ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 251
Α2. Θεωρία σελ. 273
Α3. Θεωρία σελ. 334
Α4. Σ, Λ, Λ, Λ, Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) α) Είναι $g'(x)=1>0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και «1−1». Επίσης πεδίο ορισμού της g είναι το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Άρα η g αντιστρέφεται και η g^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο που βρίσκεται ως εξής : $y=x-1 \Leftrightarrow x=y+1$. Άρα $g^{-1}(x)=x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Η $g^{-1}\circ h$ έχει πεδίο ορισμού το $\left\{x\in\mathbb{R}^*: h(x)\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}^*$ και τύπο $\left(g^{-1}\circ h\right)(x)=g^{-1}\left(h(x)\right)=g^{-1}\left(x+\dfrac{4}{x}\right)=x+\dfrac{4}{x}+1=\dfrac{x^2+x+4}{x}$.

Β2) Είναι $f(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x}$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	‖	↘		↗
		Τ.Μ. -3				Τ.Ε. 5	

Β3) Είναι $0<\alpha<1$, άρα $0<\alpha<2$, οπότε $f(\alpha)>5 \Leftrightarrow 2f(\alpha)>10$
Είναι $0<2\alpha<2$, οπότε $f(2\alpha)>5$
Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $2f(\alpha)+f(2\alpha)>15 \Leftrightarrow \dfrac{2f(\alpha)+f(2\alpha)}{3}>5$.
Όμως $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=5$, $f\left((0,2)\right)=\left(\lim\limits_{x\to2^-} f(x), \lim\limits_{x\to0^+} f(x)\right)=(5,+\infty)$.
Επειδή $\dfrac{2f(\alpha)+f(2\alpha)}{3}\in f\left((0,2)\right)$, θα υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$f(x_0)=\frac{2f(\alpha)+f(2\alpha)}{3}.$$

Το x_0 είναι μοναδικό γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,2).
(Αποδεικνύεται και με Bolzano και με θεώρημα ενδιάμεσων τιμών).

Β4) Επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$, συμπεραίνουμε ότι η $x=0$ είναι η μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-1\cdot x\right]=1$, η ευθεία $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B5) Είναι : $E=\displaystyle\int_1^e\left|\frac{x^2+x+4}{x}-x-1\right|dx=\int_1^e\left|\frac{4}{x}\right|dx=\int_1^e\frac{4}{x}dx=4\int_1^e\frac{1}{x}dx=4\left[\ln x\right]_1^e=4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Είναι $f(x)-g'(x)=e^x-1$ (1).

Τότε $g(1)-g(0)=\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,dx=\int_0^1\left[f(x)-e^x+1\right]dx=\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 e^x\,dx+\int_0^1 1dx=$

$=e-1-\left[e^x\right]_0^1+\left[x\right]_0^1=1$

Γ2) $g(1)-g(0)=1\Leftrightarrow\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}=1$. Όμως από το Θ.Μ.Τ. για τη g στο $[0,1]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(1)-g(0)}{1-0}\Leftrightarrow g'(\xi)=1$. Το ξ είναι μοναδικό γιατί η g' είναι γνησίως αύξουσα.

(Αποδεικνύεται και με Rolle).

Επομένως :

Γ3) α) $x>\xi\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(x)>g'(\xi)\Rightarrow f(x)-e^x+1>1\Leftrightarrow f(x)>e^x$.

$x<\xi\overset{g'\nearrow}{\Rightarrow}g'(x)<g'(\xi)\Rightarrow f(x)-e^x+1<1\Leftrightarrow f(x)<e^x$.

β) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα (α) έχουμε :

$\displaystyle\int_0^\xi\left|f(x)-e^x\right|dx=\int_\xi^1\left|f(x)-e^x\right|dx\Leftrightarrow-\int_0^\xi\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_\xi^1\left(f(x)-e^x\right)dx$

$\displaystyle\Leftrightarrow\int_0^\xi\left(g'(x)-1\right)dx+\int_\xi^1\left(g'(x)-1\right)dx=0\Leftrightarrow\int_0^1\left(g'(x)-1\right)dx=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[g(x)\right]_0^1-\left[x\right]_0^1=0\Leftrightarrow g(1)-g(0)-1=0\overset{\text{ερ. }\Gamma_1}{\Leftrightarrow}1-1=0$, που ισχύει.

Η ευθεία $x=\xi$ χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, e^x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ σε δυο ισοδύναμα χωρία.

