Πρόδρομος Π. Ελευθερίου
Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ν. Λέσβου
Email: makisel@sch.gr

(Τμήματα του κειμένου που ακολουθεί έχουν παρουσιαστεί στην 6η & 8η Μαθηματική Εβδομάδα στη Θεσσαλονίκη).

Σύνθεση συναρτήσεων, αντίστροφες συναρτήσεις, συναρτησιακές σχέσεις και συναρτήσεις που ορίζονται πεπλεγμένα (ύπαρξη και κατασκευή).

2η Έκδοση. Μυτιλήνη, 24/10/2016

1. Σύνθεση συναρτήσεων,
2. Συναρτησιακές σχέσεις,
3. Μονοτονία,
4. Αντίστροφες συναρτήσεις,
5. Συνέχεια και Παραγωγισιμότητα,
6. Απαγωγή σε άτοπο και «λίγο» Θ.Μ.Τ.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό αποδεικνύουμε, στο πλαίσιο της σχολικής ύλης, ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η παράγωγός της έχει κάτω φράγμα θετικό ή άνω φράγμα αρνητικό, τότε η αντίστροφή της ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz. Επίσης, υποδεικνύουμε με ποιον τρόπο θα μπορούσε να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια δοσμένη συναρτησιακή σχέση και προτείνουμε τρόπο κατασκευής συναρτήσεων που ορίζονται πεπλεγμένα. Τέλος, τις συναρτήσεις αυτές τις μελετούμε ως προς τη συνέχεια, την παραγωγισιμότητα, την ύπαρξη και τον προσδιορισμό της αντίστροφής της, εφόσον υπάρχει.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αφόρμηση για το παρόν άρθρο υπήρξαν διάφορα ερωτήματα μαθητών και κυρίως εκπαιδευτικών, τα οποία παραθέτουμε μαζί με τις απαντήσεις τους. Ιδιαίτερα σημαντικό θεωρούμε το 4ο ερώτημα μιας και η απάντησή του καθιστά ικανούς τους μαθητές να κατασκευάζουν μια κατηγορία απαιτητικών ασκήσεων. Έτσι, εκτός από τη χαρά της δημιουργίας εμβαθύνουν και κατακτούν τη γνώση, αφού εμπλέκονται ενεργά σε αυτή. Ενδιαφέρον μάλιστα έχει το παιχνίδι που μπορεί να στηθεί, με έπαθλο ή και όχι, ανάμεσα στους μαθητές εκείνους που κατασκευάζουν και σε εκείνους που λύνουν τις προτεινόμενες ασκήσεις. Ειλικρινά, είναι ένα παιχνίδι που αποδεδειγμένα αρέσει στους μαθητές και προάγει τη μαθηματική σκέψη. Κατά τη διάρκεια της 27χρονης διδασκαλίας μου στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η κατασκευή ασκήσεων από τους μαθητές ήταν πάντα ένας από τους διδακτικούς μου στόχους και είχε πάντα θετικότατα αποτελέσματα.

1.1. ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ (Μαθητών & Εκπαιδευτικών)

Ερώτημα 1ο

Επειδή $f^{-1}\big(f(x)\big)=x$ για κάθε $x\in D_f$, θα μπορούσαμε «κατ' αναλογία» να ισχυριστούμε ότι, αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in D_f$, τότε $g=f^{-1}$ και επομένως $f=g^{-1}$;

Ερώτημα 2ο

Πολλές συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x)=x^5+x^3+x$ και $g(x)=x-1+\ln x$, είναι συνεχείς και αντιστρέψιμες. Όμως, αφού το αντίστοιχο θεώρημα που μας εξασφαλίζει τη συνέχεια των αντιστρόφων τους (βλ. [9]) δεν περιλαμβάνεται στα σχολικά βιβλία, θα μπορούσε η απόδειξη της συνέχειας των f^{-1} και g^{-1} να γίνει στα πλαίσια της σχολικής ύλης;

Ερώτημα 3ο

Αν δίνεται μια συναρτησιακή σχέση, π.χ $f^3(x)-4f^2(x)+6f(x)-2=x$, $x\in \mathrm{IR}$ (βλ. [2]), τότε πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί την εν λόγω σχέση; Και, αν υπάρχει, τότε πώς μπορούμε να τη μελετήσουμε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα;

Ερώτημα 4ο

Πώς θα μπορούσαμε να κατασκευάζουμε συναρτήσεις οι οποίες να ορίζονται πεπλεγμένα και μάλιστα οι συναρτήσεις αυτές να είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες;

1.2. Προκαταρκτικά

Προτού προχωρήσουμε στις απαντήσεις των παραπάνω ερωτημάτων θα παραθέσουμε κάποιους Ορισμούς, κάποια Θεωρήματα, ένα Πόρισμα και ένα Λήμμα.

Ισότητα συναρτήσεων

1.2.1. Ορισμός

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

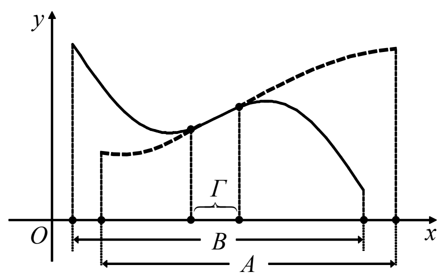
- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f=g$.

Συναρτήσεις ίσες σε σύνολο

1.2.2. Ορισμός

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των Α και Β. Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x)=g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις **f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ**.



Σύνθεση συναρτήσεων

1.2.3. Ορισμός

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g**, και τη συμβολίζουμε με **gof,** τη συνάρτηση με τύπο

$$(gof)(x) = g(f(x)).$$

Το πεδίο ορισμού της **gof** αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το f(x) ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η **gof** ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

Σχόλιο 1

Έστω f και g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α και Β αντιστοίχως. Αν ορίζεται η gof και υπάρχει σύνολο Γ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Gamma$ να ισχύει g(f(x))=x, τότε:

- $\Gamma \subseteq A$
- $\Gamma \subseteq g(B)$
- Για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$. (Γιατί: αν $x_1,x_2 \in \Gamma$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, οπότε $x_1=x_2$).

Σχόλιο 2

Έστω f και g δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α και Β αντιστοίχως. Αν ορίζεται η gof και για κάθε $x \in IR$ ισχύει g(f(x))=x τότε:

- Α=IR και g(B)=IR.
- Η f είναι συνάρτηση 1-1.

1.2.4. Θεώρημα [17]

Για τις συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού Α και Β αντιστοίχως, ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(f(x)=x, \text{για κάθε } x \in A=D_f \\ \bullet\ g\ \ 1\text{-}1 \\ \bullet\ g(B)=A=D_f,\ \left(\text{συν. τιμών } g=\text{πεδ. ορισ. } f\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f=g^{-1} \\ \ \ \text{και} \\ f(A)=B \end{array}\right.$$

Απόδειξη

Η g είναι 1-1, άρα αντιστρέψιμη. Το πεδίο ορισμού της g^{-1} είναι το g(B)=A. Άρα οι συναρτήσεις f και g^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

Έχουμε:

g(f(x))=x για κάθε Α$\Rightarrow$ $f(x)=g^{-1}(x)$ για κάθε Α, άρα $f=g^{-1}$.

Επειδή $f=g^{-1}$ οι συναρτήσεις f και g^{-1} θα έχουν ίσα σύνολα τιμών, οπότε f(A)=B. ■

Σχόλιο 3

Αν η συνάρτηση g είναι 1-1, τότε από τη συνεπαγωγή:

$$\left(g(f(x)),\ x \in A=D_f\right) \Rightarrow \left(f(x)=g^{-1}(x), x \in A=D_f\right)$$

προκύπτει ότι οι συναρτήσεις f και g^{-1} είναι <u>ίσες στο D_f</u>, δηλαδή η f είναι ο περιορισμός της g^{-1} στο D_f . Επομένως δε μπορούμε με βεβαιότητα να συμπεράνουμε ότι $f=g^{-1}$.

Για παράδειγμα:

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f : [1, 4] \to \text{IR με } f(x) = \sqrt{x} \text{ και } g : [0, 2] \to \text{IR με } g(x) = x^2$$

Είναι:

- $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in D_f = [1,4]$, οπότε: $f(x)=g^{-1}(x)$ για κάθε $x\in D_f=[1,4]$,
- $D_{g^{-1}} =[0,4]$

Άρα, η f είναι περιορισμός της g^{-1} στο διάστημα [1,4].

Σχόλιο 4

Αν για τις συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού το IR, ισχύει $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in$IR και η g είναι 1-1, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

Απόδειξη

Έχουμε:

$(g(f(x))=x$ για κάθε IR) $\Rightarrow$ ($f(x)=g^{-1}(x)$ για κάθε IR). Άρα $f=g^{-1}$.

Επειδή $f=g^{-1}$ οι συναρτήσεις f και g^{-1} θα έχουν ίσα σύνολα τιμών. Όμως το σύνολο τιμών της g^{-1} είναι το IR, άρα και το σύνολο τιμών της f θα είναι επίσης το IR. ■

➲ Αν $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in$IR, τότε προφανώς η g παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές, δηλαδή το σύνολο τιμών της είναι το IR.

Σχόλιο 5 [18]

Αν για τις συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού το IR, ισχύει $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in$IR και η g είναι 1-1 και περιττή, τότε και η f είναι περιττή.

