

**ΤΑΞΗ: Γ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Πότε δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες;

**Μονάδες 5**

**A2.** Να αποδείξετε ότι:  $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$  όπου  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

**Μονάδες 10**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στη κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν  $f(x) = a^x$ , και  $0 < a < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ .

**β.** Αν ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε πάντοτε ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

**γ.** Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .

**δ.** Αν  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

**ε.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta)$  τότε η  $f$  παίρνει πάντα ελάχιστη τιμή.

**Μονάδες 10****ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$  οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

**B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  **Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

**Μονάδες 4**

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$

**Μονάδες 8**

**B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $x^2 < f(x) < x^2 + 1$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  τέμνει την ευθεία  $\varepsilon: y=2x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ .

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα να δείξετε ότι:

**i.** Η συνάρτηση  $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1$  είναι γνησίως φθίνουσα.

**Μονάδες 6**

**ii.** Η εξίσωση  $e^x + f(x) = e^x f(x)$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, 2)$ .

**Μονάδες 8**

**iii.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f(\frac{1}{x}) + \ln x]$ .

**Μονάδες 4**

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x + x$ .

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$ .

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να δείξετε ότι:  $f^{-1}(1+e) = e$  και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση  $f^{-1}[f(x^2 + x + e) - e] = 1$

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Να δείξετε ότι για κάθε  $k \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $\ln x = k - x$  έχει μοναδική λύση.

**Μονάδες 6**

**Δ5.** Λαμβάνοντας υπόψη ότι η  $f^{-1}$  είναι συνεχής να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f^{-1}(x)$ .

**Μονάδες 4**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**