άσκηση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

20 λυμένες επαναληπτικές ασκήσεις

Παπαδόπουλος Παναγιώτης

20 λυμένες

επαναληπτικές - συνδυαστικές

ασκήσεις

Μαθηματικών προσανατολισμού

Γ' Λυκείου

Μάιος 2016

1

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι
$f(x) = e^x + x^2 - 2x$ και $-ex^2 + 3ex - e \leq 1 + g(x) \leq ex^2 - ex + e$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $e^{x_0} + 2x_0 = 2$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x_0^2 - 4x_0 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που εφάπτεται στη γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α(1, g(1)).

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία (ε), και τον άξονα yy΄.

Λύση

α) $f'(x) = e^x + 2x - 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων
- $f'(0) = -1 < 0$ και $f'(1) = e + 2 - 2 = e > 0$

άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει
$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 = 2$.

$f''(x) = e^x + 2 > 0$ οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1–1, επομένως υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $e^{x_0} + 2x_0 = 2$.

β)

x	$-\infty$	x_0 $+\infty$
$f''(x)$	+	+
$f'(x)$	↗ −	+ ↗
$f(x)$	↘	↗

Η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα:
$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ και $x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - 2x_0$.

Άρα $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq e^{x_0} + x_0^2 - 2x_0$ (1)

Γνωρίζουμε όμως ότι: $e^{x_0} + 2x_0 = 2 \Leftrightarrow e^{x_0} = 2 - 2x_0$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε: $f(x) \geq 2 - 2x_0 + x_0^2 - 2x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq x_0^2 - 4x_0 + 2$

γ) Η σχέση $-ex^2+3ex-e\le 1+g(x)\le ex^2-ex+e$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε:

Για $x=1$ έχουμε: $-e+3e-e\le 1+g(1)\le e-e+e \Leftrightarrow e\le 1+g(1)\le e \Leftrightarrow e-1\le g(1)\le e-1$.

άρα $g(1)=e-1$

Έχουμε επιπλέον:

$$-ex^2+3ex-e\le 1+g(x)\le ex^2-ex+e \Leftrightarrow -ex^2+3ex-e-1\le g(x)\le ex^2-ex+e-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ex^2+3ex-e-1-g(1)\le g(x)-g(1)\le ex^2-ex+e-1-g(1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ex^2+3ex-e-1-e+1\le g(x)-g(1)\le ex^2-ex+e-1-e+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ex^2+3ex-2e\le g(x)-g(1)\le ex^2-ex \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e(x^2-3x+2)\le g(x)-g(1)\le ex(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -e(x-1)(x-2)\le g(x)-g(1)\le ex(x-1) \quad (3)$$

Για $x>1$ έχουμε:

$$(3)\Leftrightarrow -e(x-2)\le \frac{g(x)-g(1)}{x-1}\le ex$$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[-e(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to 1^+} ex=e$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=e$.

Για $x<1$ έχουμε:

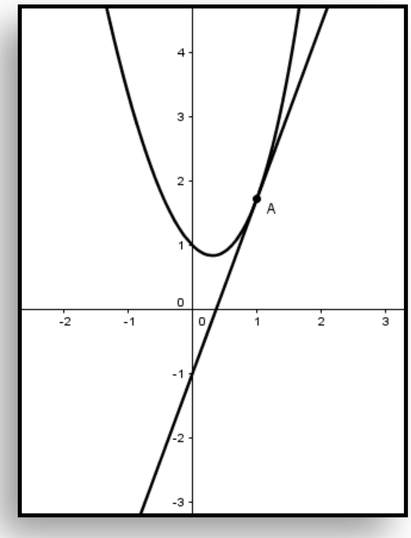
$$(3)\Leftrightarrow ex\le \frac{g(x)-g(1)}{x-1}\le -e(x-2)$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[-e(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to 1^-} ex=e$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=e$

Συνεπώς ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=e$, οπότε $g'(1)=e$.

Άρα η εξίσωση της ευθείας (ε) που εφάπτεται στη γραφικής παράστασης της g στο σημείο Α(1, g(1)) είναι:

$(\varepsilon):\ y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-e+1=e\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=ex-e+e-1\Leftrightarrow y=ex-1$



δ) Παρατηρούμε ότι $f(1)=g(1)=e-1$

και $f'(1)=g'(1)=e$

άρα η ευθεία $y=ex-1$ είναι και εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α.

Η f είναι κυρτή συνάρτηση, διότι $f''(x)=e^x+2>0$, άρα η ευθεία είναι «κάτω» από τη γραφική παράσταση της f.

Άρα:

$$E=\int_0^1\left(f(x)-ex+1\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(e^x+x^2-2x-ex+1\right)dx=$$

$$=\left[e^x+\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{ex^2}{2}+x\right]_0^1=$$

$$=e+\frac{1}{3}-1-\frac{e}{2}+1-1=\frac{e}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3e-4}{6}\ \text{τ.μ.}$$

2

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι $\ln f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=x-1+e^{1-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(1)\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.

β) Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

γ) Αν επιπλέον δίνεται ότι $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$ για κάθε $x\neq 1$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Αν η f κυρτή, $f'(1)=1$ και γνωρίζετε ότι $\int_0^1 xf'(x)\,dx=\dfrac{1}{e}$, να προσδιορίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες xx', yy' και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

Λύση

α) Για $x=1$ η σχέση $\ln f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=x-1+e^{1-x}$ γίνεται:

$$\ln f(1)+\frac{1}{f(1)}=1-1+e^{1-1}\Leftrightarrow \ln f(1)+\frac{1}{f(1)}=1\quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ με $x>0$.

Μελετάμε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	↘		↗

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1] και γνησίως αύξουσα στο [1, +∞).
Η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $g(1) = 1$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι: $0 < x < 1 \overset{g\downarrow}{\Rightarrow} g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 1$

$x > 1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 1$

$g(1) = 1$

Άρα έχουμε: $(1) \Leftrightarrow g\big(f(1)\big) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 1$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα οι πιθανές θέσεις ακροτάτων της, θα είναι τα σημεία στα οποία η f' μηδενίζεται.

Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση $\ln f(x) + \dfrac{1}{f(x)} = x - 1 + e^{1-x}$ κι έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1 - e^{1-x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot f(x) - f'(x)}{f^2(x)} = 1 - e^{1-x} \Leftrightarrow f'(x)\cdot\big(f(x)-1\big) = f^2(x)\cdot\left(1-e^{1-x}\right) \quad (2)$$

Υποθέτουμε πως υπάρχει $x_1 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f'(x_1) = 0$.

Τότε η σχέση (2) γίνεται: $0 = f^2(x_1)\cdot\left(1-e^{1-x_1}\right) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} 1 - e^{1-x_1} = 0 \Leftrightarrow e^{1-x_1} = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1$

Άρα $f'(1) = 0$ (άτοπο διότι από τα δεδομένα γνωρίζουμε πως $f'(1) \neq 0$).

Επομένως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f δεν έχει ακρότατα.

γ) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε πως $x > 1$.

- Η f είναι συνεχής στο [1, x] (ως παραγωγίσιμη)
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1, x)

άρα από το ΘΜΤ προκύπτει πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} > 0$$

Στο προηγούμενο ερώτημα αποδείχθηκε πως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Εφόσον η f' είναι συνεχής, συμπεραίνουμε πως διατηρεί σταθερό πρόσημο κι επειδή $f'(\xi) > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε προφανώς αντιστρέφεται.

Γνωρίζουμε ότι $f(1) = 1$ άρα και $f^{-1}(1) = 1$. Συνεπώς οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} τέμνονται στο σημείο (1, 1).

Θα αποδείξουμε πως επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, είναι σημεία της ευθείας $y = x$.

Θεωρούμε x_1 μια λύση της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$. Δηλ.: $f(x_1) = f^{-1}(x_1) \Leftrightarrow f\big(f(x_1)\big) = x_1$ (3)

Αν $f(x_1) > x_1$ τότε εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει: $f(f(x_1)) > f(x_1) \overset{(3)}{\Rightarrow} f(x_1) < x_1$ (άτοπο)

Ομοίως οδηγούμαστε σε άτοπο αν $f(x_1)<x_1$. Άρα $f(x_1)=x_1$.

Αν $f(x_1)=x_1$ τότε προφανώς $f(f(x_1))=f(x_1)=x_1$ (ισχύει η (3))

Δηλαδή η λύση της εξίσωσης $f(x)=f^{-1}(x)$ είναι και λύση της εξίσωσης $f(x)=x$.