Απόδειξη

Αν $x\in$IR, τότε $-x\in$IR. Επίσης ισχύει:

$g(f(-x))= -x = - g(f(x)) = g(-f(x))$, αφού η g είναι περιττή. Επειδή όμως η g είναι 1-1 θα έχουμε: $g(f(-x)) = g(-f(x)) \Rightarrow f(-x)) = -f(x)$. Άρα η f είναι περιττή αφού για $x\in$IR ισχύουν $-x\in$IR και $f(-x)) = -f(x)$. ■

Ζεύγος αντιστρόφων συναρτήσεων

1.2.5. Θεώρημα

Για τις συναρτήσεις f και g, με πεδίο ορισμού A και B αντιστοίχως, ισχύουν οι συνεπαγωγές:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(f(x))=x, \text{ για κάθε } x\in A=D_f \\ \bullet\ f(A)=B,\ (\text{συν. τιμών } f=\text{πεδ. ορισ. } g) \end{array}\right\} \Rightarrow f=g^{-1} \Rightarrow g=f^{-1}$$

Απόδειξη

- **Ισχυρισμός 1**. Η g είναι συνάρτηση 1-1.

  Πράγματι:

  Αν $y_1,y_2\in B=D_g$ με $g(y_1) = g(y_2)$ (1), τότε, αφού B= f(A) συμπεραίνουμε ότι $y_1,y_2\in f(A)$. Επομένως, θα υπάρχουν $x_1,x_2\in A=D_f$ ώστε να ισχύει $y_1=f(x_1)$ και $y_2=f(x_2)$ (2).

  Η (1), λόγω της (2), γράφεται $g(f(x_1))=g(f(x_2))$, και επειδή η συνάρτηση gof είναι 1-1 προκύπτει ότι $x_1=x_2$ και επομένως $y_1 = y_2$. Άρα η g είναι 1-1.

- **Ισχυρισμός 2**. Το σύνολο τιμών της g είναι το $A=D_f$.

  Θα αποδείξουμε ότι, αν $y\in A$, τότε υπάρχει $x\in B$ με $g(x)=y$.

  Έχουμε:

  $y\in A\Rightarrow f(y)\in f(A)=B$, άρα υπάρχει $x\in B$ με $f(y)=x$.

  Όμως:

  $f(y)=x \Rightarrow g(f(y))=g(x) \Rightarrow y=g(x)$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $A=D_f$

- **Ισχυρισμός 3** Είναι $f=g^{-1}$ και $g=f^{-1}$.

  Επειδή η g είναι 1-1, ορίζεται η αντίστροφή της και ισχύει $D_{g^{-1}}=D_f$.

  Όμως $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in D_f$, άρα $f(x)=g^{-1}(x)$ για κάθε $x\in D_f$, δηλαδή $f=g^{-1}$ και επομένως θα ισχύει $g=f^{-1}$.■

1.2.6. Ορισμός [8]

Μια συνάρτηση $f:A\to IR$, όπου $A\subseteq IR$, λέγεται άνω (αντ. κάτω) φραγμένη, όταν υπάρχει $M\in IR$ (αντ. $m\in IR$) τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in A$ να ισχύει:

$$f(x)\le M \ \ (\text{αντ. } f(x)\ge m)$$

1.2.7. Ορισμός [7]

Μια συνάρτηση $f:A\to IR$, όπου $A\subseteq IR$, θα λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz[1], αν υπάρχει σταθερά k>0 τέτοια, ώστε:

$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y| \text{ για κάθε } x,y\in A.$$

[1]LIPPSCHITZ, RUDOF OTTO (1832-1903). Γερμανός μαθηματικός που συνέβαλε στα Μαθηματικά, κυρίως στις Διαφορικές Εξισώσεις, τη Διαφορική Γεωμετρία, την Άλγεβρα και τη Θεωρία Αριθμών (βλ. [7]).

1.2.8. Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, τότε η f είναι συνεχής.

Απόδειξη

Αν $x_o \in D_f$, τότε, αφού η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, θα υπάρχει σταθερά k>0 τέτοια, ώστε: $|f(x)-f(x_o)| \leq k|x-x_o|$ για κάθε $x \in D_f$

Οπότε θα έχουμε: $-k|x-x_o| \leq f(x)-f(x_o) \leq k|x-x_o|$.

Όμως: $\lim\limits_{x \to x_o}|x-x_o| = \lim\limits_{x \to x_o}\left(-|x-x_o|\right) = 0$. Άρα: $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.■

Σχόλιο 6 [6]

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει. Πράγματι, αν

$$f:[0,1] \to \mathrm{IR} \text{ με } f(x) = \sqrt{x} \ ,$$

τότε η f είναι συνεχής.

Αν, όμως, υποθέσουμε ότι υπάρχει k>0, ώστε $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ για κάθε $x, y \in [0,1]$, τότε για x=0 και $y = \frac{1}{\nu^2}$, $\nu \in \mathrm{IN}^*$ θα έχουμε $\frac{1}{\nu} \leq k\frac{1}{\nu^2}$, δηλαδή $\nu \leq k$ για κάθε $\nu \in \mathrm{IN}^*$, άτοπο.■

1.2.9. Θεώρημα

Αν για μια συνάρτηση f για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ ισχύει:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \geq \theta|x_1-x_2| \ (1) \text{, όπου } \theta>0 \text{, τότε:}$$

α) Η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Η f^{-1} ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

γ) Η f^{-1} είναι συνεχής.

Απόδειξη

α) Αν $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε, λόγω της (1), θα ισχύει:

$$0 \geq \theta|x_1-x_2| \Rightarrow |x_1-x_2| \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Άρα, η f είναι συνάρτηση 1-1, και, επομένως, ορίζεται η αντίστροφή της.

β) Θα αποδείξουμε ότι: $\lim\limits_{y \to y_o} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_o)$.

Για κάθε $y, y_o \in D_{f^{-1}}$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 = f^{-1}(y)$ και $x_2 = f^{-1}(y_o)$, οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$|y-y_o| \geq \theta|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)| \Rightarrow |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)| \leq k|y-y_o| \text{, με } k = \frac{1}{\theta} \ ■$$

γ) Επειδή η f^{-1} ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.8, η f^{-1} είναι συνεχής.

1.2.10. Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η παράγωγός της έχει κάτω φράγμα θετικό ή άνω φράγμα αρνητικό, τότε υπάρχει θ>0 τέτοιο ώστε για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ να ισχύει:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq\theta|x_1-x_2| \quad (1)$$

Απόδειξη

- Αν $x_1=x_2$, τότε η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα.
- Αν $x_1<x_2$, τότε, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ, σύμφωνα με το θεώρημα

Μέσης Τιμής για την f στο διάστημα $[x_1,x_2]$, θα υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$, ώστε να ισχύει

$f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_1}$. Επομένως, θα έχουμε $|f'(\xi)|=\left|\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|$.

Οπότε, είτε η f έχει κάτω φράγμα θετικό είτε άνω φράγμα αρνητικό, θα υπάρχει θ>0 για το οποίο να ισχύει $|f'(\xi)|\geq\theta$ ή $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq\theta$.

Άρα $|f(x_1)-f(x_2)|\geq\theta|x_1-x_2|$.

- Αν $x_2<x_1$, τότε $|f(x_2)-f(x_1)|\geq\theta|x_2-x_1|\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\geq\theta|x_1-x_2|$.■

1.2.11. Πόρισμα

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η παράγωγός της έχει κάτω φράγμα θετικό ή άνω φράγμα αρνητικό, τότε η αντίστροφή της ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

1.2.12. Λήμμα

Για κάθε $x,y\in$IR, και ν θετικό άρτιο ακέραιο ισχύει:

$$x^{\nu}+x^{\nu-1}\cdot y+\cdots+x\cdot y^{\nu-1}+y^{\nu}\geq 0.$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν x=y=0.

Απόδειξη

Θέτουμε: $A=x^{\nu}+x^{\nu-1}\cdot y+\cdots+x\cdot y^{\nu-1}+y^{\nu}$.

- Αν x=y, τότε $A=\nu x^{\nu}\geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν x=0.
- Αν $x\neq y$, τότε : $x^{\nu}+x^{\nu-1}\cdot y+\cdots+x\cdot y^{\nu-1}+y^{\nu}=\dfrac{x^{\nu+1}-y^{\nu+1}}{x-y}>0$

Γιατί, αφού ο ν είναι θετικός άρτιος, ο ν+1 θα είναι θετικός περιττός, οπότε θα ι-σχύει:

- $x>y\Rightarrow x^{\nu+1}>y^{\nu+1}$
- $x<y\Rightarrow x^{\nu+1}<y^{\nu+1}$.■

2. ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ 4 ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

2.1. Απάντηση στο 1^{o} ερώτημα

Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει g(f(x))=x για κάθε $x \in D_f$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι υποχρεωτικά 1-1, ενώ η g δεν είναι απαραίτητα 1-1 και, επομένως, ο ισχυρισμός $f=g^{-1}$ είναι ψευδής.

Πράγματι:

- Η f είναι 1-1 αφού, αν $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1)= f(x_2)$, τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, οπότε $x_1=x_2$.
- Η g δεν είναι απαραίτητα 1-1. Αντιπαράδειγμα:

Αν $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ και $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|}, & \text{αν } x \in (-1,1) \\ 1, & \text{αν } x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \end{cases}$ (βλ. [5]), τότε:

$A=D_f=IR$, $f(A)=(-1,1)$, $B=D_g=IR$ και για κάθε $x \in A=D_f$ ισχύει $g(f(x))=x$, όμως η g δεν είναι συνάρτηση 1-1.■

2.2. Απάντηση στο 2^{o} ερώτημα

Εάν f είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και η παράγωγός της έχει κάτω φράγμα θετικό ή άνω φράγμα αρνητικό, τότε, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.9 της σελ. 7, η f για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ θα ικανοποιεί μια σχέση της μορφής:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \geq \theta |x_1-x_2|, \ \theta>0$$

Και, επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1.2.9., η f^{-1} θα είναι συνεχής.