Γ4) Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu x}{f(x)-g'(x)}\right|=\dfrac{|\eta\mu x|}{|e^x-1|}\le\dfrac{1}{|e^x-1|}$, οπότε $-\dfrac{1}{|e^x-1|}\le\dfrac{\eta\mu x}{f(x)-g'(x)}\le\dfrac{1}{|e^x-1|}$ … κριτήριο παρεμβολής … και το όριο είναι ίσο με 0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Είναι $f(x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge f(0)$ στο $(-1,1)$, 0 εσωτερικό σημείο του διαστήματος $(-1,1)$, f παραγωγίσιμη στο 0 $\cdots$ (θ. Fermat)

Δ2) α) Για $x\ne 0$ έχουμε $\left(x\ln|x|\right)'=\ln|x|+x\cdot\dfrac{1}{x}=\ln|x|+1$.

β). Από τη σχέση $xf'(x)-f(x)=-4x^2\left(1+\ln|x|\right)$ για $x\ne 0$, έχουμε

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-4\left(1+\ln|x|\right) \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\left(-4x\ln|x|\right)',$$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επομένως $\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}=-4x\ln|x|+c_1,\ x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{f(x)}{x}=-4x\ln|x|+c_2,\ x\in(-\infty,0) \end{cases}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)=0$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x\ln|x|\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln|x|\right)=\cdots(\text{DLH})\cdots=0$. Άρα $c_1=c_2=0$

Άρα, επειδή και $f(0)=0$, προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Δ3) α) Για $x\neq 0$ έχουμε $f'(x)=\cdots=-4x\left(2\ln|x|+1\right)$

Για $x\neq 0$ έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ και

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ή $x<-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Η μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{e}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−	0	+	0	−		−	
$f(x)$		↗		↗		↘		↗		↘		↘	
			Τ.Ε. 0		Τ.Μ $\frac{2}{e}$		Τ.Ε. 0		Τ.Μ $\frac{2}{e}$		Τ.Ε. 0		

Στο $[-1,1]$, με βάση τον παραπάνω πίνακα, τοπικά (αλλά ταυτόχρονα και ολικά) ακρότατα έχουμε στα -1, $-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, 0, $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, 1.

β) $\dfrac{k}{x^2}+2\ln x^2=0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left(f(x)=k \text{ και } x\neq 0\right)$ (2).

Η εξίσωση (2) στο $[-1,1]$:

- Είναι αδύνατη όταν $k<0$ ή $k>\dfrac{2}{e}$ ..
- Έχει δυο ακριβώς λύσεις όταν $k=0$ ή $k=\dfrac{2}{e}$ (στην περίπτωση που k=0, το 0 απορρίπτεται)
- Έχει τέσσερις ακριβώς λύσεις όταν $0<k<\dfrac{2}{e}$.

Δ4) α) Η f προφανώς είναι άρτια γιατί για αν $x\in\mathbb{R}$, τότε $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=f(x)$.

Επίσης $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\,dx=\int_{-\alpha}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{\alpha}f(x)\,dx$.

Όμως $\int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(-x)\,dx \overset{u=-x}{=} \cdots = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$.

Άρα $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$.

β) $\dfrac{F(\beta)-F(-1)}{2} < \int_{0}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{\beta} f(x)dx < 2\int_{0}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int_{-1}^{\beta} f(x)dx < \int_{-1}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-1}^{\beta} f(x)dx - \int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$

$\int_{1}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{\beta} f(x)dx < 0 \Leftrightarrow \int_{1}^{\beta} f(x)dx < 0$, ισχύει, γιατί $f(x) < 0$ για $x > 1$.

β τρόπος.

$\dfrac{F(\beta)-F(-1)}{2} < \int_{0}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow F(\beta)-F(-1) < \int_{-1}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(\beta)-F(-1) < F(1)-F(-1) \Leftrightarrow F(\beta) < F(1) \Leftrightarrow F(\beta)-F(1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{1}^{\beta} f(x)dx < 0$, που ισχύει.

γ τρόπος.

$\dfrac{F(\beta)-F(-1)}{2} < \int_{0}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow F(\beta)-F(-1) < \int_{-1}^{1} f(x)dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(\beta)-F(-1) < F(1)-F(-1) \Leftrightarrow F(\beta) < F(1)$ που ισχύει, γιατί η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ (αφού $F'(x) = f(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$ και F συνεχής στο $[1,+\infty)$).