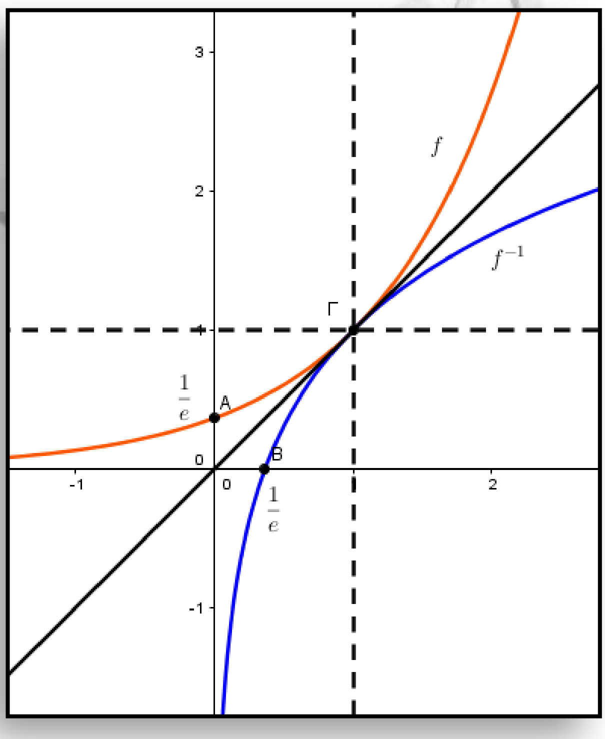
Επομένως αν η f είναι γνησίως αύξουσα, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}, είναι σημεία της ευθείας $y=x$.

Βρίσκουμε τώρα την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1, f(1)).

(ε): $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Leftrightarrow y-1=x-1\Leftrightarrow y=x$

Η f είναι κυρτή άρα $f(x)>x$ για κάθε $x\neq 1$. Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την ευθεία $y=x$, άρα ούτε και με την γραφική παράσταση της f^{-1}.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$, άρα εφόσον η C_f είναι «πάνω» από την $y=x$, η $C_{f^{-1}}$ θα είναι «κάτω» από την $y=x$.



$$\int_0^1 xf'(x)\,dx=\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [xf(x)]_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(1)-\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=1-\frac{1}{e}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{e-1}{e}$$

Γνωρίζουμε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, επομένως το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $x=1$ και τους άξονες, έχει εμβαδόν $\frac{e-1}{e}$ τ.μ.

Προφανώς το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $y=1$ και τον yy' προκύπτει αν από το τετράγωνο με πλευρά 1 αφαιρέσουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία $x=1$ και τους άξονες .

Δηλ. $E_1=1^2-\frac{e-1}{e}=\frac{1}{e}$ τ.μ.

Λόγω του ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, συμπεραίνουμε πως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον xx' και την ευθεία $x=1$ είναι $E_1=1^2-\frac{e-1}{e}=\frac{1}{e}$ τ.μ.

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες xx΄ , yy΄ και τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι: $E = 1 - 2E_1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$ τ.μ.

3

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g: $[-1, 3] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = (x^2 - 2x - 3)\cdot e^{2x}$, $f'(x) \le g'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 3]$ και $f(-1) = f(3) = 0$.

α) Να δείξετε ότι $f = g$.

β) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση h με $h(x) = f(x)\cdot e^{-2x}$. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα της και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης της h στο σημείο A(2, h(2)).

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1+x) + 1 + x \ge \frac{1}{e^{2x}}$.

δ) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^3 \left(\int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx \right)dt < -11.$

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, με $D_\varphi = [-1, 3]$

$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \le 0$ για κάθε $x \in [-1, 3]$

Θα αποδείξουμε ότι η φ είναι σταθερή συνάρτηση με $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 3]$.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(-1) = f(-1) - g(-1) = 0$ και $\varphi(3) = f(3) - g(3) = 0$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 3)$ ώστε να ισχύει $\varphi(x_0) < 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 3]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_0, 3)$ οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_0, 3)$ ώστε να ισχύει :

$$\varphi'(\xi_1) = \frac{\varphi(3) - \varphi(x_0)}{3 - x_0} = \frac{-\varphi(x_0)}{3 - x_0} > 0 \quad \text{(άτοπο διότι } \varphi'(x) \le 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 3]\text{)}$$

Επομένως $\varphi(x) \ge 0$ (1) για κάθε $x \in [-1, 3]$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_1 \in (-1, 3)$ ώστε να ισχύει $\varphi(x_1) > 0$.

Η φ είναι συνεχής στο $[-1, x_1]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1, x_1)$ οπότε από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (-1, x_1)$ ώστε να ισχύει :

$$\varphi'(\xi_2) = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(-1)}{x_1 + 1} = \frac{\varphi(x_1)}{x_1 + 1} > 0 \quad \text{(άτοπο διότι } \varphi'(x) \le 0 \text{ για κάθε } x \in [-1, 3]\text{)}$$

Επομένως $\varphi(x) \le 0$ (2) για κάθε $x \in [-1, 3]$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε πως $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[-1,3]$.
Συνεπώς οι συναρτήσεις f και g έχουν ίδιους τύπος και ίδια πεδία ορισμού, άρα είναι ίσες.

β) $h(x)=f(x)\cdot e^{-2x} \Leftrightarrow h(x)=\left(x^2-2x-3\right)\cdot e^{2x}\cdot e^{-2x} \Leftrightarrow h(x)=x^2-2x-3$ με $D_h=[-1,3]$.
$h'(x)=2x-2$ και $h''(x)=2>0$ άρα η h είναι κυρτή.
Η εφαπτομένη της h στο (1, h(1)) είναι:
$y-h(2)=h'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow y+3=2\cdot(x-2) \Leftrightarrow y=2x-7$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=\ln(1+x)+1+x-\dfrac{1}{e^{2x}}$ με $D_k=(-1,+\infty)$

Παρατηρούμε ότι $k(0)=\ln 1+1-1=0$

$k'(x)=\dfrac{1}{1+x}+1+\dfrac{2}{e^{2x}}>0$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$, άρα η k(x) είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

$\ln(1+x)+1+x\ge\dfrac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow \ln(1+x)+1+x-\dfrac{1}{e^{2x}}\ge 0 \Leftrightarrow k(x)\ge k(0) \overset{k\uparrow}{\Leftrightarrow} x\ge 0$

δ) Η h είναι κυρτή, άρα για κάθε $x\in[-1,3]$ ισχύει:
$h(x)\ge 2x-7 \Leftrightarrow x^2-2x-3\ge 2x-7 \Leftrightarrow e^{2x}\left(x^2-2x-3\right)\ge e^{2x}(2x-7) \Leftrightarrow f(x)\ge e^{2x}(2x-7)$ (3)
Επίσης για κάθε $x\in[-1,3]$ ισχύει ότι $f(x)\le 0$, άρα:
$(3) \Leftrightarrow 0\ge f(x)\ge e^{2x}(2x-7) \Leftrightarrow 0\le -f(x)\le -e^{2x}(2x-7)$ (4)

Από το γ΄ ερώτημα γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\ge 0$ ισχύει: $0<\dfrac{1}{e^{2x}}\le \ln(1+x)+1+x$ (5)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε:

$0\le -\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\le -e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right)$

Επομένως: $\dfrac{f(x)}{e^{2x}}\ge e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right) \Leftrightarrow x^2-2x-3\ge e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3-e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right)\ge 0$ (6)

Επειδή η ισότητα στη σχέση (6) δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,1]$, έχουμε:

$$\int_0^1\left(x^2-2x-3-e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right)\right)dx>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\left(x^2-2x-3\right)dx>\int_0^1\left(e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right)\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_0^1>\int_0^1\left(e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right)\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}-1-3>\int_0^1\left(e^{2x}(2x-7)\cdot\left(\ln(1+x)+1+x\right)\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx < -\frac{11}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx + \frac{11}{3} < 0.$$

Άρα: $\int_0^3 \left(\int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx + \frac{11}{3}\right)dt < 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(\int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx\right)dt < -\int_0^3 \frac{11}{3}dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(\int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx\right)dt < -\left[\frac{11}{3}t\right]_0^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^3 \left(\int_0^1 \left(e^{2x}(2x-7)\cdot(\ln(1+x)+1+x)\right)dx\right)dt < -11$$

4	Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύει $\frac{xf'(x)+1}{[f'(x)]^2+1}=\frac{1}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(1)>2$. α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=2x+\sqrt{4x^2+3}$. β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. γ) Να προσδιορίσετε το όριο $\lim_{x\to-\infty}[f(x+1)-f(x)]$. δ) Αν $f(1)=\frac{e}{4}$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Λύση

α) $\frac{xf'(x)+1}{[f'(x)]^2+1}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow [f'(x)]^2+1=4xf'(x)+4 \Leftrightarrow [f'(x)]^2-4xf'(x)=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f'(x)]^2-4xf'(x)+4x^2=4x^2+3 \Leftrightarrow [f'(x)-2x]^2=4x^2+3 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f'(x)-2x$ με $D_g=\mathbb{R}$ και η οποία είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Υποθέτουμε πως υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=2x_0$