Σχόλιο 7

Φυσικά, θεωρούμε ότι δεν είναι παιδαγωγικά ορθό να περιμένουμε από τους μαθητές μας, προκειμένου να λύσουν μια άσκηση, να «ανακαλύπτουν» και να αποδεικνύουν θεωρήματα που δεν έχουν διδαχθεί. Για να αποδείξουν, λοιπόν, οι μαθητές ότι η αντίστροφη της $f(x)=x^5+x^3+x$ είναι συνεχής, όπως αυτό ήταν απαραίτητο στο 3^{o} θέμα των πανελληνίων εξετάσεων του 2003 (βλ. [13]), θα μπορούσε το θέμα αυτό να διατυπωθεί ως εξής:

« Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$. Τα ερωτήματα α., β. και δ. ως έχουν, ενώ το ερώτημα γ θα μπορούσε να έχει ως εξής:

γ. «Προτεινόμενο βοηθητικό ερώτημα»

i. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in IR$ ισχύει: $|f(x_1)-f(x_2)| \geq |x_1-x_2|$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in IR$ ισχύει:

$$|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)| \leq |y_1-y_2|.$$

iii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

Απόδειξη γi.

1ος τρόπος

- Αν $x_1=x_2$, τότε η σχέση $|f(x_1)-f(x_2)|\geq|x_1-x_2|$ ισχύει ως ισότητα.
- Αν $x_1<x_2$, τότε, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο IR, από Θ.Μ.Τ στο $[x_1,x_2]$, παίρνουμε:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)=5\xi^4+3\xi^2+1\geq 1\ ,\ \xi\in(x_1,x_2)$$

Άρα: $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\geq 1\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\geq|x_1-x_2|$.

- Αν $x_2<x_1$, τότε: $|f(x_2)-f(x_1)|\geq|x_2-x_1|\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|\geq|x_1-x_2|$.

2ος τρόπος

- Αν $x_1=x_2$, τότε η σχέση $|f(x_1)-(x_2)|\geq|x_1-x_2|$ ισχύει ως ισότητα.
- Αν $x_1\neq x_2$, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1^5+x_1^3+x_1\right)-\left(x_2^5+x_2^3+x_2\right)$$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left(x_1^4+x_1^3\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2+x_1\cdot x_2^3+x_2^4+x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2+1\right)$$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\cdot\left|x_1^4+x_1^3\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2+x_1\cdot x_2^3+x_2^4+x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2+1\right|$$

$$\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}=\left|x_1^4+x_1^3\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2+x_1\cdot x_2^3+x_2^4+x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2+1\right|\geq 1$$

Γιατί : $x_1^4+x_1^3\cdot x_2+x_1^2\cdot x_2^2+x_1\cdot x_2^3+x_2^4>0$ και $x_1^2+x_1\cdot x_2+x_2^2>0$, (βλ. Λήμμα 1.2.12 σελ. 8). Άρα: $|f(x_1)-f(x_2)|\geq|x_1-x_2|$

Απόδειξη γii.

Θα αποδείξουμε ότι, αν $y_o\in$IR, τότε $\lim\limits_{y\to y_o}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_o)$.

Σύμφωνα με το ερώτημα γi., αν $x_1,x_2\in$IR, τότε: $|f(x_1)-f(x_2)|\geq|x_1-x_2|$ (1).

Όμως, f(IR)=IR, αφού η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,οπότε για κάθε $y,y_o\in$IR, υπάρχουν $x_1,x_2\in$IR, ώστε να ισχύει $x_1=f^{-1}(y)$ και $x_2=f^{-1}(y_o)$, οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$|y-y_o|\geq\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)\right|$$

Απόδειξη γiii.

Επειδή για κάθε $y, y_o \in IR$, ισχύει $|y-y_o| \geq |f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o)|$, θα έχουμε:

$$-|y-y_o| \leq f^{-1}(y)-f^{-1}(y_o) \leq |y-y_o|$$

και επειδή: $\lim\limits_{y\to y_o}\left(-|y-y_o|\right) = \lim\limits_{y\to y_o}|y-y_o| = 0$,σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, προκύπτει ότι: $\lim\limits_{y\to y_o} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_o)$.

2.3. Απάντηση στο 3ο ερώτημα

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τη συναρτησιακή σχέση, $x \in IR$. Ο τρόπος με τον οποίο αποδεικνύουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη είναι ανάλογος με εκείνον της άσκησης 1 της σελίδας 13 του παρόντος άρθρου.

Λύνουμε τη συναρτησιακή σχέση $f^3(x)-4f^2(x)+6f(x)-x=2$ ως προς x, οπότε $f^3(x)-4f^2(x)+6f(x)-2=x$ (1) και θεωρούμε τη συνάρτηση g που προκύπτει, αν στο αριστερό μέλος της ισότητας (1) θέσουμε όπου f(x) το x. Δηλαδή:

$$g(x)=x^3-4x^2+6x-2, \ x \in IR.$$

Είναι $g'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \geq \frac{2}{3}$, $x \in IR$. Η g είναι αντιστρέψιμη και ισχύουν:

- $g(f(x) = f^3(x) - 4f^2(x) + 6f(x) - 2$
- $(g(f(x))=x$ για κάθε $x \in IR) \Leftrightarrow (f(x) = g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in IR)$.

Άρα, υπάρχει μοναδική συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί την (1). Η ζητούμενη συνάρτηση f είναι, προφανώς, η αντίστροφη της g.

Σχόλιο 8

Ανάλογα εργαζόμαστε και σε άλλες περιπτώσεις που ενδιαφερόμαστε για την ύπαρξη συνάρτησης η οποία ικανοποιεί μια συναρτησιακή σχέση (βλ. [3]).

2.4 Απάντηση στο 4ο ερώτημα

Θα υποδείξουμε τρόπο κατασκευής συναρτησιακών σχέσεων της μορφής:

- $f^5(x)+2f(x)= x$, για κάθε $x \in IR$,
- $e^{2f(x)}+f(x)= x+1$, για κάθε $x \in IR$,

ώστε οι μαθητές να μπορούν, στα πλαίσια της σχολικής ύλης, να εξετάζουν αν ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης f, και, αν ναι, να βρίσκουν την f^{-1} και τέλος να μελετούν την f ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα.

Συναρτήσεις που ορίζονται από σχέσεις, όπως οι παραπάνω, λέμε ότι **ορίζονται πεπλεγμένα.**

Για την κατασκευή σχέσεων όπου μια συνάρτηση f **ορίζεται πεπλεγμένα,** το βολικότερο που έχουμε να κάνουμε, προκειμένου να είναι εύκολη η μελέτη της, είναι να ξεκινήσουμε με μια συνάρτηση g, παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ, με παράγωγο κάτω φραγμένη από θετικό αριθμό ή άνω φραγμένη από αρνητικό. Τα πράγματα, όμως, περιπλέκονται και γίνονται δυσκολότερα, αν ξεκινήσουμε με μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε διάστημα Δ, η οποία, όμως, δεν έχει το ίδιο είδος μονοτονίας σε όλο το Δ.

Για παράδειγμα:

Ας ξεκινήσουμε με τη συνάρτηση $g(x)= x^5+2x$, η οποία έχει πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το IR, είναι $g'(x) \geq 2$ για κάθε $x \in IR$, άρα η g είναι αντιστρέψιμη, και αν θέσουμε στη $g(x)=x^5+2x$, όπου x το $g^{-1}(x)$, τότε παίρνουμε:

$$x=\left(g^{-1}(x)\right)^5+2g^{-1}(x)$$

Οπότε, θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x)=g^{-1}(x)$, θα έχουμε:

$$f^5(x)+2f(x)=x\ ,\ x \in IR.$$

Στην πρώτη άσκηση που ακολουθεί θα ασχοληθούμε με τη συνάρτηση f που ορίζεται πεπλεγμένα από την παραπάνω σχέση και θα διαπιστωθεί ότι είναι εύκολο να βρεθεί η f^{-1} και να αποδειχθεί η συνέχεια της f καθώς και η παραγωγισιμότητά της. Αν, όμως, ξεκινήσουμε με τη συνάρτηση $g(x)=x^3-3x$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR, γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$, τότε θα οδηγηθούμε στη σχέση:

$$f^3(x)-3f(x)=x,\ x \in IR$$

και, όπως θα φανεί, από τη δεύτερη άσκηση που ακολουθεί, εύκολα προκύπτει ότι ορίζεται η αντίστροφη της f. Όμως, για τον προσδιορισμό της f^{-1} και τη μελέτη της συνέχειας της f η κατάσταση περιπλέκεται.

Άσκηση 1

Έστω η συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in IR$ ισχύει:

$$f^5(x)+2f(x)=x$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $y_1,y_2 \in IR$ ισχύει:

$$\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right| \geq 2\left|y_1-y_2\right| \text{ (βλ. [4]).}$$

ε. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής.

ζ. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

η. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.

Λύση ερωτήματος α.

$1^{ος}$ τρόπος (Απαγωγή σε άτοπο)

Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1,x_2 \in IR$, με $x_1<x_2$, ώστε να ισχύει: $f(x_1)\geq f(x_2)$. Οπότε:

$$f(x_1)\geq f(x_2) \Rightarrow \left.\begin{cases} (f(x_1))^5 \geq (f(x_2))^5 \\ 2f(x_1)\geq 2f(x_2) \end{cases}\right\} \Rightarrow (f(x_1))^5+2f(x_1)\geq (f(x_2))^5+2f(x_2) \Rightarrow$$

$x_1 \geq x_2$, άτοπο. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

$2^{ος}$ τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^5+2x$, η οποία προφανώς είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $D_g= D_f=IR$, η συνάρτηση gof ορίζεται για κάθε $x \in IR$ και είναι $g(f(x))= f^5(x)+2f(x) \Rightarrow g(f(x))=x$ για κάθε $x \in IR$.

