ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ ΕΚΠ/ΣΗΣ Β. ΑΙΓΑΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Εποπτεία
Ο Προϊστάμενος
Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Β. Αιγαίου
Πρόδρομος Π. Ελευθερίου

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ. 334
Α2. Σχολικό σελ. 213
Α3. Λ, Λ, Σ, Σ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

i) Έχουμε:

u φανταστικός

$$\Leftrightarrow u=-\bar{u} \Leftrightarrow z-\frac{1}{z}=-(\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}) \Leftrightarrow z-\frac{1}{z}=-\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$z+\bar{z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z+\bar{z}=\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}} \Leftrightarrow (1-\frac{1}{z\bar{z}})(z+\bar{z})=0 \Leftrightarrow$$

$$(1-\frac{1}{z\bar{z}})=0 \text{ ή } z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{|z|^2}=0 \text{ ή } z=-\bar{z} \text{ ή} \Leftrightarrow$$

$|z|=1$ ή z φανταστικός, άτοπο γιατί $\text{Re}(z)\neq 0$.

Άρα $1-\frac{1}{|z|^2}=0$ και επομένως $|z|=1$.

ii) $1^{ος}$ τρόπος

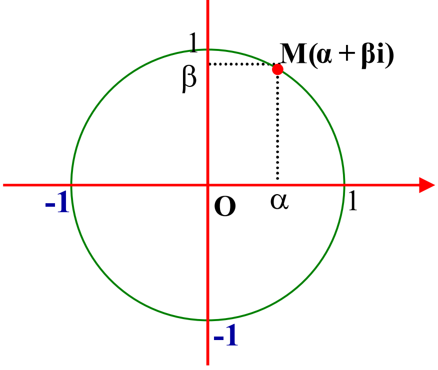
Αν $z=\alpha+\beta i$, τότε:

$$|z|=1 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=1 \Leftrightarrow \beta^2=1-\alpha^2\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-1\leq\alpha\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq \text{Re}(z)\leq 1$$

$2^{ος}$ τρόπος

Είναι $|z|=1$, άρα οι εικόνες των αριθμών z ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο και επομένως θα ισχύει $-1\leq \text{Re}(z)\leq 1$.



Β2. Έχουμε:

$$|z_1| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 = 1 \Leftrightarrow \overline{z}_1 = \frac{1}{z_1}$$

$$|z_2| = 1 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow z_2\overline{z}_2 = 1 \Leftrightarrow \overline{z}_2 = \frac{1}{z_2}$$

Οπότε:

$$\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) \le 4 \Leftrightarrow \left(z_1 + \overline{z}_1\right)\left(z_2 + \overline{z}_2\right) \le 4 \Leftrightarrow$$

$2\,\mathrm{Re}(z_1)2\,\mathrm{Re}(z_2) \le 4 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) \le 1$ που ισχύει γιατί:

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \mathrm{Re}(z_1) \le 1 \Leftrightarrow |\mathrm{Re}(z_1)| \le 1 \\ -1 \le \mathrm{Re}(z_2) \le 1 \Leftrightarrow |\mathrm{Re}(z_2)| \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |\mathrm{Re}(z_1)|\cdot|\mathrm{Re}(z_2)| \le 1$$

Οπότε $|\mathrm{Re}(z_1)\cdot\mathrm{Re}(z_2)| \le 1$ και επομένως $-1 \le \mathrm{Re}(z_1)\mathrm{Re}(z_2) \le 1$

Β3.

i) Έχουμε:

$$\overline{w} = \overline{\left(z^\nu + \frac{1}{z^\nu}\right)} \Leftrightarrow \overline{w} = \overline{z}^\nu + \frac{1}{\overline{z}^\nu} \Leftrightarrow \overline{w} = \frac{1}{z^\nu} + z^\nu \Leftrightarrow \overline{w} = w.$$

Επομένως $w \in R$

ii) Έχουμε: $w \in R \Leftrightarrow w = \kappa,\ \kappa \in R$

Όμως: $|w| = \left|z^\nu + \frac{1}{z^\nu}\right| \le |z|^\nu + \left|\frac{1}{z^\nu}\right| \le 2$

Άρα: $|\kappa| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le \kappa \le 2$

Επομένως, οι εικόνες των αριθμών w ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A(-2, 0) , B(2, 0) του οποίου το μήκος είναι ίσο με 4.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι k=f(0) και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 θα έχουμε:

$$k=f(0)=\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0} x^2\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{2}=0$$

Άρα k=f(0)=0.

Γ2. Είναι $f'(x)=\left(x^2\ln x\right)'=x+2x\ln x$ για x>0.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Έχουμε:

- $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln x}{x}=\lim_{x\to0}(x\ln x)$
- $\lim_{x\to0}(x\ln x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}(-x)=0.$

Άρα $f'(0)=0$, οπότε $f'(x)=\begin{cases} x+2x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

Γ3. i) Για κάθε x>0 ισχύει $f'(x)=x+2x\ln x$, άρα:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+2x\ln x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{e}}$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$.

Ακρότατα: f(0)=0 τ.μ και $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{-1}{2e}$ τ.ε

ii) Είναι $f''(x)=3+2\ln x$, οπότε:

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 3+2\ln x=0 \Leftrightarrow x=e^{\frac{-3}{2}}$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 3+2\ln x>0 \Leftrightarrow x>e^{\frac{-3}{2}}$

Επομένως, η f είναι κοίλη στο $\left[0, e^{\frac{-3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{-3}{2}},+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_o=e^{\frac{-3}{2}}$.