Για $x=x_0$ η σχέση (1) γίνεται: $[f'(x_0)-2x_0]^2=4{x_0}^2+3 \Leftrightarrow 4{x_0}^2+3=0$ (άτοπο)

Συνεπώς η g δε μηδενίζεται, οπότε ως συνεχής συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Παρατηρούμε ότι: $g(1)=f'(1)-2>0$

Επομένως $g(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)-2x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η σχέση (1) γίνεται: $f'(x)-2x=\sqrt{4x^2+3} \Leftrightarrow f'(x)=2x+\sqrt{4x^2+3}$

β) Για $x\ge 0$ προφανώς ισχύει: $f'(x)=2x+\sqrt{4x^2+3}>0$

Για $x<0$ έχουμε: $f'(x)=2x+\sqrt{4x^2+3}=\dfrac{4x^2+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+3}-2x}=\dfrac{3}{\sqrt{4x^2+3}-2x}>0$

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [x, x+1] και παραγωγίσιμη στο (x, x+1), άρα από το ΘΜΤ προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=2\xi+\sqrt{4\xi^2+3} \quad (2)$$

Επειδή $x\to-\infty$ και $x<\xi<x+1$, προφανώς από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\xi\to-\infty$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim\limits_{\xi\to-\infty}\left(2\xi+\sqrt{4\xi^2+3}\right)=\lim\limits_{\xi\to-\infty}\dfrac{4\xi^2+3-4\xi^2}{\sqrt{4\xi^2+3}-2\xi}=\lim\limits_{\xi\to-\infty}\dfrac{3}{\sqrt{4\xi^2+3}-2\xi}=0$.

δ) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x)'f(x)\,dx=[xf(x)]_0^1-\int_0^1 xf'(x)\,dx=f(1)-\int_0^1 x\left(2x+\sqrt{4x^2+3}\right)dx=$

$$=f(1)-\int_0^1\left(2x^2+x\sqrt{4x^2+3}\right)dx=\frac{e}{4}-\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{1}{12}(4x^2+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{e}{4}-\left(\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{7}}{12}-\frac{3\sqrt{3}}{12}\right)=$$

$$=\frac{e}{4}-\frac{2}{3}-\frac{7\sqrt{7}}{12}+\frac{3\sqrt{3}}{12}$$

5

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο, $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$, $f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^3-4x)f(x)-72\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}=0$.

α) Να δείξετε ότι $f(2)=9$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ έτσι ώστε να ισχύει $f'(\xi)=3\xi^2$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

δ) Θεωρούμε την εφαπτομένη ε της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(ξ, f(ξ)). Αν η f είναι κυρτή συνάρτηση, να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f.

ε) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Θέτουμε $g(x)=\dfrac{(x^3-4x)f(x)-72\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}$ με $x\in[0,2)\cup(2,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=0$.

Για $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ έχουμε:

$$g(x)=\frac{(x^3-4x)f(x)-72\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2}-2}\Leftrightarrow (x^3-4x)f(x)-72\eta\mu(x-2)=g(x)\cdot\left(\sqrt{x+2}-2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)(x-2)f(x)=72\eta\mu(x-2)+g(x)\cdot\left(\sqrt{x+2}-2\right)\Leftrightarrow f(x)=\frac{72\eta\mu(x-2)+g(x)\cdot\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{x(x+2)(x-2)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{72\eta\mu(x-2)}{x(x+2)(x-2)}+\frac{g(x)\cdot\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{x(x+2)(x-2)}\Leftrightarrow f(x)=\frac{72\eta\mu(x-2)}{x(x+2)(x-2)}+\frac{g(x)\cdot(x-2)}{x(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{72\eta\mu(x-2)}{x(x+2)(x-2)}+\frac{g(x)}{x(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

Έχουμε συνεπώς:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{72\eta\mu(x-2)}{x(x+2)(x-2)}+\frac{g(x)}{x(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{72}{x(x+2)}\cdot\frac{\eta\mu(x-2)}{(x-2)}+\frac{g(x)}{x(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)=\frac{72}{2\cdot 4}\cdot 1+\frac{0}{2\cdot 4\cdot 4}=9$$

Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) άρα $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=9$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-x^3$, με $D_h=[0,+\infty)$ και $h'(x)=f'(x)-3x^2$.

- Η h είναι συνεχής στο [0, 2] ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (0, 2) ως πράξη παραγωγισίμων συναρτήσεων.

- $h(0) = f(0) = 1$

  $h(2) = f(2) - 2^3 = 9 - 8 = 1$

Άρα από το θεώρημα Rolle συμπεραίνουμε πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 2)$ έτσι ώστε να ισχύει $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) - 3\xi^2 = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = 3\xi^2$.

γ) Εφόσον $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και η f' είναι συνεχής, προφανώς θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως $f'(\xi) = 3\xi^2 > 0$ (διότι $\xi > 0$) άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι:
(ε): $y - f(\xi) = f'(\xi)\cdot(x - \xi) \Leftrightarrow y - f(\xi) = 3\xi^2\cdot(x - \xi) \Leftrightarrow y = 3\xi^2 x - 3\xi^3 + f(\xi)$
Εφόσον η f είναι κυρτή, η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από την ευθεία ε (με εξαίρεση το σημείο Α), οπότε: $f(x) \geq 3\xi^2 x - 3\xi^3 + f(\xi)$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\xi^2 x - 3\xi^3 + f(\xi)\right)$ όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\xi^2 x - 3\xi^3 + f(\xi)\right) = +\infty$ οπότε προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της είναι: $[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [1, +\infty)$

ε) ● Αν $\alpha \geq 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μία λύση διότι $\alpha \in [1, +\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1–1.
- Αν $\alpha < 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη διότι $\alpha \notin [1, +\infty)$.

6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f^2(x) = 2xf(x) + 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$.

α) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

γ) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να ορίσετε την f^{-1}.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 8)$ ώστε να ισχύει η σχέση $4f(x_0) + 4(x_0 - 8)f'(x_0) = 3f^{-1}(x_0 + 1) + 3x_0\left[f^{-1}(x_0 + 1)\right]'$.

Λύση

α) $f^2(x)=2xf(x)+9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)=9 \Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f(x)-x)^2=x^2+9 \quad (1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ με $x\in\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $g(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=\xi$.

Τότε από τη σχέση (1) έχουμε: $(f(\xi)-\xi)^2=\xi^2+9 \overset{f(\xi)=\xi}{\Leftrightarrow} \xi^2+9=0$ (άτοπο)

Άρα συμπεραίνουμε πως $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Εφόσον η g είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Ισχύει $g(0)=f(0)-0=3>0$, άρα $g(x)>0 \Leftrightarrow f(x)-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως από τη σχέση (1) έχουμε: $f(x)-x=\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow f(x)=x+\sqrt{x^2+9}$

β) Παραγωγίζουμε την f κι έχουμε:

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{x+\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}}$$

- Αν $x\geq 0$ τότε $x+\sqrt{x^2+9}>0$ οπότε $f'(x)>0$
- Αν $x<0$ τότε $x+\sqrt{x^2+9}>0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}>-x \Leftrightarrow x^2+9>x^2 \Leftrightarrow 9>0$ (ισχύει) άρα $f'(x)>0$

Συνεπώς για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$, δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f(D)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(0,+\infty)$ διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-9}{x-\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-9}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}\right)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)=+\infty$$

δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, άρα και 1–1, οπότε αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ (που είναι το σύνολο τιμών της f) και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ (που είναι πεδίο ορισμού της f). Για τον τύπο της f^{-1}, θέτουμε στη σχέση $f^2(x)=2xf(x)+9$ όπου x το $f^{-1}(x)$.

Για $x>0$ έχουμε:

$$f^2\left(f^{-1}(x)\right)=2\cdot f^{-1}(x)\cdot f\left(f^{-1}(x)\right)+9 \Leftrightarrow x^2=2\cdot f^{-1}(x)\cdot x+9 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x)=\frac{x^2-9}{2x}.$$

ε) $4f(x)+4(x-8)f'(x)=3f^{-1}(x+1)+3x\left[f^{-1}(x+1)\right]' \Leftrightarrow (4(x-8)f(x))'=\left[3x\cdot f^{-1}(x+1)\right]' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (4(x-8)f(x))'-\left[3x\cdot f^{-1}(x+1)\right]'=0 \Leftrightarrow \left[4(x-8)f(x)-3x\cdot f^{-1}(x+1)\right]'=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=4(x-8)f(x)-3x\cdot f^{-1}(x+1)$ με $x>-1$

- Η h είναι συνεχής στο [0, 8] ως πράξη συνεχών συναρτήσεων
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (0, 8) ως πράξη παραγωγισίμων συναρτήσεων
- $h(0)=4(0-8)f(0)-3\cdot 0\cdot f^{-1}(1)=-32\cdot 3=-96$

  $h(8)=4(8-8)f(8)-3\cdot 8\cdot f^{-1}(9)=-24\cdot\dfrac{9^2-9}{2\cdot 9}=-24\cdot\dfrac{72}{18}=-24\cdot 4=-96$

Άρα από το θεώρημα Rolle προκύπτει πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,8)$ ώστε $h'(x_0)=0$.