Αν $x_1,x_2 \in IR$, τότε $x_1= g(f(x_1))$ και $x_2= g(f(x_2))$, οπότε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow g(f(x_1))< g(f(x_2)) \overset{g \text{ γν. αύξ.}}{\Rightarrow} f(x_1)< f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

$3^{ος}$ τρόπος

Αν $x_1,x_2 \in IR$, με $x_1<x_2$, τότε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow f^5(x_1)+2f(x_1) < f^5(x_2)+2f(x_2) \Rightarrow f^5(x_1)+2f(x_1)-f^5(x_2)-2f(x_2)<0 \Rightarrow .$$

$$\left(f(x_1)-f(x_2)\right)\left[f^4(x_1)+f^3(x_1)f(x_2)+f^2(x_1)f^2(x_2)+f(x_1)f^3(x_2)+f^4(x_2)+2\right]<0$$

Όμως: $f^4(x_1)+f^3(x_1)f(x_2)+f^2(x_1)f^2(x_2)+f(x_1)f^3(x_2)+f^4(x_2)+2 \geq 2$ (βλ. Λήμμα 1.2.12 σελ. 8), άρα $f(x_1)<f(x_2)$.

Λύση ερωτήματος β.

$1^{ος}$ τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^5+2x$. Η g είναι «1–1», άρα αντιστρέψιμη με $D_g=IR$. Έχουμε: $f^5(x)+2f(x)=x \Rightarrow g(f(x))=x \Rightarrow f(x)=g^{-1}(x)$ για κάθε $x \in IR$.

Επομένως, $f=g^{-1}$. Όμως, το σύνολο τιμών της g^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το IR. Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

2^{ος} τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Αν $y\in IR$, θα αποδείξουμε ότι για τον αριθμό $x=y^5+2y$ ισχύει $f(x)= y$, οπότε το σύνολο τιμών της f θα είναι το IR. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f^5(x)+2f(x)=x \\ x=y^5+2y \end{array}\right\} \Rightarrow f^5(x)+2f(x)=y^5+2y \ (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^5+2x$, οπότε, λόγω της (1), θα ισχύει:

$$g(f(x))=g(y) \overset{g\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} f(x)=y.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

Σκεπτικό
Έστω $y_o\in IR$. Αν υπάρχει x_o με $f(x_o)=y_o$, τότε για αυτό το x_o θα ισχύει $x_o=f^5(x_o)+2f(x_o)=y_o^5+2y_o$. Θα αποδείξουμε ότι για οποιοδήποτε $y\in IR$ ο αριθμός $x=y^5+2y$, που προφανώς υπάρχει, ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=y$.

3^{ος} τρόπος

Αν $y\in IR$, τότε θα αποδείξουμε ότι για τον αριθμό $x=y^5+2y$ ισχύει $f(x)= y$ και, επομένως, η f θα παίρνει κάθε πραγματική τιμή y. Άρα, το σύνολο τιμών της f θα είναι το IR. Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} f^5(x)+2f(x)=x \\ x=y^5+2y \end{array}\right\} \Rightarrow f^5(x)+2f(x)=y^5+2y \Rightarrow f^5(x)+2f(x)-y^5-2y=0 \Rightarrow$$

$$f^5(x)-y^5+2(f(x)-y)=0 \Rightarrow$$

$$(f(x)-y)\cdot\left[f^4(x)+f^3(x)\cdot y+f^2(x)\cdot y^2+f(x)\cdot y^3+y^4+2\right]=0, \ (3)$$

Θέτουμε $A= f^4(x)+f^3(x)\cdot y+f^2(x)\cdot y^2+f(x)\cdot y^3+y^4$. Είναι $A\geq 0$ (βλ. Λήμμα 1.2.12 σελ. 8), οπότε $A+2\geq 2$. Άρα: $(3)\Rightarrow f(x)-y=0\Rightarrow f(x)=y$.

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

Λύση ερωτήματος γ.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το IR. Ο τύπος της f^{-1} μπορεί να βρεθεί ως εξής:

1^{ος} τρόπος

Αν $y=f(x)$ είναι η τιμή της f στο τυχαίο $x\in IR$, τότε το x, λόγω της σχέσης $f(x))^5+2f(x) = x$, θα δίνεται από τον τύπο: $x =y^5+2y$, οπότε για την αντίστροφη της f θα ισχύει: $f^{-1}(x) = x^5+2x$ για κάθε $x\in \mathbf{D}_{f^{-1}} =IR$.

$2^{ος}$ τρόπος

Επειδή η ισότητα $(f(x))^5+2f(x)= x$ ισχύει για κάθε $x\in IR$, η ισότητα αυτή θα ισχύει και αν όπου x θέσουμε το $f^{-1}(x)$, οπότε έχουμε:

$$(f(f^{-1}(x))^5+2f(f^{-1}(x))= f^{-1}(x) \Rightarrow x^5+2x= f^{-1}(x).$$

Λύση ερωτήματος δ.

$1^{ος}$ τρόπος

- Αν $y_1=y_2$, τότε η σχέση $\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\geq 2\left|y_1-y_2\right|$ ισχύει ως ισότητα.
- Αν $y_1<y_2$, τότε, επειδή η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο IR, από Θ.Μ.Τ στο $[y_1,y_2]$, παίρνουμε:

$$\frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2}=\left(f^{-1}\right)'(\xi)=5\xi^4+2\geq 2\ ,\ \xi\in(y_1,y_2)$$

Άρα: $\left|\frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2}\right|\geq 2 \Rightarrow \left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\geq 2\left|y_1-y_2\right|$.

$2^{ος}$ τρόπος

Έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2) &= \left(y_1^5+2y_1\right)-\left(y_2^5+2y_2\right) \\ &= \left(y_1-y_2\right)\left(y_1^4+y_1^3y_2+y_1^2y_2^2+y_1y_2^3+y_2^4+2\right) \end{aligned}$$

Είναι $y_1^4+y_1^3y_2+y_1^2y_2^2+y_1y_2^3+y_2^4+2\geq 2$ (βλ. Λήμμα 1.2.12 σελ. 8).

Άρα: $\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\geq 2\left|y_1-y_2\right|$.

Λύση ερωτήματος ε.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x_o\in IR$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

$1^{ος}$ τρόπος

Για κάθε $x,x_o\in IR$, υπάρχουν $y_1,y_2\in IR$ ώστε να ισχύει $x=f^{-1}(y_1)$, και $x_o=f^{-1}(y_2)$, οπότε από τη σχέση $\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\geq 2\left|y_1-y_2\right|$ παίρνουμε:

$$\left|x-x_o\right|\geq 2\left|f(x)-f(x_o)\right| \Rightarrow -\frac{1}{2}\left|x-x_o\right|\leq f(x)-f(x_o)\leq \frac{1}{2}\left|x-x_o\right|$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\left|x-x_o\right|=\lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|x-x_o\right|\right)=0$. Άρα: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

$2^{ος}$ τρόπος

Αν $x, x_o \in IR$, τότε $f^5(x)+2f(x)=x$, $f^5(x_o)+2f(x_o)=x_o$ και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$f^5(x)+2f(x)-\left(f^5(x_o)+2f(x_o)\right)=x-x_o \Rightarrow$$

$$\left(f(x)-f(x_o)\right)\left[f^4(x)+f^3(x)f(x_o)+f^2(x)f^2(x_o)+f(x)f^3(x_o)+f^4(x_o)+2\right]=x-x_o$$

Όμως: $f^4(x)+f^3(x)f(x_o)+f^2(x)f^2(x_o)+f(x)f^3(x_o)+f^4(x_o)+2\geq 2$ (βλ. Λήμμα 1.2.12 σελ. 8).

$$f(x)-f(x_o)=\frac{x-x_o}{f^4(x)+f^3(x)f(x_o)+f^2(x)f^2(x_o)+f(x)f^3(x_o)+f^4(x_o)+2}\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|=\frac{\left|x-x_0\right|}{f^4(x)+f^3(x)f(x_o)+f^2(x)f^2(x_o)+f(x)f^3(x_o)+f^4(x_o)+2}\leq\left|x-x_0\right|\Rightarrow$$

$-\left|x-x_o\right|\leq\left|f(x)-f(x_o)\right|\leq\left|x-x_o\right|$. Όμως: $\lim\limits_{x\to x_o}\left|x-x_o\right|=\lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|x-x_o\right|\right)=0$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$.

Επομένως, η f είναι συνεχής.

Λύση ερωτήματος ζ.

Έστω $x_o\in IR$. Αν $x\in IR$ με $x\neq x_o$, τότε:

$$\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\frac{1}{f^4(x)+f^3(x)f(x_o)+f^2(x)f^2(x_o)+f(x)f^3(x_o)+f^4(x_o)+2}$$

Και, επειδή η f είναι συνεχής στο x_o, θα έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{1}{f^4(x)+f^3(x)f(x_o)+f^2(x)f^2(x_o)+f(x)f^3(x_o)+f^4(x_o)+2}$$
$$=\frac{1}{5f^4(x_o)+2}$$

Άρα, η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το IR με $f'(x)=\dfrac{1}{5f^4(x)+2}$.

Λύση ερωτήματος η.

