ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ Δ/ΝΣΗ ΕΚΠ/ΣΗΣ Β. ΑΙΓΑΙΟΥ
ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Εποπτεία
Ο Προϊστάμενος

Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης Β. Αιγαίου

Πρόδρομος Π. Ελευθερίου

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΚΥΡΙΑΚΗ 21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα [α,β]. Να αποδείξετε ότι, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν α,β,γ,δ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε:
$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$$

β. Κάθε συνάρτηση 1-1 είναι γνησίως μονότονη.

γ. Τα εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος *Δ*, στα οποία η f' είναι διαφορετική από το μηδέν, δεν είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

δ. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

ε. Αν οι συναρτήσεις f, g' είναι συνεχείς, $u = g(x)$ και $du = g'(x)dx$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύουν:

- $\mathrm{Re}(z) \neq 0$.
- Οι αριθμοί $u = z - \dfrac{1}{z}$ είναι φανταστικοί.

Β1. Να αποδείξετε:

i) $|z| = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

ii) $-1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Β2. Να αποδείξετε ότι, αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z, τότε $\left(z_1 + \dfrac{1}{z_1}\right) \cdot \left(z_2 + \dfrac{1}{z_2}\right) \leq 4$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β3. Να αποδείξετε ότι, αν $w = z^{\nu} + \dfrac{1}{z^{\nu}}$ με $\nu \in \mathbb{N}$, τότε:

i) Οι αριθμοί w είναι πραγματικοί.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ii) Οι εικόνες των αριθμών w ανήκουν σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει μήκος 4.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι k=0.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ2. **i)** Να βρείτε την παράγωγο της f.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να εξετάσετε αν παρουσιάζει καμπή.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει:

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{x} > 1+\ln x^2$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{f(x)}{x^2}\right)\cdot \eta\mu x\right)$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση g η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $g(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $g(1)-1=\int_0^{1-g(1)} g(t)dt$.
- $g'(x)=-2xg(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $h(x)=\int_1^x g(t)dt$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $g(1)=1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $g(x)=e^{-x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x)=\int_x^{x+2} h(t)dt$ ως προς τη μονοτονία.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\int_3^{2x+3} h(t)dt=\int_1^{2x+1} h(t)dt-\int_0^1 g(u)du\cdot\int_1^x (2-2t)dt$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 11.30 π.μ.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