Όμως $h'(x)=4f(x)+4(x-8)f'(x)-3f^{-1}(x+1)-3x\left[f^{-1}(x+1)\right]'$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,8)$ ώστε $h'(x_0)=0\Leftrightarrow 4f(x_0)+4(x_0-8)f'(x_0)=3f^{-1}(x_0+1)+3x_0\left[f^{-1}(x_0+1)\right]'$.

7

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

- $f(1)=3$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h^2+2h}=\dfrac{2xf(x)}{x^2+2}$
- $g(2016)<g'(x)<g(2015)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2+2$.

β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να δείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση: $f\left(\sqrt{-g(x)}\right)\geq 2-g(2016)\cdot(x-2015)$.

Λύση

α) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h^2+2h}=\dfrac{2xf(x)}{x^2+2}\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h\cdot(h+2)}=\dfrac{2xf(x)}{x^2+2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h+2}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{1}{h+2}\cdot\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)=\frac{2xf(x)}{x^2+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h+2}\cdot\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right)\right)=\frac{2xf(x)}{x^2+2}\qquad(1)$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$ (2).

Για το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}$, θέτουμε $u=-h\Leftrightarrow h=-u$, οπότε για $h\to 0$ προκύπτει ότι $u\to 0$.

Έχουμε λοιπόν: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{-u}=-\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}=-f'(x)$ (3)

Επομένως: $(1) \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\cdot\left(f'(x)+f'(x)\right)=\frac{2x f(x)}{x^2+2} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{2x f(x)}{x^2+2} \Leftrightarrow (x^2+2)f'(x)=2x f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2+2)f'(x)-2x f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x^2+2)f'(x)-2x f(x)}{(x^2+2)^2}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x^2+2}\right)'=0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2+2}=c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)=c\cdot(x^2+2)$

Για $x=1$ έχουμε: $f(1)=c\cdot(1+2) \Leftrightarrow 3=3c \Leftrightarrow c=1$ άρα $f(x)=x^2+2$

β) Για τη συνάρτηση g γνωρίζουμε ότι

- είναι συνεχής στο [2015, 2016] ως παραγωγίσιμη
- είναι παραγωγίσιμη στο (2015, 2016)

άρα από το ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστο ένα $\xi\in(2015, 2016)$ ώστε να ισχύει

$g'(\xi)=\frac{g(2016)-g(2015)}{2016-2015} \Leftrightarrow g'(\xi)=g(2016)-g(2015)$ (4)

Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ γνωρίζουμε ότι $g(2016)<g'(x)<g(2015)$. Επομένως:

$g(2016)<g'(\xi)<g(2015) \Leftrightarrow g(2016)<g(2016)-g(2015)<g(2015)$

Δηλ. $g(2016)<g(2016)-g(2015) \Leftrightarrow 0<-g(2015) \Leftrightarrow g(2015)<0$

Άρα $g(2016)<g'(x)<g(2015)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

γ) Εφόσον η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε η g θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο πεδίο ορισμού της. Αποδείξαμε ότι $g(2015)<0$ άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) $f\left(\sqrt{-g(x)}\right)\geq 2-g(2016)\cdot(x-2015) \Leftrightarrow \left(\sqrt{-g(x)}\right)^2+2\geq 2-g(2016)\cdot(x-2015) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -g(x)\geq -g(2016)\cdot(x-2015) \Leftrightarrow g(x)\leq g(2016)\cdot(x-2015) \Leftrightarrow g(x)-g(2016)\cdot(x-2015)\leq 0$ (5)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-g(2016)\cdot(x-2015)$ με $x\in\mathbb{R}$.

$h'(x)=g'(x)-g(2016)>0$ συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

$h(2016)=g(2016)-g(2016)\cdot(2016-2015)=g(2016)-g(2016)=0$

$(5) \Leftrightarrow h(x)\leq h(2016) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x\leq 2016$

8

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:[0, +\infty)\to\mathbb{R}$ με $f'(x)\cdot(f(x)-2x)=2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=e^{f(x)}$ για κάθε $x\in[0, +\infty)$, $f(0)=1$ και $g(0)=0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+1}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να αποδείξετε ότι $g(x)\geq x$, για κάθε $x\geq 0$.

ε) Θεωρούμε ένα υλικό σημείο Α, που κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g. Η τετμημένη του Α αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο Α βρίσκεται στον άξονα yy΄, να βρείτε το ρυθμό που μεταβάλλεται η τεταγμένη του Α κατά τη χρονική στιγμή t_0.

Λύση

α) $f'(x)\cdot(f(x)-2x)=2f(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)-2xf'(x)=2f(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)=2xf'(x)+2f(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=(2xf(x))'\Leftrightarrow\frac{f^2(x)}{2}=2xf(x)+c\quad(1)$$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $c=\frac{1}{2}$ άρα:

$$(1)\ \frac{f^2(x)}{2}=2xf(x)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow f^2(x)=4xf(x)+1\Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)-4xf(x)+4x^2=1+4x^2\Leftrightarrow(f(x)-2x)^2=1+4x^2\quad(2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-2x$ με $x\in\mathbb{R}$. Η φ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Θα δείξουμε ότι $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0$. Τότε:

$$f'(x_0)\cdot(f(x_0)-2x_0)=2f(x_0)\Leftrightarrow 2f(x_0)=0\overset{f(x_0)=2x_0}{\Leftrightarrow}4x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$$

Άρα θα ισχύει $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=2x_0\overset{x_0=0}{\Leftrightarrow}f(0)=0$ (άτοπο διότι $f(0)=1$)

Επομένως $\varphi(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $\varphi(0)=f(0)=1>0$, άρα $\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$(2)\overset{\varphi(x)=f(x)-2x}{\Leftrightarrow}\varphi^2(x)=1+4x^2\overset{\varphi(x)>0}{\Leftrightarrow}\varphi(x)=\sqrt{1+4x^2}\Leftrightarrow f(x)-2x=\sqrt{1+4x^2}\Leftrightarrow f(x)=2x+\sqrt{1+4x^2}$$

β) $$f'(x)=2+\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}=2+\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{2\sqrt{4x^2+1}+4x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

- Αν $x\geq 0$ τότε $2\sqrt{4x^2+1}+4x>0$ άρα $f'(x)>0$

- Αν $x<0$ τότε:

$$2\sqrt{4x^2+1}+4x>0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+1}>-4x \overset{-4x>0}{\Leftrightarrow} 16x^2+4>16x^2 \Leftrightarrow 4>0 \quad \text{(ισχύει)}$$

άρα $f'(x)>0$.

Επομένως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x)>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της f είναι

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,\ +\infty)$ διότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4x^2-1}{2x-\sqrt{4x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x\left(2+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)=+\infty$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x$ με $D_h=[0,+\infty)$.

Η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, άρα:

$h'(x)=g'(x)-1>0$ διότι $f(x)>0 \Leftrightarrow e^{f(x)}>e^0 \Leftrightarrow g'(x)>1 \Leftrightarrow g'(x)-1>0$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα οπότε για κάθε $x\ge 0$ έχουμε:

$x\ge 0 \Leftrightarrow h(x)\ge h(0) \Leftrightarrow g(x)-x\ge g(0) \Leftrightarrow g(x)-x\ge 0 \Leftrightarrow g(x)\ge x$

ε) Το σημείο Α(x(t), y(t)) κινείται στη γραφική παράσταση στης g, άρα θα ισχύει: $y(t)=g(x(t))$

Κατά τη χρονική στιγμή t_0 το σημείο Α βρίσκεται στον άξονα yy΄, άρα $x(t_0)=0$.

Επιπλέον η τετμημένη του Α αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec άρα $x'(t)=2$.

Άρα: $y(t)=g(x(t)) \Leftrightarrow y'(t)=g'(x(t))\cdot x'(t)$

Για τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε: $y'(t_0)=g'(x(t_0))\cdot x'(t_0) \Leftrightarrow y'(t_0)=2g'(0) \Leftrightarrow y'(t_0)=2e^{f(0)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(t_0)=2e$ cm/sec.

9

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(-1)=f'(1)=1$. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι :

α) $f(1)<1$

β) $f(-1)>-1$

γ) η εξίσωση $f(x)=(x+1)^2-x-2$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), άρα από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_1\in(0,1)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)$.

Η f' γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[0,+\infty)$ άρα: $0<\xi_1<1\Rightarrow f'(\xi_1)<f'(1)\Rightarrow f(1)<1$

β) Η f είναι συνεχής στο [−1, 0] και παραγωγίσιμη στο (−1, 0), άρα από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi_2\in(-1,0)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_2)=\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=-f(-1)$.