$1^{ος}$ τρόπος

Επειδή $f^5(x)+2f(x)=x$ θα έχουμε:

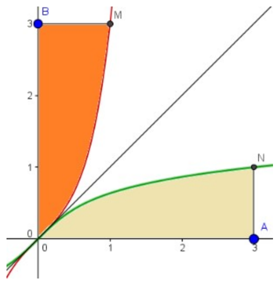
$5f^4(x)f'(x)+2f'(x)=1\Rightarrow 5f^5(x)f'(x)+2f(x)f'(x)=f(x)\Rightarrow$

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left(5f^5(x)f'(x) + 2f(x)f'(x)\right)dx = \int_0^3 \left(5f^5(x)f'(x)\right)dx + 2\int_0^3 \left(f(x)f'(x)\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx = \frac{5}{6}\int_0^3 \left(f^6(x)\right)' dx + \int_0^3 \left(f^2(x)\right)' dx = \frac{1}{6}\left[f^6(x)\right]_0^3 + \left[f^2(x)\right]_0^3$$

$$= \frac{5}{6}\left[f^6(3) - f(0)\right] + \left[f^2(3) - f(0)\right] = \frac{5}{6} + 1 = \frac{11}{6}.$$

(Είναι f(0) =0 και f(3)=1).



$2^{ος}$ τρόπος «Συμμετρικά χωρία»

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 3 - f^{-1}(x)dx = \int_0^1 3 - (x^5 + 2x)dx = \frac{11}{6}.$$

$3^{ος}$ τρόπος. Με αντικατάσταση.

Θέτουμε f(x) = u , οπότε $x = f^{-1}(u)$ ή $x = u^5 + 2u$, dx = $(5u^4+2)$du.

Για x= 0 είναι u = 0. Για x= 3 είναι u = 1.

Άρα: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 u(5u^4 + 2)du = \int_0^1 (5u^5 + 2u)du = \frac{11}{6}$.

Σχόλιο 9

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα (-∞, +∞), το σύνολο τιμών της, έστω B, βρίσκεται και με τους παρακάτω τρόπους.

$1^{ος}$ τρόπος

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο IR υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ και ισχύει $B=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.

Όμως: $f^5(x)+2f(x)=x$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f^5(x)+2f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ (5) .

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, γιατί αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in IR$ ή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, τότε, λόγω της (5), οδηγούμαστε σε άτοπο. Ομοίως, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Άρα: B= IR.

$2^{ος}$ τρόπος

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $y_o \in IR$ υπάρχει x_o τέτοιο ώστε $f(x_o) = y_o$.

Θα αποκλείσουμε την περίπτωση $f(x) > y_o$ για κάθε $x \in IR$.

Έστω ότι $f(x) > y_o$ για κάθε $x \in IR$. Τότε $f^5(x) > y_o^5$, οπότε $f^5(x)+2f(x) > y_o^5+2y_o$.

Δηλαδή, για κάθε $x \in IR$ ισχύει $x > y_o^5+2y_o$, άτοπο.

Ανάλογα αποκλείεται να ισχύει $f(x) < y_o$, για κάθε $x \in IR$.

Επομένως, θα υπάρχουν x_1, x_2 με $f(x_1) < y_o < f(x_2)$. Τότε, όμως, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπάρχει x_o τέτοιο ώστε $f(x_o) = y_o$.
Άρα: B= IR.

Άσκηση 2

α. Να εξεταστεί αν υπάρχει σύνολο Α και συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)-3f(x)= x \text{ για κάθε } x\in A \quad (1) \text{ (βλ. [11])}$$

β. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f^3(x)-3f(x)= x \text{ για κάθε } x\in IR;$$

γ. Στην περίπτωση που υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f^3(x)-3f(x)= x \text{ για κάθε } x\in IR$$

τότε:

γ1. Να βρείτε την αντίστροφη της f, εφόσον υπάρχει.

γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε όλο το IR.

γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σύνολο:

$$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty).$$

Λύση

Λύση ερωτήματος α.

Αν υπάρχει σύνολο Α και συνάρτηση f για την οποία ισχύει η (1), τότε:

- Η f θα είναι 1-1, αφού, αν $x_1,x_2\in IR$, με $f(x_1)=f(x_2)$, τότε:

$$x_1=f^3(x_1)-3f(x_1) \text{ και } x_2=f^3(x_2)-3f(x_2), \text{ οπότε } x_1= x_2.$$

- Θα είναι $g(f(x))=x$ για κάθε $x\in A$, όπου $g(x)=x^3-3x$.

Οπότε, αν η g είναι 1-1 σε κατάλληλο σύνολο Β, τότε, αν ως Α επιλέξουμε το σύνολο g(Β), θα έχουμε:

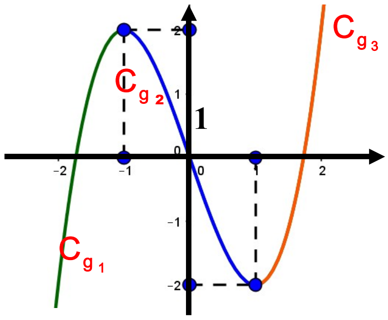
$$g(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x) \text{ για κάθε } x\in A.$$

Για τον προσδιορισμό του Β μας διευκολύνει ο σχεδιασμός της γραφικής παράστασης της g.

Συντάσσουμε πρώτα τον πίνακα μεταβολών της g.

x	**-∞**		**-1**		**1**		**+∞**
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	**-∞**	↗	**2**	↘	**-2**	↗	**+∞**

Αν $\left.\begin{matrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{matrix}\right\} = g(x)$ για $\begin{cases} x < -1 \\ -1 \le x \le 1 \\ x > 1 \end{cases}$, τότε οι συναρτήσεις g_1, g_2 και g_3 είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμες, με σύνολα τιμών (-∞, 2), [-2, 2] και (-2, +∞) αντιστοίχως.



Οπότε, αν $f_i = g_i^{-1}$ για i=1,2,3, τότε:

- D_{f_1} =(-∞, 2), D_{f_2} =[-2, 2] και D_{f_3} =(-2, +∞).
- Καθεμία από τις f_i ικανοποιεί τη σχέση $f_i^3(x) - 3f_i(x) = x$, για κάθε $x \in D_{f_i}$, αφού:

$$f_i = g_i^{-1} \Leftrightarrow f_i(x) = g_i^{-1}(x),\ x \in D_{f_i} \Leftrightarrow x = g_i(f_i(x)) = f_i^3(x) - 3f_i(x),\ x \in D_{f_i}$$

Επομένως, αν ως f επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις τρεις συναρτήσεις f_1, f_2 ή f_3, τότε η f ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) - 3f(x) = x$ για κάθε $x \in A = D_f$, δηλαδή για κάθε x που ανήκει σε ένα από τα σύνολα τιμών των g_1 , g_2 , g_3.

Σχόλιο 10

Για να βρεθεί ο τύπος της f, αρκεί να λυθεί η τριτοβάθμια εξίσωση:

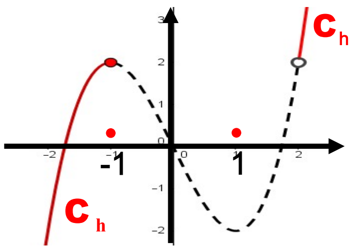
$$y^3 - 3y = x.$$

Λύση ερωτήματος β.

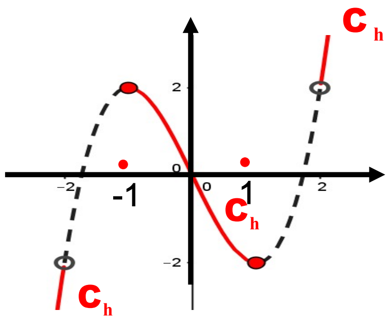
Θα εξετάσουμε τώρα αν μπορεί να είναι A=IR.

Και πάλι η γραφική παράσταση της g θα σταθεί σημαντικός αρωγός στην προσπάθειά μας, αφού, κρατώντας κομμάτια της C_g, ώστε καμιά οριζόντια ευθεία να μην έχει δύο ή περισσότερα κοινά σημεία με αυτά και το σύνολο των τεταγμένων τους να είναι το IR, τότε, αν για παράδειγμα επιλέξουμε τη συνάρτηση $h(x) = g(x) = x^3 - 3x$, όταν:

α) $x \in (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$ (σχήμα α) ή **β)** $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1] \cup (2, +\infty)$ (σχήμα β), εύκολα αποδεικνύεται ότι η h είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμη με σύνολο τιμών το IR.