Γ4. Για x≥1 η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής [x, x+1] και παραγωγίσιμη στο (x, x+1). Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ σε κάθε διάστημα θα υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x),$$

Είναι:

$f'(x)=x+2x\ln x,\quad f''(x)=3+2\ln x>0$, στο (x, x+1)

Άρα η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο (x, x+1), επομένως f΄(x)<f΄(ξ).

Οπότε f(x+1)-f(x)>x+2xlnx για κάθε x>1

Γ5. Είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(x+1)-\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x}$$

Θέτουμε $u=\frac{x+1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} u = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1, \quad \lim\limits_{x\to 1}\ln u=\ln 1=0$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$

Είναι:

- $\left|\ln\frac{x+1}{x}\cdot \eta\mu x\right|=\left|\ln\frac{x+1}{x}\right|\cdot|\eta\mu x|\le\left|\ln\frac{x+1}{x}\right|$
- $-\left|\ln\frac{x+1}{x}\right|\le \ln\frac{x+1}{x}\cdot\eta\mu x\le\left|\ln\frac{x+1}{x}\right|$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\ln\frac{x+1}{x}\right|\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\ln\frac{x+1}{x}\right|=0$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+1}{x}\cdot\eta\mu x\right)=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **<u>1ος τρόπος</u>**

● Αν $g(1) > 1$, τότε $1-g(1)<0$, οπότε:

$$g(1)-1=\int_0^{1-g(1)} g(t)dt=-\int_{1-g(1)}^{0} g(t)dt<0, \text{ αφού } g(t)>0.$$

Αρα $g(1)-1<0$ και επόμένως $g(1) < 1$ άτοπο.

● Αν $g(1) < 1$, τότε $1-g(1)>0$, οπότε:

$\int_0^{1-g(1)} g(t)dt>0$. Αρα $g(1)-1>0 \Leftrightarrow g(1)>1$ άτοπο.

Επομένως $g(1)=1$.

<u>2ος τρόπος</u> Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x-\int_0^{-x} g(t)dt$.

Είναι $\varphi(0)=0$ και $\varphi'(x)=1+g(-x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, συνεπώς η $\varphi\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Έχουμε:

$$g(1)-1=\int_0^{1-g(1)} g(t)dt \Rightarrow g(1)-1-\int_0^{1-g(1)} g(t)dt=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\varphi(g(1)-1)=\varphi(0)\Rightarrow g(1)-1=0\Rightarrow g(1)=1$

Δ2. Έχουμε:

$g'(x) = -2x\,g(x) \Leftrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = -2x$ (αφού $g(x) > 0$) $\Leftrightarrow$

$(\ln g(x))' = (-x^2)' \Leftrightarrow \ln g(x) = -x^2 + c$.

Για x=1 προκύπτει c=1, αφού g(1)=1.

Άρα $g(x) = e^{-x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Έχουμε:

$\varphi'(x) = h(x+2) - h(x) > 0$. Γιατί:

- $h'(x) = g(x) > 0$, οπότε $h\uparrow$ στο $\mathbb{R}$.
- $x+2 > x \Rightarrow h(x+2) > h(x) \Rightarrow \varphi'(x) > 0 \Rightarrow \varphi\uparrow$

Δ4. Έχουμε:

$$\int_3^{2x+3} h(t)dt = \int_1^{2x+1} h(t)dt - \int_0^1 g(u)du \cdot \int_1^x (2-2t)dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_3^{2x+3} h(t)dt = \int_1^{2x+1} h(t)dt - \int_0^1 g(u)du \cdot \left(-x^2+2x-1\right).$$

$$\Leftrightarrow \int_3^{2x+3} h(t)dt = \int_1^{2x+1} h(t)dt + \int_0^1 g(u)du \cdot (x-1)^2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$H(x) = \int_3^{2x+3} h(t)dt - \int_1^{2x+1} h(t)dt - \int_0^1 g(u)du \cdot (x-1)^2.$$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση H(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο (0,1) δηλαδή ότι υπάρχει μοναδική $x_o \in (0,1)$ ώστε να ισχύει: $H(x_o)=0$.

<u>Ύπαρξη ρίζας</u>

- Η συνάρτηση H είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- $H(0) = -\int_0^1 g(u)du < 0$ αφού $g(u) > 0$
- $H(1) = \int_3^5 h(t)dt - \int_1^3 h(t)dt > 0$ γιατί, σύμφωνα με το ερώτημα (Δ3), η φ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε φ(1)<φ(3).

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον x_o ώστε $H(x_o)=0$.

Μοναδικότητα ρίζας

$H'(x)= 2h(2x+3)-2h(2x+1)+(-2x+2)\left(\int_0^1 g(u)du\right)=$

$2[h(2x+3)-h(2x+1)]+2(1-x)\left(\int_0^1 g(u)du\right)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Πράγματι:

Είναι $h(2x+3)-h(2x+1)>0$ γιατί h γνησίως αύξουσα και

$2(1-x)\left(\int_0^1 g(u)du\right)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ αφού $\int_0^1 g(u)du > 0$