Γ΄ ΤΑΞΗ

4^{ο} ΛΥΚΕΙΟ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ
ΤΡΙΤΗ 16/10/2012
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $M(x,\psi)$ η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z=x+\psi i$ στο μιγαδικό επίπεδο. Τι ορίζουμε ως μέτρο του z;

Μονάδες 3

Α2. Αν z_1 ,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να δειχθεί ότι :

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Μονάδες 7

Α3. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α) Αν M_1 ,M_2 είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1,z_2,τότε το μέτρο της διαφοράς των z_1 και z_2 είναι ίσο με την απόσταση ……

Μονάδες 3

β) Η εξίσωση $|z-z_o|=\rho$, $\rho>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο …… και ακτίνα ……

Μονάδες 3

γ) Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$, $z_1 \neq z_2$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα τα σημεία …… και ……

Μονάδες 3

Γ΄ ΤΑΞΗ

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Αν z_1 ,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

Μονάδες 2

β) Αν z είναι μιγαδικός αριθμός, τότε $|z| - |-\bar{z}| = 0$

Μονάδες 2

γ) Αν z_1,z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί με $|z_1| = |z_2|$, τότε πάντα ισχύει $z_1 = z_2$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z με $z \neq 1$ για τους οποίους ισχύει: $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2$

Β1. Να δείξετε ότι $|z|=2$.

Μονάδες 8

Β2. Αν επιπλέον ισχύει $Re(z)=Im(z)$ να υπολογίσετε τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς.

Μονάδες 8

Β3. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος **Β2** να αποδείξετε ότι ο z^2 είναι φανταστικός.

Μονάδες 9

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ Γ

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 με $z_1 \cdot z_2 \neq 0$ ισχύει:

$$(z_1+z_2)^{2010}=(z_1-z_2)^{2010}$$

να αποδειχτεί ότι:

Γ1. Ο αριθμός $w=\frac{z_1}{z_2}$ είναι φανταστικός αριθμός.

Μονάδες 12

Γ2. Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και την αρχή των αξόνων Ο είναι ορθογώνιο στο Ο.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ

Έστω οι μιγαδικοί z και $f(z)=\frac{z^3+8i}{z-2i}$, $z\neq 2i$

Δ1. Να δειχθεί ότι $f(z)= z^2+2iz-4$.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε το $|f(1+i)|$

Μονάδες 6

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(z)= |z^2|+2iz-4$

Μονάδες 7

Δ4. Αν $|z|=1$, να δειχθεί ότι οι εικόνες του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο δεν μπορεί να είναι εξωτερικά σημεία του κύκλου με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=7$.

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