Σχήμα α



Σχήμα β

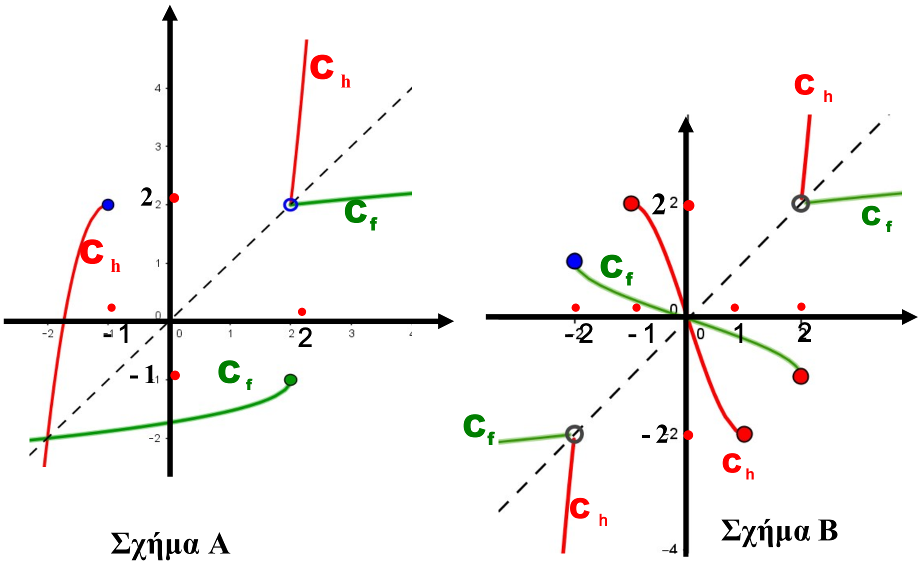
Θεωρώντας τώρα τη συνάρτηση $f = h^{-1}$, θα έχουμε:

- Το πεδίο ορισμού της f είναι το IR.
- Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση: $f^3(x) - 3f(x) = x$, για κάθε $x \in$ IR, αφού $f = h^{-1} \Leftrightarrow f(x) = h^{-1}(x),\ x \in \text{IR} \Leftrightarrow x = h(f(x)) = f^3(x) - 3f(x),\ x \in \text{IR}$.
- Η γραφική παράσταση της f, όταν:

  A. $h(x)=x^3-3x\ \ x\in(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$ και $f=h^{-1}$ ή

  B. $h(x)=x^3-3x\ \ x\in(-\infty,-2)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$ και $f=h^{-1}$,

  φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα Α **Σχήμα Β**

Από τον τρόπο κατασκευής της f, δηλαδή κρατώντας κατάλληλα κομμάτια της C_g, είναι προφανές ότι υπάρχουν άπειρες επιλογές για την f, ώστε να ισχύει $f^3(x) - 3f(x) = x$ για κάθε $x \in$ IR.

Λύση ερωτήματος γ1.

Επειδή η f είναι 1-1 ορίζεται η αντίστροφή της.

Για τον προσδιορισμό της αντίστροφης θα πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί. Δείτε πώς ένας μαθητής «βρήκε» την αντίστροφη της f.

Μαθητής: *«Για τον προσδιορισμό της f^{-1} θέτουμε $y=f(x)$, οπότε η σχέση $f^3(x) - 3f(x) = x$ παίρνει τη μορφή $y^3-3y = x$ και εναλλάσσοντας τις θέσεις των x,y λαμβάνουμε $y=x^3-3x$. Έτσι, καταλήγουμε ότι $f^{-1}(x) = x^3 - 3x$.*

Η f^{-1} ως πολυωνυμική έχει πεδίο ορισμού το IR, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το IR.».

Είναι όμως η παραπάνω λύση σωστή;

Αν υποθέσουμε ότι η λύση είναι σωστή, τότε θα πρέπει το πεδίο ορισμού της f^{-1} , δηλαδή το $f(D_f)$, να είναι όλο το IR. Αν, όμως, είναι $f(D_f)=IR$, τότε η συνάρτηση $y= x^3-3x$ θα είναι 1-1, άτοπο, αφού στο 1 και στο -2 παίρνει την τιμή -2. (Το ότι η $y= x^3-3x$, $x\in IR$ δεν είναι 1-1 φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση).

Άρα, η λύση του μαθητή είναι λανθασμένη. Όμως, σε ποιο σημείο ακριβώς υπάρχει λάθος;

Το λάθος υπάρχει στο σημείο που θέτει y=f(x), υπονοώντας, όπως προκύπτει από τη συνέχεια της λύσης, ότι το y διατρέχει όλο το IR, ενώ, όπως ήδη αποδείξαμε, είναι $y \in f(D_f) \neq$ IR.

Ο προσδιορισμός της αντίστροφης μπορεί να γίνει ως εξής:

Είναι D_f=IR, οπότε, αν y=f(x) είναι η τιμή της f στο τυχαίο $x\in IR$, τότε το x θα δίνεται από τον τύπο: $x=y^3-3y$, οπότε, για την αντίστροφη της f θα ισχύει: $f^{-1}(x)=x^3-3x$ για κάθε $x\in B= D_{f^{-1}}$.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, το πεδίο ορισμού της f^{-1} δεν είναι όλο το IR. Θα διερευνήσουμε λοιπόν ποιο μπορεί να είναι το B .

Προφανώς η f^{-1} θα είναι **ίση** με τη συνάρτηση $g(x)=x^3-3x$, $\mathbf{x\in B}$. (Η συνάρτηση που είναι ίση με τη g στο B λέγεται περιορισμός της g στο B).

Αναζήτηση του συνόλου B

Το σύνολο B θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε ο περιορισμός της g σ’ αυτό να είναι 1-1 και $g(B)=D_f$=IR.

Συντάσσουμε τον πίνακα μεταβολών της g.

x	$-\infty$		**-1**		**1**		$+\infty$
$\mathbf{g'(x)}$		+	**0**	**-**	**0**	+	
$\mathbf{g(x)}$	$-\infty$	↗	**2**	↘	**-2**	↗	$+\infty$

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η g είναι 1-1 σε καθένα από τα διαστήματα:

$$(-\infty, -1], \quad [-1, 1] \text{ και } [1, +\infty)$$

Και οι τιμές της σε αυτά είναι αντίστοιχα $(-\infty, 2]$, $[-2, 2]$, $[-2, +\infty)$.

$1^η$ Επιλογή του B

Επειδή $g((-\infty,-1])=(-\infty,2]$, για να είναι g(B)= IR, αρκεί ως B να επιλέξουμε το σύνολο: $B=(-\infty,-1]\cup$ {x∈IR με g(x) >2}

Έχουμε: $x^3\text{-}3x>2 \Leftrightarrow x^3\text{-}3x\text{-}2>0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2>0 \Leftrightarrow x>2$

Αν $B=(-\infty,-1]\cup(2,+\infty)$, τότε ο περιορισμός της g στο B είναι 1-1 και g(B)= IR.

Άρα: f^{-1}:B→IR με $f^{-1}(x)=x^3\text{-}3x$

2η Επιλογή του B

Επειδή $g([-1,1])=[-2,2]$, για να είναι g(B)= IR, αρκεί ως B να επιλέξουμε το σύνολο: B={x∈IR με g(x) < -2}∪ [-1, 1]∪{x∈IR με g(x) >2}

Έχουμε:

- $x^3\text{-}3x<\text{-}2 \Leftrightarrow x^3\text{-}3x+2<0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2<0 \Leftrightarrow x<-2$
- $x^3\text{-}3x>2 \Leftrightarrow \ldots > x>2$

Αν $B=(-\infty,-2)\cup[-1,1]\cup(2,+\infty)$, τότε ο περιορισμός της g στο B είναι 1-1 και g(B)= IR.

Άρα: f^{-1}:B→IR με $f^{-1}(x)=x^3\text{-}3x$

Παρατήρηση: Υπάρχουν πολλές επιλογές για το σύνολο B. Για παράδειγμα, ως B θα μπορούσαμε επιλέξουμε οποιοδήποτε από τα σύνολα:

$$(-\infty,-1)\cup[2,+\infty).$$
$$(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[2,+\infty),$$
$$(-\infty,-2]\cup[-1,1)\cup(2,+\infty),$$
$$(-\infty,-2)\cup(-1,1]\cup[2,+\infty).$$

Λύση ερωτήματος γ2.

Η f **δεν είναι συνεχής** σε όλο το IR. Πράγματι:

Αν η f ήταν συνεχής σε όλο το IR, τότε το σύνολο τιμών της θα ήταν διάστημα Δ το οποίο θα ήταν και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)=x^3\text{-}3x$.

Επειδή όμως τα μόνα **διαστήματα** στα οποία η συνάρτηση x^3-3x είναι 1-1 είναι τα διαστήματα:

$(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ και $[1, +\infty)$

καθώς και κάθε υποδιάστημά τους και αφού η συνάρτηση x^3-3x δεν έχει σύνολο τιμών όλο το IR, ως όφειλε[2], σε κανένα από αυτά, συμπεραίνουμε ότι η f δεν μπορεί να είναι συνεχής σε όλο το IR.

[2] *Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το* IR, *οφείλει η* x^3-3x *να έχει σύνολο τιμών επίσης το* IR.

Λύση ερωτήματος γ3.

Έστω $x_o \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. Αν $x \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ με $x \neq x_o$, τότε έχουμε: $f^3(x)\text{-}3f(x)=x$ και $f^3(x_o)\text{-}3f(x_o)=x_o$, οπότε, με αφαίρεση κατά μέλη, προκύπτει ότι: $\left(f(x)-f(x_o)\right)\left[f^2(x)+f(x_o)f(x)+f^2(x_o)-3\right]=x-x_o$

Θεωρούμε το τριώνυμο $t^2+f(x_o)t+f^2(x_o)-3$ και επειδή «α=1», το τριώνυμο παίρνει ελάχιστη τιμή m, η οποία μάλιστα είναι θετική. Πράγματι:

Είναι $\Delta= f^2(x_o)-4(f^2(x_o)-3)= -3(f(x_o)+2)(f(x_o)-2) <0$, αφού θεωρώντας τη συνάρτηση $g(x)=x^3-3x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και , $[1,+\infty)$ και επειδή ισχύει $g(f(x_o))= x_o$, θα έχουμε:

- $f(x_o)+2 < 0 \Leftrightarrow f(x_o) < -2 \Leftrightarrow g(f(x_o)) < g(-2) \Leftrightarrow x_o < -2$.
- $f(x_o)-2 > 0 \Leftrightarrow f(x_o) > 2 \Leftrightarrow g(f(x_o)) > g(2) \Leftrightarrow x_o > 2$.

Άρα: $\left|f(x)\text{-}f(x_o)\right| = \dfrac{\left|x\text{-}x_o\right|}{\left[f^2(x)+f(x_o)f(x)+\left(f^2(x_o)\text{-}3\right)\right]} \leq \dfrac{1}{m}\cdot\left|x\text{-}x_o\right|$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\left|x-x_o\right| = \lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|x-x_o\right|\right)=0$.

