p_i\ln\frac{1}{p_iS}\le\sum_{i=1}^{s}p_i\left(\frac{1}{p_iS}-1\right),\ (3)$$

Επομένως, λόγω των (2) και (3) έχουμε:

$$-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i-\ln S\le\sum_{i=1}^{s}p_i\left(\frac{1}{p_iS}-1\right)=\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{S}-1=S\frac{1}{S}-1=0$$

Άρα $-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i-\ln S\le 0\Leftrightarrow-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i\le\ln S$.

Η τελευταία σχέση ισχύει ως ισότητα όταν $p_1=p_2=\ldots=p_s=\frac{1}{S}$

Άρα:

- Ο δείκτης του Shannon γίνεται μέγιστος όταν $p_1=p_2=\ldots=p_s=\frac{1}{S}$
- Η μέγιστη τιμή του δείκτη του Shannon είναι ίση με lnS.

.

3^{ος} τρόπος

Υπενθυμίσεις:

- **Θεώρημα 1 (Ανισότητα Cauchy)**

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ θετικοί αριθμοί, τότε:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s}{s}\ge\sqrt[s]{\alpha_1\cdot\alpha_2\ldots\alpha_s}\ ,\ \mathbf{(1)}$$

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_s$.

Θεώρημα 2.

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$, $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s$ θετικοί ρητοί, τότε:

$$\left(\frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_s\beta_s}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_S}\right)^{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_S}\geq \alpha_1^{\beta_1}\cdot\alpha_2^{\beta_2}\ldots\alpha_s^{\beta_s}, \textbf{ (2)}$$

Σχόλιο 1.

Το θεώρημα 2 αποδεικνύεται με τη βοήθεια του θεωρήματος 1.

➲ **Πόρισμα**

Αν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_s$ θετικοί ρητοί, τότε:

$$\left(\frac{p_1+p_2+\ldots+p_S}{s}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_S}\leq p_1^{p_1}\cdot p_2^{p_2}\ldots p_S^{p_S}$$

Πράγματι:

Από το θεώρημα (2) για $\beta_i=p_i$ και $\alpha_i=\dfrac{1}{p_i}$, παίρνουμε:

$$\left(\frac{s}{p_1+p_2+\ldots+p_s}\right)^{p_1+p_2+\ldots+p_s}\geq\frac{1}{p_1^{p_1}\cdot p_2^{p_2}\ldots p_s^{p_s}}$$

Επειδή όμως $p_1+p_2+\ldots+p_s=1$ θα έχουμε:

$$s\geq\frac{1}{p_1^{p_1}\cdot p_2^{p_2}\ldots p_s^{p_s}}\Rightarrow \ln s\geq-\ln\left(p_1^{p_1}p_2^{p_2}\ldots p_s^{p_s}\right)\Rightarrow$$

$$\ln s\geq-\left(p_1\ln p_1+p_2\ln p_2+\ldots+p_s\ln p_s\right)$$

Άρα: $-\sum_{i=1}^{s}p_i\ln p_i\leq\ln S$

✍ Η ισότητα ισχύει όταν $p_1=p_2=\ldots=p_s$

Σημείωση.

1. Στο εξατάξιο Γυμνάσιο Καλλονής Λέσβου, όπου φοιτούσα, είχα την τύχη να έχω δυο εξαιρετικούς δασκάλους, τον Φυσικό και βαθύ γνώστη της μαθηματικής επιστήμης κ. **Δημήτριο Σκιαδέλλη** και τον εκλιπόντα μέντορά μου και άριστο Μαθηματικό **Γεώργιο Δ. Βαλτά**. Στον πρώτο ανήκει η ιδέα του παραπάνω 3^{ου} τρόπου απόδειξης και στον δεύτερο η ιδέα του 1^{ου} τρόπου καθώς και ενός άλλου, τον οποίο δεν μνημόνευσα, γιατί ξεφεύγει από την σχολική ύλη (Θεώρημα Lagrange για ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών).

2. Για τον 3^{ο} τρόπο θεωρώ ότι πολύ χρήσιμες είναι και οι πληροφορίες που περιέχονται στους παρακάτω συνδέσμους:

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=183388#p183388
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=102985#p102985
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=71706#p71706
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=62119#p62119
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=125388#p125388
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=41133#p41133
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=13843#p13843