**Άσκηση 60- 12/1/17**

Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\eta\mu x+\eta\mu\sqrt{x^2+1}\right)=0$

**Θανάσης Ξένος**

**Λύση**

**ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ Π. ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ**

**Μυτιλήνη, 12-1-2017**

Αν u= -x, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}u=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\eta\mu x+\eta\mu\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{u\to+\infty}\left(\eta\mu(-u)+\eta\mu\sqrt{(-u)^2+1}\right)=$$

$$=\lim_{u\to+\infty}\left(\eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u\right),\ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(t)= ημt η οποία είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $\left[u,\ \sqrt{u^2+1}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(u,\ \sqrt{u^2+1}\right)$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi\in\left(u,\ \sqrt{u^2+1}\right)$ για το οποίο ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\sqrt{u^2+1}\right)-f(u)}{\sqrt{u^2+1}-u},\ (2)$$

$$(2)\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\xi=\frac{\eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u}{\sqrt{u^2+1}-u}\Rightarrow \eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u=(\sigma\upsilon\nu\xi)\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)$$

$$\Rightarrow\left|\eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u\right|=|\sigma\upsilon\nu\xi|\left|\sqrt{u^2+1}-u\right|\Rightarrow\left|\eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u\right|\le\left|\sqrt{u^2+1}-u\right|\Rightarrow$$

$$-\left|\sqrt{u^2+1}-u\right|\le\eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u\le\left|\sqrt{u^2+1}-u\right|$$

Όμως $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\sqrt{u^2+1}-u\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}+u}=\ldots=0$.

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$$\lim_{u\to+\infty}\left(\eta\mu\sqrt{u^2+1}-\eta\mu u\right)=0$$

και επομένως, λόγω της (1), είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\eta\mu x+\eta\mu\sqrt{x^2+1}\right)=0$.