Επομένως: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

- Η απόδειξη της παραγωγισιμότητας της f στο σύνολο:

$$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$$

γίνεται με τρόπο ανάλογο με εκείνον της άσκησης 1.

Συμπεράσματα

Υπάρχουν άπειρες συναρτήσεις f για τις οποίες για κάθε $x \in IR$ ισχύει:

$$f^3(x) - 3f(x) = x.$$

1. Όλες αυτές οι συναρτήσεις:

- Έχουν αντίστροφη και ισχύει $f^{-1}(x) = x^3 - 3x$, $x \in f(IR)$.
- Είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο σύνολο $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$.

2. Καμία από τις συναρτήσεις f :

- Δεν έχει σύνολο τιμών το IR.
- Δεν είναι συνεχής σε όλο το IR.

3. Μπορούμε να επιλέξουμε την f, ώστε να είναι:

- Συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος [-2, 2].
- Συνεχής σε όλα, εκτός από ένα, τα σημεία του διαστήματος [-2, 2].

Άσκηση 3 [14]&[20]

Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $e^{f(x)} + 3f(x) = x$ για κάθε $x \in IR$.

α. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f.

β. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Λύση ερωτήματος α.

▸ **Θα** αποδείξουμε **ότι η f είναι γνησίως μονότονη.**

1ος τρόπος (Απαγωγή σε άτοπο)

Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in IR$, με $x_1 < x_2$, ώστε να ισχύει: $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Οπότε: $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} e^{f(x_1)} \geq e^{f(x_1)} \\ 3f(x_1) \geq 3f(x_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow e^{f(x_1)} + 3f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + 3f(x_2) \Rightarrow \quad x_1 \geq x_2$,

άτοπο.

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

2ος τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+3x$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $D_g= D_f=IR$, η συνάρτηση gof ορίζεται για κάθε $x\in IR$ και είναι $g(f(x))= e^{f(x)}+3f(x) \Rightarrow g(f(x))=x$ για κάθε $x\in IR$.

Αν $x_1,x_2\in IR$, τότε $x_1= g(f(x_1))$ και $x_2= g(f(x_2))$, οπότε:

$$x_1<x_2 \Rightarrow g(f(x_1))< g(f(x_2)) \overset{g\ \gamma.\alpha\upsilon\xi}{\Rightarrow} f(x_1)< f(x_2).$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

Λύση ερωτήματος β.

- **Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f.**

1ος τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+3x$, $D_g= IR$. Η g είναι προφανώς γνησίως αύξουσα, άρα 1–1, και επομένως αντιστρέψιμη, οπότε θα έχουμε:

$$e^{f(x)}+3f(x)=x \Rightarrow g(f(x))=x \Rightarrow f(x)=g^{-1}(x) \text{ για κάθε } x\in IR.$$

Επομένως, $f=g^{-1}$. Όμως, το σύνολο τιμών της g^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το IR. Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

2ος τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Αν $y\in IR$, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x\in IR$ για το οποίο να ισχύει $f(x)= y$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+3x$, $D_g= IR$.

Η g είναι 1–1, οπότε έχουμε:

$$f(x)=y \overset{g\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow} g(f(x))=g(y) \Leftrightarrow x=g(y) \Leftrightarrow x=e^y+3y.$$

Επομένως, αν $y\in IR$, τότε για τον αριθμό $x=e^y+3y$ ισχύει $f(x)= y$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

3ος τρόπος (Με βοηθητική συνάρτηση)

Αν $y\in IR$, θα αποδείξουμε ότι για τον αριθμό $x=e^y+3y$ ισχύει $f(x)= y$, οπότε το σύνολο τιμών της f θα είναι το IR. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} e^{f(x)}+3f(x)&=x \\ x&=e^y+3y \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{f(x)}+3f(x)=e^y+3y \quad (1)$$

Σκεπτικό
Έστω $y_o\in IR$. Αν υπάρχει x_o με $f(x_o)=y_o$, τότε για αυτό το x_o θα ισχύει:
$x_o=e^{f(x_o)}+3f(x_o)=e^{y_o}+3y_o$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x+3x$, $D_g= IR$.

Η g είναι 1–1, οπότε, λόγω της (1), θα ισχύει: $g(f(x))=g(y) \overset{g\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} f(x)=y$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι το IR.

▸ **Θα βρούμε τον τύπο της f^{-1}.**

$1^{ος}$ τρόπος

Αν $y=f(x)$ είναι η τιμή της f στο τυχαίο $x\in IR$, τότε το x, λόγω της σχέσης $e^{f(x)}+3f(x)=x$, θα δίνεται από τον τύπο: $x=e^{y}+3y$, οπότε για την αντίστροφη της f θα ισχύει: $f^{-1}(x)=e^{x}+3x$ για κάθε $x\in D_{f^{-1}}=IR$.

$2^{ος}$ τρόπος

Επειδή η ισότητα $e^{f(x)}+3f(x)=x$ ισχύει για κάθε $x\in IR$, η ισότητα αυτή θα ισχύει και αν όπου x θέσουμε το $f^{-1}(x)$, οπότε έχουμε:

$$e^{f\left(f^{-1}(x)\right)}+3\left(f(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}(x)\Rightarrow e^{x}+3x=f^{-1}(x).$$

Λύση ερωτήματος γ.

▸ **Θα αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής.**

$1^{ος}$ τρόπος

Αν $x,x_o\in IR$, τότε $e^{f(x)}+3f(x)=x$, $e^{f(x_o)}+3f(x_o)=x_o$ και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$e^{f(x)}+3f(x)-e^{f(x_o)}-3f(x_o)=x-x_o\Rightarrow e^{f(x)}-e^{f(x_o)}+3\left(f(x)-f(x_o)\right)=x-x_o,\ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x}$ η οποία, προφανώς, είναι παραγωγίσιμη.

Από το Θ.Μ.Τ για την h στο διάστημα με άκρα $f(x)$ και $f(x_o)$ προκύπτει ότι υπάρχει ξ μεταξύ των $f(x)$ και $f(x_o)$, και μάλιστα μοναδικό αφού η συνάρτηση h' είναι 1-1, ώστε να ισχύει:

$$h'(\xi)=\frac{h(f(x))-h(f(x_o))}{f(x)-f(x_o)}$$

Άρα: $e^{\xi}=\dfrac{e^{f(x)}-e^{f(x_o)}}{f(x)-f(x_o)}\Rightarrow e^{f(x)}-e^{f(x_o)}=e^{\xi}\left(f(x)-f(x_o)\right)$

Επομένως:

$$(1)\Rightarrow e^{\xi}\left(f(x)-f(x_o)\right)+3\left(f(x)-f(x_o)\right)=x-x_o\Rightarrow f(x)-f(x_o)=\frac{x-x_o}{e^{\xi}+3}\Rightarrow$$

$$\left|f(x)-f(x_o)\right|=\frac{\left|x-x_o\right|}{e^{\xi}+3}\Rightarrow\left|f(x)-f(x_o)\right|\le\left|x-x_o\right|\Rightarrow-\left|x-x_o\right|\le\left|f(x)-f(x_o)\right|\le\left|x-x_o\right|$$

Όμως: $\lim\limits_{x\to x_o}\left|x-x_o\right|=\lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|x-x_o\right|\right)=0$

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)-f(x_o)\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

Επομένως, η f είναι συνεχής.

$2^{ος}$ τρόπος (Με τη βοήθεια της αντίστροφης)

Είναι $f^{-1}(x)=e^x+3x$ και $\left(f^{-1}\right)'(x)=e^x+3>3$, (φραγμένη κάτω από θετικό)

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $y_1,y_2\in IR$ ισχύει:

$$\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\ge 3\left|y_1-y_2\right|$$

- Αν $y_1=y_2$, τότε η σχέση $\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\ge 3\left|y_1-y_2\right|$ ισχύει ως ισότητα.
- Αν $y_1<y_2$, τότε από Θ.Μ.Τ στο $[y_1,y_2]$, παίρνουμε:

$$\frac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2}=\left(f^{-1}\right)'(\xi)=e^{\xi}+3>3\ ,\ \xi\in(y_1,y_2)$$

Άρα: $\left|\dfrac{f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)}{y_1-y_2}\right|\ge 3 \Rightarrow \left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\ge 3\left|y_1-y_2\right|$.

Για κάθε $x,x_o\in IR$, υπάρχουν $y_1,y_2\in IR$ ώστε να ισχύει $x=f^{-1}(y_1)$, και $x_o=f^{-1}(y_2)$, οπότε από τη σχέση $\left|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)\right|\ge 3\left|y_1-y_2\right|$ παίρνουμε:

$\left|x-x_o\right|\ge 3\left|f(x)-f(x_o)\right| \Rightarrow -\dfrac{1}{3}\left|x-x_o\right|\le f(x)-f(x_o)\le \dfrac{1}{3}\left|x-x_o\right|$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\left|x-x_o\right|=\lim\limits_{x\to x_o}\left(-\left|x-x_o\right|\right)=0$. Άρα: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)$.

- **Θα αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.**

Για $x\neq x_o$ έχουμε: $f(x)-f(x_o)=\dfrac{x-x_o}{e^{\xi(x)}+3} \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\dfrac{1}{e^{\xi(x)}+3}$

Επειδή $\xi(x)$* μεταξύ των f(x) και $f(x_o)$ και η f είναι συνεχής θα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\xi(x)=\lim_{x\to x_o}f(x)=f(x_o)$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{e^{\xi(x)}+3}=\dfrac{1}{e^{f(x_o)}+3}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη

και ισχύει: $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+3}$

* Γιατί $\xi(x)$ και όχι ξ εξηγείται στις επόμενες σελίδες.