Η f' γνησίως φθίνουσα για κάθε $x\in(-\infty,0]$ άρα:

$-1<\xi_2<0\Rightarrow f'(\xi_2)<f'(-1)\Rightarrow -f(-1)<1\Rightarrow f(-1)>-1$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-(x+1)^2+x+2$ με $D_h=\mathbb{R}$.

- Η h είναι συνεχής στο [−1, 1]
- $h(-1)=f(-1)+1>0$ και $h(x)=f(1)-4+3=f(1)-1<0$

άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,1)$ ώστε

$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=(x_0+1)^2-x_0-2$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=(x+1)^2-x-2$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

10

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(-1)=f(5)$. Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (–1, f(–1)) και (5, f(5)) είναι παράλληλες και επιπλέον ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x-1)+\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x}=6$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(5)=0$

β) $f'(5)=0$

γ) υπάρχει $x_0\in[0,4]$ ώστε $f(x_0+1)=f(x_0-1)$

δ) η f'' δεν είναι αντιστρέψιμη

Λύση

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{xf(x-1)+\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x}$ με $D_g=\{x\in\mathbb{R}\,/\,\eta\mu x\neq 0\}$ και

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=6$

Έχουμε: $g(x)=\dfrac{xf(x-1)+\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{\eta\mu^2 x}\Leftrightarrow xf(x-1)+\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x=g(x)\cdot\eta\mu^2 x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xf(x-1)=g(x)\cdot\eta\mu^2 x-\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x\Leftrightarrow f(x-1)=\dfrac{g(x)\cdot\eta\mu^2 x-\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x}$

Η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) άρα:

$$f(5)=f(-1)=\lim_{x\to -1}f(x)\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0}f(u-1)=\lim_{x\to 0}f(x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu^2 x-\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)\cdot\eta\mu^2 x}{x}-\frac{\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\eta\mu x-2\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot\eta\mu 3x\right)=6\cdot 1\cdot 0-2\cdot 1\cdot 0=0$$

β) Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία (–1, f(–1)) και (5, f(5)) είναι παράλληλες, άρα $f'(-1)=f'(5)$. Έχουμε:

$$f'(5)=f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}\overset{u=x+1}{=}\lim_{u\to 0}\frac{f(u-1)}{u}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x-1)}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)\cdot\eta\mu^2 x-\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu^2 x-\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g(x)\cdot\eta\mu^2 x}{x^2}-\frac{\eta\mu 2x\cdot\eta\mu 3x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2-6\cdot\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot\frac{\eta\mu 3x}{3x}\right)=6\cdot 1-6\cdot 1\cdot 1=0$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+1)-f(x-1)$ με $D_h=\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=f(1)-f(-1) \\ h(2)=f(3)-f(1) \\ h(4)=f(5)-f(3) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} h(0)+h(2)+h(4)=0 \quad (\text{εφόσον γνωρίζουμε ότι } f(5)=f(-1)=0)$$

- Αν $h(0)=h(2)=h(4)=0$ τότε υπάρχει $x_0=0$ ή $x_0=2$ ή $x_0=4$ ώστε

$h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0+1)-f(x_0-1)=0 \Leftrightarrow f(x_0+1)=f(x_0-1)$

- Σε κάθε άλλη περίπτωση δύο από τα $h(0), h(2), h(4)$ είναι ετερόσημα. Έστω ότι $h(0)\cdot h(2)<0$, οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο [0, 2] συμπεραίνουμε πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0, 2)$ ώστε να ισχύει $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0+1)-f(x_0-1)=0 \Leftrightarrow f(x_0+1)=f(x_0-1)$

Ομοίως αν $h(2)\cdot h(4)<0$ ή αν $h(0)\cdot h(4)<0$.

Σε κάθε περίπτωση ισχύει πως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[0,4]$ ώστε $f(x_0-1)=f(x_0+1)$

δ) • Η f είναι συνεχής στο $[x_0-1, x_0+1]$ ως παραγωγίσιμη

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0-1, x_0+1)
- $f(x_0-1)=f(x_0+1)$

άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(x_0-1, x_0+1)\subseteq(-1, 5)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=0$

Για τη συνάρτηση f' έχουμε:

- είναι συνεχής στα $[-1, \xi]$ και $[\xi, 5]$ ως παραγωγίσιμη
- είναι παραγωγίσιμη στα $(-1, \xi)$ και $(\xi, 5)$
- $f'(-1)=f'(\xi)=f'(5)$

άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_1\in(-1, \xi)$ ώστε να ισχύει $f''(\xi_1)=0$ και $\xi_2\in(\xi, 5)$ ώστε να ισχύει $f''(\xi_2)=0$.

Συνεπώς υπάρχουν $\xi_1\neq\xi_2$ με $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$, οπότε η f'' δεν είναι αντιστρέψιμη.

11

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $g(0)<0$ και $g(x)=\dfrac{f^3(x)}{3}-2f^2(x)+4f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν η g είναι σταθερή συνάρτηση, να αποδείξετε ότι και η f είναι σταθερή συνάρτηση.

Λύση

Για $x=0$ έχουμε:

$$g(0)=\frac{f^3(0)}{3}-2f^2(0)+4f(0) \Leftrightarrow \frac{f^3(0)-6f^2(0)+12f(0)}{3}<0 \Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)-6f(0)+12\right]<0 \qquad (1)$$

Όμως $f^2(0)-6f(0)+12>0$, διότι $\Delta=-12<0$, άρα από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $f(0)<0$

Η f είναι συνεχής συνάρτηση (ως παραγωγίσιμη) και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε $f(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι σταθερή, οπότε:

$$g'(x)=f^2(x)\cdot f'(x)-4f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(f^2(x)-4f(x)+4\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\cdot\left(f(x)-2\right)^2=0\overset{f(x)<0}{\Leftrightarrow} f'(x)=0$$ επομένως η f είναι σταθερή.

12

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι ισχύει $3f(f(x))=2\sqrt{3}f(x)-x$ και $f'(x)<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0, f(0)).

Λύση

α) Παραγωγίζουμε κατά μέλη την ισότητα $3f(f(x))=2\sqrt{3}f(x)-x$ κι έχουμε:

$$3f'(f(x))\cdot f'(x)=2\sqrt{3}f'(x)-1\Leftrightarrow 3f'(f(x))\cdot f'(x)-2\sqrt{3}f'(x)=-1\Leftrightarrow f'(x)\left(3f'(f(x))-2\sqrt{3}\right)=-1 \quad (2)$$

$f'(x)<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow 3f'(x)-2\sqrt{3}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα θα ισχύει $3f'(f(x))-2\sqrt{3}<0$ (3)

Από (2) και (3) έχουμε: $f'(x)=\dfrac{-1}{3f'(f(x))-2\sqrt{3}}>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

β) Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι (ε): $y-f(0)=f'(0)\cdot x\Leftrightarrow y=f'(0)\cdot x+f(0)$

Για $x=0$ η σχέση (1) γίνεται:

$$3f(f(0))=2\sqrt{3}f(0)-0\Leftrightarrow 3f(f(0))=2\sqrt{3}f(0)\Leftrightarrow f(f(0))=\frac{2\sqrt{3}f(0)}{3} \quad (4)$$

Για $x=f(0)$ η σχέση (1) γίνεται:

$$3f(f(f(0)))=2\sqrt{3}f(f(0))-f(0)\overset{(4)}{\Leftrightarrow}3f(f(f(0)))=2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}f(0)-f(0)\Leftrightarrow 3f(f(f(0)))=3f(0)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(f(f(0)))=f(0)\overset{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(f(0))=0 \quad (5)$$

$(4) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} \dfrac{2\sqrt{3}\,f(0)}{3} = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(0)\left(3f'(f(0)) - 2\sqrt{3}\right) = -1 \Leftrightarrow f'(0)\left(3f'(0) - 2\sqrt{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3[f'(0)]^2 - 2\sqrt{3}f'(0) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\sqrt{3}f'(0) - 1\right]^2 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Συνεπώς η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot x$

13

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{e^x}$ και $g(x) = e^x - x$.

α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

γ) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha > 1$ ισχύει $\alpha f(\alpha+1) > (\alpha-1)f(\alpha) + f(\alpha-1)$.

ε) Δίνεται επιπλέον η συνεχής συνάρτηση h: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ με $h(h(x)) = f(x) \cdot h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

i. η h είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση

ii. η γραφική παράσταση της h και η ευθεία $y = x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της g είναι το $D_g = \mathbb{R}$ και η παράγωγος της g είναι $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	−		+
$g(x)$	↘		↗

Συνεπώς η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επίσης παρουσιάζει ελάχιστο το $g(0) = 0$.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D_f = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^x - x}{xe^x} = \dfrac{g(x)}{xe^x} > 0$ (διότι αποδείχθηκε ότι $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x) > g(0) = 0$)

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Η f είναι συνεχής (ως πράξη συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, επομένως το σύνολο τιμών της είναι: $f(D) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,\ +\infty) = \mathbb{R}$.

