

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 10

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις **Σωστές (Σ)** ή **Λανθασμένες (Λ)**.

α. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$, τότε θα είναι κατ' ανάγκη συνεχής στο $α$ και στο $β$.

γ. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

δ. Αν $f(x) = \ln x$, τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

ε. Αν $z = α + βi$ μιγαδικός αριθμός και \bar{z} ο συζυγής του, τότε ισχύει πάντα: $z + \bar{z} = 2β$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + 5i$ και $z_2 = 3 + 2i$

Να αποδείξετε ότι:

B1. Βρείτε τον μιγαδικό $w_1 = \frac{z_1}{z_2}$

Μονάδες 5

B2. Αν ο w_1 είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + kz + μ = 0$, με $k, μ \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα $k, μ$.

Μονάδες 7

B3. Αν w_2 είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης του B2 ερωτήματος τότε να αποδείξετε ότι

$$w_1^{2014} + w_2^{2014} = 0$$

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους

οποίους ισχύει: $z = (\lambda - 2)w_1 + (\lambda - 1)w_2$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1) - \frac{1}{x} - 1$

- Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . Μονάδες 5
- Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία. Μονάδες 6
- Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . Μονάδες 8
- Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x \ln(x + 1) = x + 1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 5 και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)f(x) + \eta\mu(x-4)}{\sqrt{x} - 2} = 68$$

- Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(4) = 2$. Μονάδες 5
- Δ2. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f . Μονάδες 5
- Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο. Μονάδες 7
- Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε:
 $3f(\xi) = f(1) + f(2) + f(3)$ Μονάδες 8

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ο ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

Στυλιανίδης Στυλιανός

Κουμπάρος Δημήτριος