Και τέλος λίγα για το Θ.Μ.Τ

ξ ή ξ(x);

Αν εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε διάστημα με μεταβλητό άκρο τότε το ξ που απορρέει από το Θ.Μ.Τ είναι συνάρτηση.

Για παράδειγμα: [16]

- Αν $f(x)=x^2$, τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [x, x+1], συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x, x+1)$ για το οποίο ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x},\ (1)$$

➲ Ας σημειωθεί ότι εδώ το ξ είναι **<u>μοναδικό</u>**, δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(x, x+1)$ για το οποίο ισχύει η (1). Η μοναδικότητα του ξ απορρέει από το γεγονός ότι η συνάρτηση f' είναι 1-1.

Επιπλέον η μοναδικότητα του ξ προκύπτει από την επίλυση, ως προς ξ, της εξίσωσης $f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}$.

Έχουμε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow 2\xi=(x+1)^2-x^2\Leftrightarrow \xi=\frac{2x+1}{2},$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι ορίζεται μια συνάρτηση ξ(x) με πεδίο ορισμού το IR, που σε κάθε x αντιστοιχεί το $\frac{2x+1}{2}$, δηλαδή $\xi(x)=\frac{2x+1}{2}$. Είναι προφανές ότι η συνάρτηση ξ(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

Η συνέχεια της ξ(x) είναι φανερή και από το γεγονός ότι:

$$\xi(x)=\frac{1}{2}\big(f(x+1)-f(x)\big),$$

οπότε η συνάρτηση ξ(x) είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

- Αν $f(x)=e^x$ τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [0, x] θα έχουμε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x},\ (2)$$

Κι εδώ το ξ είναι **<u>μοναδικό</u>**, δηλαδή υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(0,\ x)$ για το οποίο ισχύει η (2), αφού η συνάρτηση f' είναι 1-1.

Επιπλέον η μοναδικότητα του ξ προκύπτει από την επίλυση, ως προς ξ, της εξίσωσης $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}$.

Έχουμε:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x}\Leftrightarrow e^{\xi}=\frac{e^x-1}{x}\Leftrightarrow \xi=\ln\frac{e^x-1}{x}$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι ορίζεται μια συνάρτηση ξ(x) με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$, που σε κάθε $x>0$, αντιστοιχεί το $\ln\frac{e^x-1}{x}$, δηλαδή $\xi=\ln\frac{e^x-1}{x}$. Είναι προφανές ότι η συνάρτηση ξ(x) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

- Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=ημ(kx)$, $k\in IR$, τότε εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[x,x+c]$, το ξ που εμφανίζεται μπορεί να είναι μοναδικό μπορεί και όχι. Το αν είναι μοναδικό ή όχι εξαρτάται από την επιλογή των k και c.

  Η ύπαρξη ενός ή περισσοτέρων ξ μπορεί να αποδειχθεί αλγεβρικά ή να μαντευθεί με τη βοήθεια κατάλληλου λογισμικού, για παράδειγμα με το Geogebra.

  Χρησιμοποιώντας το Geogebra μπορούμε να ακολουθήσουμε τα παρακάτω τρία βήματα:

  1. Κατασκευάζουμε τρεις δρομείς a, c και k.

  2. Θεωρούμε τη γραφική $f(x)=ημ(kx)$, $k\in IR$

  3. Θεωρούμε χορδή με άκρα τα σημεία $A=(a,f(a))$ και $B=(a+c,\ f(a+c))$.

Μεταβάλλοντας έναν ή και περισσότερους από τους δρομείς a, c και k μαντεύουμε ότι μπορεί να υπάρχει μια μόνο ή και περισσότερες ευθείες που εφάπτονται στη C_f και είναι παράλληλες στη χορδή AB. Έτσι φαίνεται πολύ καθαρά ότι εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[x,\ x+c]$, το ξ που εμφανίζεται μπορεί να μην είναι μοναδικό.

[15] Επειδή λοιπόν κατά την εφαρμογή του Θ.Μ.Τ για μια συνάρτηση f μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός ξ σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής [x,x+c], θα μπορούσε κανείς να πει ότι ο ισχυρισμός:

$$\xi \to +\infty, \text{ όταν } x \to +\infty$$

δεν έχει απολύτως κανένα νόημα, αφού για κάθε x μπορεί να έχουμε περισσότερες από μια επιλογές για τα αντίστοιχα ξ, οπότε δεν έχουμε κάποια συνάρτηση ξ(x), ώστε να νομιμοποιούμαστε να συζητάμε για την ύπαρξη του ορίου της.

Υπάρχει όμως, το Αξίωμα Επιλογής της Θεωρίας Συνόλων που «σώζει» την κατάσταση.

Σύμφωνα με το Αξίωμα αυτό: «Για οποιαδήποτε οικογένεια μη κενών συνόλων υπάρχει ένα σύνολο του οποίου η τομή με κάθε ένα από τα σύνολα της οικογένειας αυτής είναι μονοσύνολο.»

Δηλαδή το σύνολο αυτό «επιλέγει» ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε μέλος της οικογένειας αυτής. Για παράδειγμα, μπορεί να επιλεγεί το μέγιστο ή το ελάχιστο ξ από κάθε διάστημα, εφόσον υπάρχει.

Έτσι, αν Α είναι το σύνολο όλων αυτών των μοναδικών ξ, τότε ορίζεται μια συνάρτηση ξ(x) με πεδίο ορισμού ένα διάστημα της μορφής (α, +∞) και σύνολο τιμών το Α. Επιπλέον ισχύει:

$\lim_{x\to\infty}\xi(x)=+\infty$, *αφού για κάθε x είναι $x<\xi(x)<x+c$ και* $x \to +\infty$.

Βιβλιογραφία

[1] Ανδρεαδάκης, Σ., κ.ά. (2015). *Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σποδών Οικονομίας & Πληροφορικής*, Αθήνα: ΙΕΠ & ΙΤΥΕ "Διόφαντος".

[2] Δημητρίου, Κ. (2004). *Θέματα Μαθηματικών Γ. Λυκείου Κατεύθυνσης*. Αθήνα.

[3] Ιωσηφίδης, Ν. (2015). «*ΥΠΑΡΚΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΥΠΑΡΚΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ*». Εισήγηση 7η Μαθηματική Εβδομάδα Θεσσαλονίκης 20-3-2015**.**

[4] Μπαϊλάκης, Γ. (2006). *Θέματα Μαθηματικών Γ. Λυκείου*. Αθήνα: Σαββάλα

[5] Μάκρας, Στρ. (1998). *Ρωτώντας πας... στην πόλη*. (Περιοδικό Ευκλείδης Β΄, τχ 4 Μάρτιος-Απρίλιος Μάϊος, σελ.53), Αθήνα: ΕΜΕ.

[6] Νεγρεπόντης, Σ. κ. α. (1987). *Απειροστικός Λογισμός τόμος Ι.* Αθήνα: Συμμετρία.

[7] Ντούγιας, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Αθήνα: Leader Books.

[8] Παντελίδης, Γ. (2006). *ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΙΑΔΑΣΚΟΝΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ,* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

[9] Παπαδημητράκης, Μ. (2015). *Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής,* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα: www.kallipos.gr

[10] Πολύζος, Γ. (2007). *«ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ Τ.Π.Ε. ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗ ΜΑΘΗΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ».* Εισήγηση σε ημερίδα του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε. του Νομού Ημαθίας 04-3-2007.

[11] Spivak, Michael. (1991). *Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μτφ Γιαννόπουλου Απ.), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[12] Thomas, G. κ.α. (2004). *Απειροστικός λογισμός* Τόμος Ι. (μτφ Αντωγιαννάκης, Μ.), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[13] *3ο Θέμα απολυτηρίων εξετάσεων* (2003) *της Γ΄ τάξης ημερησίου ενιαίου λυκείου στα μαθηματικά θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης.*

[14] Στεργίου, Χ. (2015). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ2 Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ,* Αθήνα: Σαββάλας.

[15] Μάκρας, Σ. (1998). *Σχετικά με μια άσκηση της ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Μαθηματική Έκφραση., 116-119.

[16] Δαμβακάκης, Γ. κ.ά, (2008). *Επαναληπτικά Θέματα στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου*. Καγκουρό Ελλάς., 15-18.

[17] Μπάρλας, Τ. (2016). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Α΄ τεύχος. Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών σπουδών, Οικονομίας και Πληροφορικής.* Μπάρλας.

[18] Αντωνόπουλος, Α. κ. ά. Μέλη της lisari team (2016). *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Οδηγός Προετοιμασίας για τις Πανελλαδικές Εξετάσεις. Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών- Οικονομίας και Πληροφορικής.* Αθήνα: ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ.

[19] Μιχαηλίδης, Γ. (2016) *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Α΄ ΤΟΜΟΣ. Προσανατολισμός Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.* Αθήνα: ΕΛΛΗΝΟΕΚΔΟΤΙΚΗ.

[20] Μαυρογιάννης, Ν. (2010). *16 μήνες στο pathfinder/mathematica.* http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=6&t=5230

[21] Ελευθερίου, Π. (2014) *«Μια Εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού».* 6η Μαθηματική Εβδομάδα Θεσσαλονίκης.

[22] Ελευθερίου, Π. (2016) *«Παίζοντας στην τάξη με αντίστροφες συναρτήσεις και με κατασκευές συναρτήσεων που ορίζονται πεπλεγμένα».* 8η Μαθηματική Εβδομάδα Θεσσαλονίκης.