δ) $\alpha f(\alpha+1) > (\alpha-1) f(\alpha) + f(\alpha-1) \Leftrightarrow \alpha f(\alpha+1) > \alpha f(\alpha) - f(\alpha) + f(\alpha-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha f(\alpha+1) - \alpha f(\alpha) > -f(\alpha) + f(\alpha-1) \Leftrightarrow \alpha\big(f(\alpha+1) - f(\alpha)\big) + \big(f(\alpha) - f(\alpha-1)\big) > 0 \quad (1)$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε $f(\alpha) - f(\alpha-1) > 0$ και $f(\alpha+1) - f(\alpha) > 0$ κι επειδή $\alpha > 1$ προφανώς η σχέση (1) ισχύει.

ε) i. Έστω ότι η h δεν είναι 1–1, άρα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε να ισχύει $h(x_1) = h(x_2)$.

Έχουμε λοιπόν:

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow h\big(h(x_1)\big) = h\big(h(x_2)\big) \Rightarrow f(x_1)\cdot h(x_1) = f(x_2)\cdot h(x_2) \overset{h(x_1)=h(x_2)}{\Longrightarrow} f(x_1) = f(x_2)$$

(άτοπο διότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα 1–1)

Επομένως η h είναι 1–1, δηλ. αντιστρέψιμη.

ii. Λύνουμε την εξίσωση $h(x) = x$ και θέλουμε να δείξουμε ότι έχει μοναδική λύση.

$$h(x) = x \overset{h:1-1}{\Leftrightarrow} h(h(x)) = h(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot h(x) = h(x) \overset{h(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) = 1 \quad (2)$$

Όμως $1 \in f(D)$, άρα υπάρχει $x_0 \in D_f$ δηλ. $x_0 > 0$ ώστε να ισχύει $f(x_0) = 1$. Συνεπώς:

$$(2) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = x_0$$

Άρα η γραφική παράσταση της h και η ευθεία $y = x$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 > 0$.

14

α) Αν για μια συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $2f(x)+x^4=\etaμf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x\to 0} f(x)$

ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε να βρείτε το $\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x^4}$ και να αποδείξετε ότι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) $-|g(x)|\le g(x)\le|g(x)|$ κι επειδή $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=0$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$.

β) i. $|2f(x)+x^4|\ge\big||2f(x)|-|x^4|\big|\Leftrightarrow\big|2|f(x)|-|x^4|\big|\le|\etaμf(x)|\le|f(x)|$

Άρα $\big|2|f(x)|-|x^4|\big|\le|f(x)|\Leftrightarrow -|f(x)|\le 2|f(x)|-|x^4|\le|f(x)|$.

Επομένως: $-|f(x)|\le 2|f(x)|-|x^4|\Leftrightarrow|x^4|\le 3|f(x)|\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^4\le|f(x)|$ άρα $0\le\lim_{x\to 0}|f(x)|$ (1)

$2|f(x)|-|x^4|\le|f(x)|\Leftrightarrow|f(x)|\le x^4$ άρα $\lim_{x\to 0}|f(x)|\le 0$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\lim_{x\to 0}|f(x)|=0$ οπότε $\lim_{x\to 0} f(x)=0$.

ii. $2f(x)+x^4=\etaμf(x)\Leftrightarrow f(x)=\frac{\etaμf(x)-x^4}{2}$

$$L=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\etaμf(x)-x^4}{2x^4}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\etaμf(x)}{2x^4}-\frac{1}{2}\right)\quad(3)$$

$$\left|\frac{\etaμf(x)}{x^4}\right|=\frac{|\etaμf(x)|}{x^4}\le\frac{1}{x^4}\quad\text{άρα}\quad -\frac{1}{x^4}\le\frac{\etaμf(x)}{x^4}\le\frac{1}{x^4}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^4}\right)=0$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x\to-\infty}\frac{\etaμf(x)}{x^4}=0$.

Επομένως από τη σχέση (3) έχουμε: $L=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\etaμf(x)-x^4}{2x^4}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\etaμf(x)}{2x^4}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

Παραγωγίζοντας κατά μέλη τη σχέση $2f(x)+x^4=\etaμf(x)$ έχουμε:

$$2f'(x)+4x^3=f'(x)\cdot\sigmaυνf(x)\Leftrightarrow f'(x)\cdot(2-\sigmaυνf(x))=-4x^3\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{4x^3}{2-\sigmaυνf(x)}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ διότι $\sigma\upsilon\nu f(x) \le 1 < 2 \Leftrightarrow 2 - \sigma\upsilon\nu f(x) > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 0$, το $f(0) = 0$

(η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη συνάρτηση, άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$)

Επομένως $f(x) \le f(0) \Leftrightarrow f(x) \le 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\dfrac{f(x) + 2x}{e^{2x} + x^2} = \dfrac{e^{2x} + x^2}{f(x) + 2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) + 2x \ne 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \le 0 \\ h(x) - x + 1, & x > 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - 2x}{x^2 - 2x} \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{xh(x+1) + \eta\mu 5x - 5x}{\eta\mu x + x} = \dfrac{1}{2e^2}$

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 1$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{2x} + x^2 - 2x$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Αν η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ ώστε να ισχύει $g'(x_1) + g'(x_2) = -3$.

Λύση

α) $\varphi(x) = \dfrac{h(x) - 2x}{x^2 - 2x} \Leftrightarrow h(x) - 2x = \varphi(x) \cdot (x^2 - 2x) \Leftrightarrow h(x) = 2x + \varphi(x) \cdot (x^2 - 2x)$ με $x \in \mathbb{R}^* - \{2\}$

και $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left[2x + \varphi(x) \cdot (x^2 - 2x)\right] = 0 \Leftrightarrow h(0) = 0$.

Η g είναι συνεχής άρα: $g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) \Leftrightarrow g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} (h(x) - x + 1) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow g(0)=h(0)+1=f(0) \overset{h(0)=0}{\Leftrightarrow} f(0)=g(0)=1$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=f(x)+2x$ με $x\in\mathbb{R}$.

Γνωρίζουμε ότι $k(x)=f(x)+2x\neq 0$ κι επειδή η k(x) είναι συνεχής συνάρτηση (ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων), συμπεραίνουμε ότι διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$k(0)=f(0)+2\cdot 0=1>0$, άρα $k(x)=f(x)+2x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)+2x}{e^{2x}+x^2}=\frac{e^{2x}+x^2}{f(x)+2x}\Leftrightarrow (f(x)+2x)^2=\left(e^{2x}+x^2\right)^2 \overset{f(x)+2x>0}{\Leftrightarrow} f(x)+2x=e^{2x}+x^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=e^{2x}+x^2-2x.$$

γ) $f'(x)=2e^{2x}+2x-2$ με $f'(0)=2e^{2\cdot 0}+2\cdot 0-2=0$

$f''(x)=4e^{2x}+2>0$

Συνεπώς:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$f'(x)$	$\nearrow$ −		+ $\nearrow$
f(x)	$\searrow$		$\nearrow$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως:

$x<0\Leftrightarrow f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$

$x>0\Leftrightarrow f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$, το $f(0)=1$.

δ) $$\lim_{x\to 0}\frac{xh(x+1)+\eta\mu 5x-5x}{\eta\mu x+x}=\frac{1}{2e^2}\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{h(x+1)+5\cdot\frac{\eta\mu 5x}{5x}-5}{\frac{\eta\mu x}{x}+1}=\frac{1}{2e^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(1)}{2}=\frac{1}{2e^2}\Leftrightarrow h(1)=\frac{1}{e^2}$$

Η g είναι συνεχής στα διαστήματα $[-1, 0]$, $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$, επομένως από το ΘΜΤ προκύπτει ότι:

υπάρχει $x_1\in(-1, 0)$ ώστε να ισχύει $g'(x_1)=g(0)-g(-1)=f(0)-f(-1)=1-3-\frac{1}{e^2}=-2-\frac{1}{e^2}$

υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$ ώστε να ισχύει $g'(x_2) = g(1) - g(0) = h(1) - 1 + 1 - f(0) = \frac{1}{e^2} - 1$

Άρα: $g'(x_1) + g'(x_2) = -3$.

16

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ με $f'(x) = 2xf^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\frac{1}{f(\beta)} - \frac{1}{f(\alpha)} = \alpha^2 - \beta^2$ για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi) = (\alpha + \beta) f(\alpha) f(\beta)$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Αν το σημείο A(1, f(1)) είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητά της και να εξετάσετε αν έχει κι άλλα σημεία καμπής.

