

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο \mathbb{R} και γνησίως φθίνουσα.

Να αποδείξετε ότι:

- 1) Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x_1 \in (-\infty, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, +\infty)$ να ισχύει:

$$(f(x_1) - x_1)(f(x_2) - x_2) < 0$$

- 2) Υπάρχει διάστημα Δ τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha \in \Delta$ η εξίσωση:

$$\left(\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} f(x) dx - 2\alpha \right) (1-x) = xe^x$$

να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Σημείωση

Η ιδέα για την κατασκευή της παραπάνω άσκησης προήλθε από ένα θέμα του συναδέλφου Π. Τρύφων που περιέχεται στη συλλογή «501 επαναληπτικά θέματα». Η συλλογή μπορεί να βρεθεί σε πολλές ηλεκτρονικές διευθύνσεις.

Για παράδειγμα: Γράφοντας στο google 501 επαναληπτικά θέματα.