Λύση

α) $f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(-x^2\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^2 + c$

$\frac{1}{f(\beta)} - \frac{1}{f(\alpha)} = -\beta^2 + c + \alpha^2 - c \Leftrightarrow \frac{1}{f(\beta)} - \frac{1}{f(\alpha)} = \alpha^2 - \beta^2 \quad (1)$

β) Η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), άρα από το ΘΜΤ προκύπτει πως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (2)$

Από τη σχέση (1) έχουμε: $\frac{1}{f(\beta)} - \frac{1}{f(\alpha)} = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{f(\beta) f(\alpha)} = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = f(\beta) f(\alpha)(\alpha + \beta) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f(\beta) f(\alpha)(\alpha + \beta) \quad (3)$

Συνεπώς: $(2) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = f(\beta) f(\alpha)(\alpha + \beta)$

γ) Προφανώς ισχύουν:

Αν $x > 0$ τότε $f'(x) = 2xf^2(x) > 0$

Αν $x<0$ τότε $f'(x)=2x f^2(x)<0$

Αν $x=0$ τότε $f'(x)=2x f^2(x)=0$

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0, +∞) και γνησίως φθίνουσα στο (–∞, 0].
Επίσης η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(0)$

δ) Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{1}{f(x)}=-x^2+c$, επομένως $f(x)=\dfrac{1}{-x^2+c}$

Προφανώς $-x^2+c\neq 0$, διότι διαφορετικά θα ίσχυε $\dfrac{1}{f(x)}=0$ (άτοπο).

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο Α(1, f(1)) είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασής της, οπότε $f''(1)=0$.

Έχουμε λοιπόν: $f'(x)=\dfrac{2x}{(-x^2+c)^2}$ και $f''(x)=\dfrac{2(-x^2+c)^2+8x^2(-x^2+c)}{(-x^2+c)^4}$

$$f''(1)=0\Leftrightarrow \frac{2(-1+c)^2+8(-1+c)}{(-1+c)^4}=0\Leftrightarrow \frac{2(-1+c)+8}{(-1+c)^3}=0\Leftrightarrow -2+2c+8=0\Leftrightarrow c=-3$$

Συνεπώς $f(x)=\dfrac{1}{-x^2-3}=-\dfrac{1}{x^2+3}$

Μελετάμε την f ως προς την κυρτότητα:

$$f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2+3\right)^2-8x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^4}=\frac{2\left(x^2+3\right)-8x^2}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{-6x^2+6}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow -6x^2+6=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$$

x	–∞	–1	1	+∞
$f''(x)$	−	+	−	
$f(x)$				

Η f είναι κυρτή στο [–1, 1] και κοίλη στα διαστήματα (–∞, –1] και [1, +∞). Επομένως η f έχει και δεύτερο σημείο καμπής, το Β(–1, f(–1)).

17

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f: [α, β]→ ℝ, με συνεχή παράγωγο. Η f είναι κυρτή στο [α, β], $f(\alpha)=0$ και $f(\beta)+f(\gamma)=0$ με $\gamma\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f(\gamma)<f(\alpha)<f(\beta)$

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Λύση

α) $f(\beta)+f(\gamma)=0 \Leftrightarrow f(\beta)=-f(\gamma)$

Η f είναι κυρτή στο [α, β] άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα [α, γ] και [γ, β] (ως παραγωγίσιμη συνάρτηση) και παραγωγίσιμη στα διαστήματα (α, γ) και (γ, β), οπότε από το ΘΜΤ προκύπτει ότι:

υπάρχει $x_1\in(\alpha,\gamma)$ ώστε $f'(x_1)=\dfrac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}$ και

υπάρχει $x_2\in(\gamma,\beta)$ ώστε $f'(x_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\gamma)}{\beta-\gamma}=\dfrac{-2f(\gamma)}{\beta-\gamma}$

$$x_1<x_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x_1)<f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<\frac{-2f(\gamma)}{\beta-\gamma} \Leftrightarrow \frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}+\frac{2f(\gamma)}{\beta-\gamma}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta-\gamma)f(\gamma)+2(\gamma-\alpha)f(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}<0 \Leftrightarrow \frac{(\beta-\gamma+2\gamma-2\alpha)f(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}<0 \Leftrightarrow \frac{(\beta+\gamma-2\alpha)f(\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}<0 \Leftrightarrow f(\gamma)<0$$

διότι $\alpha<\gamma<\beta$

Άρα $f(\beta)=-f(\gamma)>0$ οπότε $f(\gamma)<f(\alpha)<f(\beta)$.

β) Εφόσον $f(\gamma)<0$ συμπεραίνουμε ότι: $f'(x_1)=\dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}<0$ και $f'(x_2)=\dfrac{-2f(\gamma)}{\beta-\gamma}>0$

Η f' είναι συνεχής συνάρτηση, άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1, x_2)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=0$. Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα το ξ είναι μοναδικό.

Έχουμε λοιπόν: $x<\xi \Leftrightarrow f'(x)<f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x)<0$ και $x>\xi \Leftrightarrow f'(x)>f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x)>0$

Άρα:

x	α ξ	β
$f'(x)$	↗ −	+ ↗
f(x)	↘	↗

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο ξ.

γ) $\alpha<\xi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(\xi)<f(\alpha) \Leftrightarrow f(\xi)<0$

Έστω $A_1=[\alpha, \xi]$ και $A_2=(\xi, \beta]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο A_1, άρα $f(A_1)=[f(\xi), 0]$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο A_2, άρα $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x), f(\beta)\right]=(f(\xi), f(\beta)]$.

$0\in f(A_1)$ κι επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο A_1.

$0\in f(A_2)$ κι επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση στο A_2.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

18

Δίνεται η κοίλη συνάρτηση $f:(-\infty, \alpha)\to\mathbb{R}$, με $\alpha\in\mathbb{R}$ και συνεχή παράγωγο, καθώς και η ευθεία $y=2x+5$ η οποία είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x+1)-f(x)]$.

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x<\alpha-1$.

γ) Να προσδιορίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)$.

δ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=2(x-3)e^x+x^2+4x+2e^2+2$.
Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Λύση

α) Η ευθεία $y=2x+5$ η οποία είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$ οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=5$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x+1)-f(x)]=\lim_{x\to-\infty}[f(x+1)-2(x+1)-f(x)+2(x+1)]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}[f(x+1)-2(x+1)-(f(x)-2x)+2]=5-5+2=2$$

διότι

- $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x)=5$
- Για το $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x+1)-2(x+1)]$ θέτουμε $u=x+1\Leftrightarrow x=u-1$ άρα αν $x\to-\infty$ τότε $u\to-\infty$.

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x+1)-2(x+1)]=\lim\limits_{u\to-\infty}[f(u)-2u]=5$

β) Η f είναι συνεχής στα διαστήματα [x–1, x], [x, x+1] και παραγωγίσιμη στα (x–1, x), (x, x+1), άρα από το ΘΜΤ προκύπτει πως υπάρχει $\xi_1\in(x-1,x)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)=f(x)-f(x-1)$ και $\xi_2\in(x,x+1)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_2)=f(x+1)-f(x)$, για κάθε $x<\alpha-1$

Η f είναι κοίλη, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα.

$\xi_1<x<\xi_2 \Leftrightarrow f'(\xi_2)<f'(x)<f'(\xi_1)\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)\quad(1)$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x+1)-f(x)]=2$

Θέτουμε $u=x-1\Leftrightarrow x=u+1$ άρα αν $x\to-\infty$ τότε $u\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim\limits_{u\to-\infty}[f(u+1)-f(u)]=2$

Από τη σχέση (1) και λόγω του κριτηρίου παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=2$.

δ) Η f' είναι συνεχής συνάρτηση και γνησίως φθίνουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$f'(A)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^-}f'(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to\alpha^-}f'(x),\ 2\right)$

Άρα $f'(x)<2$ για κάθε $x\in(-\infty,\alpha)$.

Η $g(x)=2(x-3)e^x+x^2+4x+2e^2+2$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

$g'(x)=2(x-3)e^x+2e^x+2x+4$ με $g'(0)=0$

$g''(x)=2(x-3)e^x+2e^x+2e^x+2=2(x-3)e^x+4e^x+2$ με $g''(0)=0$

$g'''(x)=2(x-3)e^x+6e^x=2xe^x$

$g'''(x)=0\Leftrightarrow 2xe^x=0\Leftrightarrow x=0$ και $g'''(x)>0\Leftrightarrow 2xe^x>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ 0	$\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'''(x)$	$-$	$+$
$g''(x)$	↘ $+$	$+$ ↗
$g'(x)$	↗ $-$	$+$ ↗
$g(x)$	↘	↗

$x<0\overset{g''\downarrow}{\Leftrightarrow}g''(x)>g''(0)\Leftrightarrow g''(x)>0$ και $x>0\overset{g''\uparrow}{\Leftrightarrow}g''(x)>g''(0)\Leftrightarrow g''(x)>0$

$x<0 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x)<g'(0) \Leftrightarrow g'(x)<0$ και $x>0 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x)>g'(0) \Leftrightarrow g'(x)>0$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο (–∞, 0] και γνησίως αύξουσα στο [0, +∞) και έχει ολικό ελάχιστο το $g(0)=2e^2-4$

Δηλ. για κάθε $x\in\mathbb{R}$ προκύπτει ότι $g(x)\geq 2e^2-4$

Άρα για κάθε $x\in(-\infty, \alpha)$ ισχύει $g(x)\geq 2e^2-4>2>f'(x)$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f' και g προφανώς δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

19

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g, h: [0, +∞)→ℝ με $g(x)=f(x+1)-f(x)$ και $h(x)=f(x^2)+f(x^2+1)$. Για τη συνάρτηση f ισχύει επιπλέον ότι $f\left(\frac{1}{2f'(x)}\right)-f\left(\sqrt{x}\right)=0$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$.

β) Να δείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g και η ασύμπτωτη της h στο +∞ έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο.

ε) Να προσδιορίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g καθώς και τον άξονα yy΄.

Λύση

α) Εφόσον η f έχει πεδίο ορισμού το [0, +∞), λόγω της σχέσης $f\left(\frac{1}{2f'(x)}\right)-f\left(\sqrt{x}\right)=0$, συμπεραίνουμε ότι $\frac{1}{2f'(x)}\geq 0$ άρα $f'(x)>0$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, άρα και 1–1.

$$f\left(\frac{1}{2f'(x)}\right)-f(\sqrt{x})=0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2f'(x)}\right)=f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \frac{1}{2f'(x)}=\sqrt{x} \Leftrightarrow 2f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Συνεπώς $f(x)=\sqrt{x}+c$.

Για x= 1 έχουμε: $f(1)=\sqrt{1}+c \Leftrightarrow 1=1+c \Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f(x)=\sqrt{x}$.

β) $g(x)=f(x+1)-f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}}<0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση οπότε και 1–1, άρα αντιστρέφεται.

Η g είναι ως γνωστόν συνεχής, έχει πεδίο ορισμού το $D_g=[0,+\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$g(D)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]=(0,1]$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

γ) Η h δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, λόγω του πεδίου ορισμού της. Εξετάζουμε αν έχει πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ (στο $-\infty$ δε θα εξετάσουμε διότι το πεδίο ορισμού είναι το $[0,+\infty)$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x^2)+f(x^2+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+1}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{D.L.}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=1+1=2=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}(h(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x^2)+f(x^2+1)-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2+1}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0=\beta$$

Άρα η γραφική παράσταση της h έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, την ευθεία $y=2x$.

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x)=2x \Leftrightarrow f(x+1)-f(x)=2x \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{x}-2x=0$ έχει μια μοναδική λύση.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-2x$ με $x\ge 0$

$\varphi'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}-4\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x}}<0$ για κάθε $x>0$, διότι

$\sqrt{x}<\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\sqrt{x}-\sqrt{x+1}<0$, $-4\sqrt{x}\sqrt{x+1}<0$ και $2\sqrt{x}\sqrt{x+1}>0$

Άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε και 1–1. Η φ είναι συνεχής συνάρτηση, άρα το σύνολο τιμών της είναι: $\varphi(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x), \varphi(0)\right]=(-\infty,1]$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-2x\right)=0+(-\infty)=-\infty$$

$\varphi(0)=\sqrt{0+1}-\sqrt{0}-2\cdot 0=1$

Παρατηρούμε ότι $0\in\varphi(A)$ κι επειδή η φ είναι 1–1 συνάρτηση, άρα έχει μοναδική λύση η εξίσωση $\varphi(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-2x=0$. Επομένως η γραφική παράσταση της g και η ασύμπτωτη της h έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο.

ε) $g(x)=f(x+1)-f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ με $D_g=[0,+\infty)$

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 4x=x+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

$f(x)<g(x)\Leftrightarrow \sqrt{x}<\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}<\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 4x<x+1\Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$

Επομένως το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$E=\int_0^{\frac{1}{3}}(g(x)-f(x))dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+1}-2\sqrt{x}\right)dx=\left[\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\frac{4\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{16\sqrt{3}}{27}-\frac{4\sqrt{3}}{27}-\frac{2}{3}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3}-6}{9} \text{ τ.μ.}$$

20

α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(0, +∞)→ℝ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(\kappa x)}{x}=0$ με $\kappa>1$ και $f'(x)=x^2\lim_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

β) Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση g:(0, +∞)→ℝ με $g(x)+xf(x)+3\geq\frac{1}{x}$ και $g(x)\leq x+\frac{1}{x^2}-3$ για κάθε $x>0$, $g(1)=-2-f(1)$ και $g'(1)=0$. Να βρείτε:

i. τον τύπο της f
ii. τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της g
iii. το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{2g(x)+\ln x-5x}{xg(x)-x^2+\eta\mu 2x}$

Λύση

α) Έστω $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\alpha\in\mathbb{R}$ και $h(x)=\frac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=xh(x)$ με $x>0$ και $\lim_{x\to0^+}h(x)=\alpha$.

Για το $\lim_{x\to0^+}h(\kappa x)$ θέτουμε $v=\kappa x\Leftrightarrow x=\frac{v}{\kappa}$, οπότε όταν $x\to0^+$ προκύπτει ότι και $v\to0^+$.

Επομένως: $\lim_{x\to0^+}h(\kappa x)=\lim_{v\to0^+}h(v)=\alpha$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(\kappa x)}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{xh(x)-\kappa xh(\kappa x)}{x}=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+}\big(h(x)-\kappa h(\kappa x)\big)=0 \Leftrightarrow \alpha-\kappa\alpha=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\kappa)\cdot\alpha=0 \overset{\kappa>1}{\Leftrightarrow} \alpha=0,\ \text{άρα}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\alpha=0.$$

Συνεπώς για κάθε $x>0$ έχουμε: $f'(x)=x^2\lim_{u\to 0^+}\frac{f(u)}{u}=x^2\cdot 0=0 \Leftrightarrow f(x)=c$

β) i. Έστω $\varphi(x)=g(x)+x\,f(x)+3-\frac{1}{x}$ με $\varphi(x)\ge 0$ και $\varphi(1)=g(1)+f(1)+2=0$

Άρα $\varphi(x)\ge\varphi(1)$ και σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει $\varphi'(1)=0$

$$\varphi'(x)=g'(x)+x\,f'(x)+f(x)+\frac{1}{x^2}$$

$$\varphi'(1)=0 \Leftrightarrow g'(1)+f'(1)+f(1)+1=0 \Leftrightarrow f(1)=-1$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι $f(x)=c$

Για $x=1$ έχουμε: $f(1)=c \Leftrightarrow c=-1$

Επομένως $f(x)=-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

ii. $$\left.\begin{array}{l} g(x)+x\,f(x)+3\ge\frac{1}{x} \Rightarrow g(x)\ge\frac{1}{x}-xf(x)-3 \\ g(x)\le x+\frac{1}{x^2}-3 \end{array}\right\}\ \text{άρα}\ \frac{1}{x}-xf(x)-3\le g(x)\le x+\frac{1}{x^2}-3$$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-x\,f(x)-3\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x+\frac{1}{x^2}-3\right)=+\infty$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=+\infty$$

Συνεπώς η ευθεία με εξίσωση $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g.

$$g(x)+x\,f(x)+3\ge\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}+f(x)+\frac{3}{x}\ge\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}\ge\frac{1}{x^2}-f(x)-\frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}\ge\frac{1}{x^2}+1-\frac{3}{x}$$

$$g(x)\le x+\frac{1}{x^2}-3 \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x}\le 1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}$$

Συνεπώς: $\frac{1}{x^2}+1-\frac{3}{x}\le\frac{g(x)}{x}\le 1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}$

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1-\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}\right)=1$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=1=\lambda$$

$$g(x)+x\,f(x)+3\ge\frac{1}{x} \Leftrightarrow g(x)-x\ge\frac{1}{x}-x-x\,f(x)-3 \Leftrightarrow g(x)-x\ge\frac{1}{x}-x+x-3 \Leftrightarrow g(x)-x\ge\frac{1}{x}-3$$

$$g(x)\le x+\frac{1}{x^2}-3 \Leftrightarrow g(x)-x\le\frac{1}{x^2}-3$$

Άρα $\frac{1}{x}-3 \le g(x)-x \le \frac{1}{x^2}-3$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-3\right)=-3$ άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x)=-3=\beta$

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=x-3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

iii. $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2g(x)+\ln x-5x}{xg(x)-x^2+\eta\mu 2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\frac{g(x)}{x}+\frac{\ln x}{x}-5}{g(x)-x+\frac{\eta\mu 2x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$|\eta\mu 2x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le \eta\mu 2x\le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{x}\le\frac{\eta\mu 2x}{x}\le\frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu 2x}{x}=0$

Επομένως: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\frac{g(x)}{x}+\frac{\ln x}{x}-5}{g(x)-x+\frac{\eta\mu 2x}{x}}=\frac{2\cdot 1+0-5}{-3+0}=\frac{-3}{-3}=1$